Специальные разделы высшей математики

Линейная алгебра

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей
Малышева Алиса

Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

2.04.2024

1 Евклидовы пространства функций

1.1

1.1.1 $B = \{1, t, t^2\}$

Проверим, что данная система линейно независима:
$P(t) = c_1 + c_2 t + c_3 t^2 = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$
$P(0) = 0 \to c_1 = 0$
$P(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 0$
$P(-1) = c_1 - c_2 + c_3 = 0$

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -c_2 \\ -2c_2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \\ c_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow B - \text{линейно независимый} \Rightarrow B - \text{это базис}$$

Ортогонализируем данный бащис:
Пусть $f_1 = 1, f_2 = f_1 + \alpha t = 1 + \alpha t$
Тогда
$\alpha = -\frac{(f_1, f_1}{(t, f_1)} = -\frac{\int_{-1}^{1} dt}{\int_{-1}^{1} t dt} = -\frac{2}{0}$ - получился невалидный результат, значит:
$(t, 1) = 0 \Rightarrow t \perp 1$

Пусть $f_3 = f_1 + \alpha t^2 = 1 + \alpha t^2$
$\alpha = -\frac{\int_{-1}^{1} dt}{\int_{-1}^{1} t^2 dt} = -\frac{2}{\frac{2}{3}} = -3$
Тогда $f_3 = 1 - 3t^2$
$(f_3, t) = \int_{-1}^{1} (t - 3t^2) dt = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = 0 \Rightarrow f_3 \perp t$
Тогда $B_H = \{1, t, 1 - 3t^2\}$

1.1.2 $L_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}((t^2 - 1)n)$

$L_0(t) = 1$
$L_1(t) = \frac{1}{2} 2t = t$
$L_2(t) = \frac{1}{8} \frac{d^2}{dt^2}((t^2 - 1)^2) = \frac{3t^2 - 1}{2} = \frac{3}{2} t^2 - 1$
$L_3(t) = \frac{1}{48} \frac{d^3}{dt^3}((t^2 - 1)^3) = \frac{5t^3}{2} - \frac{3}{2} t$

1.1.3 $L_0(t) = (1, 0, 0)_{BM}$

$L_1(t) = (0, 1, 0)_{BM}$
$L_2(t) = (-1, 0, \frac{3}{2})_{BM}$
$L_3(t) = (0, -\frac{3}{2}, \frac{5}{2} t)_{BM}$
$L_0 \perp L_1$
$(L_1, L_2) = 0 \Rightarrow L_2 \perp L_1$
$(L_0, L_2) = -1 \Rightarrow L_0$ не ортогонален L_1
$(L_3, L_2) = \frac{15}{4} t -$ об ортогональности можно говорить исходя из t
Система $\{L_0, L_1, L_2, L_2, L_3\}-$ не ортогональна

1.1.4 $P_3(t) = t^3 - 2t^2 + t + 1$

$P_3(t) = \frac{2}{5} L_3(t) - \frac{4}{3} L_2(t) + 1\frac{3}{5} L_1(t) + 2\frac{1}{3} L_0(t) = (\frac{2}{5}, -\frac{4}{3}, 1\frac{3}{5}, 2\frac{1}{3})_L$

1.2

1.2.1

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin kx \, dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin(kx - mx) + \sin(kx + mx)) \, dx = \int_0^{\pi} \sin(kx - mx) \, dx + \int_0^{\pi} \sin(kx + mx) \, dx = 0,$
т.к. $\int_0^{\pi} \sin mx \, dx = 2(\frac{\cos m\pi}{m} - \frac{\cos 0}{m}) = 0$

$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos kx \; dx = \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) \; dx + \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) = 0,$
т.к. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \; dx = 2(\frac{\sin m\pi}{m} - \frac{\sin 0}{m}) = 0$
$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin kx \; dx = \int_0^{\pi} \cos(mx - kx) \; dx - \int_0^{\pi} \cos(mx + kx) \; dx = 0$
следовательно всё со всем ортогонально, т.к. скаляры произведения всех векторов множества равны 0.
$||\cos mx|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \; dx} = \sqrt{2\int_0^{\pi} \cos^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} 2\cos^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} (\cos 2mx + 1) \; dx} = \sqrt{\int_0^{\pi} dx} = \sqrt{\pi}$
$||\sin mx|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx \; dx} = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2mx}{2} \; dx} = \sqrt{\pi}$
$||1|| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} \; dx} = \sqrt{2\pi}$, тогда
$N = \{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos x}{\pi}, ..., \frac{\sin mx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos mx}{\sqrt{\pi}}\}-$ ортонормированная система

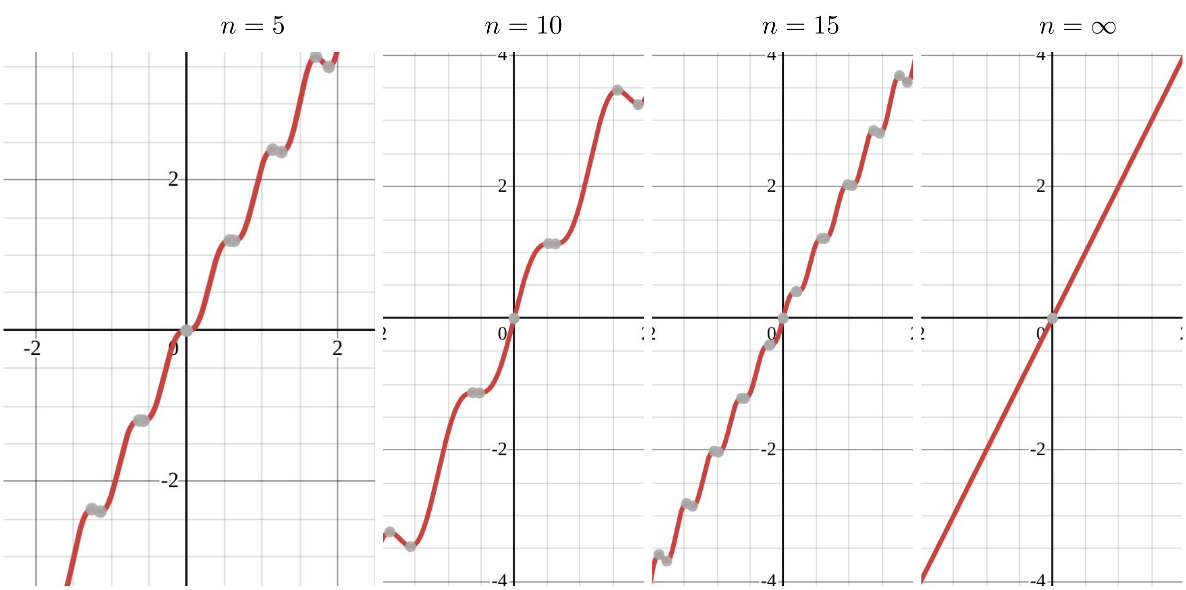
1.2.2 $f(x) = 2x$

$Pr_1 2x = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x \; dx}{\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} dx}} = 0$
$Pr_{\cos mx} 2x = \frac{\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos mx \; dx}{\sqrt{\pi}} = 0$
$\sin x$ симетричен на $[-\pi; \pi]$ относительно 0
$Pr_{\sin mx} 2x = \frac{2\int_{-\pi}^{\pi} x \sin mx \; dx}{\sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{-2\pi m \cos m\pi + 2 \sin m\pi}{m^2}$

1.2.3 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_u \cos mx + bmsinmx)$

$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \; dx = 0$
$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \cos mx \; dx = 0$
$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} 2x \sin mx \; dx = \frac{-4\pi m \cos(\pi m) + 4 \sin(\pi m)}{\pi m^2}$
$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\frac{-4\pi m \cos(\pi m) + 4 \sin(\pi m)}{\pi m^2})$

1.2.4



1.2.5 Вывод

Чем больше n, тем "ближе" ряд Фурье сходится к изначальной функции на $[-\pi; \pi]$, тем самым n "сглаживает"

2 Приведение уравнения поверхности 2-го порядка к каноническому виду

$2x^2 - bxy + 2y^2 + z^2 - 25 = 0$

2.1 $F(x, y, z) = 2x^2 - bxy + 2\phi^2 + z^2$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Собственные числа и векторы:

$$\lambda_1 = -1 \qquad \widetilde{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 1 \qquad \widetilde{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_3 = 5 \qquad \widetilde{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \qquad \text{– ортонормированный базис}$$

$\{e_1, e_2, e_3\} = \{i, j, k\}$
$\forall u \in \mathbb{R} \qquad u_e = T_{e \to v} u_v$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

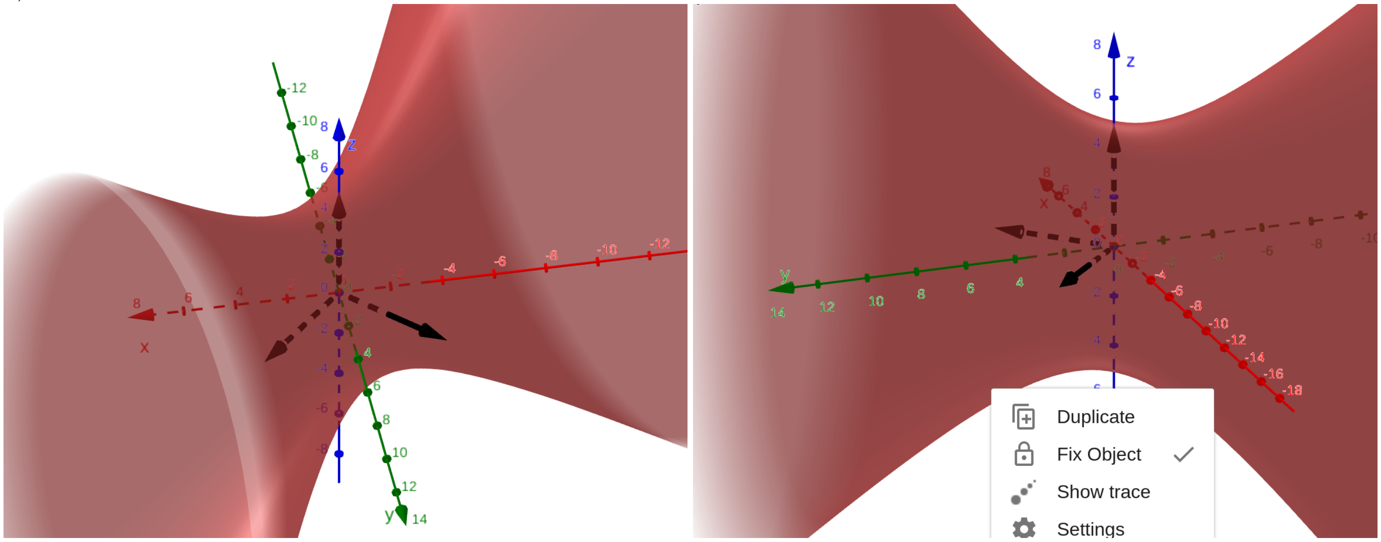
$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}x' - \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{\sqrt{2}}z' \\ z = y' \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \text{– матрица квадратичной формы}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x = x' - z' \\ \sqrt{2}y = x' + z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} x' = \sqrt{2}x + z' \\ \sqrt{2}y = \sqrt{2}x + 2z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} 2z' = \sqrt{2}y - \sqrt{2}x \\ x' = \sqrt{2}x + z' \\ z = y' \end{cases} \quad \begin{cases} z' = \frac{\sqrt{2}}{2}y - \frac{\sqrt{2}}{2}x \\ x' = \frac{\sqrt{2}}{x} + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' = z \end{cases}$$

$\{x', y', z'\}$ - канонический базис
2) Однополосный гиперболоид
3) Поворотом

4)



3 Линейный оператор и спектральный анализ

3.1 A

Изобразим подпространства L_1 и L_2 на графике. Подпространства представляют собой плоскости в трехмерном пространстве R_3 L_1 определяется системой уравнений: $x - y + z = 0$ и $2x - 3y + 4z = 0$ и представляет собой пересечение 2 пересекающихся плоскостей в трехмерном пространстве R_3, то есть прямую. Найдем ее уравнение:

$x - y + z = 0$

$2x - 3y + 4z = 0$

$y = x + z$

$2x - 3x - 3z + 4z = 0$

$y = x + z$

$x = z$

$y = 2z$

$x = z$

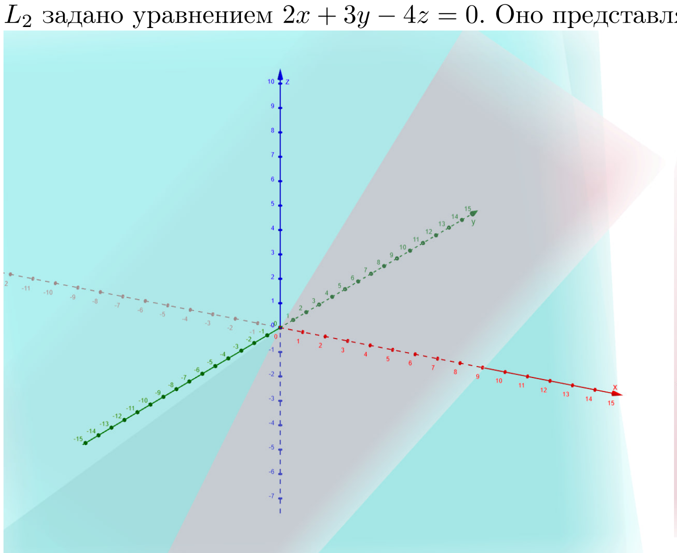
пусть $z = t$, тогда $x = t$, $y = 2t$;

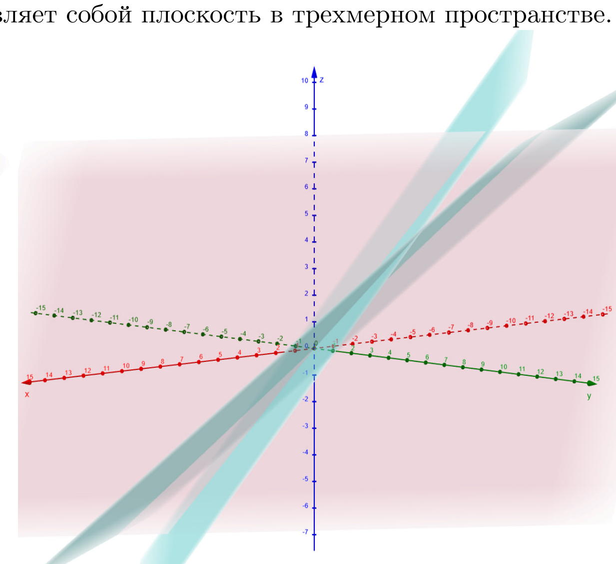
Получили направляющий вектор прямой L_1 $(1, 2, 1)$, также прямая проходит через точку $(0, 0, 0)$

Тогда уравнение прямой имеет вид:

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

L_2 задано уравнением $2x + 3y - 4z = 0$. Оно представляет собой плоскость в трехмерном пространстве.





2) составим формулу для линейного оператора A - оператора проектирования пространства R_3 на подпространство L_1 параллельно L_2.

Подпространство L_1 представляет собой прямую, а L_2 - плоскость.

Поскольку оператор A проецирует на L_1 параллельно L_2, проекция любого вектора на L_1 должна быть параллельна L_2.

Пусть $v = (x, y, z)$ - произвольный вектор в пространстве R_3 . Тогда чтобы найти проекцию M на L_1 параллельно L_2, нужно провести плоскость, параллельную L_2. Для этого в общее уравнение плоскости параллельной $L2$.

$2x + 3y - 4z + d = 0$ подставим x, y, z, после чего найдем d. После этого остается найти точку пересечения этой плоскости с прямой L_1.

Найденная точка (x', y', z') и будет проекцией.

Формула оператора $: A(x, y, z) = (x', y', z')$

3)Рассмотрим вектор $i = (1, 0, 0)$

Для начала найдем уравнение плоскости параллельной L_2:

$2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + d = 0$

$d = -2$

Найдем точку пересечения полученной плоскости и прямой L_1:

$2x + 3y - 4z - 2 = 0$

$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$

Параметрическую форму $x = t$, $y = 2t$, $z = t$ подставим в $2x + 3y - 4z - 2 = 0$:
$2t + 6t - 4t - 2 = 0$
$t = \frac{1}{2}$
Искомая точка (проекция на L_1): $A(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2})$

Аналогично для вектора $j = (0, 1, 0)$:
уравнение плоскости параллельной L_2:
$2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + d = 0$
$d = -3$
Найдем точку пересечения полученной плоскости и прямой L_1:
$2x + 3y - 4z - 3 = 0$
$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$
Параметрическую форму $x = t$, $y = 2t$, $z = t$ подставим в $2x + 3y - 4z - 3 = 0$:
$2t + 6t - 4t - 3 = 0$
$t = \frac{3}{4}$
Искомая точка (проекция на L_1): $B(\frac{3}{4}, \frac{3}{2}, \frac{3}{4})$

А также для вектора $k = (0, 0, 1)$:
Для начала найдем уравнение плоскости параллельной L_2:
$2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 4 \cdot 1 + d = 0$
$d = 4$
Найдем точку пересечения полученной плоскости и прямой L_1:
$2x + 3y - 4z + 4 = 0$
$\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}$
Параметрическую форму $x = t$, $y = 2t$, $z = t$ подставим в $2x + 3y - 4z + 4 = 0$:
$2t + 6t - 4t + 4 = 0$
$t = -1$
Искомая точка (проекция на L_1): $C(-1, -2, -1)$
Теперь чтобы найти матрицу оператора, решим уравнение $Av = v'$ для каждого из базисных векторов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Матрица оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \\ 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) Для начала найдем собственные числа оператора. Для этого решим уравнение $det(A - \lambda \cdot E) = 0$

$$A = \begin{vmatrix} 1-\lambda & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$0 - \lambda(-\lambda + \lambda^2) + 0 = 0$
$\lambda^2 - \lambda^3 = 0$
$\lambda = 0; \lambda = 1$
теперь найдем соответствующие им собственные векторы:
1) $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$x_1 + \frac{3}{2}x_2 - 2x_3 = 0$
Общее решение: $x_1 = -\frac{3}{2}x_2 + 2x_3$, $x_2 = a$, $x_3 = b$
пусть $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, тогда $x_1 = 2$
$v = (2, 0, 1)$ - собственный вектор
2) $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & 0-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

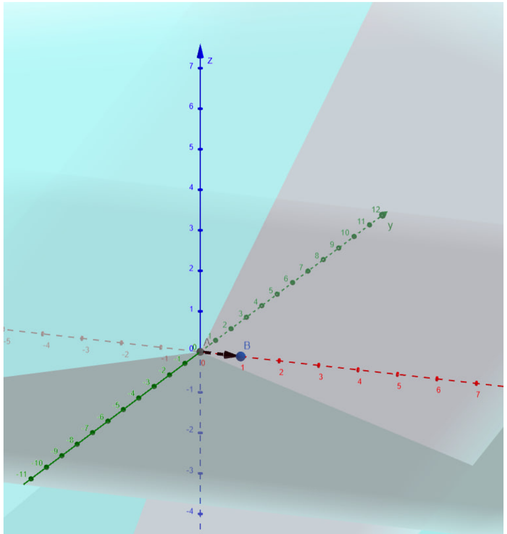
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 + (-1) \cdot (0 \cdot (-1) - 0 \cdot (-2)) + 0 = 0$$

Определитель равен 0, значит существует только тривиальное решение соответствующей системы, которое нас не устраивает. Чтобы решить задачу диагонализации матрицы, воспользуемся тем фактом, что матрица данного оператора в базисе из его собственных векторов является диагональной и содержит на главной диагонали собственные числа

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5)



В данном случае базисом будет являться единичный вектор $(1,0)^T$ параллельный оси Ox. Через этот базис мы действительно сможем выразить координаты любого элемента подпространства L_1.

L_1 представляет из себя прямую, на которую под действием оператора проектируются элементы R_3, причем сама проекция является некоторой точкой на прямой, поэтому вектора $(1,0)^T$ достаточно чтобы задать положение любой точки на данной прямой. Вектор соответствующий некоторой точке будет показывать ее смещение по оси Ox относительно начала координат.

Б

1) Для того чтобы выбрать базис в пространстве многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами, нужно найти три линейно независимых многочлена, которые образуют базис этого пространства.

Давайте рассмотрим многочлены, которые представлены в данной задаче:

$f1(t) = 1$

$f2(t) = t$

$f3(t) = t^2$

Проверим, являются ли такая система линейно независимой:

Предположим, что существуют такие константы c_1, c_2, и c_3, хотя бы одна из которых не равна нулю, такие что:

$c_1 \cdot f1(t) + c_2 \cdot f2(t) + c_3 \cdot f3(t) = 0$

тогда $c_1 + c_2 \cdot t + c_3 \cdot t^2 = 0$

Это равенство должно выполняться для всех значений t. Рассмотрим несколько значений t:

При $t = 0$: $c_1 = 0$

При $t = 1$: $c_1 + c_2 + c_3 = 0$

При $t = -1$: $c_1 - c_2 + c_3 = 0$

Теперь решим эту систему уравнений:

Из первого уравнения $c_1 = 0$, а затем, подставив $c_1 = 0$ во вторoе и третье уравнения, получаем $c_2 = c_3 = 0$.

Таким образом, многочлены $f1(t) = 1$, $f2(t) = t$ и $f3(t) = t^2$ являются линейно независимыми.

Таким образом, они образуют базис пространства многочленов степени не выше второй с вещественными коэффициентами.

2) Чтобы убедиться, что отображение A является линейным оператором, нужно проверить два условия:

1. Аддитивность:

Пусть f(t) и g(t) - произвольные многочлены степени не выше второй.

Тогда:

$A(f+g) = (f+g)'' - 3(f+g)' + (f+g) = f'' + g'' - 3f' - 3g' + f + g = (f'' - 3f' + f) + (g'' - 3g' + g) = A(f) + A(g)$ - выполняется

2. Гомогенность:

Пусть f(t) - произвольный многочлен степени не выше второй, $a \in R$ - произвольное число. Тогда:

$A(af) = (af)'' - 3(af)' + af = a \cdot f'' - 3 \cdot a \cdot f' + a \cdot f = a(f'' - 3f' + f) = a \cdot A(f)$ - выполняется

Таким образом, отображение A является линейным оператором.

3) Чтобы найти матрицу оператора A в выбранном базисе, мы должны вычислить образы базисных векторов под действием оператора A и представить эти образы в координатном виде относительно выбранного базиса.
1. Образ многочлена 1 под действием A:
$A(1) = 1'' - 3 \cdot 1' + 1 = 1$
2. Образ многочлена t под действием A:
$A(t) = t'' - 3 \cdot t' + t = -3 + t$
3. Образ многочлена t^2 под действием A:
$A(t^2) = (t^2)'' - 3 \cdot (t^2)' + t^2 = 2t` - 6t + t^2 = 2 - 6t + t^2$
Теперь представим каждый из этих образов в виде линейной комбинации базисных элементов 1, t и t^2:
1. Образ многочлена 1:
$0 = 1 \cdot 1 + 0 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Rightarrow (1, 0, 0)$
2. Образ многочлена t:
$-3 + t = -3 \cdot 1 + 1 \cdot t + 0 \cdot t^2 \Rightarrow (-3, 1, 0)$
3. Образ многочлена t^2:
$2 - 6t + t^2 = 2 \cdot 1 - 6 \cdot t + 1 \cdot t^2 \Rightarrow (2, -6, 1)$
Теперь мы можем записать эти коэффициенты в матрицу, где каждый столбец представляет координаты образа соответствующего базисного вектора в выбранном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Это и есть матрица оператора A в выбранном базисе.
Чтобы найти ранг матрицы, заметим что она уже имеет ступенчатый вид, посчитаем количество ненулевых строк. Их две, поэтому ранг матрицы оператора A равен 2.
4) Чтобы найти размерность ядра, мы должны решить уравнение $Af = 0$, то есть найти все многочлены $f(t)$, для которых $Af = 0$.
$f'' - 3f' + f = 0$
$f(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$
$(a \cdot t^2 + b \cdot t + c)'' + (a \cdot t^2 + b \cdot t + c)' + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$(2a \cdot t + b)' + 2a \cdot t + b + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$2a + 2a \cdot t + b + a \cdot t^2 + b \cdot t + c = 0$
$a \cdot t^2 + (2a + b)t + (2a + b + c) = 0$
Получили систему:

$$\begin{cases} a = 0 \\ 2a + b = 0 \\ 2a + b + c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \end{cases}$$

$KerA = 0 \cdot t^2 + 0 \cdot t + 0 = (0, 0, 0)$
Размерность $Ker\ A$ равна 1.
Теперь чтобы найти размерность образа $Im\ A$ воспользуемся теоремой о размерностях ядра и образа:
Сумма размерностей ядра и образа любого линейного отображения
$A : V \to W$ равна размерности пространства прообразов:
$dim\ ker\ A + dim\ im\ A = dim\ V$
в нашем случае $dim\ Ker\ A = 1$, $dim\ L = 3$ (так как L пространство многочленов не выше 2 степени)
Тогда $dim\ Im\ A = dim\ L - dim\ Ker\ A = 3 - 1 = 2$
5) Прежде всего найдем собственные числа оператора. Для этого решим уравнение $det(A - \lambda E) = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -6 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$-\lambda^3 + 3 \cdot \lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$
$-(\lambda - 1)^3 = 0$
$\lambda = 1$ - собственное число Найдем собственный вектор соответствующий $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-1 & -3 & 2 \\ 0 & 1-1 & -6 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x}_1 \\ \mathrm{x}_2 \\ \mathrm{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

получили систему уравнений:

$$\begin{cases} -3 \cdot x_2 + 2 \cdot x_3 = 0 \\ -6 \cdot x_3 = 0 \end{cases}$$

Откуда общее решение: $x_1 = a$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$
пусть $x_1 = 1$, тогда $v = (1, 0, 0)^T$ - собственный вектор
Размерность пространства собственных векторов равна количеству линейно независимых собственных векторов. В данном случае, у нас есть только один собственный вектор, так как кратность собственного значения $\lambda = 1$ равна 3, но для этого собственного значения существует только один линейно независимый собственный вектор. Следовательно, размерность пространства собственных векторов равна 1.
Матрицу оператора нельзя диагонализировать, поскольку у нас есть только один линейно независимый собственный вектор для данной матрицы, в то время как для диагонализации нужно три линейно независимых собственных вектора (так как $dim\ L = 3$). Поэтому данную матрицу нельзя диагонализовать.
6) Найдем образ вектора, соответствующего $p(t)$, с помощью умножения на матрицу оператора A:
$p(t) = 3t^2 + t + 2(2, 1, 3)^T$

$$A * p(t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -17 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$Ap(t) = (5, -17, 3) = 3 * t^2 - 17 * t + 5$
Проверим результат через дифференцирование:
$p(t) = 3t^2 + t + 2$
$p'(t) = 6t + 1$
$p(t)'' = 6$
$Af = f'' - 3f + f = 6 - 3(6t + 1) + 3t^2 + t + 2 = 3t^2 - 17t + 5 \Rightarrow (5, -17, 3)$
Таким образом матрица оператора была найдена верно.

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	25
Гонин Сергей	25
Темиров Тимур	25
Малышева Алиса	25