Математический анализ

Интегрирование

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей
Малышева Алиса

Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

2.04.2024

1

$$g(x) = \begin{cases} e^x - e, \ x < 0 \\ \ln{(3x+1)}, \ 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x}, \ x > 0 \end{cases}$$

1.1 Найдите такую непрерывную функцию $f(x)$, что $f'(x) = g(x)$

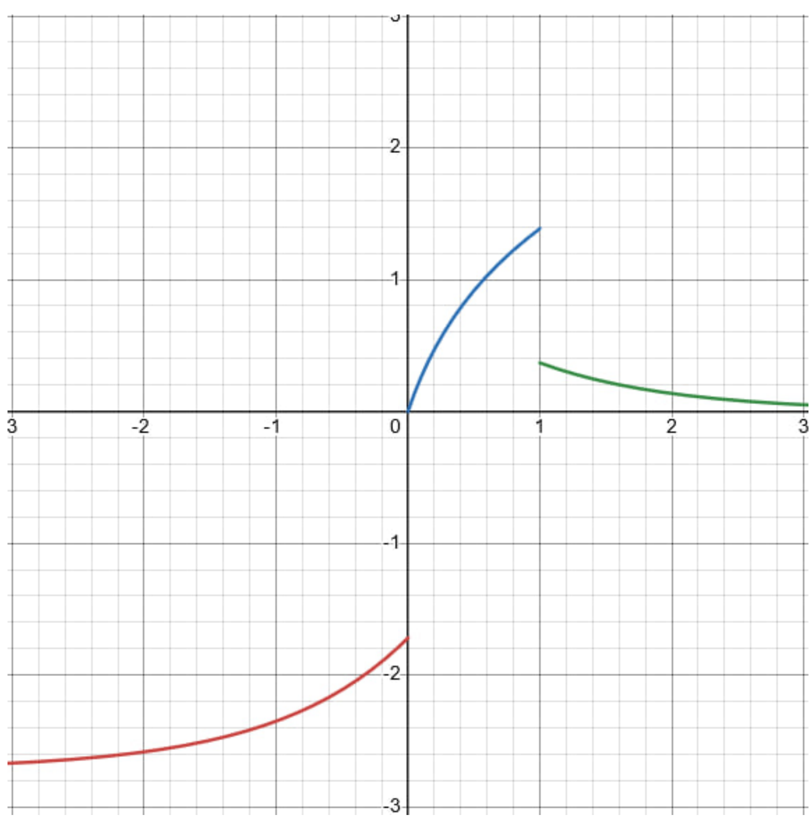
Пусть $f(x)$ - первообразная $g(x)$

$$f(x) = \begin{cases} e^x - ex + C_1, \ x < 0 \\ (x + \frac{1}{3}) \ln{(3x+1)} - (x + \frac{1}{3}) + C_2, \ 0 \leq x \leq 1 \\ -e^{-x} + C_3, \ x > 0 \end{cases}$$

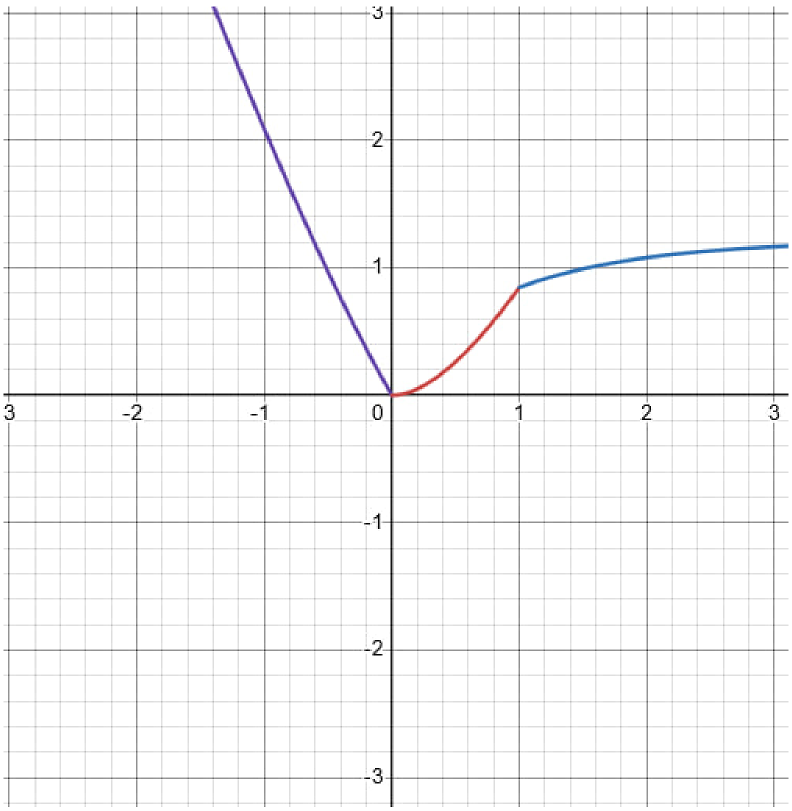
Чтобы $f(x)$ была непрерывна возьмём $C_1 = -1, C_2 = \frac{1}{3}, C_3 = \frac{8}{3}\ln 2 - 1 + \frac{1}{\mathrm{e}}$

1.2 Графики функций

$g(x)$



$f(x)$



1.3 Анализ графиков

График f имеет существенные отличия от g, поскольку в первой части добавляется x при e, во второй изменяется первообразная логорифма, а в третьей график отражается относительно Ox. Графики не имеют определённого вида, поэтому вывод о зависимости сделать невозможно

2

$$I_p = \int_0^3 \frac{px\,dx}{(9-x^2)^{p^2-p-7}}$$

$$\int \frac{px\,dx}{(g-x^2)^{p^2-p-7}} = p\int x(9-x^2)^{-p^2+p+7}\,dx = -\frac{p(9-x^2)^{-p^2+p+8}}{2(-p^2+p+8)} + C$$

Поскольку $f(x) = \frac{px\,dx}{(9-x^2)^{p^2-p-7}}$ неограничена на $[0,3]$, то $\int_0^3 f(x)\,dx$ - несобственный
При выражение=0 знаменатель будет равен единице, тогда:
$p = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$
При $p = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ $\quad I_p$ - собственный
При $p = 0$ $\quad I_p$ - несобственный сходящийся
$p^2 - p - 8 > 0$ $\quad I_p$ - несобственный расходящийся
$p \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{65}}{2}; +\infty)$ $\quad - I_p$ - несобственный расходящийся
$p \in (\frac{1-\sqrt{65}}{2}; \frac{1+\sqrt{65}}{2}]\backslash\{\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}\}$ $\quad - I_p$ - несобственный сходящийся

2.1 Ответ

При $p = \frac{1\pm\sqrt{29}}{2}$ $\quad I_p$ - собственный
$p \in (-\infty; \frac{1-\sqrt{65}}{2}] \cup [\frac{1+\sqrt{65}}{2}; +\infty)$ $\quad - I_p$ - несобственный расходящийся
$p \in (\frac{1-\sqrt{65}}{2}; \frac{1+\sqrt{65}}{2}]\backslash\{\frac{1\pm\sqrt{29}}{2}\}$ $\quad - I_p$ - несобственный сходящийся

3

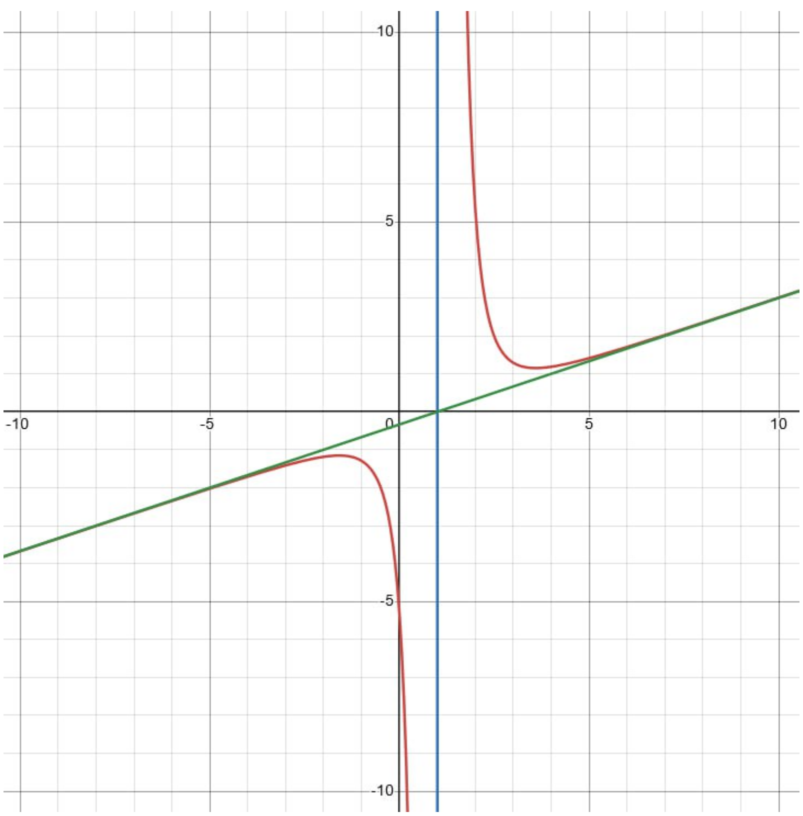
$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 16}{3(x-2)^3}$$

$f(x) = \frac{x^4-4x^3+6x^2-4x+16}{3(x-2)^3} = \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{5}{(x-1)^3}$

3.1 Найдем наклонную асимптоту

$y = kx + b$
$k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{5}{(x-1)^3}}{x} = \frac{1}{3}$
$b = \lim\limits_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty} (\frac{1}{3}x - \frac{1}{3} + \frac{5}{(x-1)^3} - \frac{1}{3}x) = -\frac{1}{3}$
$y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$
$x = 1$ - точка разрыва второго ряда, вертикальная ассимптота

3.2 График



3.3 Интегрирование

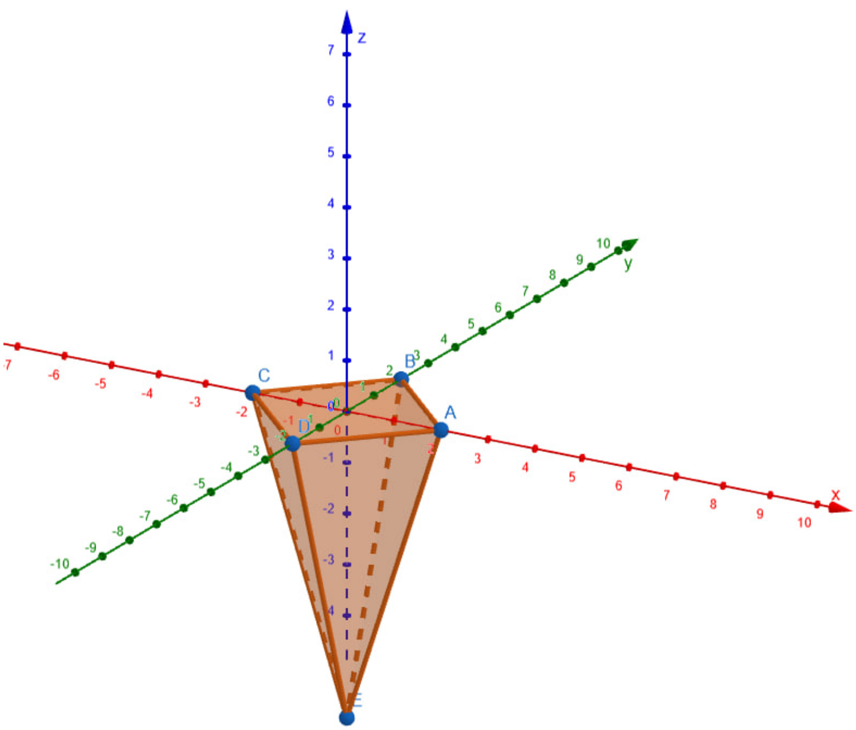
$$\int_1^{+\infty} (\frac{x}{3} - \frac{1}{3} + \frac{5}{(x-1)^3} - (\frac{x}{3} - \frac{1}{3}))\, dx = \int_1^2 \frac{5}{(x-1)^3}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{5}{(x-1)^3}\, dx = \lim_{a\to 1+} \int_a^2 \frac{5}{(x-1)^3}\, dx + \lim_{a\to +\infty} \int_2^{+\infty} \frac{5}{(x-1)^3}\, dx =$$

$$= \lim_{a\to 1+} (-\frac{5}{2} + \frac{5}{2(a-1)^2}) + \lim_{a\to +\infty} (-\frac{5}{2(a-1)^2} + \frac{5}{2}) = +\infty \ \Rightarrow \text{интеграл расходящийся}$$

Из расходящегося несобственного интеграла следует, что площадь невозможно определить

4 Вычислите работу, которую нужно затратить на выкачивание воды из резервуара, представляющего из себя правильную четырёхугольную пирамиду, обращённой вершиной вниз. Сторона основания пирамиды 2 м, высота – 6 м.

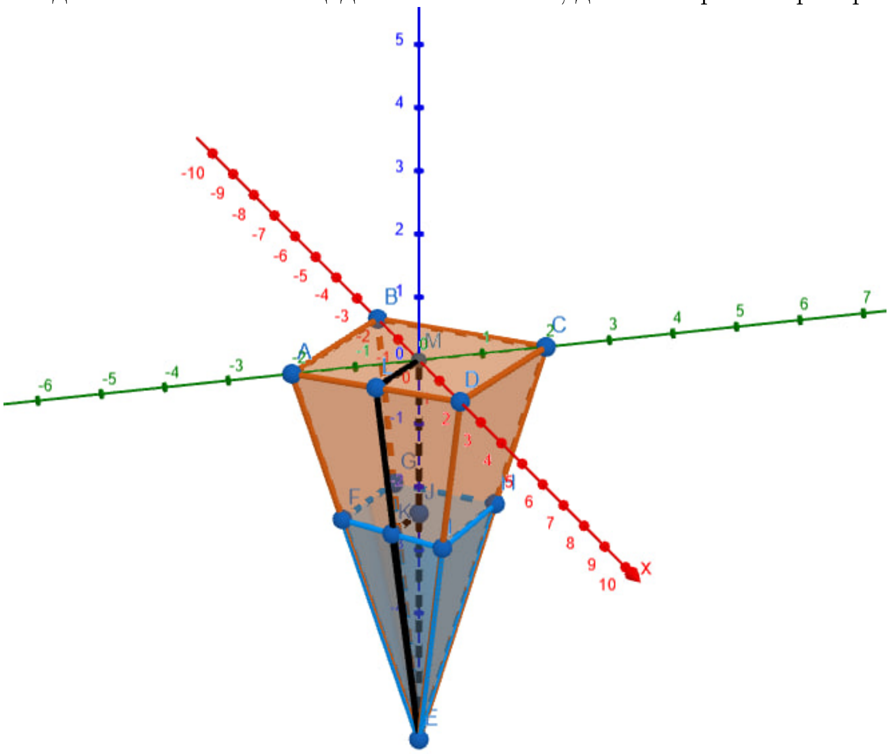
4.1 Графическая иллюстрация



4.2 Математичская модель

Для решения этой задачи мы можем использовать интеграл для вычисления работы. Рассмотрим правильную четырёхугольную пирамиду, обращённую вершиной вниз, с основанием в форме квадрата.
Введем обозначения:
a - сторона квадрата основания пирамиды (в данном случае $a = 2\,\text{м}$).
S - площадь основания пирамиды (квадрата), равная $2^2 = 4\,\text{м}^2$
H - высота пирамиды (в данном случае равная 6 м).
h - это расстояние от уровня воды до основания пирамиды
Также нам понадобятся физические константы:
ρ - плотность воды, которая в данном случае равна $1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
g - ускорение свободного падения, принятое за $9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
Составим формулу:
Чтобы выкачать воду из бака, нужно совершить работу A, чтобы преодолеть силу тяжести, то есть $A = F = mgh$
Неизвестную массу распишем как $m = \rho V$
Далее объем V воды, который мы поднимаем, можно выразить как произведение площади основания пирамиды S на ее высоту h. Это даёт нам $V = Sh$
Заметим, что для каждого слоя воды, находящегося на определенной высоте h от основания пирамиды, работа, совершаемая чтобы его выкачать, будет отличаться ввиду изменения объёма слоя, и высоты на которую необходимо поднять эту воду при выкачивании.
Чтобы учесть то, что с изменением высоты меняется объем воды внутри пирамиды, мы должны представить весь поднимаемый объем как множество слоев воды бесконечно малого объема (а именно, бесконечно малой высоты слоя с заданной площадью его основания).

Рассмотрим некоторый слой воды, высота которого dh, при этом его площадь основания равна площади поперечного сечения пирамиды плоскостью, параллельной на расстоянии h от основания пирамиды (само сечение является квадратом):
Найдем зависимость площади сечения S от h, для этого рассмотрим рисунок:



На рисунке треугольники ML и EJK (выделены черным) подобны. Пусть $k = \frac{h}{H}$ - коэффициент подобия. Если в большой и маленькой пирамидах линейные величины подобны с коэффициентом k (в том числе стороны оснований AD и FI) то площади соотносятся как $\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{FI^2}{AD^2} = k^2 = (\frac{h}{H})^2$
Отсюда $S(h) = S_{\text{сеч}} = k^2 S_{\text{осн}} = \frac{h^2 S_{\text{осн}}}{H^2} = \frac{h^2 a^2}{H^2}$
Чтобы найти объем такого слоя умножим произведение площади основания $S(h)$ на бесконечно малую высоту dh, что дает нам формулу $dV = S(h)dh$ для правильного вычисления объема.
Масса слоя воды бесконечно малого объема:
Мы знаем, что масса m зависит от плотности ρ и объема V как $m = \rho V$.
Подставив сюда формулу для V, получаем $dm = \rho dV = \rho S(h)dh$.
Работа, необходимая для подъема слоя воды высотой dh:
$dA = g(H - h)dm = g(H - h)\rho S(h)dh$
Теперь мы можем интегрировать dA от 0 до H, чтобы найти общую работу A, затрачиваемую на выкачивание всей воды из резервуара.

4.3 Аналитическое решение

Чтобы найти работу A, проинтегрируем dA от 0 до H:
$A = \int_0^H g(H - h)\rho S(h)\, dh$
Преобразуем и решим интеграл:
$A = g\rho \int_0^H (H - h) S(h)\, dh$
$= g\rho \int_0^H (H - h)\left(\frac{h^2 a^2}{H^2}\right)\, dh$
Подставляем известные значения: по условию а = 2 м, Н = 6 м
$A = g\rho \int_0^6 (6 - h)\left(\frac{h^2 (2\text{ м})^2}{6^2}\right)\, dh$
$= g\rho \int_0^6 (6 - h)\left(\frac{h^2}{9}\right)\, dh$
$= \frac{g\rho}{9} \int_0^6 (6h^2 - h^3)\, dh$

$= \frac{g\rho}{9}\left(2h^3 - \frac{h^4}{4}\right)\Big|_0^6$
$= \frac{g\rho}{9}\left(2(6^3) - \frac{6^4}{4} - 0\right)$
$= \frac{g\rho}{9}\left(2(216) - \frac{1296}{4}\right)$
$= \frac{g\rho}{9} \cdot 6^3 \cdot \left(2 - \frac{3}{2}\right)$
$= \frac{g\rho}{9} \cdot 6^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)$
Подставляем константные значения:
$g = 9.8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$
$\rho = 1000\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
$A = \frac{9.8\times1000\times(6^3)}{9\times2} = \frac{9.8\times1000\times216}{18} = 117600\,\text{Дж}$

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	25
Гонин Сергей	25
Темиров Тимур	25
Малышева Алиса	25