Математический анализ

Пределы

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей

Группа: M3104

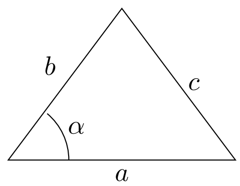
Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

19.10.2023

1 Какой порядок будет иметь приращение площади треугольника по отношению к бесконечно малому приращению одного из его углов?

1.1 Графическая иллюстрация



a, b - длины сторон треугольника, заключающие угол
α - величина угла
S - площадь треугольника
ΔS - приращение площади
$\Delta\alpha$ - приращение угла

1.2 Математическая модель

Формула площади треугольника выглядит так:
$S = 0.5absin(\alpha)$
Представим площадь как функцию от угла:
$S(\alpha) = 0.5absin(\alpha)$

1.3 Аналитическое решение

$\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0} \Delta S = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}(S(\alpha+\Delta\alpha)-S(\alpha)) = \lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}(0.5absin(\alpha+\Delta\alpha)-0.5absin\alpha) = 0.5ab\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}(sin(\alpha+\Delta\alpha)-sin\alpha) = ab\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}(sin\frac{\Delta\alpha}{2}cos(\alpha+\frac{\Delta\alpha}{2}))$

$\lim\limits_{\Delta\alpha\to 0}(\frac{ab}{2}(\frac{sin\frac{\Delta\alpha}{2}cos(\alpha+\frac{\Delta\alpha}{2})}{\frac{\Delta\alpha}{2}})) = 0.5abcos\alpha$

$0.5abcos\alpha = const \Rightarrow$ одного порядка
Ответ: одного порядка.

2 $f(x) = (\frac{4-5x}{1-2x})^{3-x}$

2.1 План решения

1. Найдем приделы функции при $+\infty$ и $-\infty$, для этого приведем функцию к замечательному пределу и воспользуемся им
2. Проанализируем допустимые значения для x
3. Проверим асимптоты: горизонтальные, вертикальные, наклонные
4. Нарисуем график функции с учетом асимптот и допустимых значений x
5. Отменим x_0 в точке где функция достигает своего предела
6. Изобразим δ окрестность
7. Для отмеченной δ окрестности найдем ε окрестность
8. Повторим шаги 5-7 для другого x_0

2.2 Вычисление предела

$f(x) = (\frac{4-5x}{1-2x})^{3-x} = (1 + \frac{3-3x}{1-2x})^{3-x}$

Приведем к замечательному пределу и воспользуемся им:
$(\lim\limits_{x\to+\infty}(1 + \frac{1}{\frac{1-2x}{3-3x}})^{\frac{1-2x}{3-3x}})^{(\frac{3-3x}{1-2x})(3-x)} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}((\frac{3-3x}{1-2x})(3-x))} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty}((1.5+\frac{1.5}{1-2x})(3-x))} = 0$
$(\lim\limits_{x\to-\infty}(1 + \frac{1}{\frac{1-2x}{3-3x}})^{\frac{1-2x}{3-3x}})^{(\frac{3-3x}{1-2x})(3-x)} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}((\frac{3-3x}{1-2x})(3-x))} = e^{\lim\limits_{x\to-\infty}((1.5+\frac{1.5}{1-2x})(3-x))} = +\infty$

2.3 Построение графика функции

2.3.1 Определение предела функции в точке по Коши

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

2.3.2 Определение предела функции на бесконечности по Коши

$\lim\limits_{x\to\infty} = A \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x > \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$

2.3.3 Область определения функции

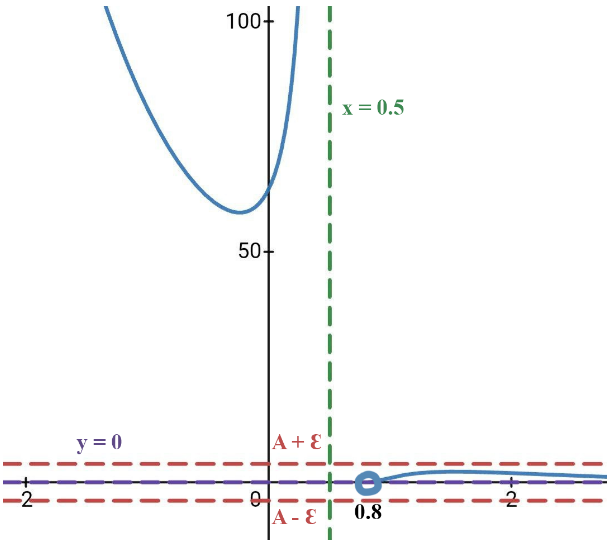
$(\frac{4-5x}{1-2x})^{3-x} = \frac{(\frac{4-5x}{1-2x})^3}{(\frac{4-5x}{1-2x})^x}$

$x \neq 0.5, x \neq 0.8$ - поскольку функция не определена в этих точках
При $0 < x < 1$ получаем дробную степень и $\frac{4-5x}{1-2x} < 0$ при $x \in (0.5; 0.8)$, тогда $x \notin (0.5; 0.8)$
$D(f) = (-\infty; 0.5) \cup (0.8; +\infty)$

2.3.4 Асимптоты

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$, тогда существует вертикальная асимптота в $x_0 : x = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{4-5x}{1-2x})^{3-x}}{\lim\limits_{x\to+\infty} x} = 0$, тогда наклонная асимптота является горизонтальной
$y = 0$ - горизонтальная асимптота

2.3.5 График функции



На графике отсутствует δ окрестность, поскольку по определению предела функции на ∞ такой окрестности не существует

$x = 0.5, y = 0$ - асимптоты

3 $f(x) = \frac{16x^2-9}{8x^2-18x+9}, x_0 = \frac{3}{4}$

3.1 Вычисление предела

$f(x) = \frac{16x^2-9}{8x^2-18x+9}, x_0 = \frac{3}{4}$

Пусть $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -4$

3.2 Доказательство по Гейне

3.2.1 Определение предела функции в точке по Гейне

$$\begin{cases} \forall \{x_n\} \subset D(f) \\ \forall n \geq N \in \mathbb{N} \mid x_n \neq x_0 \Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A \\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = x_0 \end{cases}$$

3.2.2 План доказательства

1. Напишем определение предела функции по Гейне
2. Предположим, что угаданный нами предел является таковым для $f(x)$ для x_0
3. Нужно указать, что если предел $(1)\{f(x_n)\}_{n\to\infty}$ равен угаданному нами пределу, то $\forall \{x_n\} \to x_0$ и наоборот, поскольку в определении по Гейне установлена связь между такими утверждениями
4. Для этого, используя определение предела последовательности через неравенство, выведем равносильнми преобразованиями из предела (1) предел (2), так же используя теорему о двух милиционерах (о сжатой переменной)

3.2.3 Доказательство

$$\begin{cases} \forall \{x_n\} \subset D(f) \\ \forall n \geq N \in \mathbb{N} \mid x_n \neq \frac{3}{4} \Rightarrow \\ \lim\limits_{n \to \infty} x_n = \frac{3}{4} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = -4 \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N \; |f(x_n) + n| < \varepsilon$
При $n \to \infty$ разумно рассматривать малые ε, поэтому наложим на ε ограничения: $\varepsilon \in (0; 1)$ (поскольку при $\varepsilon \geq 1$ определение предела последдовательности теряет смысл)

$-\varepsilon < \frac{16x_n^2-9}{8x_n^2-18x_n+9} + 4 < \varepsilon$

$-\varepsilon < \frac{12x_n-9}{2x_n-3} < \varepsilon$

Первая часть системы:

$\frac{12x_n-9}{2x_n-3} < \varepsilon$

$6(\frac{x_n-0.75}{x_n-1.5}) < \varepsilon$

$\frac{x_n-0.75}{x_n-1.5} < \frac{\varepsilon}{6}$ (при $n \to \infty x_n \to \frac{3}{4} \Rightarrow (x_n - 1.5)$ при $n \geq N$ будет меньше нуля)

$x_n - 0.75 > \frac{\varepsilon}{6}x_n - \frac{\varepsilon}{4}$

$(1 - \frac{\varepsilon}{6})x_n > 0.75 - \frac{\varepsilon}{4}$

$x_n > \frac{0.75 - \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{6}}$

Вторая часть системы:

$\frac{12x_n - 9}{2x_n - 3} > -\varepsilon$

$6(\frac{x_n - 0.75}{x_n - 1.5}) > -\varepsilon$

$\frac{x_n - 0.75}{x_n - 1.5} > -\frac{\varepsilon}{6}$ (при $n \to \infty x_n \to \frac{3}{4} \Rightarrow (x_n - 1.5)$ при $n \geq N$ будет меньше нуля)

$x_n - 0.75 < -\frac{\varepsilon}{6}x_n + \frac{\varepsilon}{4}$

$(1 + \frac{\varepsilon}{6})x_n < 0.75 + \frac{\varepsilon}{4}$

$x_n < \frac{0.75 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 + \frac{\varepsilon}{6}}$

Возврат к системе:

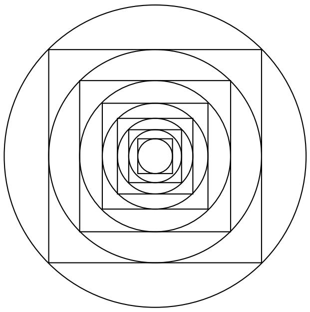
$\frac{0.75 - \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{6}} < x_n < \frac{0.75 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 + \frac{\varepsilon}{6}}$
Заметим, что при $n \to \infty \varepsilon \to 0$, тогда $\{\frac{0.75 - \frac{\varepsilon}{4}}{1 - \frac{\varepsilon}{6}}\} \to 0.75 - 0$, а $\frac{0.75 + \frac{\varepsilon}{4}}{1 + \frac{\varepsilon}{6}} \to 0.75 + 0$, таким образом по теореме о 2-х милиционерах (о сжатой переменной)
$\{x_n\}_{n \to \infty} \to 0.25$
Поскольку все преобразования равносильны, то выполняется определение предела в точки по Гейне
Q.E.D.

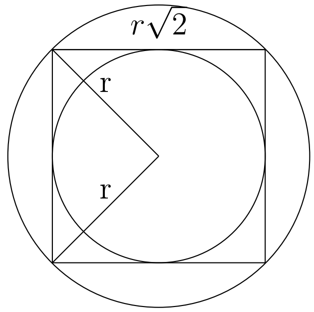
3.3 Иллюстрация

Проиллюстрируем определение предела функции в точке по Гейне для $f(x)$ и подпоследовательности из $D(f)\{0.75 + \frac{1}{n}\}$
$f(0.25 + \frac{1}{n}) = \frac{12n+8}{-3n+4}$
Для $f(0.25 + \frac{1}{n})$ при $n \to \infty$ предел равен -4
$\lim\limits_{n \to \infty} f(0.25 + \frac{1}{n} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{12n+8}{-3n+4} = -\lim\limits_{n \to \infty} \frac{12 - \frac{8}{n}}{3 - \frac{4}{n}} = -4$

4 В круг радиуса r вписан квадрат, в квадрат вписан круг, и так n раз. Найдите предел суммы площадей всех кругов и предел суммы площадей всех квадратов при $n \to \infty$

4.1 Графическая иллюстрация





4.2 Математическая модель

4.2.1 Найдем зависимоть площадей

$S_{\text{круга1}} = \pi r_1^2$

Сторона квадрата 1:
$a_1 = 2(sin(\frac{\pi}{4})r_1) = r_1\sqrt{2}$, тогда
$S_{\text{квадр.1}} = 2r_1^2$

Радиус круга 2:
$r_2 = \frac{r_1\sqrt{2}}{2}$, тогда
$S_{\text{круга2}} = \pi r_2^2 = \frac{\pi r_1^2}{2}$

Сторона квадрата 2:
$a_2 = 2(sin(\frac{\pi}{4})r_2) = r_2\sqrt{2} = r_1$, тогда

$S_{\text{квадр.1}} = r_1^2$

...

Заметим зависимость площади квадрата от площади круга $S_{\text{квадр.}} = \frac{\pi}{2} S_{\text{круга}}$

4.2.2 Основные формулы

Есть круг радиуса r, для того чтобы найти его площадь воспользуемся формулой $S_{\text{круга1}} = \pi r^2$
В него вписан квадрат, диагональ квадрата будет равна 2r, его сторона - $r\sqrt{2}$, тогда площадь квадрата найдём по формуле $S_{\text{квадр.1}} = 2r^2$
Радиус круга вписанного в квадрат будет $\frac{r\sqrt{2}}{2}$, тогда его площадь $S_{\text{круга2}} = \frac{\pi r^2}{2}$
Аналогиччо с площодью первого квадрата, найдем площадь второго по формуле $S_{\text{квадр.2}} = r^2$
И так далее для каждого из n кругов и квадратов, найдем их площади
Для нахождения суммы площадей воспользуемся формулой суммы геометрической прогрессии - $S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1}$

4.3 Аналитическое решение

4.3.1 Найдем суммарную площадь кругов

$S_1 = \pi r^2$

$S_2 = \frac{\pi r^2}{2}$

$S_3 = \frac{\pi r^2}{4}$

$S_4 = \frac{\pi r^2}{8}$

$\dots$
$S_n = \frac{\pi r^2}{2^n}$

$S_{\text{общ.}} = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i = \pi r^2 + \frac{\pi r^2}{2^{i-1}} + \ldots + \frac{\pi r^2}{2^{n-1}} = \pi r^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}$

$\frac{1}{2^{i-1}}$ является геометрической прогрессией, поэтому мы можем воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии, где $q = \frac{1}{2}, b_1 = 1$:
$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

Поскольку количество кругов стремится к ∞, верно следующее:
$\lim\limits_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1} = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{1 - \frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 2$

Тогда сумма площадей кругов $S_{\text{общ.}} = 2\pi r^2$

4.3.2 Найдем суммарную площадь квадратов

$S_{\text{квадр.}} = \frac{2}{\pi} S_{\text{круг}}$ (по 4.2.1), тогда

$S_1 = 2r^2$

$S_2 = \frac{2r^2}{2}$

$S_3 = \frac{2r^2}{4}$

$S_4 = \frac{2r^2}{8}$

$\dots$
$S_n = \frac{2r^2}{2^n}$

$S_{\text{общ.}} = \sum\limits_{i=1}^{n} S_i = 2r^2 + \frac{2r^2}{2^{i-1}} + \ldots + \frac{2r^2}{2^{n-1}} = 2r^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}}$

$\frac{1}{2^{i-1}}$ является геометрической прогрессией, поэтому мы можем воспользоваться формулой суммы геометрической прогрессии, где $q = \frac{1}{2}, b_1 = 1$:
$\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{2^{i-1}} = \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{\frac{1}{2} - 1}$

Поскольку количество квадратов стремится к ∞, верно следующее:

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2^{n-1}}-1}{\frac{1}{2}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{\frac{1}{2}} = 2$

Тогда сумма площадей квадратов $S_{\text{общ.}} = 4r^2$

4.3.3 Общая площадь

Имея сумму площадей кругов $S_{\text{круг.общ.}} = 2\pi r^2$ и сумму площадей квадратов $S_{\text{квадр.общ.}} = 4r^2$, найдем общую сумму площадей фигур
$S_{\text{общ.}} = 2\pi r^2 + 4r^2 = 2r^2(\pi + 2)$

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	33.(3)
Гонин Сергей	33.(3)
Темиров Тимур	33.(3)