Специальные разделы высшей математики

Дифференциальные уравнения

Выполнили:
Каренин Константин
Темиров Тимур
Гонин Сергей
Малышева Алиса

Группа: M3104

Преподаватель: Сарычев Павел

Университет ИТМО

03.06.2024

1 Скорость роста площади молодого листа виктории-регии, имеющего, как известно, форму круга, пропорциональна окружности листа и количеству солнечного света, падающего на лист. Последнее в свою очередь пропорционально площади листа и косинусу угла между направлением лучей и вертикалью. Найдите зависимость между площадью S листа и временем t, если известно, что в 6 часов утра эта площадь равнялась 1600 см^2, а в 6 часов вечера того же дня 2500 см^2. (Предполагается, что наблюдение производилось на экваторе в день равноденствия, когда угол между направлением лучей солнца и вертикалью можно считать равным $90°$ в 6 часов утра и в 6 часов вечера и $0°$ в полдень.)

$\frac{ds}{dt}$ - Скорость роста.
$S = \pi r^2$
$l = 2\pi r$ - окружность листка
$l = 2\sqrt{\pi}\sqrt{S}$
Количество света: $S\cos\phi$
Тогда:
$\frac{ds}{dt} = klS\cos\phi$, где k - коэффициент пропорциональности.
$\frac{ds}{dt} = 2k\sqrt{\pi}S^{\frac{3}{2}}\cos\phi$
В полночь: $\phi = 0$
в 6 утра и 6 вечера: $\phi = \frac{\pi}{2}$
$S(t_1) = 1600$ см^2, $t_1 = 0$
$S(t_2) = 2500$ см^2, $t_2 = 12$
$\phi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}t$
Тогда составим наше ДУ:
$\frac{ds}{dt} = 2k\sqrt{\pi}S^{\frac{3}{2}}\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12}t)$
$\frac{ds}{dt} = 2k\sqrt{\pi}S^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{\pi}{12}t)$ домножим на dt
$ds = 2k\sqrt{\pi}S^{\frac{3}{2}}\sin(\frac{\pi}{12}t)dt$ разделим на $S^{\frac{3}{2}}$
$\frac{ds}{S^{\frac{3}{2}}} = 2k\sqrt{\pi}\sin(\frac{\pi}{12}t)dt$
$\int\frac{1}{S^{\frac{3}{2}}}ds = \int 2k\sqrt{\pi}\sin(\frac{\pi}{12}t)dt$
Решим правую часть:
$\int 2k\sqrt{\pi}\sin(\frac{\pi}{12}t)dt$ вынесем коэффициенты
$2k\sqrt{\pi}\int\sin(\frac{\pi}{12}t)dt$
Подставим: $x = \frac{\pi}{12}t$, тогда $t = \frac{12x}{\pi}$ и $dt = \frac{12}{\pi}dx$
$2\pi k\int\frac{12\sin x}{\pi}dx$ вычислим табличный интеграл
Получаем: $\frac{-24k\cos x}{\sqrt{\pi}}$
Проведем обратную замену:
$\frac{-24k\cos\frac{\pi}{12}t}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{-2}{\sqrt{S}} = C - \frac{24k\cos\frac{\pi}{12}t}{\sqrt{\pi}}$ Приведем к общему знаменателю
$\frac{-2}{\sqrt{S}} = \frac{C\sqrt{\pi}-24k\cos\frac{\pi}{12}t}{\sqrt{\pi}}$
$\frac{\sqrt{S}}{-2} = \frac{\sqrt{\pi}}{C\sqrt{\pi}-24k\cos\frac{\pi}{12}t}$ домножим обе части на -2
$\sqrt{S} = \frac{-2\sqrt{\pi}}{C\sqrt{\pi}-24k\cos\frac{\pi}{12}t}$ возведем обе части в квадрат
Итоговая зависимость S от t:
$s = \frac{4\pi}{-576k^2\cos^2(\frac{\pi}{12}t)+48\sqrt{\pi}Ck\cos(\frac{\pi}{12}t)-\pi C^2}$

2 Пружинный маятник движется по закону: $y + p(t)y + q(t)y = 0$

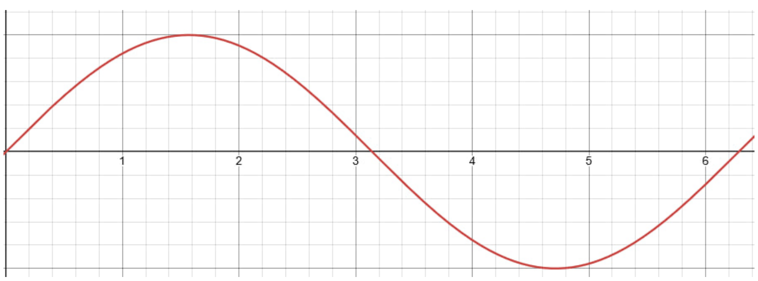
2.1 Выясните, почему движение маятника описывается дифференциальным уравнением такого вида.

$y(t)$ - функция зависимоти координаты по времение $\Rightarrow y'(t)$ - моментальное изменение координаты по времени, тоесть моментальная скорость, тогда $y''(t)$ - моментальное изменение скорости по времени, тоесть моментальное ускорение.
$p(t), q(t)$ - это константы, если быть точнее, $p(t)$ - это частота колебаний, а $q(t)$ - это декремент затухания. Общая формула описывает закон движения пружинного маятника. Всё это выводится из 2-го и 3-го закона Гука.

2.2 Установите характер данного движения (периодический, апериодический) при $p(t) = 4, q(t) = 5$.

$y + 4(t)y + 5(t)y = 0$ - это однородное ЛДУ, решим его:
$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$
$\lambda = -2 \pm i \quad k = 1$
$y(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + e^{-2t}(C_3 \cos t - C_4 \sin t) = e^{-2t}(D_1 \cos t + D_2 \sin t)$
Период равен 1 секунде, из чего следует, что движение периодичное.

2.3 Изобразите закон движения в системе координат.



2.4 Убедитесь в линейной независимости фундаментальной системы решений данного ДУ, выпишите вронскиан.

$$W = [y_1, y_2] = \begin{vmatrix} e^{-2x}(\cos x + \sin x) & e^{-2x}(\cos x - \sin x) \\ -e^{-2x}(\cos x + 3\sin x) & e^{-2x}(\sin x - 3\cos x) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{-2x}(\cos x + \sin x)(e^{-2x}(\cos x + \sin x - \sin x - \cos x)) - e^{-2x}(\cos x - \sin x)(e^{-2x}(\cos x + \sin x - \sin x + \cos x)) =$$

$$= 2e^{-4x} \cos x(\cos x - \sin x)$$

Существует интервал $[\frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}]$ на котором вронскиан не нулевой $\Rightarrow$ система линейно независима

2.5 Составьте линейное неоднородное дифференциальное уравнение (ЛНДУ) с правой частью $f(t) = t^2 e^{2t}$. Выясните физический смысл функции $f(t)$.

Данная $f(t)$ отражает колебания - затухающее
$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = t^2 e^{2t}$ - ЛНДУ

2.6 Решите ЛНДУ методом вариации произвольных постоянных.

$y''(t) + 4y'(t) + 5y(t) = t^2 e^{2t}$ - ЛНДУ
$y_{O.O} = e^{-2t}(D_1 \cos t + D_2 \sin t$
$f(t) = t^2 e^{2t} = e^{2t} M_2(t)$, тогда
$y_0 = e^{2t}(At^2 + Bt + C$
$y_0' = 2e^{2t}(At^2 + Bt + C) + e^{2t}(2At + B) = e^2 t(2At^2 + (2A + 2B)t + (2C + B))$

$y_0'' = e^2t(2At^2 + (2A+2B)t + (2C+B)) + e^{2t}(4At + (2A+2B)) = e^{2t}(4At^2 + (8A+4B)t + (2A+4B+4C))$

$\begin{cases} 4A+2A+A=1 \\ 8A+4B+2A+2B+B=0 \\ 2A+4B+4C+2C+B+C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{1}{7} \\ 10A+7B=0 \\ 2A+5B+7C=0 \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{1}{7} \\ B=-\frac{10}{7\cdot 7} \\ 7C=-2A-5B \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{1}{7} \\ B=-\frac{10}{49} \\ 7C=-2A-5B \end{cases}$ $\begin{cases} A=\frac{1}{7} \\ B=-\frac{10}{49} \\ C=\frac{36}{49} \end{cases}$

$y = e^{-2t}(D_1 \cos t + D_2 \sin t) + e^{2t}(\frac{1}{7}t^2 - \frac{10}{49}t + \frac{36}{49})$

3 Дана система линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} y' = z + \cos x, \\ z' = 2y + z + 5\sin x \end{cases}$$

Найдите методом исключения общее решение этой системы.

$z'_x = \frac{dz}{dx}(y' - \cos x) = y''_{xx} + \sin x$

$$z = y' - \cos x z' = 2y + z + 5\sin x$$

$y'' + \sin x = 2y + (y' - \cos x) + 5\sin x$
$y'' - y' - 2y = 4\sin x - \cos x$
Общее однородное: $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$
$\lambda_1 = 2, \lambda = -1$
$y_{O.O} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$
$y_0 = A\sin x + B\cos x$
$y'_0 = A\cos x - B\sin x$
$y''_0 = -A\sin x - B\cos x$
$(-A\sin x - B\cos x) - (A\cos x - B\sin x) - 2(A\sin x + B\cos x) = 4\sin x - \cos x$

$$\begin{cases} -3A + B = 4 \\ A + 3B = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1.1 \\ B = 0.7 \end{cases}$$

$y_0 = -1.1\sin x + 0.7\cos x$
$y_{O.H} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - 1.1\sin x + 0.7\cos x$
$z = y' - \cos x$
$y' = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 1.1\cos x - 0.7\sin x$
$z = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 2.1\cos x - 0.7\sin x$

$$\text{Ответ: } \begin{cases} y = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 1.1\cos x - 0.7\sin x \\ z = 2C_1 e^{2x} - C_2 e^{-x} - 2.1\cos x - 0.7\sin x \end{cases}$$

4 Примените операционный метод для решения следующих задач Коши:

4.1

$$\begin{cases} x' = -2y - 3e^{-2t},\ x(0) = -1, \\ y' = 2x - 4y - 2e^{-2t},\ y(0) = -1 \end{cases}$$

$x(t) \to X(p)$
$x'(t) \to pX(p) - x(p) = X(p)p + 1$
$y(t) \to Y(p)$
$y'(t) \to pY(p) + 1$
$e^{(-2t)} \to \frac{1}{p+2}$

$$\begin{cases} pX + 1 = -2Y - \frac{3}{p+2} \\ pY + 1 = 2X - 4Y - \frac{2}{p+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} pX = -2Y - \frac{p+5}{p+2} \\ pY = 2X - 4Y - \frac{p+4}{p+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2Y = -pX - \frac{p+5}{p+2} \\ (p+4)Y = 2X - \frac{p+4}{p+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = -\frac{p}{2}X - \frac{p+5}{2(p+2)} \\ \frac{-p(p+4)}{2}X - \frac{(p+4)(p+5)}{2(p+2)} = 2X - \frac{p+4}{p+2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X\frac{(p+2)^2}{2} = \frac{(p+4)}{p+2} - \frac{(p+5)(p+4)}{2(p+2)} \\ Y = -\frac{p}{2}x - \frac{p+5}{2(p+2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X\frac{(p+2)^2}{2} = \frac{(p+4)(2-p-5)}{2(p+2)} \\ Y = -\frac{p}{2}x - \frac{p+5}{2(p+2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X = -\frac{(p+4)(p+3)}{(p+2)^3} \\ Y = \frac{(p+4)(p+3)p}{(p+2)^3 2} - \frac{p+5}{2(p+2)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} Y = -\frac{1}{p+2} - \frac{2}{(p+2)^2} - \frac{2}{(p+2)^3} \\ X = -t^2e^{-2t} - 3te^{-2t} - e^{-2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = -t^2e^{-2t} - 3te^{-2t} - e^{-2t} \\ y(t) = -t^2e^{-2t} - 2te^{-2t} - e^{-2t} \end{cases}$$

4.2

$$x'' + 2x' + 17x = \begin{cases} 136,\ t \in [0;2),\ x(0) = -2, \\ 0,\ t \notin [0;2),\ x'(0) = 10 \end{cases}$$

$x \to X(p)$
$x' \to pX(p) - A$
$x'' \to p^2X(p) - Ap - B$

$$p^2X - Ap - B + pX - A + 17x = \begin{cases} 136,\ t \in [0;2) \\ 0,\ t \notin [0;2) \end{cases}$$

$X(p^2+p+17)-Ap-A-B=C$
$X(p^2+p+17)=A(p+1)+B+C$

$$C=\begin{cases}136,\ t\in[0;2)\\0,\ t\notin[0;2)\end{cases}$$

$X=\frac{A(p+1)+B+C}{p^2+p+17}$
$X=\frac{Ap}{p^2+p+17}+(A+B+C)\frac{1}{p^2+p+17}$
$x(t)=A(e^{\frac{-t}{2}}\cos(\frac{\sqrt{67}}{2}t)-\frac{1}{\sqrt{67}}e^{\frac{-1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{67}}{2}t)+(A+B+C)(\frac{2}{\sqrt{67}}e^{\frac{-1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{67}}{2}t)$, где

$$\begin{cases}B=0,A=-2,C=136 \text{ при } t\in[0;2)\\B=10,A=0,C=0 \text{ при } t\notin[0;2)\end{cases}$$

Участник	Вклад в %
Каренин Константин	25
Гонин Сергей	25
Темиров Тимур	25
Малышева Алиса	25