Математический анализ

Дифференцирование

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей

Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

23.11.2023

1 $f(x) = \operatorname{tg}(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x})$

1.1 Доопределение функции до непрерывности в точке $x_0 = 0$

$f(x_0) = \lim\limits_{x \to 0} f(x_0)$ - определение непрерывности функции в точке, Соответственно, чтобы функция была непрерывной в точке x_0, необходимо, чтобы выполнялось определение непрерывности. Тогда, чтобы дополнить множество значений функции так, чтобы она была непрерывной, мы дополним его значением предела функции в x_0, тогда определение непрерывности фукции в точке будет выполняться

$\lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}(x^3 + x^2 \sin \frac{2}{x}) = \lim\limits_{x \to 0} \operatorname{tg}(0) = 0$

$x^2 \sin \frac{2}{x}$ - стремится к 0 по теореме о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию

Тогда $f(0) = 0$

1.2 Вычисление по определению $f'(0)$

$f'(0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x)}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{tg}(\Delta x^3 + \Delta x^2 \sin \frac{2}{\Delta x})}{\Delta x} (\Delta x^3 + \Delta x^2 \sin \frac{2}{\Delta x}) =$
$= \lim\limits_{\Delta x \to 0} (\Delta x^2 + \Delta x \sin \frac{2}{\Delta x}) = 0$

$\Delta x \sin \frac{2}{\Delta x}$ - стремится к 0 по теореме о произведении бесконечно малой на ограниченную функцию

2

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}, x<-3\\ \\ 1,56\sqrt[3]{(x+2)^2}-1,04x-2,08, x\geq -3\end{cases}$$

2.1 Поиск области определения функции

$$\begin{cases}(x+3)^2\neq 0\\ (x+2)^2\geq 0\end{cases}\quad \begin{cases}x\neq -3 \text{ из определения функции}\\ x\in\mathbb{R}\end{cases}\quad \Rightarrow x\in\mathbb{R}$$

2.2 Исследование функции на чётность, нечётность и периодичность

Функуия чётна $\iff f(x)=f(-x)\ \forall x\in D(f)$
Функуия нечётна $\iff -f(x)=f(-x)\ \forall x\in D(f)$

$$f(-x)=\begin{cases}-\frac{(x-4)^2}{(x-3)^2}, x>3\\ 1,56\sqrt[3]{(x-2)^2}-1,04x-2,08, x\leq -3\end{cases}$$

$$-f(x)=\begin{cases}\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}, x<-3\\ -1,56\sqrt[3]{(x+2)^2}-1,04x-2,08, x\geq -3\end{cases}$$

$f(x)\neq f(-x)\Rightarrow f$ не чётная
$-f(x)\neq f(-x)\Rightarrow f$ не нечётная

$$f-\text{периодична}(T-\text{период}, T\in\mathbb{R})\iff\begin{cases}\forall x\in D(f)\iff x-T\in D(f)\iff x+T\in D(f)\\ \forall x\in D(f)\ f(x)=f(x+T)=f(x-T)\end{cases}$$

$x\in(-\infty;-4)$ f – монотонна $\Rightarrow \forall x_1,x_2\in D(f)\mid x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)\neq f(x_2)\iff f(x_1)-f(x_2)\neq 0$
$x<x+T\Rightarrow f(x)-f(x+T)\neq 0\Rightarrow f(x)\neq f(x+T)\Rightarrow$ функция не периодичная

2.3 Поиск точек пересечения графика функции с координатными осями

$f(0)=1,56\sqrt[3]{(0+2)^2}-1,04\cdot 0-2,08=\sqrt[3]{4}-2,08$ - пересечение с осью ординат
$f(x)=0$ - пересечение с осью ординат, соответсвенно точки пересечения:

$$\left[\begin{array}{c}-\dfrac{(x+4)^2}{(x+3)^2}=0\\ 1,56\sqrt[3]{(x+2)^2}-1,04x-2,08=0\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-4\\ x=\dfrac{11}{8}\end{array}\right.$$

2.4 Исследование функции на непрерывность: нахождение точек разрыва и типа разрыва в них

$f(-3)=1,56\sqrt[3]{(-3+2)^2}-1,04\cdot(-3)-2,08=1,56+3\cdot 1,04-2,08=7,6$
$\lim\limits_{x\to -3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to -3-0}-\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}=\lim\limits_{x\to -3-0}-\frac{(-3-0+4)^2}{(-3+3-0)^2}=-\infty$
неустранимый разрыв второго рода

2.5 Поиск асимптот графика функции

Формула наклонной асимтоты:
$y = kx + b$, где:
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - k(x))$

Для $x \to -\infty$:
$k = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2}}{x} = \frac{-1}{-\infty} = 0$
$b = \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{(x+4)^2}{(x+3)^2} - 0 = -1$
Горизонтальная асимтота $y = -1$

Для $x \to +\infty$:
$k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1,56\sqrt[3]{(x+2)^2} - 1,04x - 2,08}{x} = -1$
$b = \lim\limits_{x\to+\infty} = 1,56\sqrt[3]{(x+2)^2} - 1,04x - 2,08 - 1 = -\infty$
Горизонтальная асимтота не существует

2.6 Поиск промежутков возрастания, убывания и экстремумов функции

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(x+4)(x+3)^2 - 2(x+3)(x+4)^2}{(x+3)^4}, x < -3 \\ \\ 1,56 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} - 1,04, x \geq -3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{2(x+4)(x+3)(x+3-x-4)}{(x+3)^4}, x < -3 \\ \\ 1,56 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} - 1,04, x \geq -3 \end{cases} \begin{cases} \frac{2(x+4)(x+3)}{(x+3)^3}, x < -3 \\ 1,56 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} - 1,04, x \geq -3 \end{cases}$$

Функция возрастает на определённом отрезкке/интервале, если производная больше 0 и убывает, если производная меньше 0

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} \frac{2(x+4)(x+3}{(x+3)^3} > 0 \\ x < -3 \end{cases} \\ &\begin{cases} 1,56 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} - 1,04 > 0 \\ x \geq -3 \end{cases} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} (x+2)^{\frac{1}{3}} > 0 \\ (x+2)^{\frac{1}{3}} < 1 \end{cases} \\ &\begin{cases} \frac{2(x+4)(x+3)}{(x+3)^3} > 0 \\ x < -3 \end{cases} \end{aligned} \right. \qquad \left\{ \begin{aligned} &\begin{cases} x > -2 \\ x < -1 \end{cases} \\ &x \in (-\infty; -4) \end{aligned} \right.$$

Точка -2 это точка подозрительная на экстремум, поскольку в ней не существует производной
Точки максимума: $x = -4; x = -1$
Точки минимума: $x = -2$
Возрастает на $x \in (-\infty; -4)$ и $(-2; -1)$
Убывает на $x \in (-4; -3)$ и $(-3; -2)$ и $(-1; +\infty)$

2.7 Поиск промежутков выпуклости и точек перегиба функции

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{2(x+8)}{(x+3)^3}, x < -3 \\ 1,56 \cdot \frac{2}{3}(x+2)^{-\frac{1}{3}} - 1,04, x \geq -3 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{2(x+3)^3 - (2x+8)\cdot 3(x+3)^2}{(x+3)^6}, x < -3 \\ 1,04 \cdot -\frac{1}{3}(x+2)^{-\frac{4}{3}}, x \geq -3 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{(x+3)^2(2x+6-6x-24)}{(x+3)^6}, x < -3 \\ -\frac{1,04}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}, x \geq -3 \end{cases} = \begin{cases} -\frac{2(2x+9)}{(x+3)^4}, x < -3 \\ -\frac{1,04}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}}, x \geq -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2(2x+9)}{(x+3)^4}, x < -3 \\ x < -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{1{,}04}{3\sqrt[3]{(x+2)^4}} \\ x \geq -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+2<0 \\ \sqrt[3]{x+2}>0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+2>0 \\ \sqrt[3]{x+2}<0 \end{cases} \end{array}\right. \\ x \geq -3 \end{cases} \quad \Rightarrow \varnothing$$

Выпуклая на $(-4,5;-3)$ и $(-3;-2)$ и $(-2;+\infty)$
Вогнутая на $(-\infty;-4,5)$
Точки перегиба: $x=-4,5$

3 $f(x) = (2x+3)e^{4x^2+4x-3}, x_0 = \frac{1}{2}, k = 2n+1$

$\sqsupset f(x) = a(x)g(x),$ где:

$a(x) = 2x+3$

$g(x) = e^{(2x+3)(2x-1)}$

Рассмотрим производные функции f(x) для некоторых порядков:

$f'(x_0) = a'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)a(x_0)$

$f''(x_0) = (a'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)a(x_0))' = a''(x_0)g(x_0) + 2a'(x_0)g'(x_0) + a(x_0)g''(x_0)$

$f'''(x_0) = a'''(x_0)g(x_0) + a''(x_0)g'(x_0) + 2a''(x_0)g'(x_0) + 2a'(x_0)g''(x_0) + a'(x_0)g''(x_0) + a(x_0)g'''(x_0) = a'''(x_0)g(x_0) + 3a''(x_0)g'(x_0) + 3a'(x_0)g''(x_0) + a(x_0)g'''(x_0)$

Теперь нетрудно заметить биномиальную запись производной p-го порядка:

$f^{(p)}(x_0) = \sum_{i=0}^{p} C_p^i a^{(p-i)}(x_0)g^{(i)}(x_0)$

Тогда мы можем вывести формулу Тейлора для общего случая:

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \sum_{j=2}^{k}(\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j) + o((x-x_0)^k)$

Тогда подставим численные значения в формулу и получим (о Боже!):

$f(x) = 4 + 34(x-0.5) + \sum_{j=2}^{2n+1}(\frac{\sum_{i=0}^{j} C_j^i a^{(j-i)}(0.5)g^{(i)}(0.5)}{j!}(x-0.5)^j) + o((x-0.5)^{2n+1}),$ где n - определённая точность значения

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	33.(3)
Гонин Сергей	33.(3)
Темиров Тимур	33.(3)