Специальные разделы высшей математики

# Линейная алгебра

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей
Малышева Алиса

Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

2.04.2024

# 1 Евклидовы пространства функций

## 1.1 Дано пространство многочленов с вещественными коэффициентами, степени не выше третьей, определенных на отрезке $[-1;1]$.

### 1.1.1 Проверьте, что система векторов $B = \{1, t, t^2, t^3\}$ является базисом этого пространства. Ортогонализируйте систему (построенный ортогональный базис обозначьте $B_H$)

Проверим, что данная система линейно независима: $P(t) = C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + C_4 t^3 = 0 \; \forall t \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} P(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \\ P(1) = C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ P(-1) = C_1 - C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ P(2) = C_1 + 2C_2 + 4C_3 + 8C_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ C_1 + C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ -C_2 + C_3 - C_4 = 0 \\ 2C_3 + 6C_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_2 + C_3 + C_4 = 0 \\ 2C_3 + 6C_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_3 = 0 \\ C_4 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B - \text{линейно независимый} \Rightarrow B - \text{базис}$$

Ортогонализируем базис методом Грамма-Шмидта
Пусть $f_1 = 1$
$f_2 = t + \alpha f_1$
$\alpha = -\frac{(t,1)}{2} = -\frac{\int_{-1}^{1} t dt}{2} = 0 \Rightarrow f_2 = t$
$f_3 = t^2 + \beta t + \alpha$
$\beta = -\frac{(t^2,t)}{(t,t)} = -\frac{\int_{-1}^{0} t^3 dt}{\int_{-1}^{1} t^2 dt} = 0$
$\alpha = -\frac{(t^2,1)}{(1,1)} = -\frac{1}{2}\int_{-1}^{1} t^2 dt = -\frac{1}{3}$
$\Rightarrow f_3 = t^2 - \frac{1}{3}$
$f_4 = t^3 + \alpha(t^2 - \frac{1}{3}) + \beta t + \gamma$
$\alpha = -\frac{(t^3, t^2 - \frac{1}{3})}{(t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3})} = -\frac{\int_{-1}^{1}(t^5 - \frac{1}{3}t^3)dt}{\int_{-1}^{1}(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9})dt} = 0$
$\beta = -\frac{(t^3,t)}{(t,t)} = \frac{\int_{-1}^{1} t^4 dt}{\int_{-1}^{1} t^2 dt} = -\frac{3}{5}$
$r = -\frac{(t^3,1)}{(1,1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} t^3 dt}{2} = 0$
$f_4 = t^3 - \frac{3}{5}t$
$B_H = \{1, t, t^2 - \frac{1}{3}, t^3 - \frac{3}{5}t\}$ - ортогональный базис

### 1.1.2 Выпишите первые четыре (при $n = 0, 1, 2, 3$ ) многочлена Лежандра: $L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2-1)n)$, где $\frac{d^n}{dt^n}(y(t))$ - производная $n$-ого порядка функции $y(t)$

$L_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dt^n}((t^2 - 1)^n)$
$L_0(t) = 1$
$L_1(t) = \frac{1}{2}2t = t$
$L_2(t) = \frac{1}{8}\frac{d^2}{dt^2}((t^2 - 1)^2) = \frac{3t^2}{2} - \frac{1}{2}$
$L_3(t) = \frac{1}{48}\frac{d^3}{dt^3}((t^2 - 1)^3) = \frac{5t^3}{2} - \frac{3}{2}t$

### 1.1.3 Найдите координаты полученных многочленов $L_n(t)$ в базисе $B_H$. Сделайте вывод об ортогональности системы векторов $L_n(t)$.

$L_0(t) = (1, 0, 0, 0)_{B_H}$
$L_0(t) = (0, 1, 0, 0)_{B_H}$
$L_0(t) = (0, 0, \frac{3}{2}, 0)_{B_H}$
$L_0(t) = (0, 0, 0, \frac{5}{2})_{B_H}$
Система векторов ортогональна, поскольку скалярные произведения векторов равны 0.

### 1.1.4 Разложите данный многочлен $P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$ по системе векторов $L_n(t)$

$P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$
$P_3(t) = (\frac{1}{3}, 1\frac{3}{5}, -2, 1)_{B_H} = \frac{1}{3}(1,0,0,0)_{B_H} + 1\frac{3}{5}(0,1,0,0)_{B_H} - \frac{4}{3}(0,0,\frac{3}{2},0)_{B_H} + \frac{2}{5}(0,0,0,\frac{5}{2})_{B_H} = \frac{1}{3}L_0(t) + 1\frac{3}{5}L_1(t) - \frac{4}{3}L_2(t) + \frac{2}{5}L_3(t)$
$P_3(t) = (\frac{1}{3}, 1\frac{3}{5}, -\frac{4}{3}, \frac{2}{5})_{L(t)}$

## 1.2 Дано пространство $R$ функций, непрерывных на отрезке $[-\pi;\pi]$ со скалярным произведением $(f,g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$ и длиной вектора $||f|| = \sqrt{(f,f)}$. Тригонометрические многочлены $P_n(t) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos t + b_1 \sin t + ... + a_n \cos nt + b_n \sin nt$, где $a_k, b_k$ - вещественные коэффициенты, образуют подпространство $P$ пространства $R$. Требуется найти многочлен $P_n(t)$ в пространстве $P$, минимально отличающийся от функции $f(t)$ - вектора пространства $R$.

### 1.2.1 Проверьте, что система функций $\{1, \cos t, \sin t, ... \cos nt, \sin nt\}$ является ортогональным базисом подпространства $P$. Нормируйте систему.

Для того, чтобы проверить, что система функций ортогональна, нам необходимо проверить скалярные произведения элементов системы: они должны быть равны 0, чтобы они были ортогональными.
Рассмотрим общие случаи для $\cos mx$ и $\sin kx$ из этих функций можно получить любой элемент системы.
Рассмотрим скалярные произведения обобщённых элементов:
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx \; dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(kx - mx) + \sin(kx + mx)) \; dx = \int_0^{\pi} \sin(kx - mx) \; dx + \int_0^{\pi} \sin(kx + mx) \; dx = 0,$
т.к. $\int_0^{\pi} \sin mx \; dx = 2(\frac{\cos m\pi}{m} - \frac{\cos 0}{m}) = 0$
$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx \; dx = \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) \; dx + \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) = 0,$
т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \; dx = 2(\frac{\sin m\pi}{m} - \frac{\sin 0}{m}) = 0$
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx \; dx = \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) \; dx - \int_0^{\pi} \cos(mx + kx) \; dx = 0$
Скалярные произведения обобщённых элементов равны 0 $\Rightarrow$ скалярные произведения системы равны 0 $\Rightarrow$ элементы системы ортогональны
Чтобы нормировать систему, надо вычислить норму элементов, чтобы эти элементы поделить на собственную "длину получив "единичные"элементы.
Вычислим нормы для обобщённых элементов, чтобы получить нормы для элементов системы:
$||\cos mx|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \; dx} = \sqrt{2\int_0^{\pi} \cos^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} 2\cos^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} (\cos 2mx + 1) \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} dx} = \sqrt{\pi}$
$||\sin mx|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2mx}{2} \; dx} = \sqrt{\pi}$
$||1|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \; dx} = \sqrt{2\pi}$
Теперь мы можем получить нормированную систему:
$N = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, ..., \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\}-$ ортонормированная система

### 1.2.2 Найдите проекции вектора $f(t) = 2t$ на векторы полученного ортонормированного базиса.

Проекция $f(t)$ на $g(t)$ определяется: $Proj_{g(t)} f(t) = \frac{(f(t), g(t)}{||g(t)||} g(t)$
$Proj_1 2x = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x dx}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx}} = 0$
$Proj_{\cos mx} 2x = g(x)\frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos mx dx}{\sqrt{\pi}} = 0$
$Proj_{\sin mx} 2x = \frac{2\int_{-\pi}^{\pi} x \sin x dx}{\sqrt{\pi}} \sin x = -\frac{2\pi \cos \pi m \sin mx}{m}$

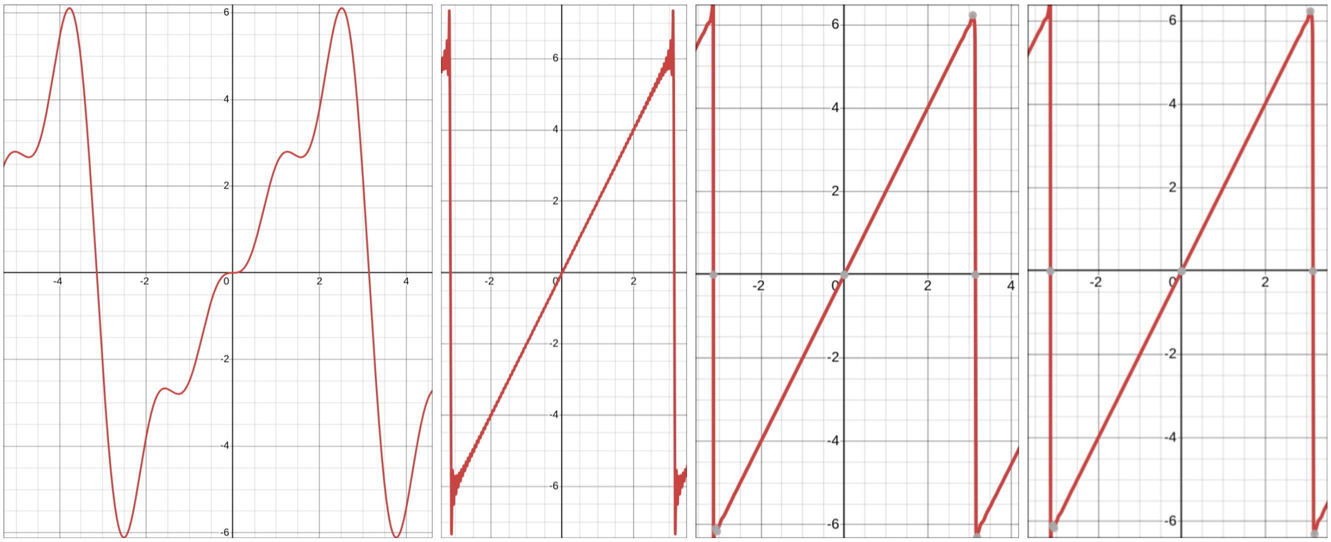
### 1.2.3 Запишите минимально отстоящий многочлен $P_n(t)$ с найденными коэффициентами (тригонометрический многочлен Фурье для данной функции).

$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_u \cos mx + bmsinmx)$ - тригонометрический многочлен Фурье
$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \; dx = 0$
$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos nx \; dx = 0$

$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin nx \, dx = -\frac{4\cos \pi n}{n}$
По-сути $\cos \pi n$ мы можем представить, как $(-1)^n$, т.к. функции $\cos n\pi$ и $(-1)^n$ периодичный, причём для $n$ одной и той же чётности (в частности, для одних и тех же $n$) результат будет одинаковым
$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty}(-\frac{4(-1)^n}{n}\sin t)$

### 1.2.4 Изобразите графики функции $f(t)$ и многочлена Фурье различных порядков $n$

$n = 4$ $n = 100$ $n = 1000$ $n = +\infty$



### 1.2.5 Сделайте вывод о поведении многочлена при росте его порядка.

При росте порядка многочлена уменьшается "отстояние" графика многочлена Фурье от самой функции.

## 2 Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

Дано уравнение поверхности 2-го порядка: $2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0$

### 2.1 Составьте матрицу квадратичной формы и диагонализируйте ее. Запишите канонический базис квадратичной формы.

$F(x, y, z) = 2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2$
Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Из определения собственного вектора $v$ соответствующего собственному значению $\lambda$: $Av = \lambda v$
Тогда: $Av - \lambda v = (A - \lambda E)v = 0$
Уравнение имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $\det(A - \lambda E) = 0$

$$det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 0 \\ -3 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 5\lambda^2 + \lambda - 5$$

$-(\lambda - 1) \cdot (\lambda + 1) \cdot (\lambda - 5) = 0$ Для каждого  найдем его собственные вектора:
1. $\lambda_1 = -1$

$$A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 & | & 0 \\ -3 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ -3 & 3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\widetilde{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2. $\lambda_2 = 1$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ -3 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & -8 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\widetilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. $\lambda_3 = 5$

$$A - \lambda_2 E = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -3 & 0 & | & 0 \\ -3 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -3 & -3 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & -4 & | & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\widetilde{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \widetilde{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \widetilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \qquad \widetilde{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = \frac{\widetilde{v_1}}{||\widetilde{v_1}||} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \frac{\widetilde{v_2}}{||\widetilde{v_2}||} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_3 = \frac{\widetilde{v_3}}{||\widetilde{v_3}||} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{– ортонормированный базис}$$

$\{e_1, e_2, e_3\} = \{i, j, k\}$
$\forall u \in \mathbb{R} \qquad u_e = T_{e \to v} u_v$
Теперь составим из собственных векторов ортогональную матрицу перехода:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = y' \end{cases}$$

$2x^2 - 6xy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0$
$x'^2 - 2x'z' + z'^2 - 3x'^2 + 3z'^2 + x'^2 + 2x'z' + z'^2 + y'^2 - 25 = 0$
$-x'^2 + y'^2 + 5z'^12 = 25$
$\frac{y'^2}{25} + \frac{z^2}{5} - \frac{x'^2}{25} = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{– матрица квадратичной формы}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x = x' - z' \\ \sqrt{2}y = x' + z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \sqrt{2}x + z' \\ \sqrt{2}y = \sqrt{2}x + 2z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} 2z' = \sqrt{2}y - \sqrt{2}x \\ x' = \sqrt{2}x + z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} z' = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = z \end{cases}$$

$\{x', y', z'\}$ - канонический базис

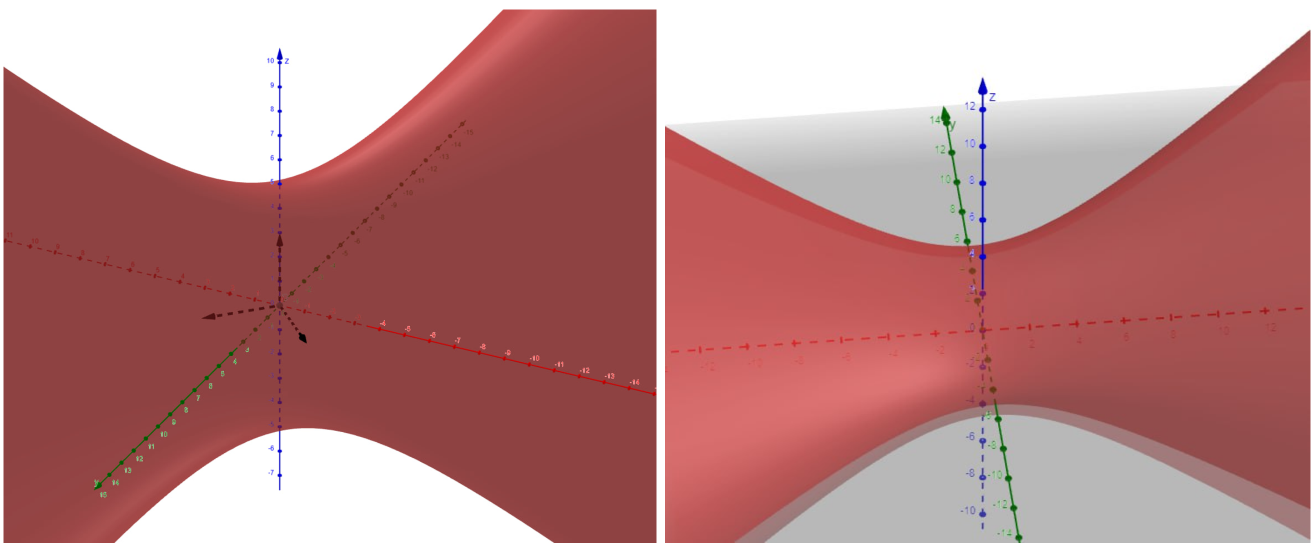
## 2.2 Классифицируйте поверхность по ее каноническому уравнению.

Канонический вид данного выражения:
$\frac{y'^2}{25} + \frac{z^2}{5} - \frac{x'^2}{25} = 1$ - однополосный гиперболоид

## 2.3 Определите, каким преобразованием пространства поверхность была приведена к главным осям.

Если мы посмотри на матрицу преобразования: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ То можем заметить, что у нас происходили измения координат, по всем осям, кроме $y$ и данная матрица, является матрицей поворота, причём поворот выполняется относительно оси $Oz$ на угол $\frac{-\pi}{4}$ и относительно оси $Ox$ на $\frac{\pi}{2}$
Значит мы можем сказать, что преобразованием является поворот.

## 2.4 Изобразите график уравнения в исходной системе координат. Укажите на графике оси исходной и приведённой систем координат.



Первая картинка демонстрирует однополостный гиперболоид в исходном базисе а также новый базис, в котором уравнение однополостного гиперболоида принимает канонический вид. На второй картинке демонстрируется однополостный гиперболоид в новом базисе, в котором уравнение однополостного гиперболоида принимает канонический вид. Исходя из вида графиков мы можем сделать вывод, что в найденном базисе уравнение однополостного гиперболоида принимает канонический вид.

# 3 Линейный оператор и спектральный анализ

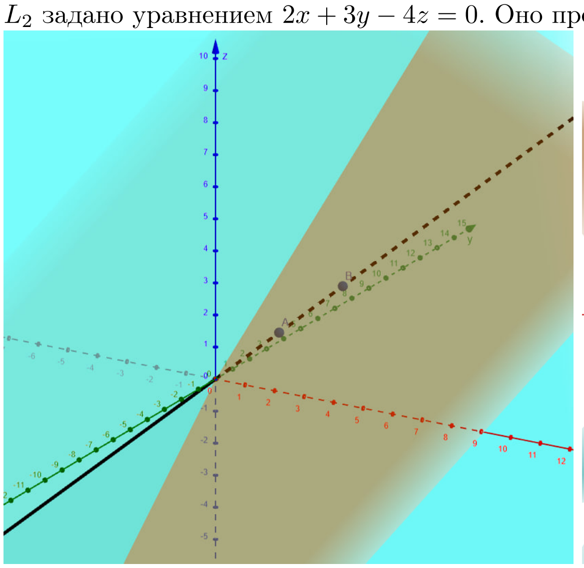
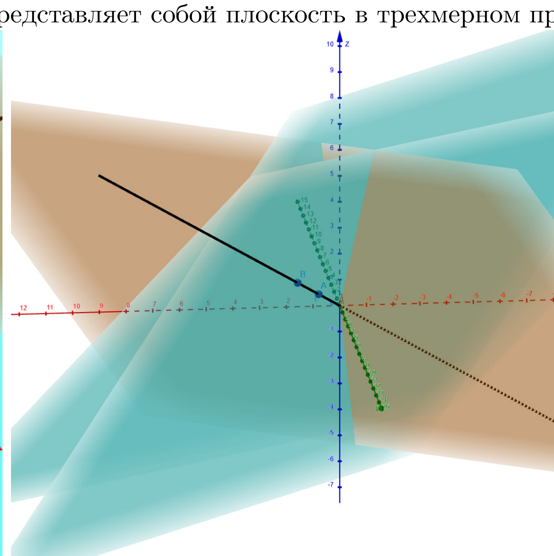
## 3.1 Дано пространство геометрических векторов $\mathbb{R}$, его подпространства $L_1$ и $L_2$ и линейный оператор $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

### 3.1.1 Изобразите на графике подпространства $L_1$ и $L_2$.

Изобразим подпространства $L_1$ и $L_2$ на графике. Подпространства представляют собой плоскости в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$ $L_1$ определяется системой уравнений: $x - y + z = 0$ и $2x - 3y + 4z = 0$ и представляет собой пересечение 2 пересекающихся плоскостей в трехмерном пространстве $R_3$, то есть прямую. Найдем ее уравнение:

$$\begin{cases} \text{x-y+z=0} \\ \text{2x-3y+4z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{y = x+z} \\ \text{2x-3x-3z+4z=0} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{y=x+z} \\ \text{x=z} \end{cases} \quad \begin{cases} \text{y=2z} \\ \text{x=z} \end{cases}$$

пусть $z = t$, тогда $x = t$, $y = 2t$;
Получили направляющий вектор прямой $L_1$ $(1, 2, 1)$, также прямая проходит через точку $(0, 0, 0)$
Тогда уравнение прямой имеет вид:
$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$
$L_2$ задано уравнением $2x + 3y - 4z = 0$. Оно представляет собой плоскость в трехмерном пространстве.

### 3.1.2 Методами аналитической геометрии составьте формулу для линейного оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - произвольная точка пространства $\mathbb{R}^3$.
$L_3$ - подпространство, параллельное $L_2$, $L_3 \bigcap L_1 = M_1, M_1(x_1, y_1, z_1)$.
Составим формулу для линейного оператора A - оператора проектирования пространства $\mathbb{R}^3$ на подпространство $L_1$ параллельно $L_2$: $A(M_0) = M_1$
Уравнение плоскости $L_3 || L_2 : 2(x - x_0) + 3(y - y_0) - 4(z - z_0) = 0$
$2x + 3y - 4z = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0$
Получаем систему нахождения координат $M_1(x_1, y_1, z_1)$.

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \ (1) \\ 2x - 3y + 4z = 0 \ (2) \\ 2x - 3y + 4z = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0 \ (3) \end{cases}$$

Пусть $z = t$, тогда из (1) $x - y + t = 0 => x = y - t$
Из (2): $2(y - t) - 3y + 4t = 0$
$2y - 2t - 3y + 4t = 0$
$-y + 2t = 0$
$y = 2t$
Подставим $y = 2t$ в $x = y - t : x = 2t - t = t$

Координаты точки $M_1$ имеют вид $(x_1, y_1, z_1) = (t, 2t, t)$
Теперь выразим $t$ через $x_0, y_0, z_0$
Подставим координаты $M_1$ в уравнение $2x + 3y - 4z = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0$
$2t + 3(2t) - 4t = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0$
$2t + 6t - 4t = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0$
$4t = 2x_0 + 3y_0 - 4z_0$
$t = \frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4}$
Тогда формула линейного оператора $A$ имеет вид:
$A(M_0) = (x_1, y_1, z_1) = (\frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4}, 2 \cdot \frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4}, \frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4})$
$A(x_0, y_0, z_0) = (\frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4}, \frac{2x_0+3y_0-4z_0}{2}, \frac{2x_0+3y_0-4z_0}{4})$

### 3.1.3 Составьте его матрицу в базисе $\{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\}$ пространства $\mathbb{R}^3$

$A(\overrightarrow{i}) = A(1,0,0) = (\frac{2*1+3*0-4*0}{4}, \frac{2*1+3*0-4*0}{2}, \frac{2*1+3*0-4*0}{4}) = (\frac{2}{4}, \frac{2}{2}, \frac{2}{4}) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$
$A(\overrightarrow{j}) = A(0,1,0) = (\frac{2*0+3*1-4*0}{4}, \frac{2*0+3*1-4*0}{2}, \frac{2*0+3*1-4*0}{4}) = (\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$
$A(\overrightarrow{k}) = A(0,0,1) = (\frac{2*0+3*0-4*1}{4}, \frac{2*0+3*0-4*1}{2}, \frac{2*0+3*0-4*1}{4}) = (-\frac{4}{4}, -\frac{4}{2}, -\frac{4}{4}) = (-1, -2, -1)$
Матрица линейного оператора $A$ в базисе $\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}$ имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

### 3.1.4 Решите задачу о диагонализации полученной матрицы методом спектрального анализа.

Для начала найдем собственные числа оператора. Для этого решим уравнение $det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} - \lambda & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(\frac{1}{2} - \lambda)(\frac{3}{2} - \lambda)(-1 - \lambda) + \frac{3}{4}(-2)\frac{1}{2} + (-1) \cdot 1 \cdot \frac{3}{4} - (\frac{1}{2}(\frac{3}{2} - \lambda)(-1) + \frac{3}{4}(-2)(\frac{1}{2} - \lambda) + (-1 - \lambda) \cdot 1 \cdot \frac{3}{4}) = 0$

$(\frac{3}{4} - 2\lambda + \lambda^2)(-1 - \lambda) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - (-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda - \frac{3}{4} - \frac{3}{4}\lambda) = 0$

$-\frac{3}{4} - \frac{3}{4}\lambda + 2\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^2 - \lambda^3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - (-\frac{9}{4} + \frac{5}{4}\lambda) = 0$

$\lambda^2 - \lambda^3 = 0$

$\lambda^2(1 - \lambda) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \lambda^2 = 0 \\ 1 - \lambda = 0 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \lambda = 0 \\ \lambda = 1 \end{array}\right.$
Составим матрицу с полученными $\lambda_{1,2} = 0, \lambda_3 = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём собственные векторы. $\lambda_{1,2} = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Получим

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 \end{cases} \quad => \begin{cases} x_1 = a_1, a_1 \in \mathbb{R} \\ x_2 = a_2, a_2 \in \mathbb{R} \\ x_3 = \frac{1}{2}a_1 + \frac{3}{4}a_2 \end{cases}$$

Пусть $a_1 = 1, a_2 = 0$, тогда $x_3 = \frac{1}{2}$. Получим собственный вектор $\overrightarrow{b_1}(1, 0, \frac{1}{2})$
при $a_1 = 0, a_2 = 1$, получаем $x_3 = \frac{3}{4}$ и собственный вектор $\overrightarrow{b_2}(0, 1, \frac{3}{4})$
2. $\lambda_3 = 1$
$A - \lambda E = 0$

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \mid 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -2 \mid 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -2 \mid 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \mid 0 \\ 0 & 2 & -4 \mid 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -3 \mid 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \mid 0 \\ 0 & 2 & -4 \mid 0 \\ 0 & 0 & 0 \mid 0 \end{pmatrix}$$

Получим систему

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 3x_3 - 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases}$$

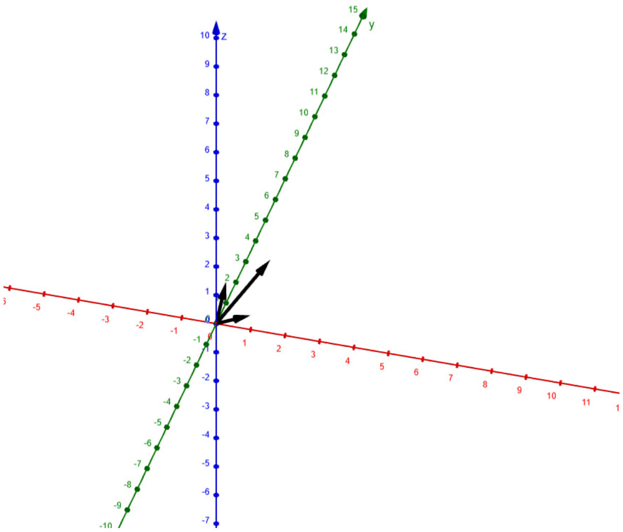
$$\begin{cases} x_1 = x_3 \text{ Пусть, } x_3 = a, a \in R\text{, тогда } x_1 = a, x_2 = 2a \\ x_2 = 2x_3 \text{ При } a = 1 \text{ получим собственный вектор } \overrightarrow{b_3}(1, 2, 1) \end{cases}$$

Найдем базис, в котором матрица линейного оператора $A$ имеет диагональный вид.
Пусть этот базис $E = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$
$\overrightarrow{e_1} = 1(1, 0, 0) + \frac{1}{2}(0, 0, 1) = (1, 0, \frac{1}{2})$

$\overrightarrow{e_2} = 1(0, 1, 0) + \frac{3}{4}(0, 0, 1) = (0, 1, \frac{3}{4})$

$\overrightarrow{e_3} = 1(1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 1(0, 0, 1) = (1, 2, 1)$

### 3.1.5 На построенном ранее графике изобразите базис, в котором матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ имеет диагональный вид. Объясните его смысл.



Базис в котором матрица оператора имеет диагональный вид, содержит на главной диагонали собственные числа этого оператора и состоит из его собственных векторов.

## 3.2 Дано пространство функций $L$, отображение $\mathcal{A}L \to L$ и вектор $p(t) \in L$

### 3.2.1 Выберите базис $L$ и докажите что это базис

Для того чтобы выбрать базис в пространстве многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами, нужно найти три линейно независимых многочлена, которые образуют базис этого пространства.
Давайте рассмотрим многочлены, которые представлены в данной задаче:
$f_1(t) = 1$
$f_2(t) = t$
$f_3(t) = t^2$
Проверим, являются ли такая система линейно независимой:
Предположим, что существуют такие константы $c_1$, $c_2$, и $c_3$, хотя бы одна из которых не равна нулю, такие что:
$c_1 \cdot f_1(t) + c_2 \cdot f_2(t) + c_3 \cdot f_3(t) = 0$
тогда $c_1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot t^2 = 0$
Это равенство должно выполняться для всех значений $t$. Рассмотрим несколько значений $t$:
При $t = 0$: $c_1 = 0$
При $t = 1$: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$
При $t = -1$: $c_1 - c_2 + c_3 = 0$
Теперь решим эту систему уравнений:
Из первого уравнения $c_1 = 0$, а затем, подставив $c_1 = 0$ во второе и третье уравнения, получаем $c_2 = c_3 = 0$.
Таким образом, многочлены $f_1(t) = 1$, $f_2(t) = t$ и $f_3(t) = t^2$ являются линейно независимыми.
Таким образом, они образуют базис пространства многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами.

### 3.2.2 Убедитесь, что отображение $\mathcal{A}$ является линейным (оператором).

Чтобы убедиться, что отображение A является линейным оператором, нужно проверить два условия:
1. Аддитивность:
Пусть f(t) и g(t) - произвольные многочлены степени не выше второй.
Тогда:
$A(f+g) = (f+g)'' - 3(f+g)' + (f+g) = f'' + g'' - 3f' - 3g' + f + g = (f'' - 3f' + f) + (g'' - 3g' + g) = A(f) + A(g)$
- выполняется
2. Гомогенность:

Пусть f(t) - произвольный многочлен степени не выше второй, $a \in R$ - произвольное число. Тогда:
$A(af) = (af)'' - 3(af)' + af = a \cdot f'' - 3 \cdot a \cdot f' + a \cdot f = a(f'' - 3f' + f) = a \cdot A(f)$ - выполняется
Таким образом, отображение A является линейным оператором.

### 3.2.3 Найдите матрицу оператора $\mathcal{A}$ в выбранном базисе и его ранг.

Чтобы найти матрицу оператора $A$ в выбранном базисе, мы должны вычислить образы базисных векторов под действием оператора $A$ и представить эти образы в координатном виде относительно выбранного базиса.
1. Образ многочлена 1 под действием $A$:
$A(1) = 1'' - 3 \cdot 1' + 1 = 1$
2. Образ многочлена t под действием $A$:
$A(t) = t'' - 3 \cdot t' + t = -3 + t$
3. Образ многочлена $t^2$ под действием $A$:
$A(t^2) = (t^2)'' - 3 \cdot (t^2)' + t^2 = 2t‘ - 6t + t^2 = 2 - 6t + t^2$
Теперь представим каждый из этих образов в виде линейной комбинации базисных элементов 1, $t$ и $t^2$:
1. Образ многочлена 1:
$0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Rightarrow (1, 0, 0)$
2. Образ многочлена $t$:
$-3 + t = -3 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Rightarrow (-3, 1, 0)$
3. Образ многочлена $t^2$:
$2 - 6t + t^2 = 2 \cdot 1 - 6 \cdot t + 1 \cdot t^2 \Rightarrow (2, -6, 1)$
Теперь мы можем записать эти коэффициенты в матрицу, где каждый столбец представляет координаты образа соответствующего базисного вектора в выбранном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это и есть матрица оператора $A$ в выбранном базисе.
Чтобы найти ранг матрицы, заметим что она уже имеет ступенчатый вид, посчитаем количество ненулевых строк. Их две, поэтому ранг матрицы оператора $A$ равен 2.

### 3.2.4 Найдите размерности ядра и образа оператора $\mathcal{A}$

Чтобы найти размерность ядра, мы должны решить уравнение $Af = 0$, то есть найти все многочлены $f(t)$, для которых $Af = 0$.
$f'' - 3f' + f = 0$
$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$(a \cdot t^2 + b \cdot t + c)'' + (a \cdot t^2 + b \cdot t + c)' + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$(2a \cdot t + b)' + 2a \cdot t + b + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$2a + 2a \cdot t + b + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$a \cdot t^2 + (2a + b)t + (2a + b + c) = 0$
Получили систему:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$KerA = 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0 = (0, 0, 0)$
Размерность $Ker\ A$ равна 1.
Теперь чтобы найти размерность образа $Im\ A$ воспользуемся теоремой о размерностях ядра и образа:
Сумма размерностей ядра и образа любого линейного отображения
$A : V \to W$ равна размерности пространства прообразов:
$dim\ ker\ A + dim\ im\ A = dim\ V$
в нашем случае $dim\ Ker\ A = 1$, $dim\ L = 3$ (так как $L$ пространство многочленов не выше 2 степени)
Тогда $dim\ Im\ A = dim\ L - dim\ Ker\ A = 3 - 1 = 2$

### 3.2.5 Найдите собственные числа и векторы оператора. Определите размерность пространства собственных векторов и сделайте вывод о диагонализируемости матрицы оператора.

Прежде всего найдем собственные числа оператора. Для этого решим уравнение $det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3 + 3 \cdot \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$
$-(\lambda - 1)^3 = 0$
$\lambda = 1$ - собственное число Найдем собственный вектор соответствующий $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 2 \\ 0 & 1-1 & -6 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -6 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда общее решение: $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$
пусть $x_1 = 1$, тогда $v = (1, 0, 0)^T$ - собственный вектор
Размерность пространства собственных векторов равна количеству линейно независимых собственных векторов. В данном случае, у нас есть только один собственный вектор, так как кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 3, но для этого собственного значения существует только один линейно независимый собственный вектор. Следовательно, размерность пространства собственных векторов равна 1.
Матрицу оператора нельзя диагонализировать, поскольку у нас есть только один линейно независимый собственный вектор для данной матрицы, в то время как для диагонализации нужно три линейно независимых собственных вектора (так как $dim\ L = 3$). Поэтому данную матрицу нельзя диагонализовать.

### 3.2.6 Найдите образ вектора $p(t)$ умножением на матрицу оператора. Проверьте результат дифференцированием.

Найдем образ вектора, соответствующего $p(t)$, с помощью умножения на матрицу оператора $A$:
$p(t) = 3t^2 + t + 2(2, 1, 3)^T$

$$A * p(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$Ap(t) = (5, -17, 3) = 3 * t^2 - 17 * t + 5$
Проверим результат через дифференцирование:
$p(t) = 3t^2 + t + 2$
$p'(t) = 6t + 1$
$p(t)'' = 6$
$Af = f'' - 3f + f = 6 - 3(6t + 1) + 3t^2 + t + 2 = 3t^2 - 17t + 5 \Rightarrow (5, -17, 3)$
Таким образом матрица оператора была найдена верно.

| Участник | Вклад в % |
|---|---|
| Каренин Константин | 25 |
| Гонин Сергей | 25 |
| Темиров Тимур | 25 |
| Малышева Алиса | 25 |