Линейная алгебра

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей

Группа: М3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

9.11.2023

1 Задание 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}$$

1.1 Решение подзадания 1

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} X = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -3 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Возьмем x_2 как свободную переменную, тогда

$x_1 = -\frac{1}{3}x_2$

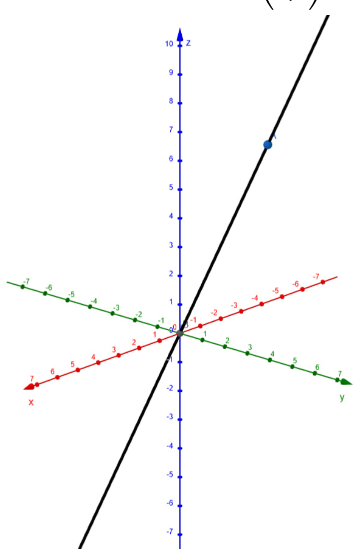
$x_3 = \frac{7}{3}x_2$

Пусть $x_2 = 3$, тогда

$x_1 = -x_2$

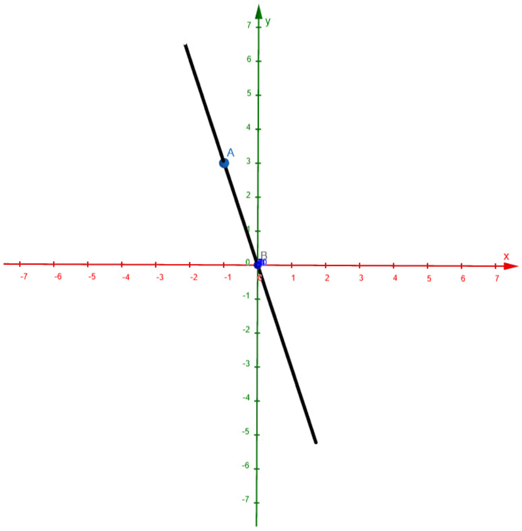
$x_3 = 7x_2$

Получился базис $\delta = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, который образует одномерное линейное пространство:

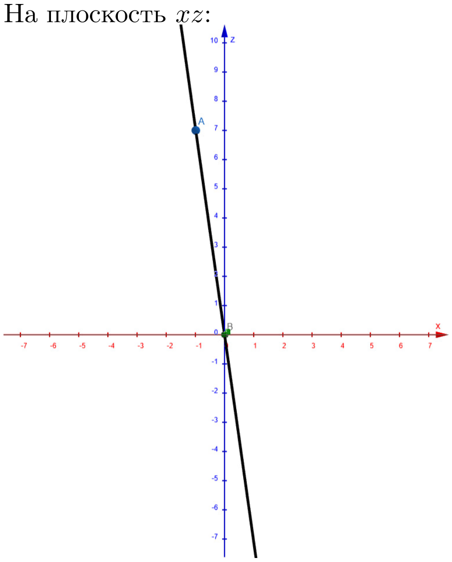


Проекции:

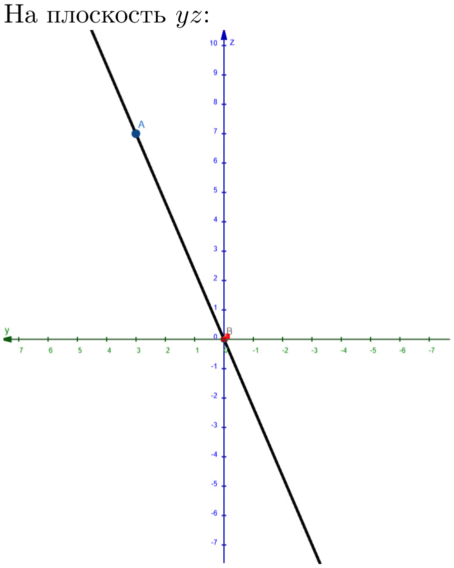
На плоскость xy:



На плоскость xz:



На плоскость yz:



1.2 Решение подзадания 2

1.2.1 Совместность

Система $AX = B$ совместна $\iff$ rank(A) = rank(A|B)
rank(A) = 2

$$A|B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$rank(A|B) = 2$
$rank(A) = rank(A|B) \Rightarrow$ система совместна

1.2.2 Неопределённость

Система $AX = B$ неопределённая $\iff$ система имеет больше одного решения

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 1 & 11 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & -5 \end{array}\right)$$

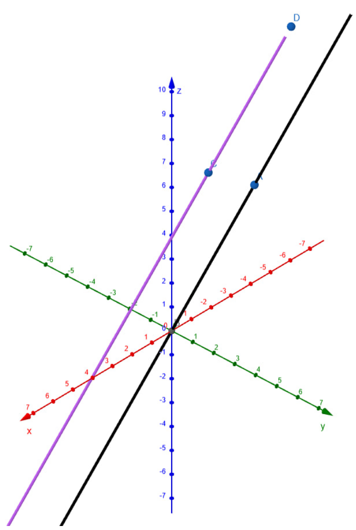
Возьмем x_2 как свободную переменную равную $\alpha \in \mathbb{R}$ и получим:

$x_1 = \frac{7}{3} - \frac{1}{3}\alpha$

$x_2 = \alpha$

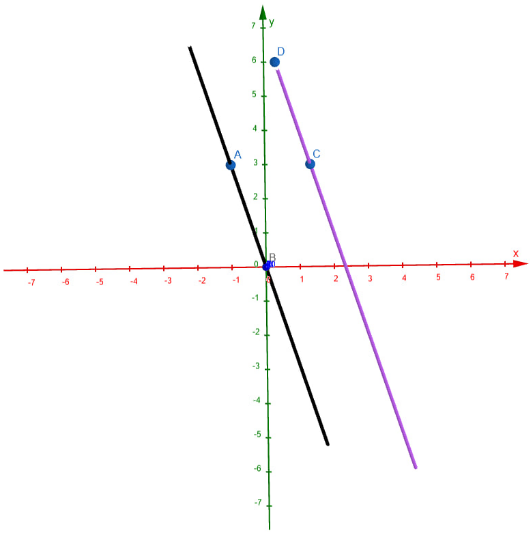
$x_3 = \frac{5}{3} + \frac{7}{3}\alpha$

Решений получилось больше одного $\Rightarrow$ система неопределённая
Покажем множество решений на том же графике:

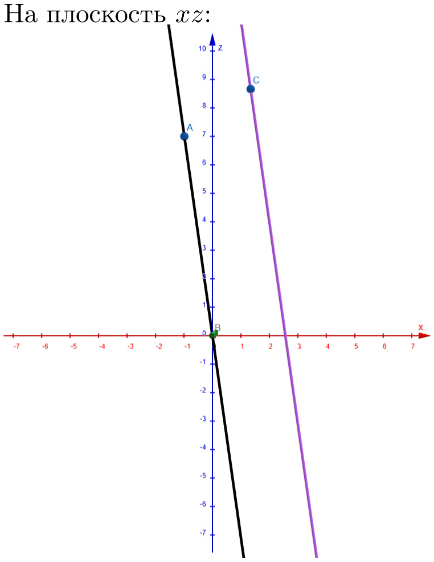


Проекции:

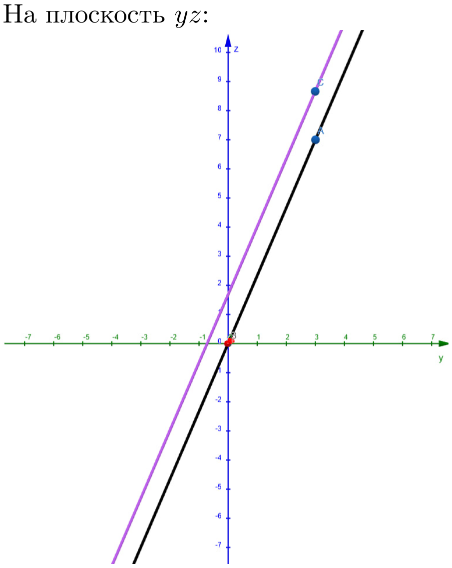
На плоскость xy:



На плоскость xz:



На плоскость yz:



2 Задание 2

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = 1, e_2 = 1+t, e_3 = 1+t+t^2, e_4 = 1+t+t^2+t^3, e_4 = 1+t+t^2+t^3+t^4$$

2.1 Решение подзадания 1

2.1.1 Доказательство

$L-$ линейное пространство матриц второго порядка
$\mathcal{A} \subset L$
$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$\mathcal{A} - \text{базис } L \iff \begin{cases} \mathcal{A} \subset L \\ \mathcal{A} \text{ - линейно независимая} \\ \mathcal{A} \cup \{l_i\} \text{ - линейно зависимый}, l_1 \in L \end{cases}$$

1) $\mathcal{A} \subset L$ - по условию
2) Докажем, что $\mathcal{A}$ - линейно независимая:
$\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$
A - линейно независимая $\iff \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = \mathbb{O} \Rightarrow \forall \lambda_i = \mathbb{O}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{O}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} = \mathbb{O} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 - \lambda_2 \\ \lambda_3 - 2\lambda_2 + \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 - 2\lambda_2 - \lambda_4 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2 \\ \lambda_4 = 2\lambda_2 \\ \lambda_3 = 0 \\ -4\lambda_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{A} \text{ - линейно независимая}$$

3)Докажем, что $\mathcal{A} \cup \{l_i\}$ - линейно зависимый, $l_1 \in L \iff \exists \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_j = a_k \in \mathcal{A} \cup \{l_i\} \forall a_i \in \mathcal{A} \cup \{l_i\}$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} = l_1 \in L$$

Пусть $l_1 = \lambda_i a_i$, тогда $\lambda_i a_i = \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 & \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4 \end{pmatrix} \Rightarrow a_i = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_i} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_4}{\lambda_i} \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{\lambda_i} & \frac{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_i} \end{pmatrix}$, значит $a_i \in L$ мы можем найти коэффициент относительно векторов системы A
Значит, $\mathcal{A} -$ базис L
Q.E.D.

2.1.2 Координаты x

Не трудно заметить:
$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 2,5 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 0,5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = 2,5\mathcal{A}_1 - 0,5\mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_4$

2.2 Решение подзадания 2

2.2.1 Доказательство

$L-$ пространство многочленов степени не больше четырёх
$\mathcal{A} \subset L$

$\mathcal{A} = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$

$$\mathcal{A} - \text{базис } L \iff \begin{cases} \mathcal{A} \subset L \\ \mathcal{A} \text{ - линейно независимая} \\ \mathcal{A} \cup \{l_i\} \text{ - линейно зависимый}, l_1 \in L \end{cases}$$

1) $\mathcal{A} \subset L$ - по условию
2) Докажем, что $\mathcal{A}$ - линейно независимая:
$\forall \lambda_i \in \mathbb{R}$
A - линейно независимая $\iff \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i a_i = 0 \Rightarrow \forall \lambda_i = 0$
$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 + \lambda_5 e_5 = \mathbb{O}$
$P(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)t + (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)t^2 + (\lambda_4 + \lambda_5)t^3 + \lambda_5 t^4 = \mathbb{O}$

$$\forall t \in \mathbb{R} P(t) = 0 \iff \begin{cases} \lambda_5 = 0 \\ \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_4 = 0 \\ \lambda_5 = 0 \end{cases}$$

3)Докажем, что $\mathcal{A} \cup \{l_i\}$ - линейно зависимый, $l_1 \in L \iff \exists \sum\limits_{j=1}^{n-1} \lambda_j a_j = a_k \in \mathcal{A} \cup \{l_i\} \forall a_i \in \mathcal{A} \cup \{l_i\}$
$P(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5) + (\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)t + (\lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5)t^2 + (\lambda_4 + \lambda_5)t^3 + \lambda_5 t^4 = 0$
Пусть

$$\begin{cases} a = \lambda_5 \\ b = \lambda_4 + a \\ c = \lambda_3 + b \\ d = \lambda_2 + c \\ e = \lambda_1 + d \end{cases} \quad P(t) = at_4 + bt_3 + ct_2 + dt + e$$

$\forall t \in \mathbb{C}$ мы сможем получить любой многочлен степени не больше 4-х, поскольку коэффициенты зависят друг от друга, но зависимость строиться через сумму старых и новой λ_i, что обеспечивает возможность задать свои $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, вне зависимости от зависимости их от предыдущих переменных

Значит, $\mathcal{A} - \text{базис } L$
Q.E.D.

2.2.2 Координаты x

Не трудно заметить:
$x = t^4 - t^3 - t^2 - t + 1 = (e_5 - e_4) - (e_4 - e_3) + (e_3 - e_2) - (e_2 - e_1) + e_1 = e_5 - e_4 - e_4 + e_3 + e_3 - e_2 - e_2 + e_1 + e_1 = e_5 - 2e_4 + 2e_3 - 2e_2 + 2e_1$

3 Задание 3

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.1 Решение

Линейное пространство остается неизменным при умножении векторов на скаляр и сложении векторов друг с другом, поэтому следующие преобразования будут верны

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 6 \\ 2 & -2 & -3 \\ 3 & -2 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 9 \\ -1 & -2 & 6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Тогда

$$aa_1 + ba_2 + ca_3 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

$$a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = b \\ x_3 = c \\ x_4 = \frac{1}{3}x_1 - \frac{2}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 \end{cases}$$

$3x_4 - x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0$
$-x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0$
Все решения данной системы линейных уравнений совпадают с данной линейной оболочкой системы векторов $\mathcal{A}$

4 Задание 4

$$a_1 = \begin{pmatrix} 0,3536 \\ 0,9268 \\ 0,1268 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} -0,6124 \\ 0,1268 \\ 0,7803 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 0,7071 \\ -0,3536 \\ 0,6124 \end{pmatrix},$$

$$b_1 = \begin{pmatrix} -0,8712 \\ -1,0267 \\ 2,0462 \end{pmatrix}, b_2 = \begin{pmatrix} 1,9319 \\ 1,5999 \\ -1,307 \end{pmatrix}, b_3 = \begin{pmatrix} -2,3801 \\ 2,1143 \\ -0,93 \end{pmatrix}, x_{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 2,6 \\ 1,7 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \{a_1, a_2, a_3\}, \mathcal{B} = \{b_1, b_2, b_3\}$$

4.1 Подзадание 1

$det\mathcal{A} = 1.00005332514$
$det\mathcal{A} \neq 0 \Rightarrow$ векторы линейно независимы $\Rightarrow \mathcal{A}$ - базис
$det\mathcal{B} = 1.4236226104150541608$
$det\mathcal{B} \neq 0 \Rightarrow$ векторы линейно независимы $\Rightarrow \mathcal{B}$ - базис

4.2 Подзадание 2

Ни один базис не ортонормированный, поскольку каждый из них не нормальный (не единичный)
Векторы будут ортогональными если угол между векторами равен 90 $\Rightarrow$
косинус равен нулю $\Rightarrow$
скалярное произведение равно нулю, тогда достаточно расчитать скалярное произведение векторов для базиса
$\mathcal{A}$:
$a_1 a_2 = x_{a_1} x_{a_2} + y_{a_1} y_{a_2} + z_{a_1} z_{a_2} = -0,00008436 \neq 0 \Rightarrow$ A не ортогональный
$\mathcal{B}$:
$b_1 b_2 = x_{b_1} x_{b_2} + y_{b_1} y_{b_2} + z_{b_1} z_{b_2} = -6,38338768 \neq 0 \Rightarrow$ B не ортогональный

4.3 Подзадание 3

$$x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2,6 \\ 1,7 \\ 1,2 \end{pmatrix}$$

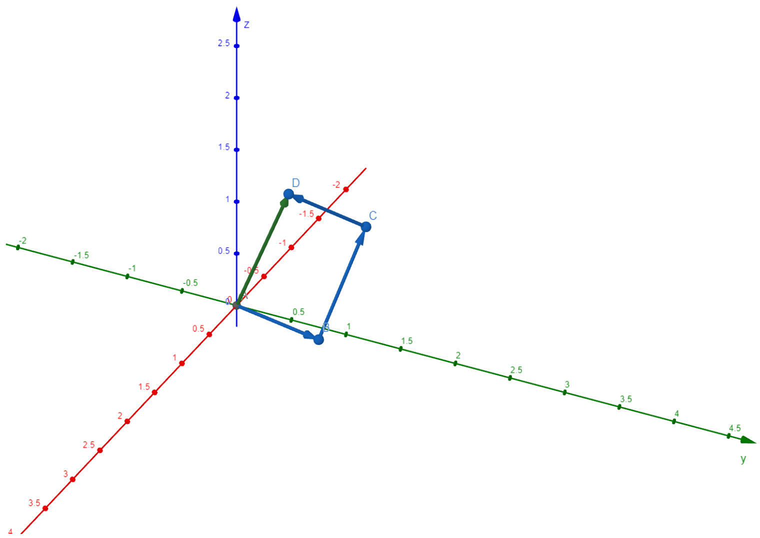
Для нахождения x_a нам необходимо установить переход:
$\{b_1, b_2, b_3\} \rightarrow \{a_1, a_2, a_3\}$

Пусть x_E - стандартный базис

$x_E = \mathcal{B} x_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1,83701 \\ 2,58757 \\ 1,98248 \end{pmatrix}$ - переход из базиса $\mathcal{B}$ в стандартный базис

$x_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}^{-1} x_E = \begin{pmatrix} 2,000052231 \\ 3,000237606 \\ -0,999693055 \end{pmatrix}$ - переход из стандартного базиса в базис $\mathcal{A}$

4.4 Подзадание 4



Участник	Вклад в %
Каренин Константин	33.(3)
Гонин Сергей	33.(3)
Темиров Тимур	33.(3)