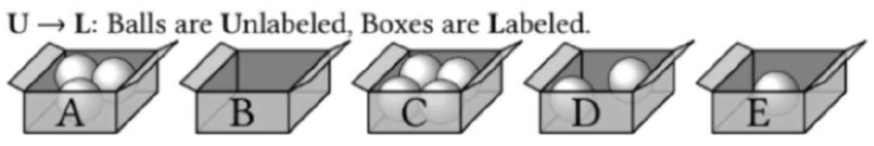
Кучерин Константин M3104

Homework 7 Combinatorics

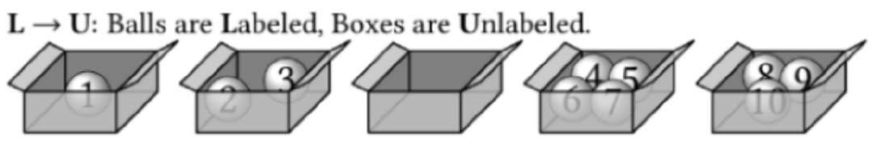
1. One of the classical combinatorial problems is counting the number of arrangements of n balls into k boxes. There are at least 12 variations of this problem: four cases (a–d) with three different constraints (1–3). For each problem (case+constraint), derive the corresponding generic formula. Additionally, pick several representative values for n and k and use your derived formulae to find the numbers of arrangements. Visualize several possible arrangements for the chosen n and k.

Cases with arrangement examples:

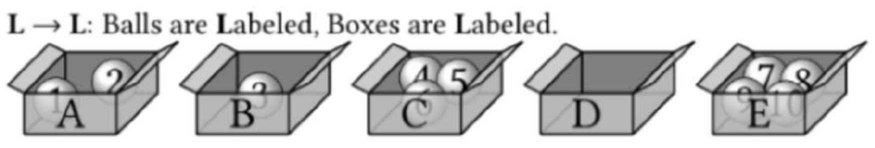
a. **U** → **L**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **L**abeled.



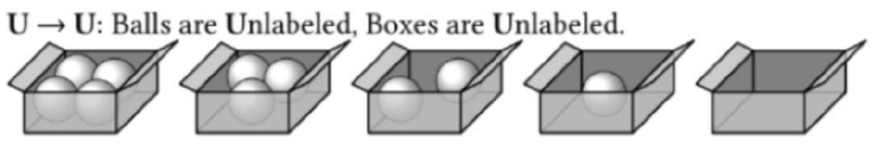
b. **L** → **U**: Balls are **L**abeled, Boxes are **U**nlabeled.



c. **L** → **L**: Balls are **L**abeled, Boxes are **L**abeled.



d. **U** → **U**: Balls are **U**nlabeled, Boxes are **U**nlabeled.



Constraints:

1. ≤ 1 ball per box — *injective* mapping.
2. ≥ 1 ball per box — *surjective* mapping.
3. Arbitrary number of balls per box.

Notes:

* Unlabeled means "indistinguishable", and Labeled means "distinguishable".
* Stirling number of the second kind $s_k^{\mathrm{II}}(n) = \left\{ {n \atop k} \right\} = S(n,k)$ is the number of ways to partition a set of n elements into k non-empty subsets. Use $s_k^{\mathrm{II}}(n)$ notation (or $\left\{ {n \atop k} \right\}$, or $S(n,k)$, to your preference) directly without expanding the closed formula.
* Partition function $p_k(n)$ is the number of ways to partition the integer n into k positive parts, *i.e.* the number of solutions to the following equation: $n = a_1 + \cdots + a_k$, where $a_1 \geq \cdots \geq a_k \geq 1$. Use $p_k(n)$ directly, since the closed-form expression is unknown.

a)

1) Нужно выбрать n из k коробок для шариков

C_k^n

Например: 4 коробки, 2 шарика

$C_4^2 = \frac{4!}{2!\,2!} = 6$ способов

$$\left.\begin{matrix} 0\,0\,1\,1 \\ 0\,1\,0\,1 \\ 1\,0\,0\,1 \\ 1\,0\,1\,0 \\ 1\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0 \end{matrix}\right\} 6$$

2) По 1 шару в каждую коробку, а затем найдём место для остальных

$C_{n-k+k-1}^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}$

Например: 3 к. 5 ш.

$C_4^2 = 6$

$$\left.\begin{matrix} 1\,1\,3 \\ 1\,2\,2 \\ 1\,3\,1 \\ 2\,2\,1 \\ 3\,1\,1 \\ 2\,1\,2 \end{matrix}\right\} 6$$

3) Задача о шарах и перегородках

C_{n+k-1}^{k-1}

Например: 2 к. 3 ш.

$C_4^1 = \frac{4!}{3!\,1!} = 4$

$$\left.\begin{matrix} 0\,3 \\ 1\,2 \\ 2\,1 \\ 3\,0 \end{matrix}\right\} 4$$

b)

1) Нужно дать каждому L ш. свою к. => 1 способ

2) Нужно разложить n L ш. по k непустым к. => это число Стирлинга 2-го р.

$S(n,k) = \left\{ {n \atop k} \right\}$

$S(n,k) = k \cdot S(n-1,k) + S(n-1,k-1)$

$S(n,0) = 0$ при $n>0$; $S(0,k) = 0$ при $k>0$

3) Как в b2, только оставляем k пустых к.

$\sum_{i=0}^{k-1} \left\{ {n \atop k-i} \right\}$

c)

1) Выбираем n к. из k и учитываем перестановки шариков, т.к. они L

$C_k^n \cdot n!$

2) Разбиваем ш. на непустые множества и учитываем перестановки

$\left\{ {n \atop k} \right\} \cdot n!$

3) Каждый шарик можно положить в любую коробку

k^n

d)

1) Т.к. и к. и ш. U существует 1 способ их разложить

2) Пусть у нас есть формула N_k^n — кол-во способов как представить n в виде суммы k натуральных чисел =>

ответ: N_k^n

3) Воспользуемся формулой из d2 добавив x null-шаров тогда

N_k^{n+x}

2. How many different passwords can be formed using the following rules?
    * The password must be exactly 8 characters long.
    * The password must consist only of Latin letters (a-z, A-Z) and Arabic digits (0-9).
    * The password must contain at least 2 digits (0-9) and at least 1 uppercase letter (A-Z).
    * Each character can be used no more than once in the password.

    How long does it take to crack such a password?

a–Z и 0-9 — 62 chars

Тогда паролей по требованиям 1,2,4: $A_{62}^{8} = \frac{62!}{54!}$

Добавим требование 3:

без caps: $A_{36}^{8} = \frac{36!}{28!}$

без digits: $A_{52}^{8} = \frac{52!}{44!}$

with 1 digit: $A_{52}^{7} \cdot 80 = \frac{52!\,80}{45!}$

без caps и digits: $A_{26}^{8} = \frac{26!}{18!}$
(для ф. включений-исключ.)

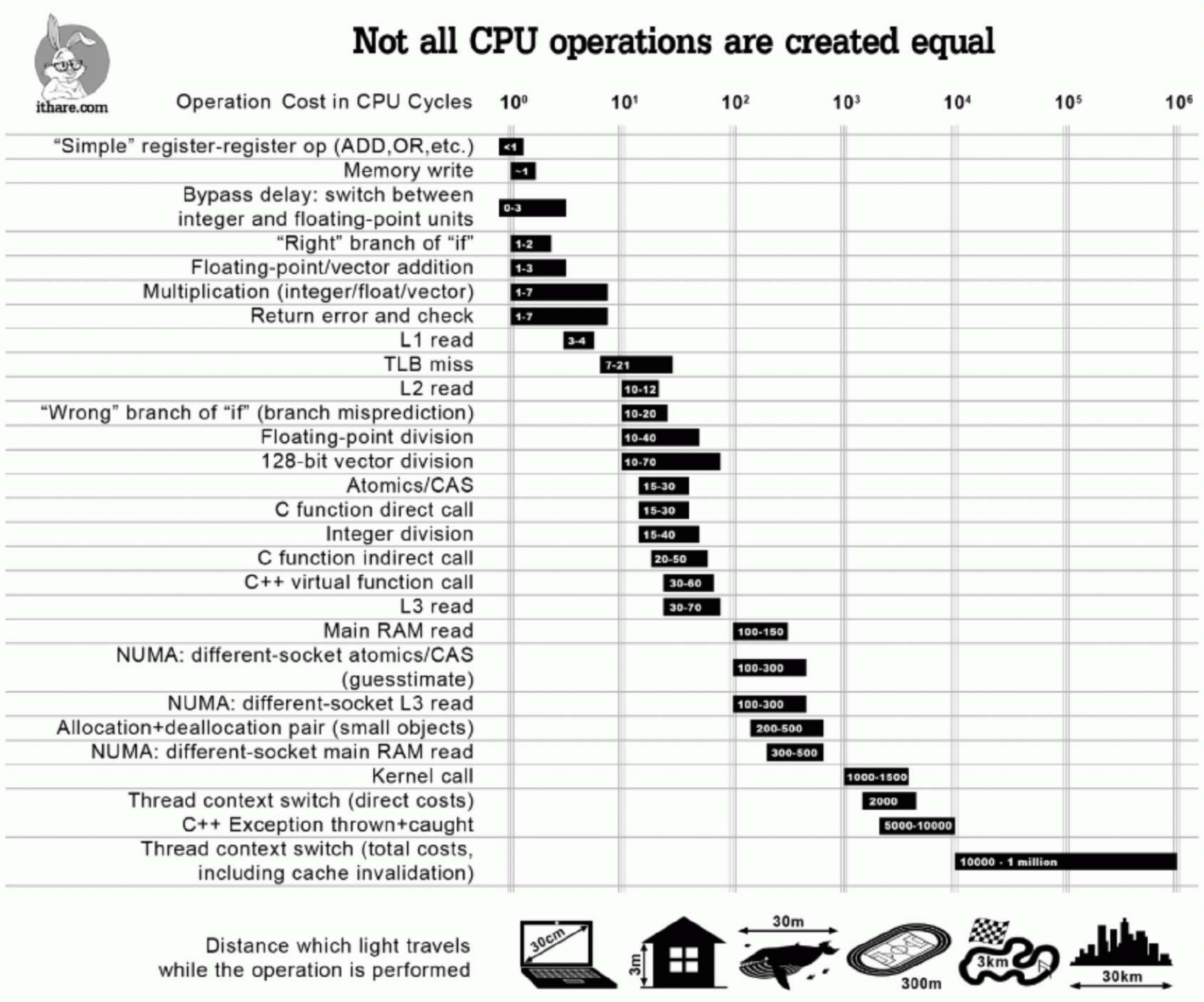
Итог:

$$\frac{62!}{54!} - \frac{36!}{28!} - \frac{52!}{44!} - \frac{52!\,80}{45!} + \frac{26!}{18!} + \frac{26!\,80}{19!} = 51\,149\,739\,513\,600$$

Пусть мы хорошо освоили курс ЭВМ и написали взлом с использованием OpenMP для лучшей производительности

Посчитаем скорость проверки:
пусть мы вызываем ф. генерации, которая работает за 20 тактов + вызов – 30
проверка 2 такта

Тогда 1 пароль мы проверяем 52 такта



Для расчета возьмём мой Ryzen 5800X он будет держать частоту 4ГГц на все ядра (8c 16t). Т.к. мы хорошо освоили курс ЭВМ потоки в нашей программе увеличивают производительность линейно, тогда будет $10^9 \cdot 16$ тактов в с.

Тогда время на взлом: $\frac{51\,149\,739\,513\,600 \cdot 52}{10^9 \cdot 16} \approx 166\,236$ с $\approx 2770{,}6$ м $\approx$

$\approx 46{,}17$ ч

Если заранее хранить все пароли в RAM и читать их в кеш:
300 тактов – чтение RAM $\underbrace{12195048}_{\text{столько паролей поместилось в кеш}}$, и далее каждый пароль 30 тактов на чтение + 2 проверка

Тогда $\frac{\frac{51\,149\,739\,513\,600}{12\,195\,048} \cdot 300 + 51\,149\,739\,513\,600 \cdot 32}{10^9 \cdot 16} \approx 102\,307$ с ≈ 1705 м $\approx$

≈ 28 часов

Если будет использоваться хэширование пароля (честно позаимствовано):

Number of Characters	Numbers Only	Lowercase Letters	Upper and Lowercase Letters	Numbers, Upper and Lowercase Letters	Numbers, Upper and Lowercase Letters, Symbols	Hardware
8	Instantly	6 secs	24 mins	2 hours	4 hours	RTX 2080
8	Instantly	6 secs	13 mins	52 mins	2 hours	RTX 3090
8	Instantly	1 sec	5 mins	22 mins	59 mins	RTX 4090
8	Instantly	Instantly	2 mins	7 mins	19 mins	A100 x8
8	Instantly	Instantly	1 min	5 mins	12 mins	A100 x12
8	Instantly	Instantly	Instantly	Instantly	1 sec	A100 x10,000 (ChatGPT)

Max time required to crack randomly generated 8-character MD5 password hashes of various complexity on different hardware.

Number of Characters	Numbers Only	Lowercase Letters	Upper and Lowercase Letters	Numbers, Upper and Lowercase Letters	Numbers, Upper and Lowercase Letters, Symbols	Hardware
8	2 hours	4 months	92 years	375 years	989 years	RTX 2080
8	17 mins	4 weeks	18 years	72 years	189 years	RTX 3090
8	9 mins	2 weeks	9 years	38 years	99 years	RTX 4090
8	2 mins	2 days	2 years	7 years	17 years	A100 x8
8	1 min	2 days	1 year	4 years	12 years	A100 x12
8	Instantly	3 mins	11 hours	2 days	5 days	A100 x10,000 (ChatGPT)

Max time required to crack randomly generated 8-character bcrypt password hashes set to 32 iterations of various complexity on different hardware.

3. Find the number of different 5-digit numbers using digits 1–9 under the given constraints. For each case, provide examples of numbers that comply and do not comply with the constraints, and derive a generic formula that can be applied to other values of n (total available digits) and k (number of digits in the number). Express the formula using standard combinatorial terms, such as k-combinations C_n^k and k-permutations $P(n, k)$.

(a) Digits *can* be repeated.

(b) Digits *cannot* be repeated.

(c) Digits *can* be repeated and must be written in *non-increasing*[1] order.

(d) Digits *cannot* be repeated and must be written in *strictly increasing* order.

(e) Digits *cannot* be repeated and the sum of the digits must be even.

a) n^k

$9^5 = 59049$

Comply: 12345

not Comply: none

b) $P(n,k) = \frac{n!}{k!}$

$\frac{9!}{4!} = 15120$

Comply: 12345

not Comply: 11111

c) $C^k_{n+k-1} = \frac{(n-k+1)!}{(n-k+1-k)!\,k!}$

$C^5_{9+5-1} = 1287$

Comply: 99988

not Comply: 12345

d) Для 5 разных чисел есть 1 способ расставить их по возрастанию

$C^n_k = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$

$C^5_9 = 126$

Comply: 13579

not Comply: 95532

e) Нужно чётное кол-во нечётных:

2 нечёт и 3 чёт. или 4 нечёт и 1 чёт

$C^2_5 \cdot C^3_4 \cdot 5!$ + $C^4_5 \cdot C^1_4 \cdot 5!$

$4800 + 2400 = 7200$

$$\sum_{i=0}^{n//2} \left(C^{2i+1}_{n//2} \cdot C^{k-2i+1}_{(n+1)//2}\right) \cdot k!$$

Comply: 76431

not Comply: 44287

4. Let n be a positive integer. Prove the following identity using a combinatorial argument:

$$\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k = n \cdot 2^{n-1}$$

Допустим есть задача о нахождении количества n-разрядных чисел, где одна это 0, а остальные цифры это 1 или 2.

Есть 2 пути решения:

1) Выбрать позицию для 0, а другие распределить между 1 и 2 это n * 2^(n-1)

2) Выбрать k позиций для 1 и 2, а затем из оставшихся выбрать для 0 это $\sum_{k=1}^{n} k \cdot C_n^k$

Тогда равенство из условия верное, поскольку мы решаем одну и ту же задачу.

5. Let r, m, n be non-negative integers. Prove the following identity using a combinatorial argument:

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$$

$\binom{m+n}{n}$ — это количество сочетаний без повторений и порядка

Попробуем найти это же другим способом

Для всех k можно выбрать k 1-ых элементов и из $r-k$ выбрать n 2-ых
$0 \le k \le r$

Это $\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$ для каждого k поэтому $\sum_{k=0}^{r}\binom{m}{k}\binom{n}{r-k}$

6. Prove the Generalized Pascal's Formula (for $n \geq 1$ and $k_1, \ldots, k_r \geq 0$ with $k_1 + \cdots + k_r = n$):

$$\binom{n}{k_1, \ldots, k_r} = \sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r}$$

Допустим есть задача о разложении шариков по коробкам так, чтобы в i-ой коробке было ki шариков.
Есть 2 пути решения:
1) Просто в i-ую коробку положить ki шаров, тогда будет $\binom{n}{k_1, \ldots, k_r}$ способов

2) Положить в каждую коробку 1 шар, а затем в i-ую коробку положить ki-1 шаров, тогда будет $\sum_{i=1}^{r} \binom{n-1}{k_1, \ldots, k_i - 1, \ldots, k_r}$ способов

7. Find the coefficient of $x^5 y^7 z^3$ in the expansion of $(x+y+z)^{15}$. k_1, k_2, k_3 $-\,n$

По multinominal theorem:

$\binom{n}{k_1, k_2 \ldots k_m}$ — коэфф. $= \dfrac{n!}{k_1!\,k_2! \ldots k_m!}$

В нашем случае:

$\binom{15}{5,7,3} = \dfrac{15!}{5!\,7!\,3!} = 360\,360$

Проверка Wolfram:

x^15 + 15 x^14 y + 105 x^13 y^2 + 455 x^12 y^3 + 1365 x^11 y^4 + 3003 x^10 y^5 + 5005 x^9 y^6 + 6435 x^8 y^7 + 6435 x^7 y^8 + 5005 x^6 y^9 + 3003 x^5 y^10 + 1365 x^4 y^11 + 455 x^3 y^12 + 105 x^2 y^13 + 15 x y^14 + y^15 + 15 x^14 z + 210 x^13 y z + 1365 x^12 y^2 z + 5460 x^11 y^3 z + 15015 x^10 y^4 z + 30030 x^9 y^5 z + 45045 x^8 y^6 z + 51480 x^7 y^7 z + 45045 x^6 y^8 z + 30030 x^5 y^9 z + 15015 x^4 y^10 z + 5460 x^3 y^11 z + 1365 x^2 y^12 z + 210 x y^13 z + 15 y^14 z + 105 x^13 z^2 + 1365 x^12 y z^2 + 8190 x^11 y^2 z^2 + 30030 x^10 y^3 z^2 + 75075 x^9 y^4 z^2 + 135135 x^8 y^5 z^2 + 180180 x^7 y^6 z^2 + 180180 x^6 y^7 z^2 + 135135 x^5 y^8 z^2 + 75075 x^4 y^9 z^2 + 30030 x^3 y^10 z^2 + 8190 x^2 y^11 z^2 + 1365 x y^12 z^2 + 105 y^13 z^2 + 455 x^12 z^3 + 5460 x^11 y z^3 + 30030 x^10 y^2 z^3 + 100100 x^9 y^3 z^3 + 225225 x^8 y^4 z^3 + 360360 x^7 y^5 z^3 + 420420 x^6 y^6 z^3 + 360360 x^5 y^7 z^3 + 225225 x^4 y^8 z^3 + 100100 x^3 y^9 z^3 + 30030 x^2 y^10 z^3 + 5460 x y^11 z^3 + 455 y^12 z^3 + 1365 x^11 z^4 + 15015 x^10 y z^4 + 75075 x^9 y^2 z^4 + 225225 x^8 y^3 z^4 + 450450 x^7 y^4 z^4 + 630630 x^6 y^5 z^4 + 630630 x^5 y^6 z^4 + 450450 x^4 y^7 z^4 + 225225 x^3 y^8 z^4 + 75075 x^2 y^9 z^4 + 15015 x y^10 z^4 + 1365 y^11 z^4 + 3003 x^10 z^5 + 30030 x^9 y z^5 + 135135 x^8 y^2 z^5 + 360360 x^7 y^3 z^5 + 630630 x^6 y^4 z^5 + 756756 x^5 y^5 z^5 + 630630 x^4 y^6 z^5 + 360360 x^3 y^7 z^5 + 135135 x^2 y^8 z^5 + 30030 x y^9 z^5 + 3003 y^10 z^5 + 5005 x^9 z^6 + 45045 x^8 y z^6 + 180180 x^7 y^2 z^6 + 420420 x^6 y^3 z^6 + 630630 x^5 y^4 z^6 + 630630 x^4 y^5 z^6 + 420420 x^3 y^6 z^6 + 180180 x^2 y^7 z^6 + 45045 x y^8 z^6 + 5005 y^9 z^6 + 6435 x^8 z^7 + 51480 x^7 y z^7 + 180180 x^6 y^2 z^7 + 360360 x^5 y^3 z^7 + 450450 x^4 y^4 z^7 + 360360 x^3 y^5 z^7 + 180180 x^2 y^6 z^7 + 51480 x y^7 z^7 + 6435 y^8 z^7 + 6435 x^7 z^8 + 45045 x^6 y z^8 + 135135 x^5 y^2 z^8 + 225225 x^4 y^3 z^8 + 225225 x^3 y^4 z^8 + 135135 x^2 y^5 z^8 + 45045 x y^6 z^8 + 6435 y^7 z^8 + 5005 x^6 z^9 + 30030 x^5 y z^9 + 75075 x^4 y^2 z^9 + 100100 x^3 y^3 z^9 + 75075 x^2 y^4 z^9 + 30030 x y^5 z^9 + 5005 y^6 z^9 + 3003 x^5 z^10 + 15015 x^4 y z^10 + 30030 x^3 y^2 z^10 + 30030 x^2 y^3 z^10 + 15015 x y^4 z^10 + 3003 y^5 z^10 + 1365 x^4 z^11 + 5460 x^3 y z^11 + 8190 x^2 y^2 z^11 + 5460 x y^3 z^11 + 1365 y^4 z^11 + 455 x^3 z^12 + 1365 x^2 y z^12 + 1365 x y^2 z^12 + 455 y^3 z^12 + 105 x^2 z^13 + 210 x y z^13 + 105 y^2 z^13 + 15 x z^14 + 15 y z^14 + z^15

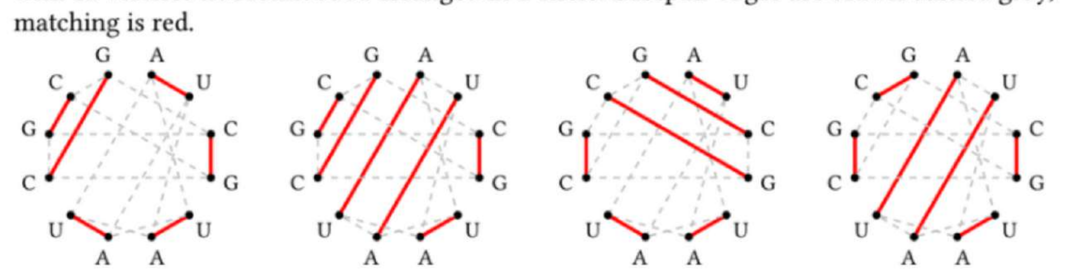
8. Count the number of permutations of the multiset $\Sigma^* = \{2 \cdot \triangle, 3 \cdot \square, 1 \cdot$ 🐈$\}$.

Нам нужна формула $\binom{n}{k_1, \dots k_m}$

n – мощность multiset
K_i – кол-во объектов каждого типа

$$\binom{6}{2,3,1} = \frac{6!}{2!\,3!\,1!} = 60$$

9. A *non-crossing perfect matching*[2] in a graph is a set of pairwise disjoint edges that cover all vertices and do not intersect with each other. For example, consider a graph on $2n$ vertices numbered from 1 to $2n$ and arranged in a circle. Additionally, assume that edges are straight lines. In this case, edges $\{i, j\}$ and $\{a, b\}$ intersect whenever $i < a < j < b$.
   (a) Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in a complete graph K_{2n}.
   (b) Consider a graph on vertices labeled with letters from {A, C, G, U}. Each pair of vertices labeled with A and U is connected with a *basepair edge*. Similarly, C–G pairs are also connected.
   The picture below illustrates some of possible non-crossing perfect matchings in the graph with 12 vertices AUCGUAAUCGCG arranged in a circle. Basepair edges are drawn dashed gray, matching is red.



   Count the number of all possible non-crossing perfect matchings in the graph on 20 vertices arranged in a circle and labeled with CGUAAUUACGGCAUUAGCAU.

a) Допустим у нас есть $f(n)$, которая находит
the number of all possible non-crossing perfect matchings in a complete graph K_{2n}. Чтобы ребро входило в искомое паросоч.,
нужно чтобы оно делило граф пополам, где в каждой половине
чётное кол-во вершин.
Т.к. в K_{2n} $2n$ вершин, в нашем паросочетании n рёбер

Тогда:
$$f(n) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k) \cdot f(n-k-1))$$
– делим на 2 половины

б) Реализуем функцию из а

```python
def f(memory, string, left, right):
    if left >= right:
        return 1
    if (left, right) in memory:
        return memory[(left, right)]
    ans = 0
    for i in range(left + 1, right + 1, 2):
        if edges[string[left]] == string[i]:
            ans += f(memory, string, left + 1, i - 1) * f(memory, string, i + 1, right)
    memory[(left, right)] = ans
    return ans


edges = {
    'A': 'U',
    'U': 'A',
    'C': 'G',
    'G': 'C'
}
memo = {}
s = "CGUAAUUACGGCAUUAGCAU"
print(f(memo, s, 0, len(s) - 1))
```

получим ответ: 21

10. How many integer solutions are there for each given equation?
   (a) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 0$
   (b) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 1$
   (c) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $x_i \geq 5$
   (d) $x_1 + x_2 + x_3 \leq 20$, where $x_i \geq 0$
   (e) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$
   (f) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$
   (g) $x_1 + x_2 + x_3 = 20$, where $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 10$
   (h) $x_1 + x_2 + x_3 = 5$, where $-5 \leq x_i \leq 5$

a) аналогично №1 а3
$$C^{20}_{20+3-1} = \frac{22!}{20!\,2!} = 231$$

b) аналогично №1 а2
$$C^{3-1}_{20-1} = \frac{19!}{17!\,2!} = 171$$

c) Пусть $y_i = x_i - 5$, тогда $(y_1+5)(y_2+5)(y_3+5) = 20$
и $y_1 + y_2 + y_3 = 5$
аналогично a)
$$C^{5}_{5+3-1} = \frac{7!}{2!\,5!} = 21$$

d) Пусть $y = 20 - (x_1 + x_2 + x_3)$, тогда
$x_1 + x_2 + x_3 + y = 20$, где $y \geq 0$
аналогично a)
$$C^{20}_{20+4-1} = \frac{23!}{20!\,3!} = 1771$$

e) $x_3 \geq \left\lceil \frac{20}{3} \right\rceil$
$x_3 \geq 7$, тогда $x_1 + x_2 \leq 13$
аналогично b)
$$C^{3-1}_{13-1} = \frac{12!}{10!\,2!} = 66$$, уберём повторы при $x_1 \neq x_2$: $\frac{(66 - \underset{\text{когда } x_1 = x_2}{6})}{2} = 30$

и повторы при $x_2 = x_3$, а именно $= 7$, $= 8$, $= 9$

Итог: $66 - 30 - 3 = 33$

=>

10. How many integer solutions are there for each given equation?

(a) $x_1+x_2+x_3=20$, where $x_i \geq 0$
(b) $x_1+x_2+x_3=20$, where $x_i \geq 1$
(c) $x_1+x_2+x_3=20$, where $x_i \geq 5$
(d) $x_1+x_2+x_3 \leq 20$, where $x_i \geq 0$
(e) $x_1+x_2+x_3=20$, where $1 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$
(f) $x_1+x_2+x_3=20$, where $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3$
(g) $x_1+x_2+x_3=20$, where $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq 10$
(h) $x_1+x_2+x_3=5$, where $-5 \leq x_i \leq 5$

f) аналогично e) $+ \; x_1 = 0, \; 0 < x_2 \; (+10) \; + \; x_1 = x_2 = 0 \; (+1)$

Итог: $33 + 10 + 1 = 44$

g)

```python
count = 0
for i in range(0, 11):
    for j in range(0, 11):
        for k in range(0, 11):
            if (i + j + k == 20) and (0 <= i <= j <= k <= 10):
                print(i, j, k)
                count += 1
print(count)
```

0 10 10
1 9 10
2 8 10
2 9 9
3 7 10
3 8 9
4 6 10
4 7 9
4 8 8
5 5 10
5 6 9
5 7 8
6 6 8
6 7 7
14

их немного поэтому перебрал

h) Пусть $y_i = x_i + 5$, тогда $(y_1-5)+(y_2-5)+(y_3-5)=5 \Leftrightarrow y_1+y_2+y_3=20$, где $0 \leq y_i \leq 10$

перестановки 2 одинаковых и 1 др.

$3! \cdot 8 + 3 \cdot 6 = 66$

перестановки 3-х одинаковых чисел

11. Consider three dice: one with 4 faces, one with 6 faces, and one with 8 faces. The faces are numbered 1 to 4, 1 to 6, and 1 to 8, respectively. Find the probability of rolling a total sum of 12.

Всего $4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ исходов.

д4	д6	д8	
1	3–6	8–5	— 4 в.
2	2–6	8–4	— 5 в.
3	1–6	8–3	— 6 в.
4	1–6	7–3	— 6 в.

||
21 удачный исход

Вероятность $\frac{21}{192} \approx 0,109$

12. Let $A = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$. Define an *interesting* subset of A as a subset in which no two elements have a difference of 3. Determine the number of interesting subsets of A.

Разделим A на:

$\{1,4,7,10\}$ $\quad$ $\{2,5,8,11\}$ $\quad$ $\{3,6,9,12\}$

Найдём интересные:

$\{\}, \{1\}, \{4\}, \{7\}, \{10\}, \{1,7\}, \{1,10\}, \{4,10\}$

$\{\}, \{2\}, \{5\}, \{8\}, \{11\}, \{2,8\}, \{2,11\}, \{5,11\}$

$\{\}, \{3\}, \{6\}, \{9\}, \{12\}, \{3,9\}, \{3,12\}, \{6,12\}$

Объединение интересных подмножеств наших разделенных подмножеств A будет интересным, тогда

$8^3 = 512$ – способов

13. Find the number of ways to arrange five people of distinct heights in a line such that no three consecutive individuals form a strictly ascending or descending height sequence.

Пусть w[n][asc][desc] – число подходящих способов

Base:

w[2][1][0] = 1

w[2][0][1] = 1

For $n \geq 3$

w[n][1][0] = w[n-1][0][1] + w[n-1][1][0]

w[n][0][1] = w[n-1][1][0] + w[n-1][0][1]

Наш ответ это 2·(w[5][1][0] + w[5][0][1]) = 32

w[3][1][0] = 2

w[4][1][0] = 4

...

w[n][1][0] = 2^{n-2}

14. GLaDOS, the mastermind AI, is testing a new batch of first-year students in one of her infamous test chambers. She assigns each test subject a unique number from 1 to n, and then splits the students into k indistinguishable groups. Furthermore, one student in each group is assigned as the group leader. GLaDOS wants to know how many different ways she can arrange the students into groups and select group leaders, so that the students can navigate through the test chambers without getting lost. She calls this arrangement a "GLaDOS Partition".

For example, consider $n = 7$ students and $k = 3$ groups. Here are three (out of many!) different partitions, with the group leaders underlined: $(\underline{1} \mid 2\underline{5}67 \mid 3\underline{4})$, $(\underline{1} \mid 25\underline{6}7 \mid \underline{3}4)$, and $(\underline{1} \mid 256\underline{7} \mid 3\underline{4})$.

Let the number of GLaDOS Partitions for n students into k groups, where each group has a designated leader, be denoted as $G(n, k)$. Your task is to find a generic formula and/or recurrence relation for $G(n, k)$ and justify it.

Выберем k лидеров — C_n^k

У оставшихся людей есть k лидеров к кому пойти — k^{n-k}

Для каждого из лидеров будут уник. способы разбиения, тогда

$$G(n,k) = C_n^k \cdot k^{n-k}$$