

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Функции нескольких переменных

Выполнили:

Каренин Константин

Темиров Тимур

Гонин Сергей

Малышева Алиса

Группа: М3104

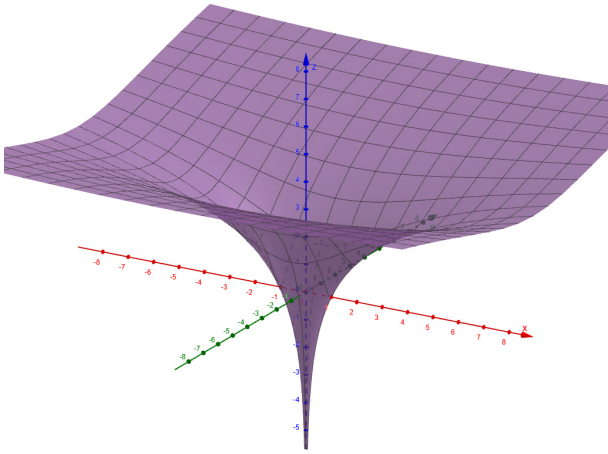
Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО



22.05.2024

- 1 Изобразите в графическом калькуляторе поверхность, заданную уравнением $z = \ln(x^2 + 4y^2)$



1.1 Найдите область определения функции $f(x, y)$

Функция определена тогда и только тогда, когда $x^2 + 4y^2 > 0$

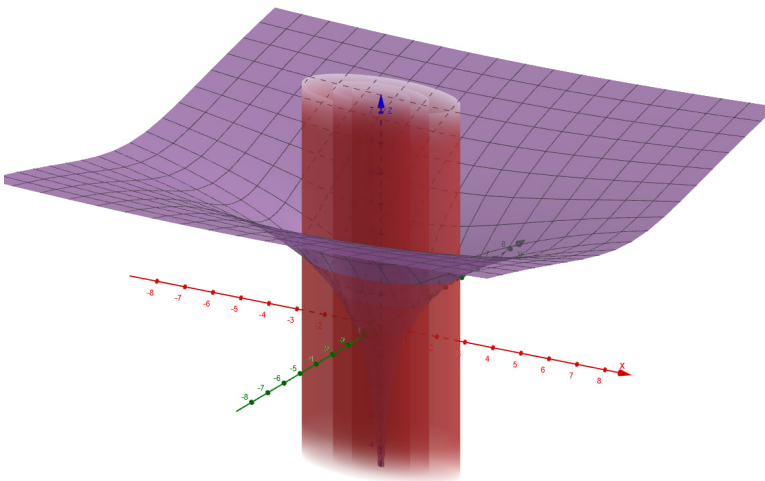
Сумма квадратов положительна, если хотя бы один из них не равен 0. Т.к. $a^2 \geq 0$, для любых $a \in \mathbb{R}$, то нам нужно исключить из области определения единственный случай:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 4y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом $x^2 + 4y^2 > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)$

$$D(f(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$$

- 1.2 Изобразите на одном листе семейство линий уровня $f(x, y) = c$ функции $f(x, y)$. Для построения выберите 3 – 4 значения c . Определите тип построенных кривых. Если различным c соответствуют кривые разных типов, изобразите все типы линий уровня.



Линия уровня $f(x, y)$ определяется уровнем $f(x, y) = c$; $\ln(x^2 + 4y^2) = c$; $x^2 + 4y^2 = e^c$
 Для различных значений c получаем семейство эллипсов $x^2 + 4y^2 = k$, где $k = e^c = \text{const}$
 Выберем несколько значений c и запишем для них уравнения эллипсов при:
 $c = 0 : x^2 + 4y^2 = 1$
 $c = 1 : x^2 + 4y^2 = e$
 $c = 2 : x^2 + 4y^2 = e^2$

1.3 Выберите на поверхности какую-либо точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не являющейся ни особой, ни стационарной, и докажите это по определению.

Точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ не является ни особой, ни стационарной. Рассмотрим точку M_0 для которой $x_0 = 1, y_0 = 0$, тогда $z_0 = f(1, 0) = \ln(1^2 + 4 \cdot 0^2) = \ln 1 = 0$. Докажем по определению, что она не особая и не стационарная. Особая точка ФНП - это точка в которой функция либо не определена, либо не имеет всех частных производных. К таким точка относятся: те в которых функция не определена и те в которых функция разрывна (их предел не существует либо бесконечен), а также те в которых функция не имеет частных производных, либо частные производные не определены или не непрерывны.

$M_0(1, 0, 0) \in D(f(x, y))$ - функция в данной точке определена

Найдём частные производные:

$$f'_x = \frac{2x}{x^2 + 4y^2}$$

$$f'_y = \frac{8y}{x^2 + 4y^2}$$

В точке $(1, 0, 0)$:

$$f'_x(1, 0, 0) = \frac{2 \cdot 1}{1^2 + 4 \cdot 0^2}$$

$$f'_y(1, 0, 0) = \frac{8 \cdot 0}{1^2 + 4 \cdot 0^2}$$

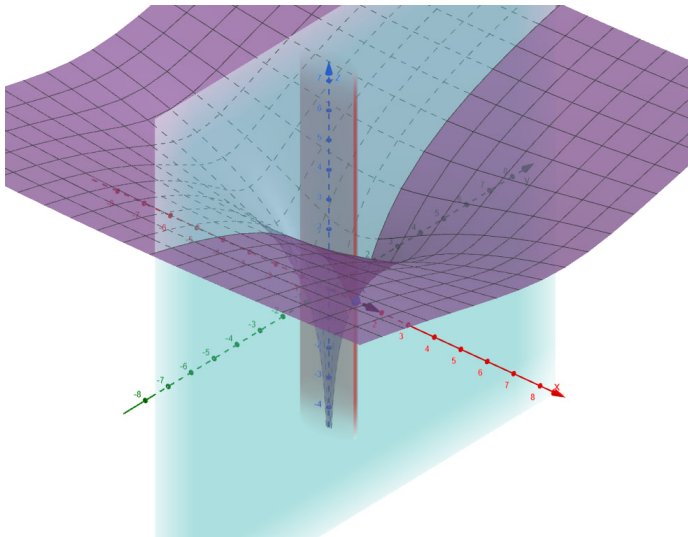
Частные производные существуют $\Rightarrow M_0$ - не особая точка.

Стационарная точка ФНП - это точка в которой все первые частные производные равны 0. То есть в этой точке градиент равен 0. Для нашей M_0 частная производная по x $f'_x \neq 0$, градиент $\nabla f(1, 0) = (2, 0) \neq 0 \Rightarrow M_0$ - не стационарная точка

1.4 Найдите вектор $\vec{m} \in \mathbb{R}^2$, показывающий направление наискорейшего подъёма (спуска) в точке M_0 .

Направление наискорейшего подъёма совпадает с направлением градиента функции $f : \nabla f(1, 0) = (2, 0) \Rightarrow \vec{m} = (2, 0)$

1.5 Изобразите линию уровня $f(x, y) = z_0$ и направление \vec{m} . Проверьте их ортогональность.



Линия уровня, проходящая через M_0 задается уравнением: $x^2 + 4y^2 = 1$ и имеет касательную плоскость $x = 1$ в точке M_0 параллельную оси Oy

Вектор $\vec{m} = (2, 0)$ - параллелен оси Ox : проверим что \vec{m} и направляющий вектор касательной в точке M_0 ортогональны
Произведение $(0, 1) \cdot (2, 0) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ действительно, вектор направления подъема и линия уровня в точке M_0 ортогональны

2 Дано векторное поле $\vec{H} = (y \cos(xy), x \cos(xy))$

2.1 Убедитесь, что данное векторное поле потенциально.

Чтобы показать, что поле потенциально нужно убедиться, что $rot \vec{H} = 0$

$$rot \vec{H} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y \cos(xy) & x \cos(xy) & 0 \end{vmatrix} = \vec{j} \frac{\partial}{\partial z} y \cos(xy) + \vec{k} \frac{\partial}{\partial x} x \cos(xy) - \vec{k} \frac{\partial}{\partial y} y \cos(xy) - 0 - 0 =$$

$$= \vec{k} (\cos(xy) - xy \sin(xy) - \cos(xy) + xy \cos(xy)) = 0 \Rightarrow \vec{H} - \text{потенциально}$$

2.2 Найдите уравнения векторных линий. Изобразите векторные линии на рисунке.

Пусть $l : \vec{r} = \vec{r}(M) \forall M \in \mathbb{R}^3$, где $M(x_0, y_0, z_0)$

l - векторная линия, если $d\vec{r}(dx, dy) \parallel \vec{H}$

То есть $\frac{dx}{y \cos(xy)} = \frac{dy}{x \cos(xy)}$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x \cos(xy) dx = y \cos(xy) dy \end{cases}$$

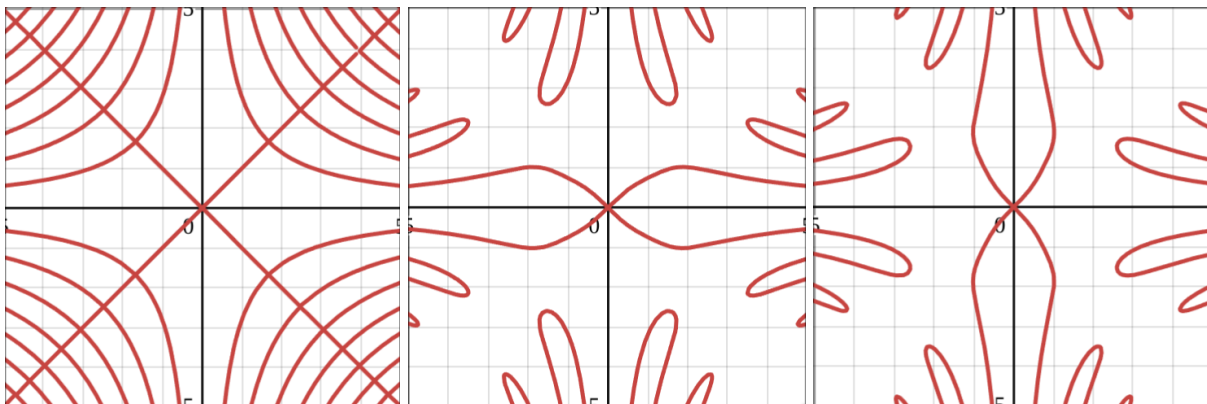
$$\int (x \cos(xy)) dx = \begin{bmatrix} u = x & u = \frac{1}{y} \sin(xy) \\ du = \cos(xy) dx & du = dx \end{bmatrix} = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{y^2} \cos(xy) + C$$

$$\int (y \cos(xy)) dy = \frac{y}{x} \sin(xy) + \frac{1}{x^2} \cos(xy) + C$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{y^2} \cos(xy) = \frac{y}{x} \sin(xy) + \frac{1}{x^2} \cos(x^2) + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ (\frac{x}{y} - \frac{y}{x}) \sin(xy) + (\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2}) \cos(xy) = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ (x^2 - y^2)(\frac{1}{xy} \sin(xy) + \frac{1}{x^2 y^2} \cos(xy)) = C_2 \end{cases}$$



2.3 Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла.

$\exists u$, такое $u(x, y, z)$ - потенциал \vec{F} , если

$$\vec{F} = \overrightarrow{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y \cos(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x \cos(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{интегрируем} \quad \begin{cases} u_x = \int_{x_0}^x y \cos(xy) dx \\ u_y = \int_{y_0}^y x \cos(xy) dy \\ u_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{yz} \cos(xy) \Big|_{x_0}^x \\ u_y = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{xz} \cos(xy) \Big|_{y_0}^y \\ u_z = 0 \end{cases}$$

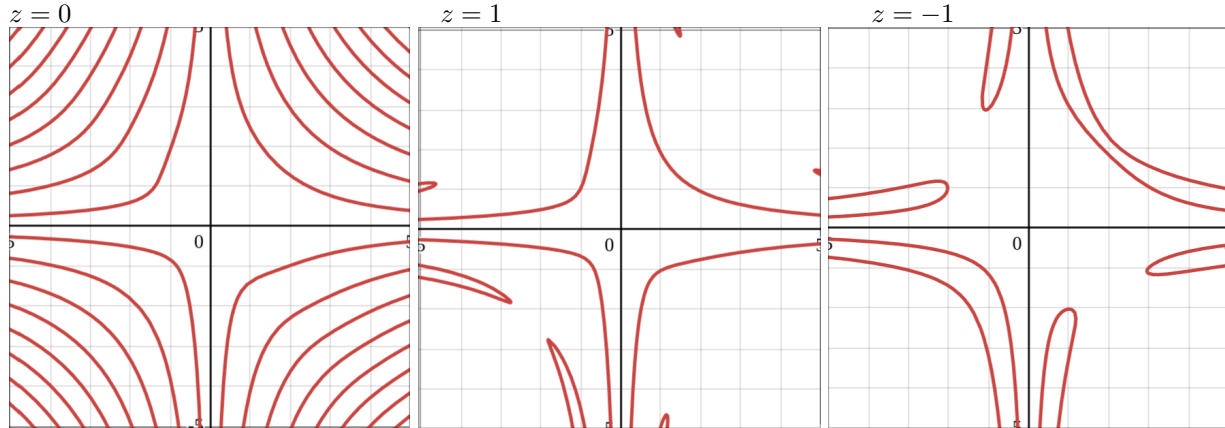
Пусть $M = (2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi})$

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{yz} \cos(xy) - \frac{1}{4\pi} \\ u_y = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{xz} \cos(xy) - \frac{1}{4\pi} \\ u_z = 0 \end{cases}$$

Тогда $u(x, y) = \frac{x}{y} \sin(xy) + \frac{1}{yz} \cos(xy) + \frac{y}{x} \sin(xy) + \frac{1}{xz} \cos(xy) + C$

2.4 Найдите уравнения линий уровня потенциала (эквипотенциальных линий). Изобразите линии уровня потенциала.

Пусть $z = u(x, y), \forall C = 0$



2.5 Докажите ортогональность найденных векторных линий поля и линий уровня потенциала. Проиллюстрируйте ортогональность на графике.

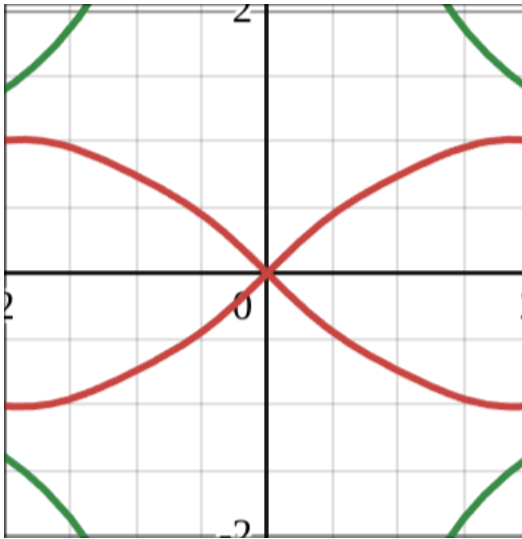
Из уравнения линий уровней:

$$u(x, y) = C \Rightarrow du = 0$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \vec{\text{grad}} u \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\begin{cases} \vec{\text{grad}} u \perp d\vec{r} \\ \vec{\text{grad}} = \vec{H} \end{cases} \Rightarrow \vec{H} \perp d\vec{r}$$

Так как касательный вектор к $u(x, y) = C$ перпендикулярен вектору поля, то векторные линии ортогональны линиям уравнения потенциала.



Если наклонить голову и присмотреться, то можно будет заметить ортогональность

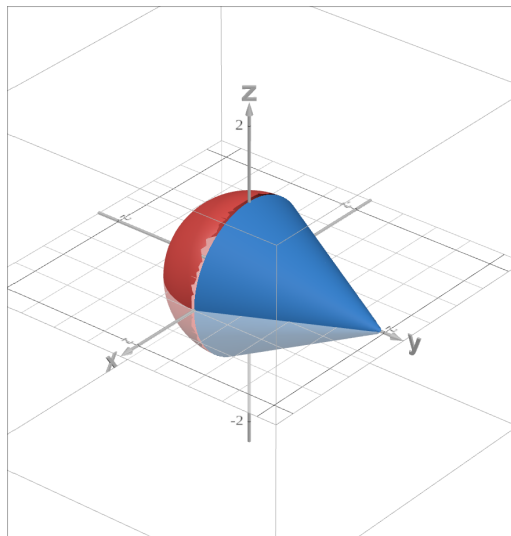
2.6 Выберите какую-либо векторную линию поля и зафиксируйте на ней точки A и B , выбрав для них числовые координаты. Вычислите работу поля вдоль этой линии, используя найденный в пункте 3 потенциал.

Пусть $A(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ $B(\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})$
 $W = u(B) - u(A) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\pi}$ Дж

3 Дано тело $T : y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0$, ограниченное некоторыми поверхностями $y + 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2$; $\vec{a} = \cos(yz)\vec{i} + x\vec{j} + (ey^2 - 5z)\vec{k}$; $\alpha = ABC$; $l = Oy$.

$$T : \begin{cases} y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0 \\ y + 2 \cdot \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \end{cases}$$

3.1 Изобразите тело T на графике в пространстве.



3.2 Вычислите поток поля \vec{a} через боковую поверхность тела T , образованную вращением дуги α вокруг оси l в направлении внешней нормали поверхности тела T .

$$\vec{a} = \cos(yz)\vec{i} + x\vec{j} + (ey^2 - 5z)\vec{k}$$

$$\alpha = ABC$$

$$l = Oy;$$

Посчитаем поток:

$$\Phi = \int \int_S (\vec{a}, d\vec{\sigma})$$

Спроектируем σ на xoz

$$\int \int_S (\vec{a}, d\vec{S}_i) = \int \int_S (\vec{a}, \vec{h}) ds$$

Нормаль сферы на бесконечно малом участке лежит на одной прямой с радиус-вектором от Φ до данного кусочка, соответственно, нормаль считается так:

$$\vec{n} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ (поскольку сфера единичная)}$$

Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского:

$$\int \int_S (\vec{a}, d) = \int \int_V \text{div} \vec{a} dV$$

$$\text{div} \vec{a} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial \cos(yz)}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial (ey^2 - 5z)}{\partial z} = -5$$

$$-5 \int \int_V dV = -10\pi$$

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	25
Гонин Сергей	25
Темиров Тимур	25
Малышева Алиса	25