Математический анализ

Функции нескольких переменных

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей
Малышева Алиса

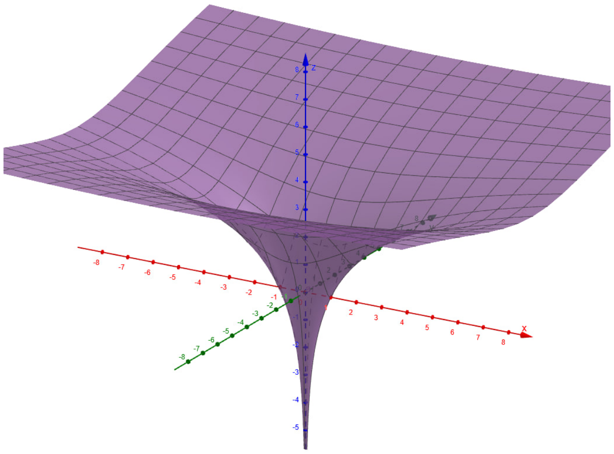
Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

22.05.2024

1 Изобразите в графическом калькуляторе поверхность, заданную уравнением $z = \ln(x^2 + 4y^2)$



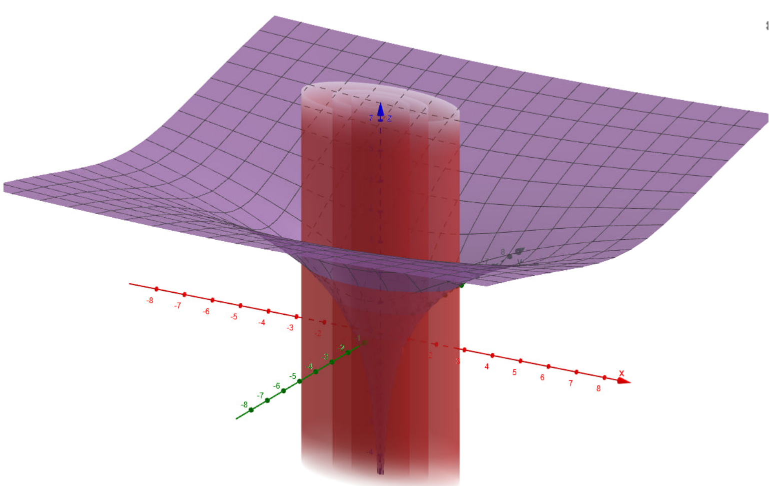
1.1 Найдите область определения функции $f(x, y)$

Функция определена тогда и только тогда, когда $x^2 + 4y^2 > 0$
Сумма квадратов положительна, если хотя бы один из них не равен 0. Т.к. $a^2 \geq 0$, для любых $a \in \mathbb{R}$, то нам нужно исключить из области определения единственный случай:

$$\begin{cases} x^2 = 0 \\ 4y^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Таким образом $x^2 + 4y^2 > 0 \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)$
$D(f(x, y)) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \neq (0, 0)\}$

1.2 Изобразите на одном листе семейство линий уровня $f(x, y) = c$ функции $f(x, y)$. Для построения выберите 3 – 4 значения c. Определите тип построенных кривых. Если различным с соответствуют кривые разных типов, изобразите все типы линий уровня.



Линия уровня $f(x,y)$ определяется уровнем $f(x,y)=c$; $\ln(x^2+4y^2)=c$; $x^2+4y^2=e^c$
Для различных значений c получаем семейство эллипсов $x^2+4y^2=k$, где $k=e^c=const$
Выберем несколько значений c и запишем для них уравнения эллипсов при:
$c=0: x^2+4y^2=1$
$c=1: x^2+4y^2=e$
$c=2: x^2+4y^2=e^2$

1.3 Выберите на поверхности какую-либо точку $M_0(x_0,y_0,z_0)$, не являющейся ни особой, ни стационарной, и дока- жите это по определению.

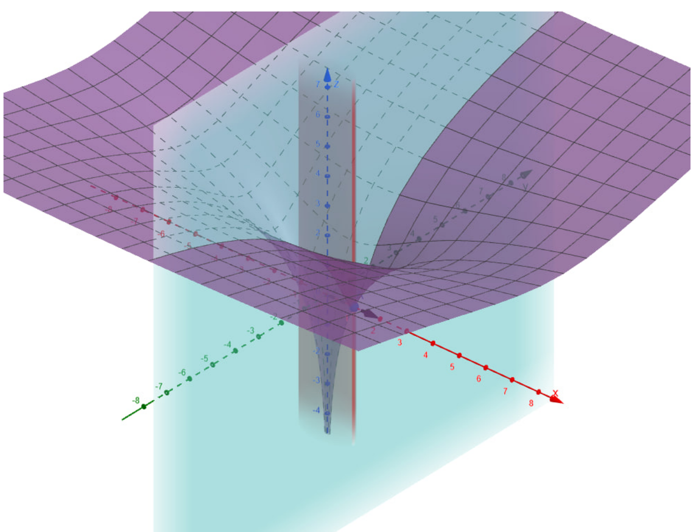
Точка $M_0(x_0,y_0,z_0)$ не является ни особой, ни стационарной. Рассмотрим точку M_0 для которой $x_0=1, y_0=0$, тогда $z_0=f(1,0)=\ln(1^2+4\cdot 0^2)=\ln 1=0$. Докажем по определению, что она не особая и не стационарная. Особая точка ФНП - это точка в которой функция либо не определена, либо не имеет всех частных производных. К таким точка относятся: те в которых функция не определена и те в которых функция разрывна (их предел не существует либо бесконечен), а также те в которых функция не имеет частных производных, либо частные производные не определены или не непрерывны.
$M_0(1,0,0)\in D(f(x,y))$ - функция в данной точке определена
Найдём частные производные:
$f'_x=\frac{2x}{x^2+4y^2}$
$f'_y=\frac{8y}{x^2+4y^2}$
В точке $(1,0,0)$:
$f'_x(1,0,0)=\frac{2\cdot 1}{1^2+4\cdot 0^2}$
$f'_y(1,0,0)=\frac{8\cdot 0}{1^2+4\cdot 0^2}$
Частные производные существуют $\Rightarrow$M$_0$ - не особая точка.

Стационарная точка ФНП - это точка в которой все первые частные производные равны 0. Тоесть в этой точке градиент равен 0. Для нашей M_0 частная производная по x $f'_x\neq 0$, градиент $\nabla f(1,0)=(2,0)\neq 0\Rightarrow M_0$ - не стационарная точка

1.4 Найдите вектор $\overrightarrow{m}\in\mathbb{R}^2$, показывающий направление наискорейшего подъёма (спуска) в точке M_0.

Направление наискорейшего подъема совпадает с направлением градиента функции $f:\nabla f(1,0)=(2,0)\Rightarrow \overrightarrow{m}=(2,0)$

1.5 Изобразите линию уровня $f(x,y)=z_0$ и направление $\overrightarrow{m}$. Проверьте их ортогональность.



Линия уровня, проходящая через M_0 задается уравнением: $x^2+4y^2=1$ и имеет касательную плоскость $x=1$ в точке M_0 параллельную оси Oy

Вектор $\overrightarrow{m} = (2, 0)$ - параллелен оси Ox : проверим что $\overrightarrow{m}$ и направляющий вектор касательной в точке M_0 ортогональны
Произведение $(0, 1) \cdot (2, 0) = 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1 = 0$ действительно, вектор направления подъема и линия уровня в точке M_0 ортогональны

2 Дано векторное поле $\overrightarrow{H} = (y\cos(xy), x\cos(xy))$

2.1 Убедитесь, что данное векторное поле потенциально.

Чтобы показать, что поле потенциально нужно убедиться, что $rot\overrightarrow{H} = 0$

$$rot\overrightarrow{H} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{i} & \overrightarrow{j} & \overrightarrow{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial Z} \\ y\cos(xy) & x\cos(xy) & 0 \end{vmatrix} = \overrightarrow{j}\frac{\partial}{\partial z}y\cos(xy) + \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial x}x\cos(xy) - \overrightarrow{k}\frac{\partial}{\partial y}y\cos(xy) - 0 - 0 =$$

$$= \overrightarrow{k}(\cos(xy) - xy\sin(xy) - \cos(xy) + xy\cos(xy)) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{H} \text{ - потенциально}$$

2.2 Найдите уравнения векторных линий. Изобразите векторные линии на рисунке.

Пусть $l : \overrightarrow{r} = \overrightarrow{r}(M)\forall M \in \mathbb{R}^3$, где $M(x_0, y_0, z_0)$
l - векторная линия, если $d\overrightarrow{r}(dx, dy)n\overrightarrow{H}$
То есть $\frac{dx}{y\cos(xy)} = \frac{dy}{x\cos(xy)}$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ x\cos(xy)dx = y\cos(xy)dy \end{cases}$$

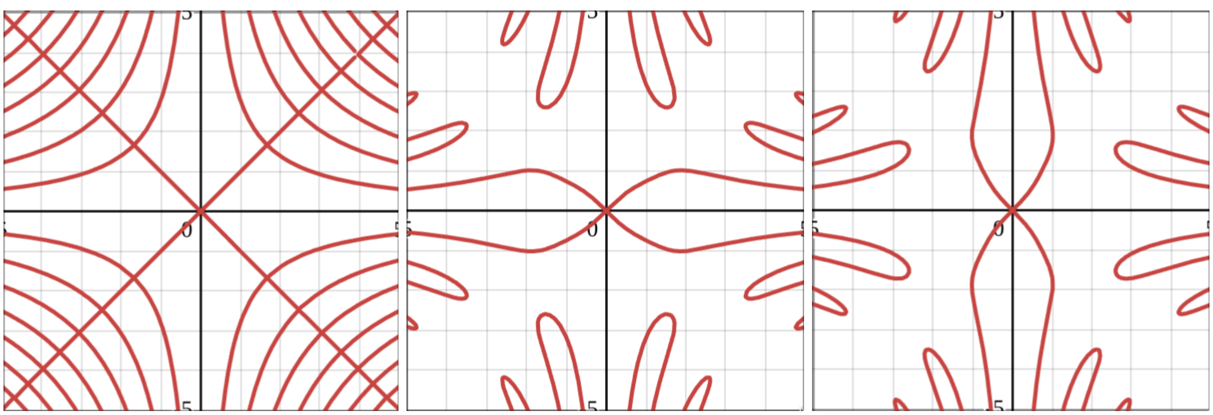
$$\int(x\cos(xy))dx = \begin{bmatrix} u = x & u = \frac{1}{y}\sin(xy) \\ du = \cos(xy)dx & du = dx \end{bmatrix} = \frac{x}{y}\sin(xy) + \frac{1}{y^2}\cos(xy) + C$$

$$\int(y\cos(xy))dy = \frac{y}{x}\sin(xy) + \frac{1}{x^2}\cos(xy) + C$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ \frac{x}{y}\sin(xy) + \frac{1}{y^2}\cos(xy) = \frac{y}{x}\sin(xy) + \frac{1}{x^2}\cos(x^2) + C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ (\frac{x}{y} - \frac{y}{x})\sin(xy) + (\frac{1}{y^2} - \frac{1}{x^2})\cos(xy) = C_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = C_1 \\ (x^2 - y^2)(\frac{1}{xy}\sin(xy) + \frac{1}{x^2y^2}\cos(xy)) = C_2 \end{cases}$$



2.3 Найдите потенциал поля при помощи криволинейного интеграла.

$\exists u$, такое $u(x, y, z)$ - потенциал $\overrightarrow{F}$, если
$\overrightarrow{F} = \overrightarrow{grad}u = \frac{\partial u}{\partial x}\rightarrow + \frac{\partial u}{\partial y}\overrightarrow{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\overrightarrow{k}$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = ycos(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xcos(xy) \\ \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{интегрируем} \begin{cases} u_x = \int_{x_0}^{x} ycos(xy)dx \\ u_y = \int_{y_0}^{y} xcos(xy)dy \\ u_z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{y} sin(xy) + \frac{1}{yz} cos(xy)\Big|_{x_0}^{x} \\ u_y = \frac{x}{y} sin(xy) + \frac{1}{xz} cos(xy)\Big|_{y_0}^{y} \\ u_z = 0 \end{cases}$$

Пусть M $= (2\sqrt{\pi}, 2\sqrt{\pi})$

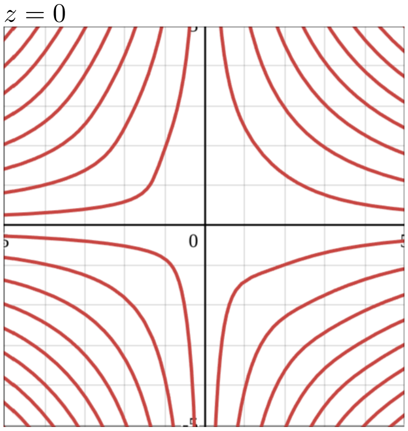
$$\begin{cases} u_x = \frac{x}{y} sin(xy) + \frac{1}{yz} cos(xy) - \frac{1}{4\pi} \\ u_y = \frac{x}{y} sin(xy) + \frac{1}{xz} cos(xy) - \frac{1}{4\pi} \\ u_z = 0 \end{cases}$$

Тогда $u(x, y) = \frac{x}{y} sin(xy) + \frac{1}{yz} cos(xy) + \frac{y}{x} sin(xy) + \frac{1}{xz} cos(xy) + C$

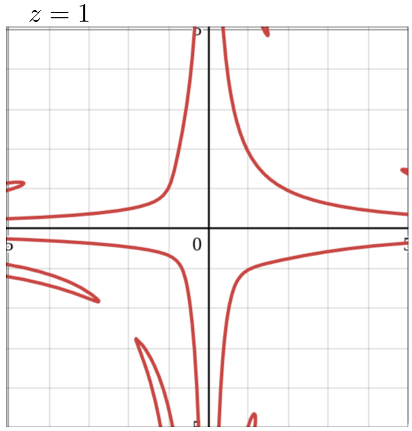
2.4 Найдите уравнения линий уровня потенциала(эквипотенциальных линий). Изобразите линии уровня потенциала.

Пусть $z = u(x, y), \forall C = 0$

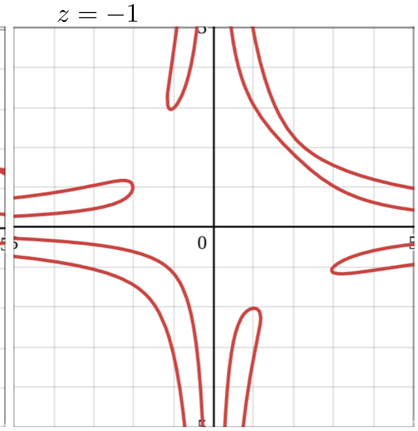
$z = 0$



$z = 1$



$z = -1$



2.5 Докажите ортогональность найденных векторных линий поля и линий уровня потенциала. Проиллюстрируйте ортогональность на графике.

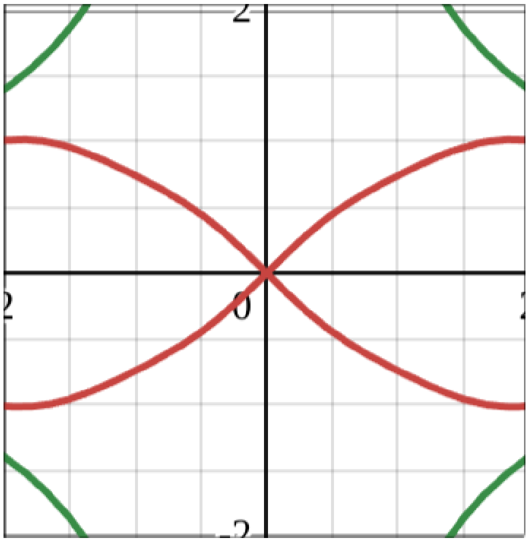
Из уравнения линий уровней:

$$u(x, y) = C du = 0$$

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = \overrightarrow{grad} u \cdot d\overrightarrow{r} = 0$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{grad} u \perp d\overrightarrow{r} \\ \overrightarrow{grad} = \overrightarrow{H} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{H} \perp d\overrightarrow{r}$$

Так как касательный вектор к $u(x, y) = C$ перпендикулярно вектору поля, то векторные линии ортогональны линиям уравнения потенциала.



Если наклонить голову и присмотреться, то можно будет заметить ортогональность

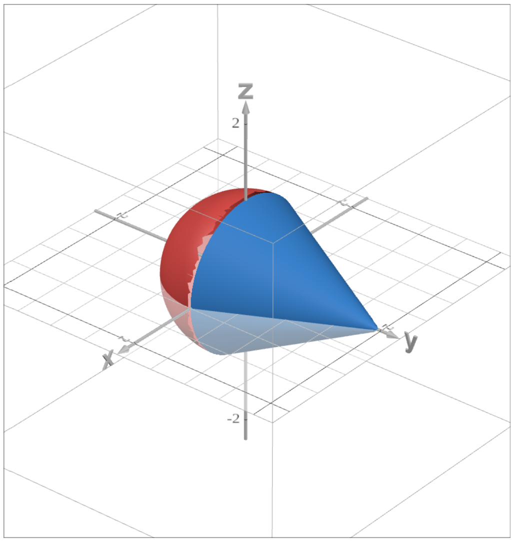
2.6 Выберите какую-либо векторную линию поля и зафиксируйте на ней точки A и B, выбрав для них числовые координаты. Вычислите работу поля вдоль этой линии, используя найденный в пункте 3 потенциал.

Пусть $A(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ $B(\sqrt{2\pi}, \sqrt{2\pi})$
$W = u(B) - u(A) = \frac{1}{\pi} + \frac{2}{\pi} = \frac{3}{\pi}$ Дж

3 Дано тело $T : y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0$, ограниченное некоторыми поверхностями $y + 2\sqrt{x^2 + z^2} = 2$; $\overrightarrow{a} = \cos(zy)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + (e^{y2} - 5z)\overrightarrow{k}$; $\alpha = ABC$; $l = Oy$.

$$T : \begin{cases} y + \sqrt{1 - x^2 - z^2} = 0 \\ y + 2 \cdot \sqrt{x^2 + z^2} = 0 \end{cases}$$

3.1 Изобразите тело T на графике в пространстве.



3.2 Вычислите поток поля $\overrightarrow{a}$ через боковую поверхность тела T, образованную вращением дуги α вокруг оси l в направлении внешней нормали поверхности тела T.

$\overrightarrow{a} = \cos(zy)\overrightarrow{i} + x\overrightarrow{j} + (ey^2 - 5z)\overrightarrow{k}$
$\alpha = ABC$
$l = Oy$;
Посчитаем поток:
$\Phi = \int\int_S (\overrightarrow{a}, d\overrightarrow{\sigma})$
Спроектируем σ на xoz
$\int\int_S(\overrightarrow{a}, d\overrightarrow{S_i}) = \int\int_S(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{h})ds$
Нормаль сферы на бесконечно малом участке лежит на одной прямой с радиус-ветором от Ф до данного кусочка, соответственно, нормаль считается так:
$\overrightarrow{n} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j} + z\overrightarrow{k}$ (поскольку сфера единичная)
Воспользуемся теоремой Гаусса-Остроградского:
$\int\int_S(\overrightarrow{a}, d) = \int\int_V \int div\overrightarrow{a}dV$
$div\overrightarrow{a} = \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial a}{\partial z} = \frac{\partial \cos(yz}{\partial x} + \frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial a(ey^2 - 5z)}{\partial z} = -5$
$-5\int\int_V \int dV = -10\pi$

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	25
Гонин Сергей	25
Темиров Тимур	25
Малышева Алиса	25