第一章 图的基本概念

本次课主要内容

(一)、连通性

(二)、围长、周长、直径、半径

(三)、圈的应用---二部图的判断

网络的抽象就是一个图。对图的路与连通性进行研究，在计算机网络研究中有十分重要的意义。

研究网络信息传递，信息寻径是主要问题之一，这恰对应于图中路的研究-----已经介绍

网络可靠性也是主要问题之一，它与图的连通性问题相对应。

（一）、无向图的连通性

定义 设无向图$G=\langle V, E\rangle$， $\forall u, v\in V$，若u, v之间存在通路，则称u, v是**连通的**，记作$u\sim v$。

$\forall v\in V$，规定$v\sim v$。

定义 若无向图G是平凡图或G中任何两个顶点都是连通的，则称G为**连通图**，否则称G是**非连通图**。

说明： 完全图$K_n(n\geqslant 1)$都是连通图

零图$N_n(n\geqslant 2)$都是非连通图。

连通图与连通分支

定义　　设无向图$G=\langle V,E\rangle$，如果V能划分成$\{V_1,V_2,\ldots,V_k\}$，当且仅当两顶点在同一个子集时才连通，则称导出子图$G[V_i]$ $(i=1,2,\ldots,k)$为G的**连通分支**，**连通分支数**k常记为$\omega(G)$。

说明　（1）图G的每个连通分支即为图的极大连通子图。极大连通子图：G的连通子图且此连通子图以外的任意一点加入此子图都不再连通。

（2）若G为连通图，则$\omega(G)=1$。

若G为非连通图，则$\omega(G)\geqslant 2$。

（3）在所有的n阶无向图中，n阶零图是连通分支数最多的，为n。

连通图的例子 (1)

例： 有2k部电话交换台，每台至少与k个台有直通线路，证明任两台之间可以通话。

- 注意：如果直接证明则需找出（或需证明）任意两个交换台之间有通路， 这很困难或者不可能，因为题目中并没有给出具体的结构信息。试图用反证法。

证明：先把交换台之间的通话关系用图表示出来。 把交换台作为图G的顶点， 仅当两台之间有直通线路时在相应的两点之间连一条边，于是图G有2k个顶点，每顶的次数至少为k。需要证明G是连通图。

- 用反证法： 假设G不连通，则至少存在两个连通分支， 且存在一个连通分支， 其顶点数小于等于k，不妨设为这个连通分支为G1。则在G1中顶点的最大度数不超过k-1，与每顶的度数至少是k矛盾。 则G是连通图， 即任意两台之间可以通话。

连通图的例子（2）

例 证明：在n阶连通图中

(1) 至少有n-1条边；

(2) 如果恰有n-1条边，则至少有一个奇度点。

说明：针对一般的图，不需要简单图。

（1）证明：在n阶连通图中，至少有n-1条边；

证法一：由于G连通，所以，存在如下形式的道路：

$$v_1 \longrightarrow v_2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow v_{n-1} \longrightarrow v_n$$

显然该道路至少含有n-1条边。(v_1,v_2, … , v_n是G的n个不同顶点)

连通图的例子（续）

证法二： 分类证明： **(1)** 若**G**中没有**1**度顶点，又因为**G**是连通图， 没有孤立点， 则最少度至少是**2**，由握手定理：

$$2m=\sum_{v\in V(G)} d(v)\geq 2n \Rightarrow m\geq n \Rightarrow m>n-1$$

（**2**）若**G**中有**1**度顶点**u**，对**G**的顶点数作数学归纳。

当**n=2**时，结论显然；设结论对**n=k**时成立。

当**n=k+1**时，考虑**G-u**,它仍然为连通图，所以，边数≥k-1。于是G的边数≥k 。

(2) 如果恰有n-1条边，则至少有一个奇度点。

证明： 反证法：若不然，G中无奇次点，则G中没有一次顶，又由于G是连通图无孤立点，则G中顶点度数至少为2，于是由握手定理：

$$2m=\sum_{v\in V(G)} d(v)\geq 2n \Rightarrow m\geq n \Rightarrow m>n-1$$

这与G中恰有n-1条边矛盾！

更进一步: 在n阶连通图中, 如果恰有n-1条边，则至少有一个悬挂点。

证明： 反证法：若不然，G中无悬挂点， 由于连通图无孤立点，则G中顶点度数至少为2，于是由握手定理：

$$2m=\sum_{v\in V(G)} d(v)\geq 2n \Rightarrow m\geq n \Rightarrow m>n-1$$

这与G中恰有n-1条边矛盾！

连通图的例子（3）

例：在仅两个奇次顶的图中， 其二奇次顶连通。

- 说明：直接证明此二奇次点之间有路连接是不可能的。 故采用反证法。
- 证明： 如果图G中恰有两个奇次顶 u, v,但在G中这两个奇次顶 u, v不连通， 则存在两个连通分支， 每个包含一个奇次点。 对于这两个分支而言， 皆有1个奇次点， 与握手定理的推论矛盾。

连通图的例子 （4）

不能用直接证明法的例子

- 1. 若G是简单图， 且 $m > \binom{n-1}{2}$ ，其中m为图G的边数， n为顶点数，则G是连通图。

基本思路： 假设G不连通， G至少有2个连通分支，取其一个连通分支， 其余构成另外一个部分，把G分成两个不连通的部分， 每个部分最多是完全图， 得到的边数加起来比给出的边数少， 得到矛盾

- 2.证明： 若G是 $\delta > \left[\frac{n}{2}\right]$ 的简单图， 则G是连通图。

基本思路： 假设G不连通， G至少有2个连通分支，至少存在一个连通分支的顶点数小于等于n/2,利用最少度得到矛盾

- 注：可以把条件减弱到δ ≥[n/2],但不能减弱到[n/2]-1。

- 3. 若G是连通简单图，G不是完全图， 证明G中有三个顶点u,v, w使得uv∈E(G),vw∈E(G)但uw∉E(G).

基本思路： 既然G不是完全图， 则存在两个点s, t, st∉E(G)。 由于G是连通图， 则s, t之间有路相连，不妨设P=v0(s)v1…vl(t)是s与t之间的路, 考察v0与v2之间是否有边。。。然后寻找满足条件的3个点。

关键是保持路的起点和终点是s, t,利用st无边

连通性性质：

定理：若图G不连通，则其补图连通

证明：只需证明补图中的任意两点之间有路。

对 $\forall u,v \in V(\bar{G})$，分类：（由于G不连通，以uv是否属于同一个连通分支分类）

（1）如果u, v属于G的同一分支，由于G是不连通图，则G至少有两个连通分支。即一定存在一个点和u,v不在一个连通分支，不妨设为w，则在G的补图中，u与w, v分别相邻，于是，u与v在G的补图中是连通的。

（2）如果u与v在G的两个不同连通分支中，则在G的补图中u与v相邻，因此，u与v在补图中也连通。

所以，若G不连通，G的补图是连通的。

说明：这个定理的等价表述为：G与其补图不能同时不连通。

或者：G与G的补图至少一个是连通图。

例：如G是连通图， G’是G的非空子图， |V(G’)|<|V(G)|,则G中有不属于G’的边e， e的一端属于V(G’),另外一端不属于V(G’).

思路：由于|V(G’)|<|V(G)|,且G’非空， 则G’中存在一点u，另外存在一点v不在G’中。 因为G连通， 则这两点在G中有一条路P(u,v)存在。从u出发沿着路P（u，v）前进，遇到第一个不属于G’的顶点w,P(u,v)上的一段P(u,w)的最后一条边即为所求的边e.

注意路的两个端点“顺序”（G’的顶点当起点， 非G’的顶点当终点）

上题可以延伸为：

如G是连通图， 对G的顶点集的任何一个划分成两个非空子集V_1和V_2 的划分， 则G中有边e， e的一端属于V_1，另外一端不属于V_2.

思路：V_1中存在一点u，V_2存在一点v。 因为G连通， 则这两点在G中有一条路P(u,v)存在。从u出发沿着路P(u，v)前进，遇到第一个不属于V_1的顶点w，P(u,v)上的一段P(u,w)的最后一条边即为所求的边e.

继续延伸。。

证明：G是连通图当且仅当V(G)的每个分成非空子集V_1与V_2的划分，总存在一条边， 它的两端分别属于V_1与V_2。

思路：和上题类似， 其实这题是上题的升级版。

证明： 必要性： 上题的证明

充分性： 直接证明任意两点之间有路可以证但有点麻烦，可以用反证法更简单点。

(二)、周长、围长、半径、直径

定义 设u, v为无向图G中任意两个顶点，若$u \sim v$，称u, v之间**长度最短的通路**为u, v之间的**最短路**，最短路的长度称为u, v之间的**距离**，记作$d(u, v)$。

当u, v不连通时，规定$d(u, v) = \infty$。

距离有以下性质：

(1) $d(u, v) \geqslant 0$，$u = v$时，等号成立。

(2) 具有对称性，$d(u, v) = d(v, u)$。

(3) 满足三角不等式：$\forall u, v, w \in V(G)$，则

$$d(u, v) + d(v, w) \geqslant d(u, w)$$

说明： 在完全图K_n $(n \geqslant 2)$中，任何两个顶点之间的距离都是1。

在n阶零图N_n $(n \geqslant 2)$中，任何两个顶点之间的距离都为∞。

❑ **定义：**

图的周长： 简单图G中最长圈的圈长称为该图的周长；

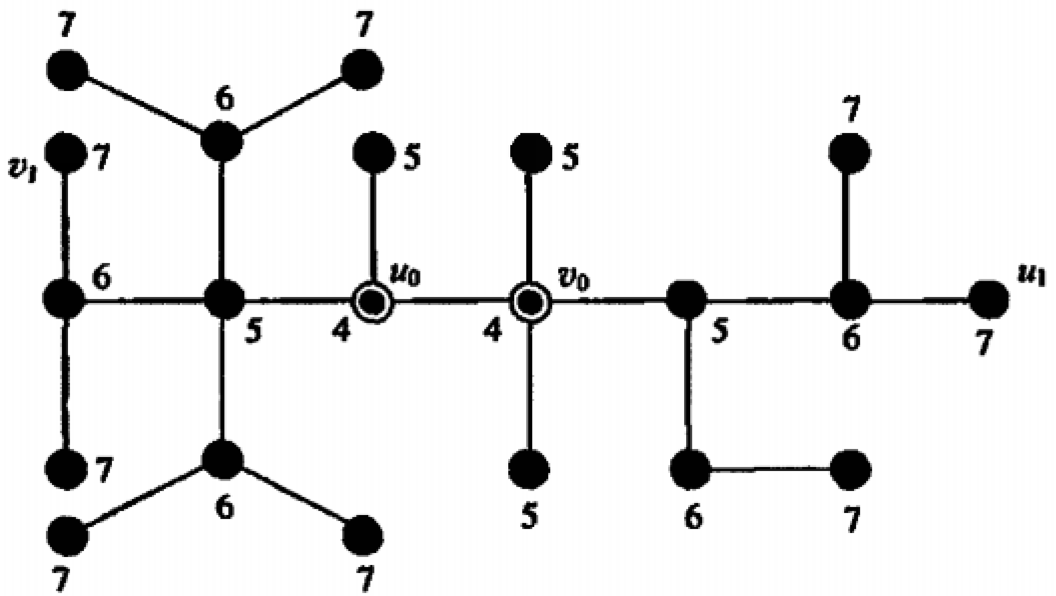
图的围长： 简单图中最短圈的长度称为该图的围长。

直径： 图中两顶间距离中的最大值称为该图的直径，记为d(G)，即 $d(G)=\max\{d(u,v) \mid \forall u,v\in V(G)\}$

图G的中心：使得$\max_{v\in V(G)} d(u,v)$最小的顶u；

G的半径记为r(G)， $r(G)=\min_{u\in V(G)}\max_{v\in V(G)} d(u,v)$

注： 1）d(v)，d(G)d的差别； 2）图G的半径等价于这个定义么？$r(G)=\min\{d(u,v) \mid \forall u,v\in V(G)\}$



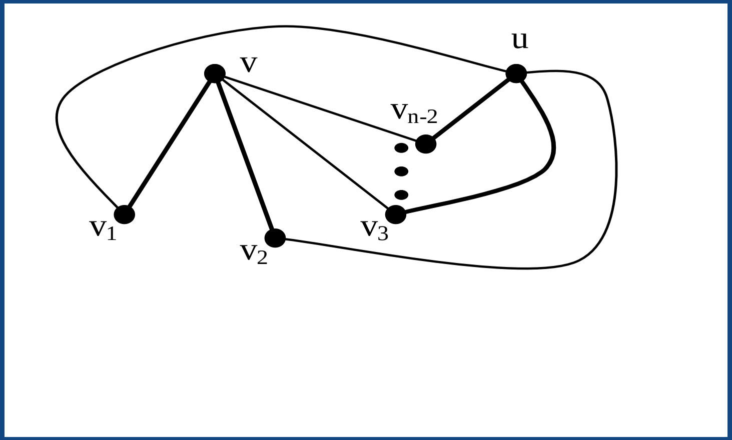
- 上图中点旁边的数字代表所有各顶到该顶距离的最大值。所以d(G)=7,r(G)=4, 但任意两点间的距离的最小值是1.
- 求图的周长和直径是NP-困难问题。为什么？ 学了哈密尔顿圈和哈密尔顿路后就知道了。

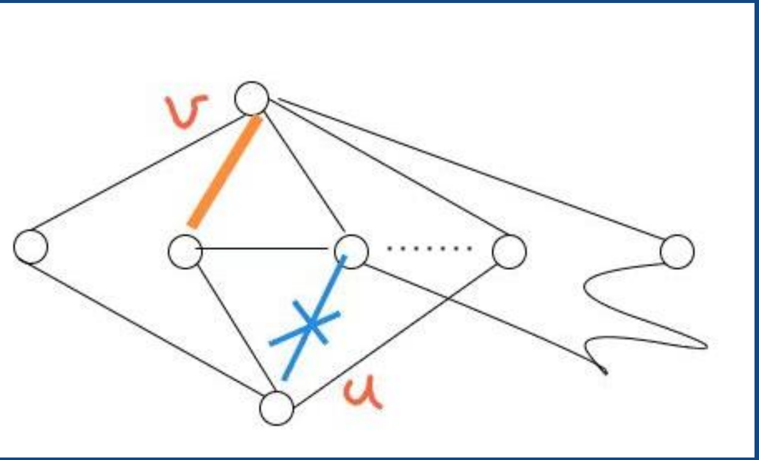
应用

例 设G是具有m条边的n阶简单图，证明：若G的直径为2且$\Delta=n-2$，则$m\geq 2n-4$.

证明：设$d(v)=\Delta=n-2$，且设v的邻接点为$v_1, v_2, \cdots, v_{n-2}$. u是剩下的一个顶点。由于$d(G)=2$且u不能和v邻接，所以对于$v_1, v_2\cdots, v_{n-2}$中任意一个顶点，这个顶点必须和u或者u的某个邻点邻接，否则u与这个顶点的距离为3，因而有$d(G)>2$，矛盾。于是u至少产生n-2条边，得：$m\geq 2n-4$。

说明图为：





无向图的直径

- 例： 证明：若d(G)>3,则d($\overline{G}$)<3. 其中 $\overline{G}$ 是G的补图。

注： 设G=(V, E)我们只需要证明V中任意两个点u,v,在 $\overline{G}$ 中的距离至多是2. 另外， 可以分开考虑d(G)是无限大还是有限这两种情况。

证明： 设G=(V, E)。对d(G)分类考虑。

（1）若d(G)=+∞，即G是一个非连通图。对∀u，v∈V，若u，v不在G的同一个连通分支， 则 $d_{\overline{G}}$(u,v)=1。若u，v在G的同一个连通分支，由于G是非连通图， 则一定有另外的一个连通分支中存在一个点w，

使得(u,w)∈E($\overline{G}$)，(v,w)∈E($\overline{G}$)，即 $d_{\overline{G}}$(u,v)≤2.

（2）d(G)>3 且有限。 对∀u，v∈V， 分类考虑：

1）如果(u,v)∉E(G)， 则 (u,v)∈E($\overline{G}$)， 即 $d_{\overline{G}}$(u,v)=1.

2)如果(u,v)∈ E(G)，则V中一定存在w使得uw,vw ∉E(G)。否则V中其他任意一点至少与u,v中的一个点相邻。

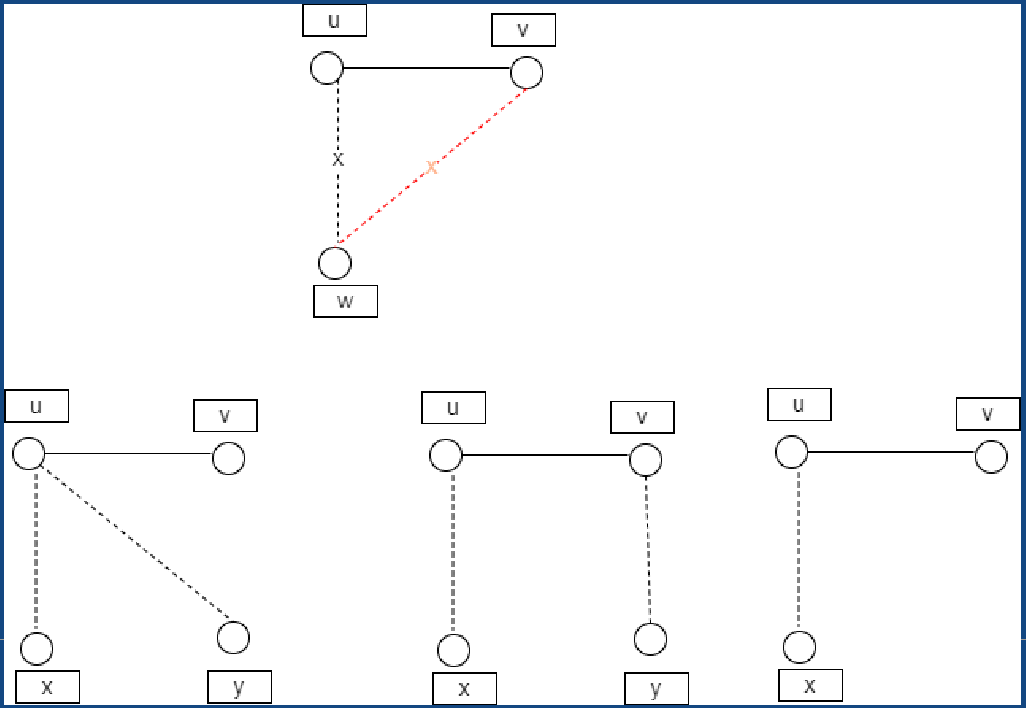
无向图的直径

- 对于V中任意两个不同于u, v的两个点x, y，若x，y皆与u（或v）相邻，

  则$d_G(x, y) \leqslant 2$；若x与u相邻， y与v相邻，则$d_G(x, y) \leqslant 3$. 对于V中的任意一个不同于 u，v的一个点x，有$d_G(x, u) \leqslant 2$且$d_G(x, v) \leqslant 2$。另外 $d_G(v, u)=1$. 故G的直径不大于3. 矛盾。

  此时 $d_{\overline{G}}(u, v) \leqslant 2$.

  综上所述，$d(\overline{G})<3$.



定理：设图G为n阶简单图，若对G中任意两个不相邻顶点u与v，有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则G是连通的,且d (G)≤2.

分析：由于只要直径是有限的， G就是连通的， 因此， 只需要证明d (G)≤2, 也就是证明对G中任意两点x与y,一定存在一条长度至多为2的连接x与y的路即可。

证明：设x, y是G中的任意两个点， 对x 与y之间是否有边分类：

若 $xy\in E(G)$ ，则d(x,y)=1;

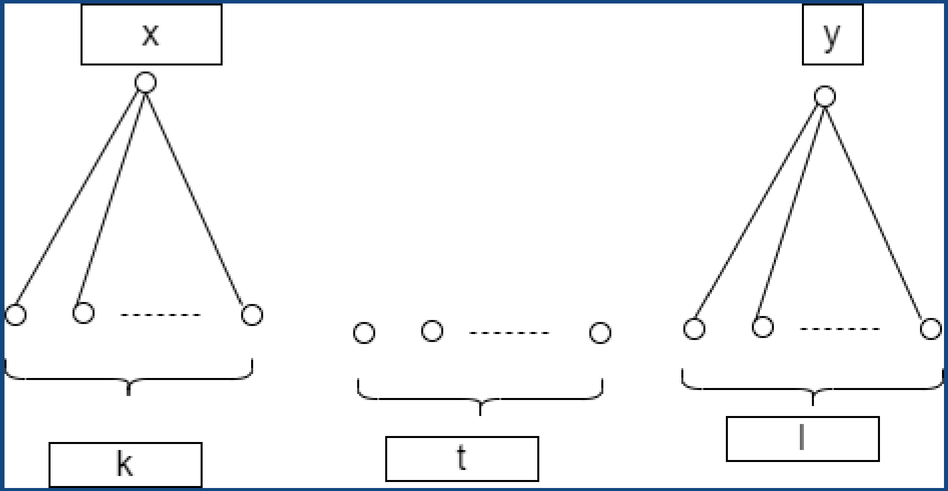
若 $xy\notin E(G)$ ，下面证明，存在点w，它与x, y同时邻接。

反证法： 假设不存在点w，它与x, y同时邻接。 不妨设在G的剩下的n-2个顶点中，有k个与x邻接，但与y不邻接，有l个顶点和y邻接，但不和x邻接，同时假定有t个顶点和x, y 均不相邻。

则：d (x)=k, d (y)= *l*。由于k+ *l*+ t=n-2, 所以，d (x)+ d (y) =k + *l*≤n−2, 矛盾！

即，当x,y不相邻时，d(x,y)=2.

综上， d (G)≤2, 且G是连通图。



注意：定理的界是紧的(Sharpness)。即不能再修改！

例如：设G由两个分支作成的图，两个分支均为K_t, 则G中不相邻顶点度数之和恰为n-2.(n=2t)

- 思考： **如果结论只需证明G是连通的，怎么证明？**

设图G为n阶简单图，若对G中任意两个不相邻顶点u与v，有

$$d(u)+d(v)\geq n-1$$

则G是连通的.

推论：设图G为n阶简单图，若δ≥(n−1)/2, 则 G 连通。

证明：对G中任意两个不相邻顶点u与v，有：

$$d(u)+d(v)\geq \frac{n-1}{2}+\frac{n-1}{2}=n-1$$

所以，G是连通的。

注意：这个推论可以用反证法直接证明(前面例题有类似证明)

(三) 圈的应用-二部图的判定定理

定理 一个无向图$G=\langle V, E\rangle$是二部图当且仅当G中无奇圈。

证明 **必要性**。

设图G是二部图，令C＝$v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k, v_0$是G的一条回路，其长度为k+1。

不失一般性，假设$v_0 \in V_1$，由二部图的定义知，$v_1 \in V_2$，$v_2 \in V_1$。由此可知，$v_{2i} \in V_1$且$v_{2i+1} \in V_2$。

又因为$v_0 \in V_1$，所以$v_k \in V_2$，因而k为奇数，故C的长度为偶数。

充分性。

不妨设G为连通图，否则可对每个连通分支进行讨论。

设v_0为G中任意一个顶点，令

$$V_1 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{为偶数}\}$$

$$V_2 = \{v \mid v \in V(G) \wedge d(v_0, v) \text{为奇数}\}$$

易知，$V_1 \neq \varnothing, V_2 \neq \varnothing, V_1 \cap V_2 = \varnothing$，$V_1 \cup V_2 = V(G)$。

下面只要证明V_1中任意两顶点不相邻, V_2中任意两点也不相邻。

若存在$v_i, v_j \in V_1$相邻，令$(v_i, v_j) = e$，

设v_0到v_i, v_j的短程线分别为Γ_i，Γ_j，

则它们的长度$d(v_0, v_i)$, $d(v_0, v_j)$都是偶数，

于是$\Gamma_i \cup \Gamma_j \cup e$中一定含奇圈，这与已知条件矛盾。

类似可证，V_2中也不存在相邻的顶点，于是G为二部图。

作业： P25T42,41， 44,51