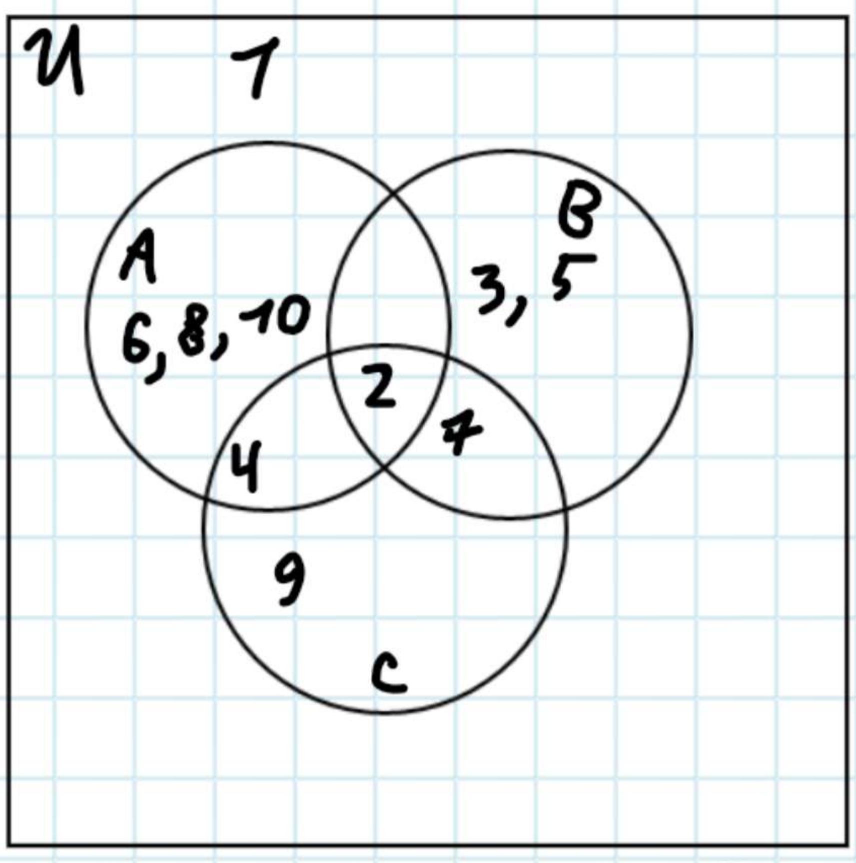
Домашнее задание №1 Set Theory
Выполнил: Каренин Константин Группа: M3104

1. Определите истинность заданных утверждений. Считайте, что $a \neq b$ – урэлементы.
(a) $a \in \{\{a\}, b\}$
(b) $a \in \{a, \{b\}\}$
(c) $\{a\} \in \{a, \{a\}\}$
(d) $\{a\} \subset \{a, b\}$
(e) $\{a\} \subseteq \{\{a\}, \{b\}\}$
(f) $\{\{a\}\} \subset \{\{a\}, \{a, b\}\}$
(g) $\{\{a\}, b\} \subseteq \{a, \{a, b\}, \{b\}\}$
(h) $\varnothing \in \varnothing$
(i) $\varnothing \subseteq \varnothing$
(j) $\varnothing \subset \varnothing$
(k) $\varnothing \in \{\varnothing\}$
(l) $\varnothing \subseteq \{\{\varnothing\}\}$
(m) $\{\varnothing, \varnothing\} \subset \{\varnothing\}$
(n) $\{\{\varnothing\}\} \subset \{\{\varnothing\}, \{\varnothing\}\}$
(o) $a \in 2^{\{a\}}$
(p) $2^{\{a,\varnothing\}} \subset 2^{\{a,b,\varnothing\}}$
(q) $\{a, b\} \subseteq 2^{\{a,b\}}$
(r) $\{a, a\} \in 2^{\{a,a\}}$
(s) $\{\{a\}, \varnothing\} \subseteq 2^{\{a,a\}}$
(t) $\{a, \{a\}\} \subset 2^{\{a,2^{\{a\}}\}}$
(u) $\{\{a, \{\varnothing\}\}\} \subseteq 2^{\{a,2^{\varnothing}\}}$

a) false
b) true
c) true
d) true
e) false
f) true
g) false
h) false
i) true
j) false
k) true
l) true
m) false
n) false
o) false
p) true
q) false
r) true
s) true
t) false
u) true

2. Дано множество-универсум[1] $\mathfrak{U} = \{1, 2, \dots, 10\}$ и его подмножества: $A = \{x \mid x$ – чётное$\}$, $B = \{x \mid x$ – простое[2]$\}$, $C = \{2, 4, 7, 9\}$. Нарисуйте диаграмму Венна для заданных множеств, отметьте на ней все элементы и найдите:
(a) $B \triangle (A \cap C)$
(b) $\overline{B} \setminus (A \triangle C)$
(c) $\overline{A \cup C} \cup (C \triangle B)$
(d) $|\{A \cup B \cup 2^{\varnothing} \cup 2^{\mathfrak{U}}\}|$
(e) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B$
(f) $2^{B \cap C} \setminus \{2^{|2^{\{\varnothing\}}|}, |\overline{B \cap C}|\}$



$A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$
$B = \{2, 3, 5, 7\}$
$C = \{2, 4, 7, 9\}$

a) $B \triangle (A \cap C) = B \triangle \{2,4\} = \{3,4,5,7\}$
b) $\overline{B} \setminus (A \triangle C) = \{1,4,6,8,9,10\} \setminus \{6,8,9,10\} = \{1,4\}$
c) $\overline{A \cup C} \cup (C \triangle B) = \{1,3,5\} \cup \{3,4,5,9\} = \{1,3,4,5,9\}$
d) $|A \cup B \cup 2^{\varnothing} \cup 2^{\mathfrak{U}}| = |\{\dots\}| = 1$
e) $(2^A \cap 2^C) \setminus 2^B = \{\{2,4\},\{2\},\{4\},\varnothing\} \setminus 2^B = \{\{2,4\},\{4\}\}$
f) $2^{B \cap C} \setminus \{2^{|2^{\{\varnothing\}}|}, |\overline{B \cap C}|\} = \{\{2,7\},\{7\},\{2\},\varnothing\}$

3. Даны следующие множества[3]:
* $A = \{1, 2, 4\}$
* $B = \{\square, 🐈\} \cup \varnothing$
* $C = 2^{\varnothing} \setminus \{\varnothing\}$
* $D = \{🐈, |2^{\{\varnothing, C\}}|\}$
* $E = 2^{A \setminus D} \cap 2^{\{|B \setminus D|\}}$
* $F = 2^{\{\{\varnothing,\varnothing\} \setminus \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing\} \triangle C, \{\varnothing, C\}, 2^{\varnothing}\}}$

Найти:
(a) $A \triangle D$
(b) $E \triangle 2^C$
(c) $B \times E$
(d) $E \times 2^B$
(e) $D^{|C|}$
(f) F^3

$A = \{1,2,4\}$
$B = \{\square, 🐈\}$
$C = \varnothing$
$D = \{🐈, 2\}$
$E = \{\varnothing, \{1\}\}$
$F = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$

a) $A \triangle D = \{1, 4, 🐈\}$
b) $E \triangle \{\varnothing\} = \{\{1\}\}$
c) $B \times E = \{(\square, \varnothing), (\square, \{1\}), (🐈, \varnothing), (🐈, \{1\})\}$
d) $E \times 2^B = \{\varnothing, \{1\}\} \times \{\varnothing, \{\square\}, \{🐈\}, \{\square, 🐈\}\} =$
$= \{(\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\{\square\}), (\varnothing,\{🐈\}), (\varnothing,\{\square,🐈\}), (\{1\},\varnothing),$
$(\{1\},\{\square\}), (\{1\},\{🐈\}), (\{1\},\{\square,🐈\})\}$
e) $D^{|\varnothing|} = \{()\}$
f) $F^3 = \{(\varnothing,\varnothing,\varnothing), (\varnothing,\varnothing,\{\varnothing\}), (\varnothing,\{\varnothing\},\varnothing), (\{\varnothing\},\varnothing,\varnothing),$
$(\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing\}), (\{\varnothing\},\varnothing,\{\varnothing\}), (\{\varnothing\},\{\varnothing\},\varnothing), (\{\varnothing\},\{\varnothing\},\{\varnothing\})\}$

4. Найдите все множества A, B и C, которые удовлетворяют следующим условиям:

$$A = \{1, |B|, |C|\}$$
$$B = \{2, |A|, |C|\}$$
$$C = \{1, 2, |A|, |B|\}$$

$|A|: 1, 2, 3$
$|B|: 1, 2, 3$
$|C|: 2, 3, 4$

$|C| = 4$, не подходит, т.к. знач. $|A|$ и $|B|$, кот. нет в C идентичны и тогда:

$C_1 = \{1, 2, 3\}$

$A = \{1, |B|, 3\}$
$B = \{2, |A|, 3\}$

$|A|: 2, 3$
$|B|: 2, 3$

$|B| = 3$ – невозможно из-за знач. $|A|$

$A_2 = \{1, 2, 3\}$
$B = \{2, 3\}$

$A_1 = \{1, 3\}$
$B = \{2, 3\}$
– не подходит т.к. в этом случае $C \neq \{1, 2, 3\}$

$C_2 = \{1, 2\}$

$A = \{1, |B|, 2\}$
$B = \{2, |A|\}$

$|A|: 2, 3$
$|B|: 1, 2$

$|A| = 3$ – невозмож. из-за зн. $|B|$
$|B| = 2$ – невозмож. из-за зн. $|A|$

$B_1 = \{2\}$
$A = \{1, 2\}$

Ответ: 1) $C = \{1, 2, 3\}$ $B = \{2, 3\}$ $A = \{1, 2, 3\}$

2) $C = \{1, 2\}$ $B = \{2\}$ $A = \{1, 2\}$

5. Изобразите на графиках $\mathbb{R}^2$ следующие множества точек:

(a) $\{1, 2, 3\} \times [1; 3]$

(b) $[1; 4) \times (2; 4] \setminus \{\langle 2, 3\rangle\}$

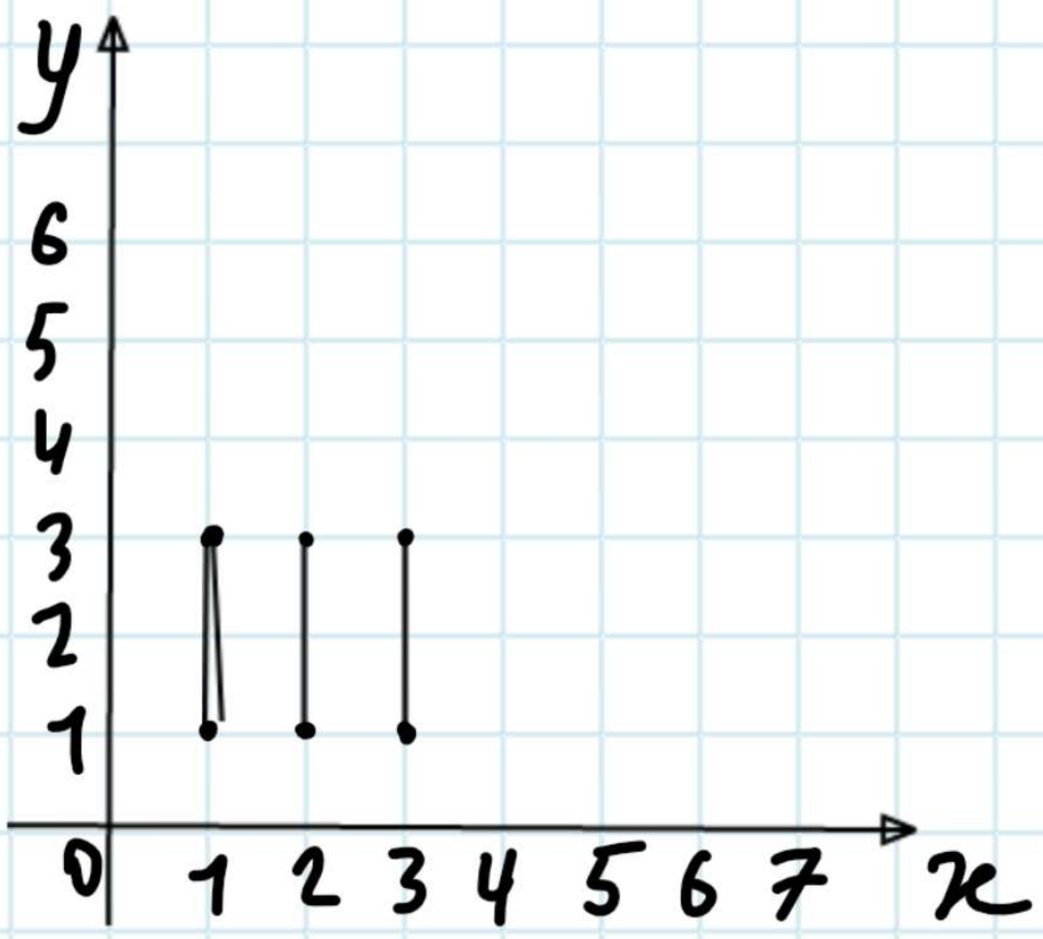
(c) $([1; 6] \times (1; 5]) \setminus ([4; 5] \times (2; 4))$

(d) $\{\langle x, y\rangle \in [1; 5] \times [1; 4] \mid (y > x) \vee (x \geq 4)\}$

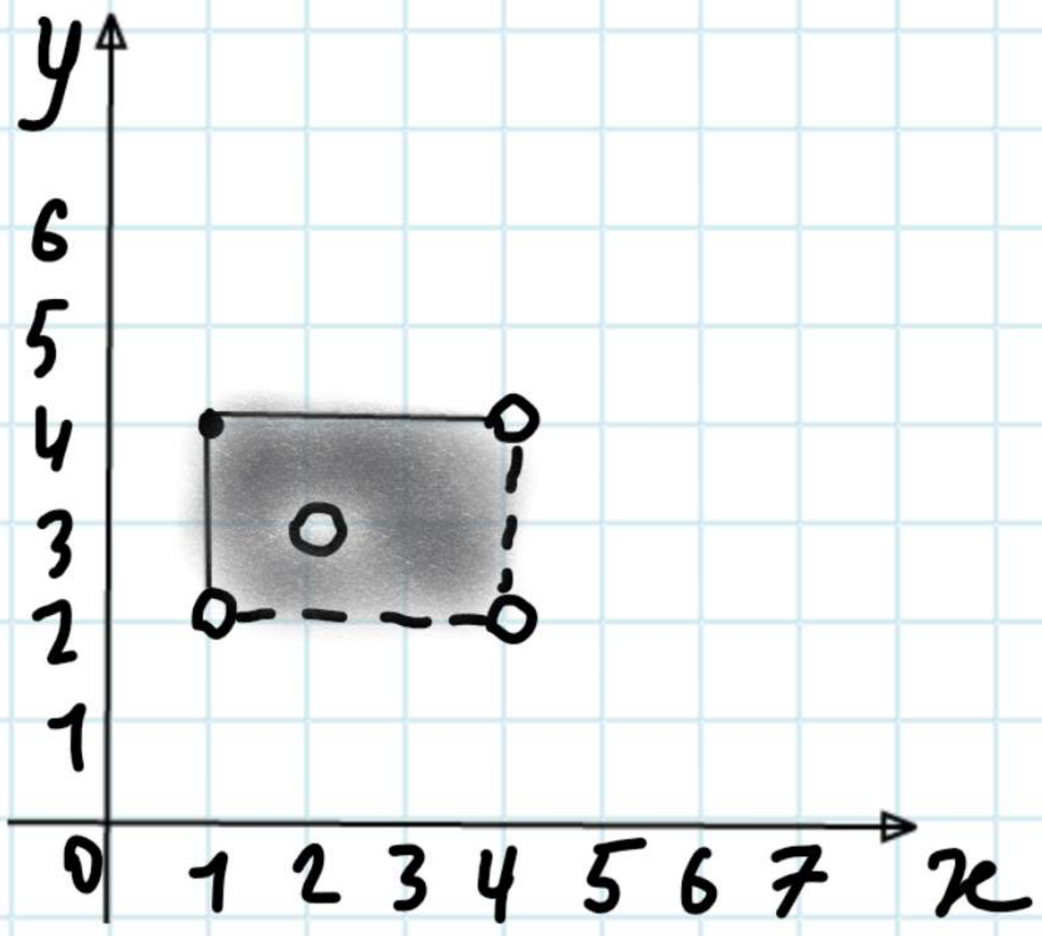
(e) $\{\langle x, y\rangle \in (1; 5]^2 \mid 4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 \leq 36\}$

(f) $\{\langle x, y\rangle \in \mathbb{N}^2 \mid \exists z \in \mathbb{N} : x^3 + y^3 = z^3\}$

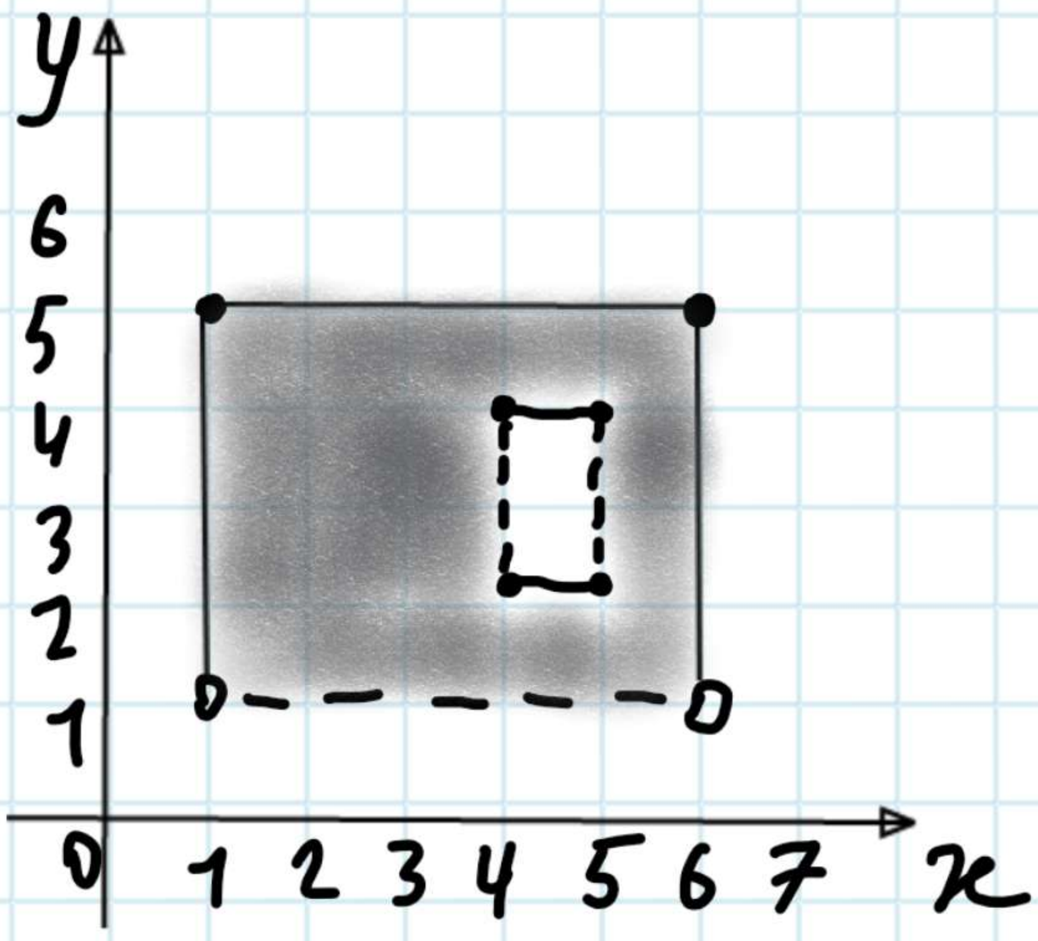
a)



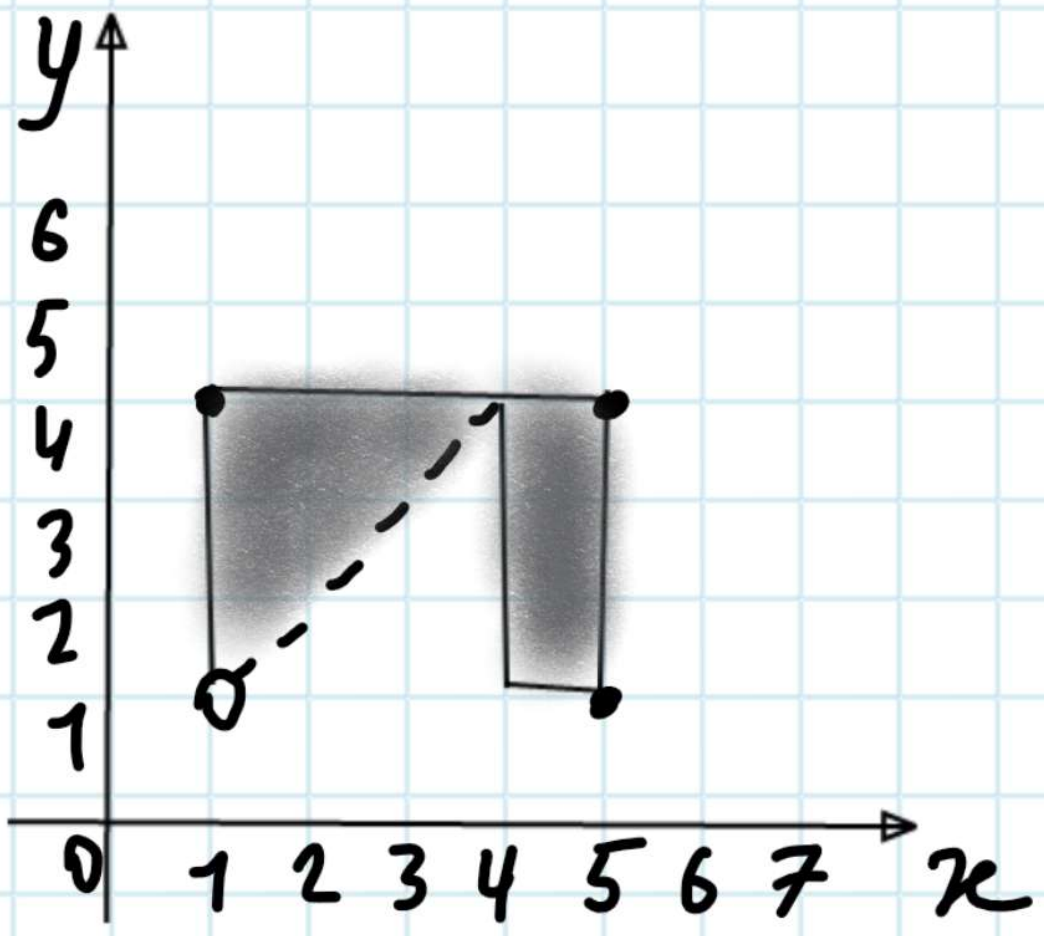
б)



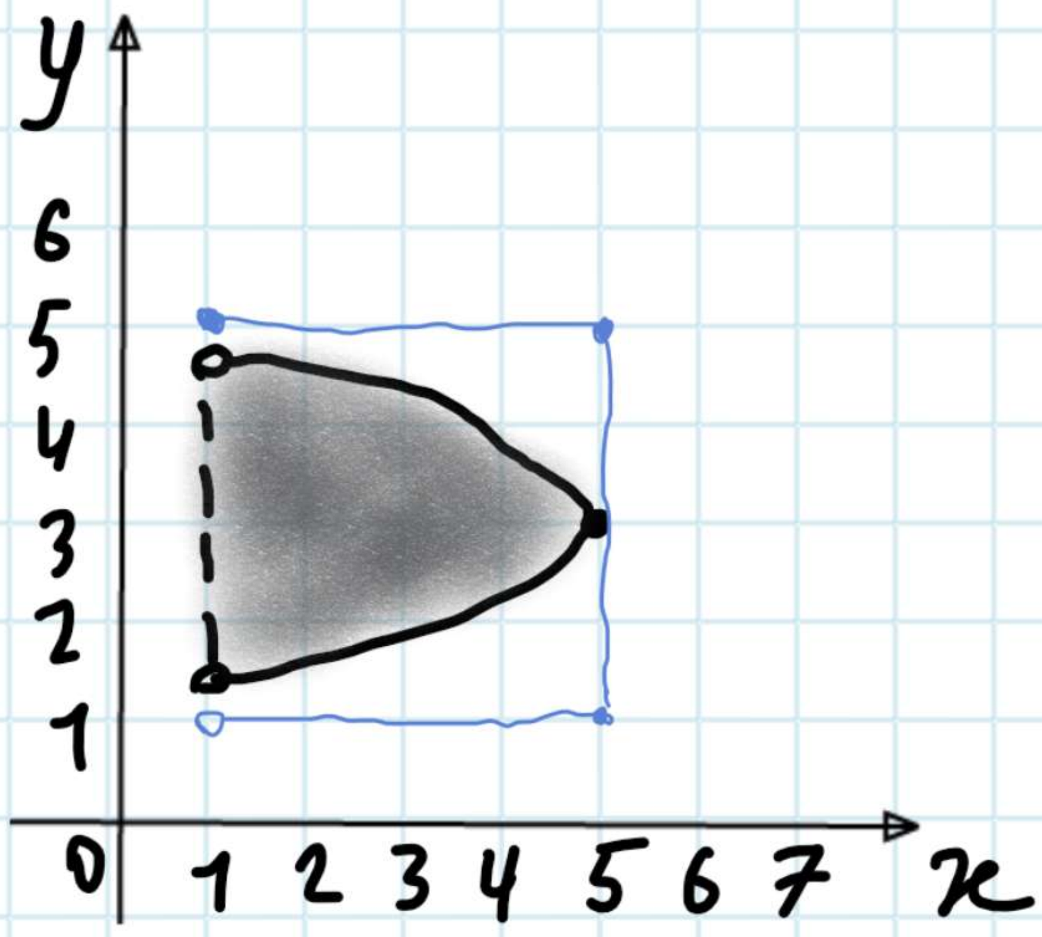
c)



d)



e)



● – не входит (нужен для нач. гран.)

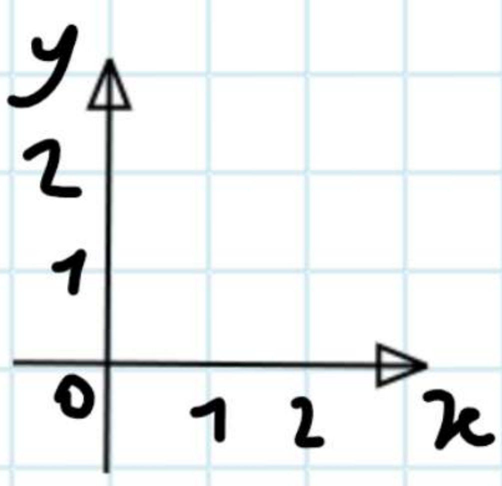
$$4(x-2)^2 + 9(y-3)^2 \leq 36$$

$$\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} \leq 1$$

(эллипс)

f) По Th. Ферма невозможно разложить z^n на сумму x^n и y^n при $x, y, z \in \mathbb{N}$ и $n > 2$

$\Rightarrow \varnothing$



6. Подробно докажите (или опровергните) следующие утверждения:

(a) Если $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$, то $A \subseteq C$.

(b) $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

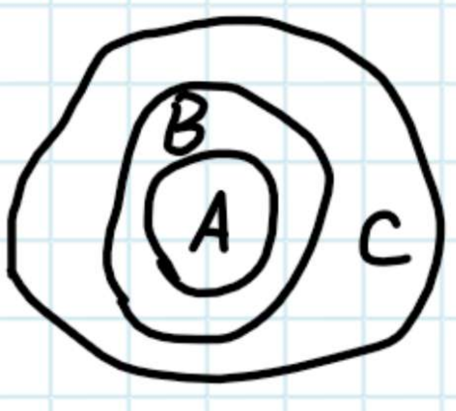
(c) Множество рациональных[4] чисел $\mathbb{Q}$ счётно.

(d) $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ — несчётное множество.

a) Если A — подмножество B, то все эл. A принадлежат B, аналогично для B и C

если $\forall x: x \in A \to x \in B$, а $\forall x: x \in B \to x \in C$,

то $\forall x: x \in A \to x \in C$



b) P(A) — множество всех подмножеств

$P(\{1\}) = \{\varnothing, \{1\}\}$ $|P(\{1\})| = 2$

$|2^{|\{1\}|}| = 2$

Допустим, что утверждение верно для $|A| = n$

Докажем для $|A| = n+1$: при добавлении очередного эл. в A (т.е. увелич. $|A|$) в P(A) добавляются множества с новым элементом и каждым множеством которое там уже было (т.е. их кол-во увеличится в 2 раза)

тогда $|P(A)| = 2^{|A|}$

Пример: Пусть $A = \{1,2\}$

$P(\{1,2\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$ $| = 2^{|\{1,2\}|} = 4$

$\cup 3$ $\cup 3$ $\cup 3$ $\cup 3$

Добавим в A 3:

$P(\{1,2,3\}) = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$

Таким образом при добавлении нового элемен. в A $|P(A)|$ умножается на 2

c)

n \ m	1	2	3	4	5	6	…
1	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	…
2	$\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{6}$	…
3	$\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{6}$	…
4	$\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{6}$	…
5	$\frac{5}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{5}{6}$	…
6	$\frac{6}{1}$	$\frac{6}{2}$	$\frac{6}{3}$	$\frac{6}{4}$	$\frac{6}{5}$	$\frac{6}{6}$	…
…	…	…	…	…	…	…	…

Составив такую таблицу и следуя по — пути получим последовательность, где встречается все рациональные числа, тогда множество рациональных чисел счётно

d) $|P(N)| = 2^{|N|}$ (по доказанному в b))

Также между булеаном N и N нет биекции

В таком случае мы не сможем сопоставить натуральное число каждому элементу P(N), тогда оно несчётное