第四章 匹配

主要内容

(一)、图的匹配与贝尔热定理

(二)、两分图的匹配与覆盖

(三)、托特定理

(四)、匈牙利算法

(五)、因子分解

匹配通俗的说就是配对，在现实生活中有非常多的应用, 比如数学史上一个著名的问题：**Bernoulli-Euler**错插信笺问题， 还有婚配问题等等

(一)、图的匹配与贝尔热定理

1、图的匹配相关概念

(1)、匹配 M--- 如果M是图G的边子集(不含环），且M中的任意两条边没有共同顶点（即不相邻），则称M是G的一个匹配或对集或边独立集。

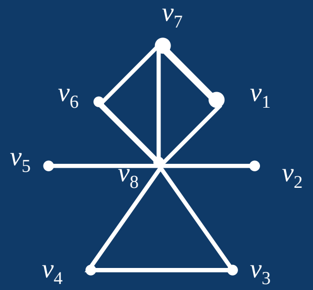
如果G中顶点v是G的匹配 M中某条边的端点，称它为M饱和点，否则为M非饱和点。

$M_1=\{v_6v_7\}$

$M_2=\{v_6v_7, v_1v_8\}$

$M_3=\{v_6v_7, v_1v_8, v_3v_4\}$

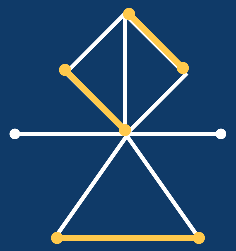
M_1,M_2,M_3等都是G的匹配。



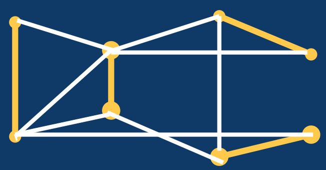
G

注意： 是否是饱和点是相对于匹配的。比如v_1相对于M_1是非饱和点，相对于M_2是饱和点。

(2)、最大匹配 M--- 如果M是图G的包含边数最多的匹配，称M是G的一个最大匹配。特别是，若最大匹配饱和了G的所有顶点，称它为G的一个完美匹配。



G的一个 最大匹配



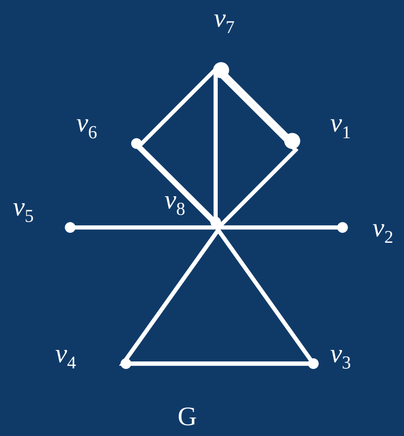
G的一个完美匹配

注：一个图G不一定存在完美匹配。

如果G中的匹配 M不是最大的， 有可能把它改造成边数更多的匹配。

如图中 M=｛v_6v_7｝

考虑通路 $v_8\ v_6v_7v_1$

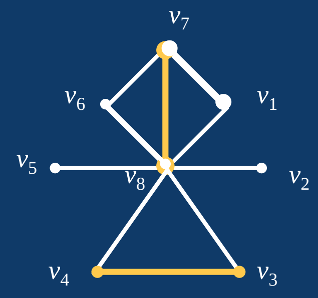


这条通路上的边交替出现非M中的边M中的边, 且起始点v_8、v_1未被M匹配 。如果把$v_8\ v_6$，v_7v_1放入M, 把原来的v_6v_7从M中删除，则M被改造成比原来匹配多一条边的更大的匹配M’={$v_8\ v_6$，v_7v_1}.

我们有下面的定义：

(3)、**M交错路**--- 如果M是图G的匹配，G中一条由M中的边和非M中的边交错形成的路，称为G中的一条M交错路。特别地，若M交错路的起点与终点是M非饱和点，称这种M交错路为**M可扩路(或可增广路）**。

在下图中：



G

设M=｛v_7v_8 , v_3v_4｝，则：

路$v_6v_7v_8v_3v_4$与$v_1v_7v_8v_2$都是M交错路。其中后者是M可扩路。

在证明后面的定理前 我们先看一个性质：

性质： 若G包含一条M的可扩路P，M和E(P)的对称差M_1

$M_1 = M \oplus E（P）=（M-E（P））\cup（E（P）-M）$
表示由P中非M中边以及M中不在P上出现的边组成。

则 M_1 是 G的匹配。

要证M_1 是 G的匹配， 需证三个方面：1. M-E（P）中的任意两边不相邻；2. E（P）-M中的任意两边不相邻；3. M-E（P）中的任意一边和E（P）-M中的任意一边不相邻。

注：P是交错路性质也成立。

$M-E(P)$

$E(P)=a\to b$的可扩充路

$E(P)-M=$红边.

解：设 $M_1=M\oplus E(P)=(M-E(P))\cup(E(P)-M)$ 是匹配，可证下列三种情况

① $M-E(P)$ 中的任意两边不相邻 —— 因 M 是匹配.

② $E(P)-M$ 中的任意两边不相邻 —— 因除 a,b 外，$E(P)$ 上的点都是 M 的饱和点，且 M 是匹配.

③ $E(P)-M$ 中的任意一条边与 $M-E(P)$ 中的任意一条边不相邻

1) a,b 不可能与 $M-E(P)$ 中的顶点相同，且 M 是匹配.
所以以 a 为顶点的边不可能与 $M-E(P)$ 中的边相邻
同理以 b 为顶点的边也不可能与 $M-E(P)$ 中的边相邻

2) 除 a,b 外 $E(P)-M$ 中的点都是 M 的饱和点，所以
$E(P)-M$ 中的其他边与 $M-E(P)$ 中的边不相邻.

2、贝尔热定理

定理1 (Bergen，1957) G的匹配M是最大匹配，当且仅当G不存在M可扩路。

证明：“必要性”设M是G的最大匹配。

反证法：若G包含一条M可扩路P,

显然，P中包含M的边比非M中的边少一条。于是作新的匹配M_1 =M ⊕ E（P）,它当中的边由P中非M中边以及M中不在P上出现的边组成。M_1中边比M中多一条，这与M是G的最大匹配矛盾。

“充分性”设G中不存在M可扩路，但M不是最大匹配

设M_1是G的一个最大匹配，则$|M_1|>|M|$。

令$H = G(M_1 \oplus M) = G((M_1 - M) \cup (M - M_1))$

则H中每个顶点的度数为1或者2（这是因为一个顶点最多只与M的一条边及M_1的一条边相关联）。故H的每个分支或者是由M_1与M中边交替组成的偶圈，或者是由M_1与M中边交替组成的路。

在每个偶圈中，M_1与M中边数相等；但因$|M_1|>|M|$，所以，至少有一条路P，其起点和终点都是M非饱和点，于是，它是G的一条M可扩路。这与条件矛盾。

注：贝尔热定理给我们提供了扩充G的匹配的思路。

贝尔热(1926---2002) 法国著名数学家。他的《无限图理论及其应用》(1958) 是继哥尼之后的图论历史上的第二本图论专著。他不仅在图论领域做出了许多贡献，而且四处奔波传播图论，推动了图论的普及和发展。

1993年，他获得组合与图论领域颁发的欧拉奖章。

贝尔热在博弈论、拓扑学领域里也有杰出贡献。在博弈领域，他引入了Nash均衡之外的另一种均衡系统。Nash的生活被改编成电影《美丽的心灵》，获02年奥斯卡金像奖。

贝尔热对中国的手工艺很感兴趣。他也是一位象棋高手，还创作过小说《谁杀害了Densmore公爵》。

(二)、两分图的匹配与覆盖

1、问题的提出

在日常生活，工程技术中，常常遇到求两分图的匹配问题。下面看一个例子：

有7名研究生 A, B, C, D, E, F, G毕业寻找工作。就业处提供的公开职位是：会计师(a) ,咨询师(b),编辑(c),程序员(d), 记者(e), 秘书(f)和教师(g)。每名学生申请的职位如下：

A : b, c ; B : a, b, d, f, g ; C : b, e ; D : b, c, e ;

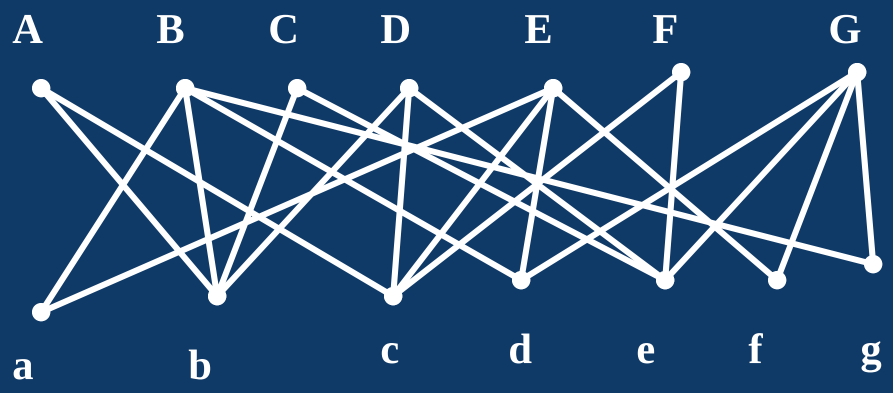
E : a, c, d, f ; F : c, e ; G : d, e, f, g ;

问：学生能找到理想工作吗？

解：如果令X=｛A, B, C, D, E, F, G｝, Y=｛a, b, c, d, e, f , g｝, X中顶点与Y中顶点连线当且仅当学生申请了该工作。于是，得到反映学生和职位之间的状态图：

A : b, c ; B : a, b, d, f, g ; C : b, e ; D : b, c, e ;

E : a, c, d, f ; F : c, e ; G : d, e, f, g ;



问题转化为求饱和X每个顶点的一个匹配！

需要解决的问题是: (1) 匹配是否存在？(2) 如何求出匹配？

2、两分图 匹配存在性判定----Hall定理

定理2 (Hall定理）设G=(X, Y)是两分图，则G存在饱和X每个顶点的匹配的充要条件是：

$$\text{对}\forall S \subseteq X\text{，有}|N(S)| \geq |S| \cdots (*)$$

其中N(S)是S中点的邻集的并集。

证明：“必要性”

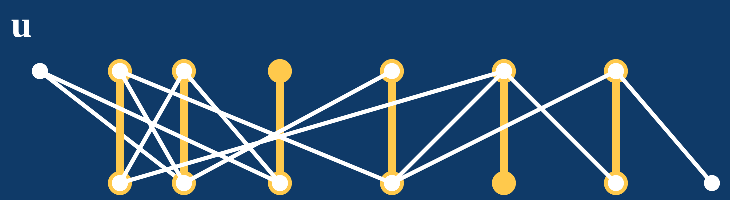
如果G存在饱和X每个顶点的匹配，由匹配的定义，X的每个顶点在Y中至少有一个邻接点，所以：

$$\text{对}\forall S \subseteq X\text{，有}|N(S)| \geq |S|$$

“充分性”

如果G是满足条件(*)的两分图,但不存在饱和X每个顶点的匹配。

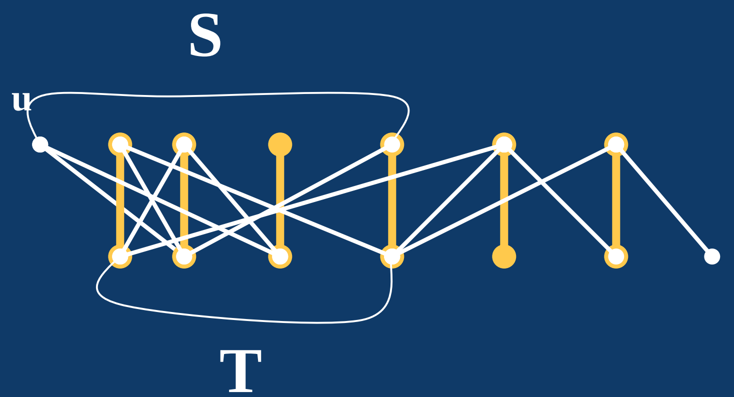
令M*是G的一个最大匹配，但是不饱和X的顶点u.



示意图G

令Z是通过M*与点u相连形成的所有M*交错路上的点集。

因M*是最大匹配，所以u是所有交错路上唯一的一个M*的未饱和点。



令$S=X\cap Z$，$T=Z\cap Y$

显然，S-｛u｝中点与T中点在M*下配对，即：

$$|T| = |S| -1< |S|$$

即： $|N(S)| = |T| = |S| -1< |S|$，与条件矛盾。

注: (1) G=(X,Y；E)存在饱和X每个顶点的匹配也常说成存在由X到Y的匹配。

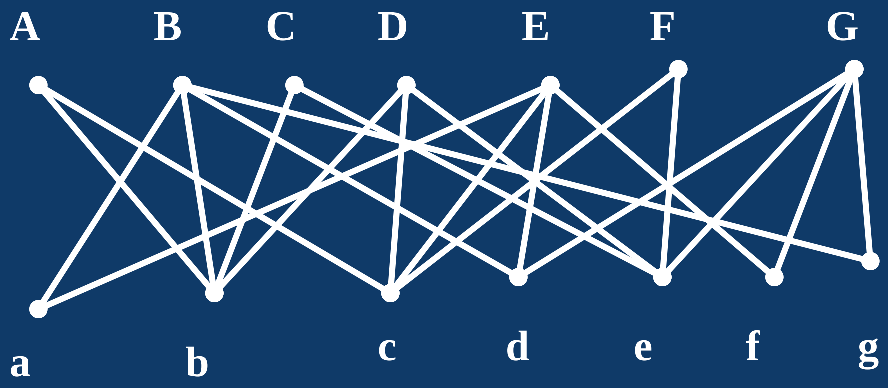
(2) Hall定理也可表述为：设G=(X,Y；E)是两分图，如果存在X的一个子集S,使得|N(S)| < |S|，那么G中不存在由X到Y的匹配。

(3) Hall定理也称为“婚姻定理”，表述如下：

“婚姻定理”：在一个由r个女人和s个男人构成的人群中，1≦r≦s。在熟识的男女之间可能出现r对婚姻的充分必要条件是，对每个整数k(1≦k≦r),任意k个女人共认识至少k个男人。

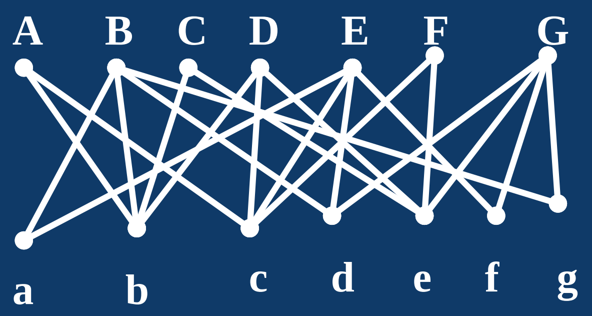
(4) Hall定理是在两分图中求最大匹配算法的理论基础，即匈牙利算法基础。

例1，在下面两分图中，是否存在饱和X=｛A, B, C, D, E, F, G｝的每个顶点的匹配？



解: (1) 当S取X中单元点时，容易验证：|N(S)|>|S|

(2) 当S取X中二元点集时，
容易验证：|N(S)|≧|S|



(3) 当S取X中三元点集时，
容易验证：|N(S)|≧|S|

(4) 当S取X中四元点集时，若取S=｛A,C,D,F｝,则有3=|N(S)|<|S|=4

所以，不存在饱和X每个顶点的匹配。

推论：若G是k (k>0)正则两分图，则G存在完美匹配。

证明：一方面，由于G是k (k>0)正则两分图, 所以 k|X|=k|Y|,于是得|X| = |Y|;

另一方面，对于X的任一非空子集S, 设E_1与E_2分别是与S和N(S)关联的边集，显然有：$E_1 \subseteq E_2$ 即：

$$|E_1| = k|S| \le |E_2| = k|N(S)|$$

由Hall定理，存在由X到Y的匹配.又|X| = |Y|，所以G存在完美匹配。

例2 证明：每个k方体都有完美匹配(k大于等于2)

证明：

事实上，由k方体的构造：k方体有2^k个顶点，每个顶点可以用长度为k的二进制码来表示，两个顶点连线当且仅当代表两个顶点的二进制码只有一位坐标不同。

如果我们划分k方体的2^k个顶点，把坐标之和为偶数的顶点归入X，否则归入Y。显然，X中顶点互不邻接，Y中顶点也如此。所以k方体是两分图。

又不难知道k方体的每个顶点度数为k,所以k方体是k正则两分图。

由推论：k方体存在完美匹配。

例 求K_{2n}和$K_{n,n}$中不同的完美匹配的个数。

K_{2n}的任意一个顶点有2n-1中不同的方法被匹配。所以K_{2n}的不同完美匹配个数等于$(2n-1)K_{2n-2}$,如此推下去，可以归纳出K_{2n}的不同完美匹配个数为：(2n-1)!!

同样的推导方法可归纳出$K_{n,n}$的不同完美匹配个数为：(n)!

例 证明树至多存在一个完美匹配。

证明：若不然，设M_1与M_2是树T的两个不同的完美匹配，那么$M_1 \oplus M_2 \neq \Phi$, 且$T[M_1 \oplus M_2]$每个顶点度数为2，即它存在圈，于是推出T中有圈，矛盾。

3、点覆盖与哥尼定理

(1)、图的点覆盖概念与性质

定义1：图的点覆盖 ---G的一个顶点子集K称为G的一个点覆盖，如果G的每条边都至少有一个端点在K中。G的一个包含点数最少的点覆盖称为G的最小点覆盖，其包含的点数称为G的覆盖数，记为β(G).

(*a*) 一个覆盖

(*b*) 一个最小覆盖

定理3 设M是G的匹配，K是G的覆盖，若|M|=|K|,则M是最大匹配，而K是最小覆盖。

证明：设M*与K*分别是G的最大匹配和最小覆盖。

由匹配和覆盖定义有：$|M^*| \leqq |K^*|$。所以，有：

$$|M| \leqq |M^*| \leqq |K^*| \leqq |K|$$

所以，当$|M|=|K|$时，有$|M| =|M^*|$，$|K^*|= |K|$

即M是最大匹配，而K是最小覆盖。

(2)、两分图的点覆盖与两分图匹配间的关系----哥尼定理

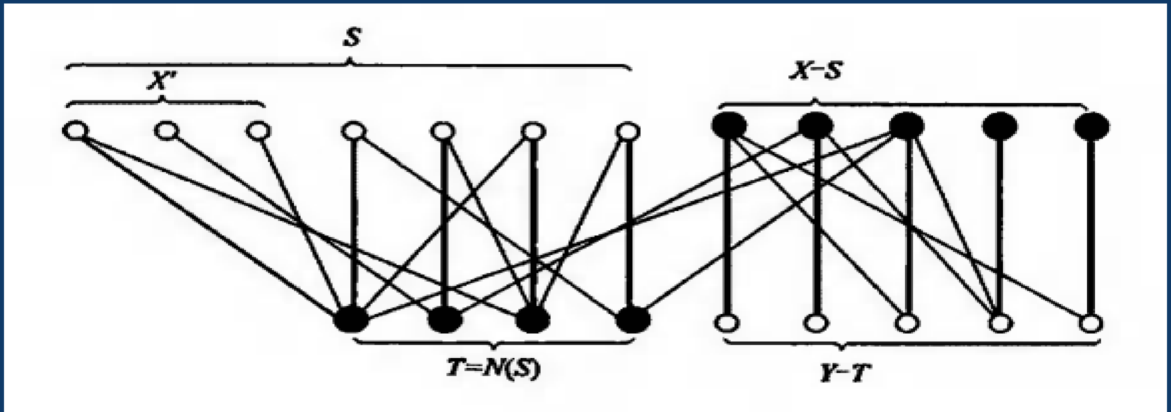
定理4 (哥尼 Kϕnig，1931) 在两分图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

证明：设M是两分图G的最大匹配，X与Y是G的顶划分。不妨设|X|≤|Y|。

分类考虑：1）若M把X中一切顶皆许配，则|M|=|X|. 这时X显然是G的一个最小铺盖，因为盖住M中的边至少要用|M|个顶。故这种情况下，|M|=|X|=β(G).

2)若M未把X中顶皆许配，设X’是X中未被M许配的顶点组成的集合。

令Z是由M的交错链与X’的顶点连通的顶的集合，即Z中的顶点有交错链与X’的顶点相连。



令Z是由M的交错链与X’的顶点连通的顶的集合，即Z中的顶点有交错链与X’的顶点相连，见图。记

S=Z∩X，T=Z∩Y，则N(S)=T. 令B=（X-S）∪T。

B是由图中的黑顶构成，则B是G的一个覆盖集。否则，如果B不是G的覆盖集，则至少存在一条边e，它的一个端点在S中，另外一个端点在Y-T中。与T=N(S)矛盾。 又|M|=|B|，而G中任意一个匹配M’都满足|M’|≤β(G)，则|M|≤β(G)，即|B|≤β(G)， 故B是G的最小覆盖，至此证明了最大匹配中边的条数等于β(G)。

例 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线。证明：布尔矩阵中，包含了所有“1”的线的最少数目，等于具有性质“任意两个1都不在同一条线上的1的最大数目”。

例如：在如下布尔矩阵中：

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}1&1&1&0\\0&1&0&1\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

证明：设布尔阵是n行m列矩阵，把它模型为一个两分图如下：每行每列分别用一个点表示，X表示行点集合，Y表示列点集合，两点连线当且仅当该行该列元为1.

于是，包含了所有“1”的线的最少数目对应两分图中的最小点覆盖数。而具有性质“任意两个1都不在同一条线上的1的最大数目”对应两分图的最大匹配包含的边数。

由哥尼定理，命题得到证明。

∵ (三)、一般图的完美匹配---托特定理

定理 5 (托特Tutte，1947) 图G有完美匹配当且仅当对V的任意真子集S, 有：

$$\boxed{o(G-S)\le |S|}$$

注：o (G-S)表示奇分支数目。

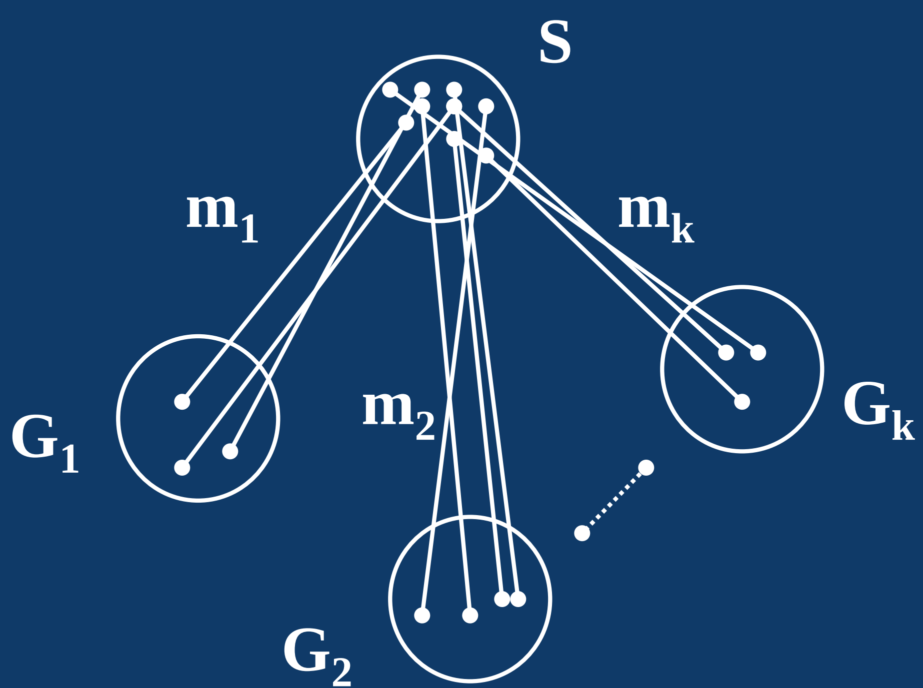
证明不做要求， 会用定理的充要条件证明某些图有完美匹配！！！

推论 (彼得森定理) 没有割边的3正则图存在完美匹配。

证明：设S是V的任意一个真子集，

1）S为空集合，由于G是三正则，则|V|为偶数，o(G-S)=o(G)=0 $\leqq$ $|S|=0$

2）S为非空，设$G_1,G_2,\ldots,G_k$是G-S的所有奇分支。m_i $(1\leqq i\leqq k)$表示端点分属于S和G_i的边数。



下面分析m_i

在G_i中，其总度数为$2|E(G_i)|$。

在G_i中，其点在G中的总度数为$3|V(G_i)|$。

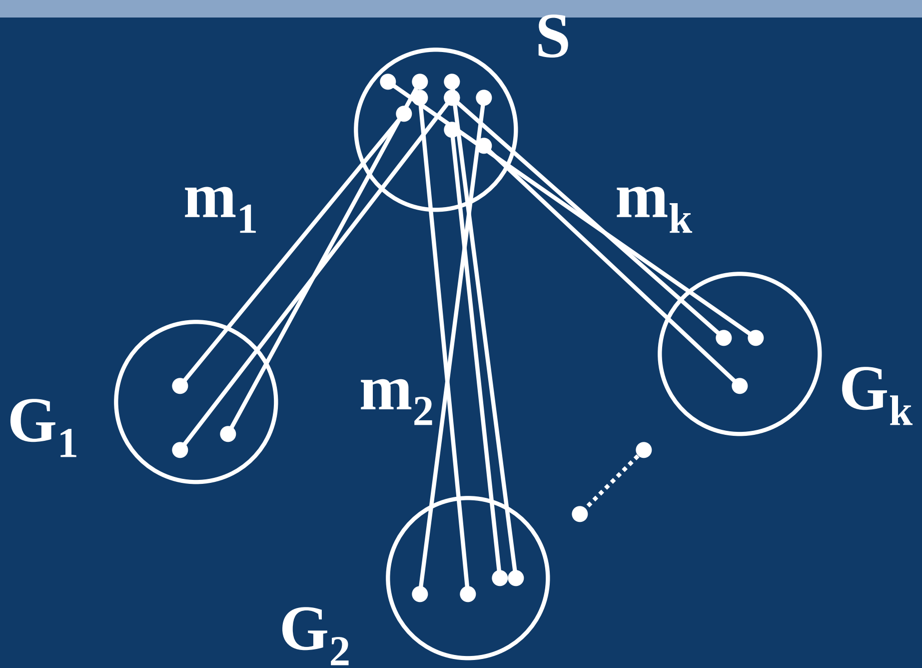
所以：

$$m_i = 3|V(G_i)| - 2|E(G_i)|$$

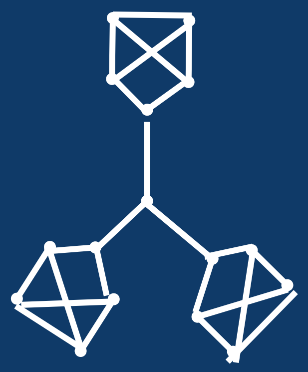
所以m_i必然为奇数，但G无割边，所以$m_i \geq 3$.这样：

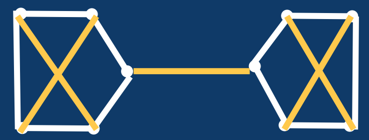
$$o(G-S) = k \leq \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{k} m_i \leq \frac{1}{3}\sum_{v\in S} d(v) \leq \frac{1}{3}\cdot 3|S| = |S|$$

由托特定理，G有完美匹配。



注：推论中的条件是G存在完美匹配的充分条件而不是必要条件。例如：





（*a*）没有完美匹配　　（*b*）有完美匹配

设G是k次正则图连通图，顶点数为偶数，又至少删除不小于k-1条边才可能使得G的连通分支数增加，试证G有完美匹配。

证明：

设S是V的任一个真子集

(1) $S=\Phi$时，$o(G-S)=o(G)$，而$|V(G)|$=偶数 $\therefore o(G)=0$，即 $o(G-S)=0\le|S|=0$

(2) $S\ne\Phi$时，设 G_1、G_2、…G_q 是 $G-S$ 的所有奇连通分支，设 m_i 表示一个端点在S中另一个端点在G_i中的边的条数。

由于G是$(k-1)$边连通图且这m_i条边构成了G的一个边割集，所以

$m_i\ge k-1$ (*)

又由于 $\sum\limits_{v\in V(G_i)} d_G(v)=k|V(G_i)|$，$\sum\limits_{v\in S} d_G(v)=k|S|$，

$m_i = \sum_{v \in V(G_i)} d_G(v) - 2|E(G_i)| = k|V(G_i)| - 2|E(G_i)|$，$|V(G_i)|$为奇数

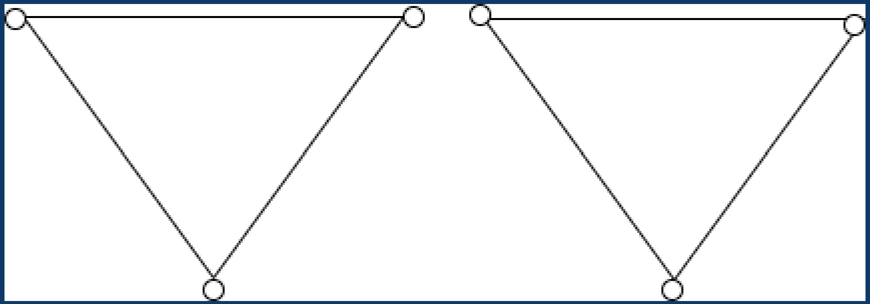
所以 ① 当k为奇数时，m_i为奇数，而$k-1$为偶数，由(*)知：$m_i \geq k$.

② 当k为偶数时，m_i为偶数，而$k-1$为奇数，由(*)知 $m_i \geq k$.

$\therefore o(G-S) = q \leq \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{q} m_i \leq \frac{1}{k}\sum_{v \in S} d_G(v) = \frac{1}{k}\cdot k|S| = |S|$. $\left(\sum_{i=1}^{q} m_i \leq \sum_{v \in S} d_G(v)\right)$

由(1)(2)知，G有完美匹配.

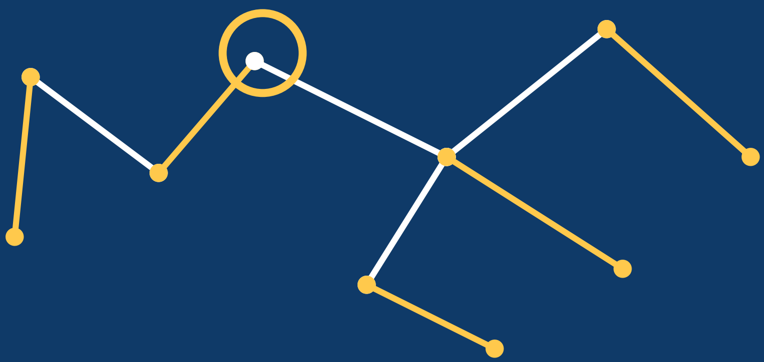
反例： 如果G不连通， G无完美匹配



没有歧义的表述：

设G是k次正则k-1边连通图， 且顶数为偶数，试证G有完美匹配。

例证明：一棵树G有完美匹配当且仅当对所有顶点v ∈V(G),有：o(G-v)=1。



证明：“必要性”

一方面：若G有完美匹配，由托特定理：O(G-v)≦1；

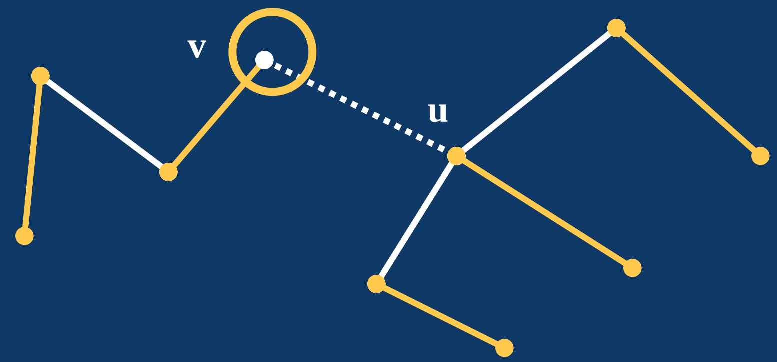
另一方面：若树G有完美匹配，则显然G为偶阶树，于是O(G-v)≥1；

所以：O(G-v)=1。

“充分性”

由于对任意点v ∈V(G), 有O(G-v)=1。

设C_v是G-v的奇分支，又设G中由v连到G-v的奇分支的边为vu，显然(???)，由u连到G-u的奇分支的边也是uv。



令M=｛e(v):它是由v连到G-v的边，v ∈V(G) ｝

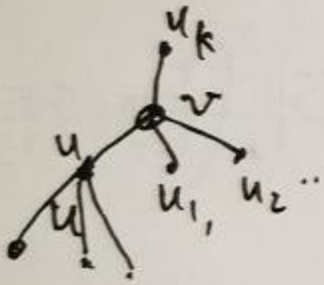
则：M是G的完美匹配。

作业： P82T16，T17（完善？？？的证明）

??? 设 v 的邻点为 $u, u_1, u_2, \cdots u_k$. 则 $G-v$ 分成 $k+1$ 个连通分支.

即以 $u, u_1, u_2, \cdots u_k$ 为根的子树. 由于只有一个奇连通分支且包含 u 点,

则当去掉 u 点后, $G-u$ 也只有一个奇连通分支.



而 $C(u_k), C(u_1), \cdots C(u_{k-1})$ 全为偶数,

而 $C(u_k) \cup C(u_1) \cup \cdots \cup C(u_{k-1}) \cup \{v\}$ 为一个连通分支.

且为奇连通分支.

∴ 与 u 配对的一定是 v.

(四)、匈牙利算法 (只需要了解)

1、两分图中寻找完美匹配

(1) 、问题

设G=(X, Y), |X|=|Y|, 在G中求一完美匹配M.

(2) 、基本思想

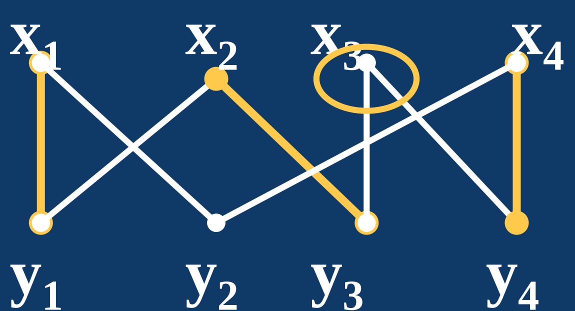
从任一初始匹配M_0出发，通过寻求一条M_0可扩路P，令$M_1=M_0 \oplus E(P)$, 得比M_0更大的匹配M_1(近似于迭代思想)。

(3) 、M可扩扩路的寻找方法

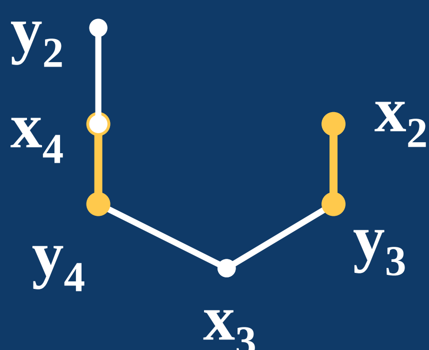
1965年，Edmonds首先提出: 用扎根于M非饱和点u的M交错树的生长来求M可扩路。

定义 设G=(X, Y), M是G的匹配， u是M非饱和点。称树H是G的扎根于点u的M交错树,如果:

1) $u \in V(T)$;   2) 对任意$v \in V(T)$, (u, v)路是M交错路。



G=(X, Y)

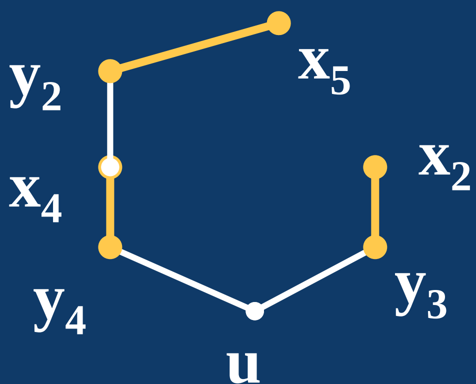


扎根 x_3 的M交错树

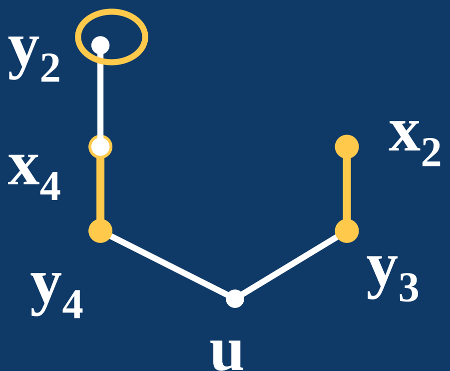
扎根于M非饱和点u的M交错树的生长讨论：

假如扎根于M非饱和点u的M交错树为H,对于H,有两种情形：

情形1 除点u外，H中所有点为M饱和点，且在M上配对；



扎根 u 的M交错树H



扎根 u 的M交错树H

情形2 H包含除u外的M非饱和点。

寻找一条M可扩路的基本思路：寻找到扎根于M非饱和点u的M交错树的情形2就找到一条M可扩路;

如果是情形1，继续生长树，变成情形2或者情形1。

对于情形1，令S=V(H)∩X， T=V(H)∩Y, 显然：$T \subseteq N(S)$

1) 若N(S)=T, 由于S -｛u｝中点与T中点配对，所以有：

|T|=|S|-1, 于是有： |N(S)| = |S|-1< |S|. 由Hall定理，G中不存在完美匹配；

2) 若 $T \subset N(S)$

令y ∈N(S) – T, 且x与y邻接。因为H的所有点，除u外，均在M下配对。所以，或者x=u，或者x与H的某一顶点配对，这样，有 $xy \notin M$

若y为M饱和的，设yz ∈M, 则加上顶点y及z和边xy与yz生长H，得到情形1；

若y为M非饱和的，加上顶点y和边xy生长H，得到情形2.

找到一条M可扩路，可以对匹配进行一次修改，过程的反复进行，最终判定G是否有完美匹配或者求出完美匹配。

根据上面讨论，可以设计求两分图的完美匹配算法。

(4)、两分图完美匹配算法——匈牙利算法。

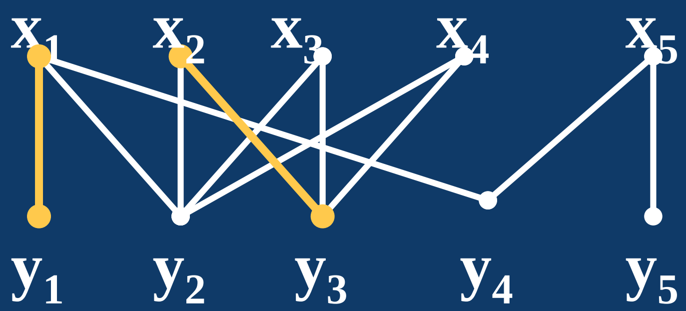
设M是初始匹配。

(a)、若M饱和X所有顶点，停止。否则，设u为X中M非饱和顶点，置$S=\{u\}$, $T=\Phi$；

(b)、若$N(S)=T$, 则G中不存在完美匹配。否则设 $y \in N(S)-T$.

(c) 若y为M饱和点，且$yz \in M$, 置$S=S\cup\{z\}$, $T=T\cup\{y\}$，转(b)。否则，设P为M可扩路，置$M_1=M\oplus E(P)$，转(a).

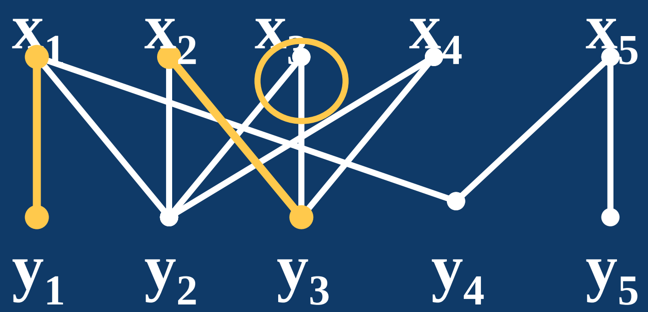
例1 讨论下图G=(X, Y)是否有完美匹配。



G=(X, Y)

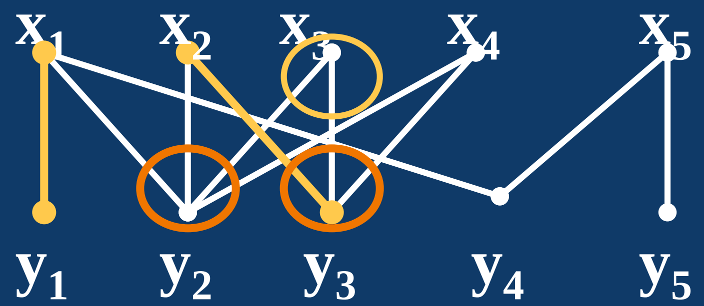
解：取初始匹配 M=｛x_1y_2, x_2y_3｝。

(a) $S=\{x_3\}$, $T=\Phi$;



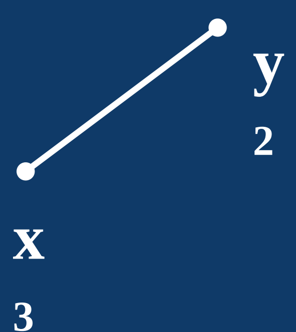
G=(X, Y)

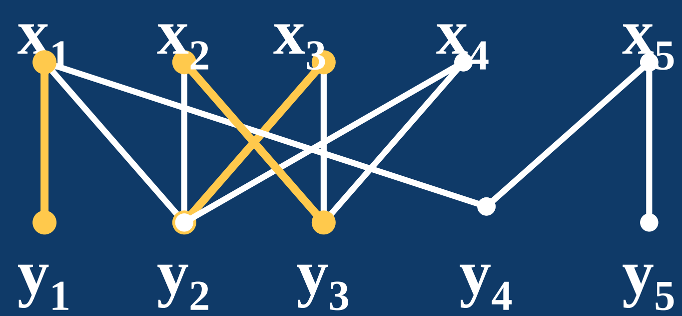
(b) $N(S)=\{y_2, y_3\}$，$N(S)\neq T$, 取$y_2 \in N(S)-T$



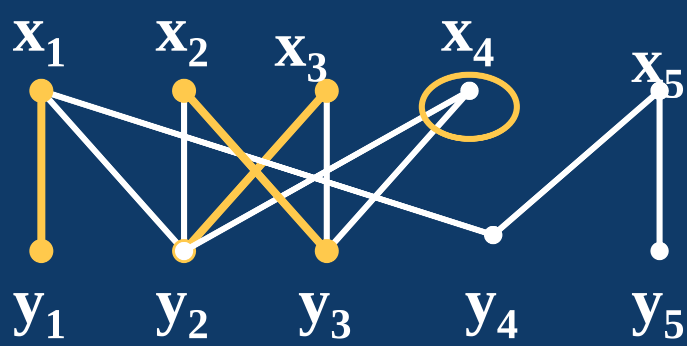
G=(X, Y)

(c) y_2为M非饱和点，加上y_2和边x_3y_2生长树H。此时，置$M=M \oplus E(P)=\{x_1y_1, x_2y_3, x_3y_2\}$





G=(X, Y)

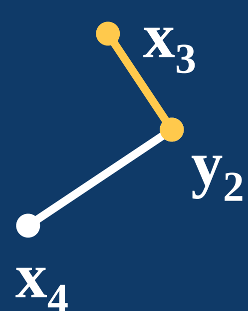


$G=(X, Y)$

(a) $S=\{x_4\}$, $T=\Phi$;

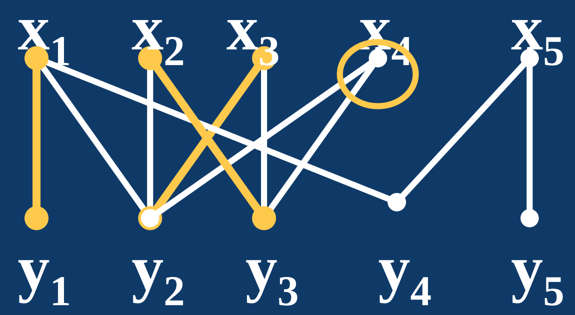
(b) $N(S)=\{y_2, y_3\}$, $N(S)\neq T$, 取$y_2\in N(S)-T$

(c) y_2为M饱和点，$y_2x_3\in M$。此时，置$S=S\cup\{x_3\}$ $T=T\cup\{y_2\}$。



(b) $N(S)=\{y_2, y_3\}\neq T$，取$y_3\in N(S)-T$

(b) $N(S)=\{y_2, y_3\}\neq T$，取$y_3\in N(S)-T$



$G=(X,Y)$

(c) y_3为M饱和点，$x_2y_3\in M$。此时，置$S=S\cup\{x_2\}$

$T=T\cup\{y_3\}$。

(d) $N(S)=\{y_2, y_3\}=T$，所以，G无完美匹配。

(5)、匈牙利算法复杂性分析

1)、最多循环|X|次可以找到完美匹配；

2)、初始匹配最多扩张|X|次可以找到完美匹配；

3)、每次生长树的生长至多2|X|-1次。

所以，算法复杂性为$O(|X|^3)$,是好算法。

不做要求，了解即可

2、两分图中寻找最大匹配

问题：在一般两分图上求最大匹配M.

分析：使用匈牙利算法求完美匹配时，当在扎根于M非饱和点u的交错树上有|N(S)|<|S|时，由Hall定理，算法停止。要求出最大匹配，应该继续检查X-S是否为空，如果不为空，则检查是否在其上有M非饱和点。一直到所有M非饱和点均没有M可扩路才停止。

两分图中寻找最大匹配算法：

设M是G=(X, Y)的初始匹配。

(1) 置S=Φ，T=Φ；

(2) 若X-S已经M饱和，停止；否则，设u是X-S中的一非饱和顶点，置S=S∪｛u｝。

(3) 若N(S)=T, 转(5)；否则，设y ∈N(S)-T。

(4) 若y是M饱和的，设yz ∈ M,置S=S∪｛z｝, T=T∪｛y｝,转(3);否则，存在(u, y)交错路是M可扩路P,置M=M⊕E(P), 转(1).

(5) 若X-S=Φ, 停止；否则转(2).

(五)、图的因子分解

把一个图按照某种方式分解成若干边不重的子图之并有重要意义。理论上，通过分解，可以深刻地揭示图的结构特征；在应用上，网络通信中，当有多个信息传输时，往往限制单个信息在某一子网中传递，这就涉及网络分解问题。

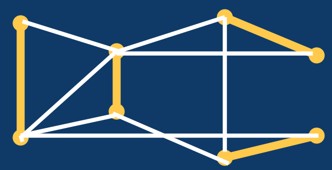
一个图分解方式是多种多样的。作为图分解的典型例子，我们介绍图的因子分解。

所谓一个图G的因子G_i，是指至少包含G的一条边的生成子图。

所谓一个图G的因子分解，是指把图G分解为若干个边不重的因子之并。

所谓一个图G的n因子，是指图G的n度正则因子。

如果一个图G能够分解为若干n因子之并，称G是可n因子分解的。



图G_1

图G_2

在上图中，黄色边在G_1中的导出子图，是G的一个一因子；黄色边在G_2中的导出子图，是G的一个二因子。

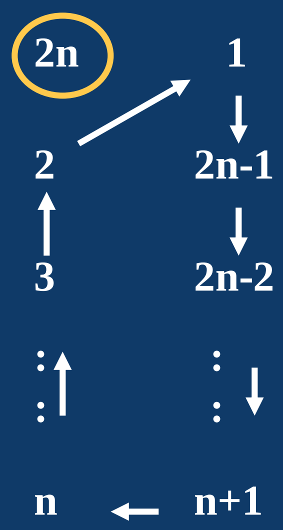
研究图的因子分解主要是两个方面：一是能否进行分解(因子分解的存在性)； 二是如何分解(分解算法).

(1)、图的一因子分解

图的一个一因子实际上就是图的一个完美匹配。一个图能够作一因子分解，也就是它能够分解为若干边不重的完美匹配之并。

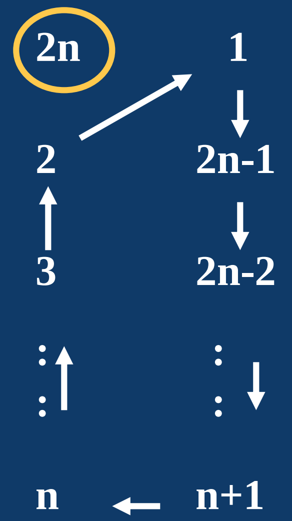
定理1 K_{2n}可一因子分解。

证明：把K_{2n}的2n个顶点编号为1，2，…, 2n。作如下排列：

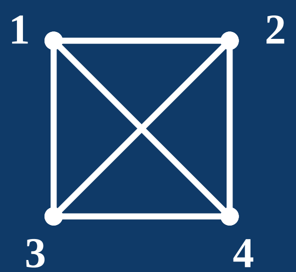


图中，每行两点邻接，显然作成K_{2n}的一个一因子。

然后按照图中箭头方向移动一个位置，又可以得到K_{2n}的一个一因子，不断作下去，得到K_{2n}的2n-1个边不重的一因子，其并恰好为K_{2n}。



例1 将K_4作一因子分解。

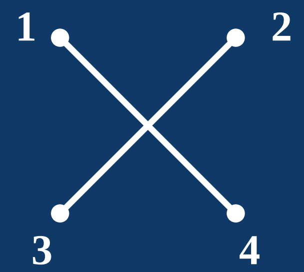


K_4

$\longrightarrow$

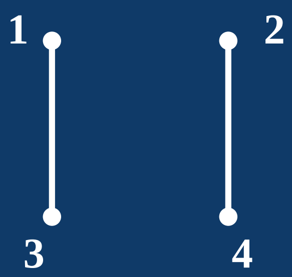
4 1

2 3



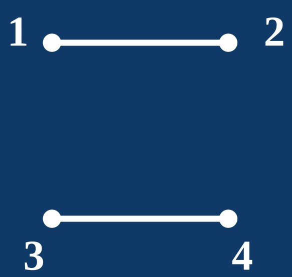
4 2

3 1



4 3

1 2



例2 证明：K_4有唯一的一因子分解。

证明：K_4只有3个不同的完美匹配。而k_4的每个1因子分解包含3个不同完美匹配，所以，其1因子分解唯一。

例3 证明：每个k ($k>0$)正则两分图G是一可因子分解的。

证明：因为每个k ($k>0$)正则两分图G存在完美匹配，设Q是它的一个一因子，则G-Q还是正则两分图，由归纳知，G可作一因子分解。

定理2 若三正则图有割边，则它不能一因子分解。

证明：若不然，设G的三个一因子为G_1,G_2,G_3。不失一般性，设割边$e\in G_1$。

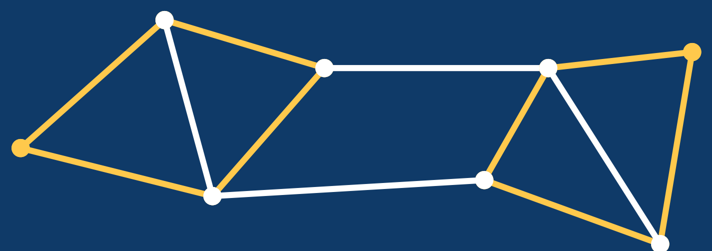
显然，$G-G_2$的每个分支必然为圈。所以e在G的某个圈中，这与e是G的割边矛盾。

注：没有割边的三正则图可能也没有一因子分解，如彼得森图就是如此！尽管它存在完美匹配。

(2)、图的二因子分解

如果一个图可以分解为若干2度正则因子之并，称G可以2因子分解。注意：G的一个H圈肯定是G的一个2因子，但是G的一个2因子不一定是G的H圈(包含所有顶点一次且仅一次的圈)。2因子可以不连通。

例如，在下图中：



两个黄色圈的并构成图的一个2因子，但不是H圈。

一个显然结论是：G能进行2因子分解，其顶点度数必然为偶数。(注意，不一定是欧拉图---包含每条边一次且仅一次的回路)

定理 每个没有割边的3正则图是一个1因子和1个2因子之并。

证明： 因每个没有割边的3正则图存在完美匹配M，显然，G-M是2因子。

定理 K_{2n+1}可2因子分解。

证明：设 $V(K_{2n+1})=\{v_1,v_2,\cdots,v_{2n+1}\}$

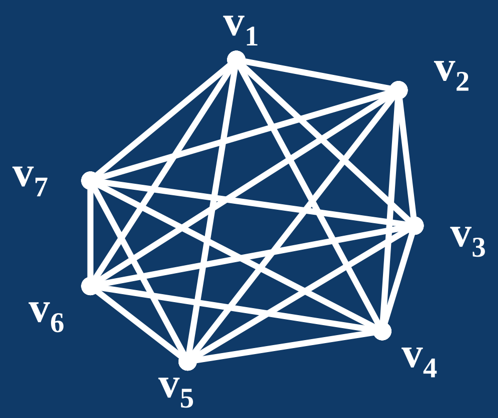
作路 $P_i=v_iv_{i-1}v_{i+1}v_{i-2}v_{i+2}v_{i-3}\cdots v_{i-n}v_{i+n}$

其中，设P_i上的第j点为v_k，则：$k=i+(-1)^{j+1}\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor$

下标取为1, 2,…, 2n (mod2n)

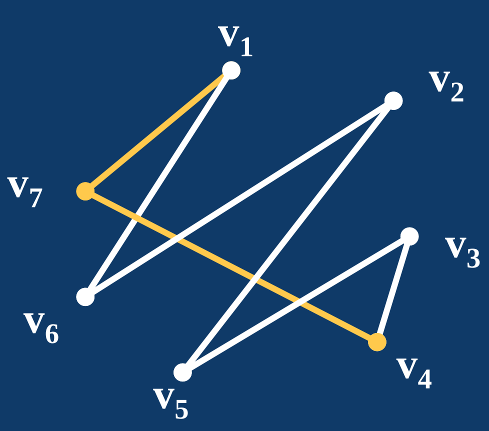
生成圈H_i为v_{2n+1}与P_i的两个端点连线。

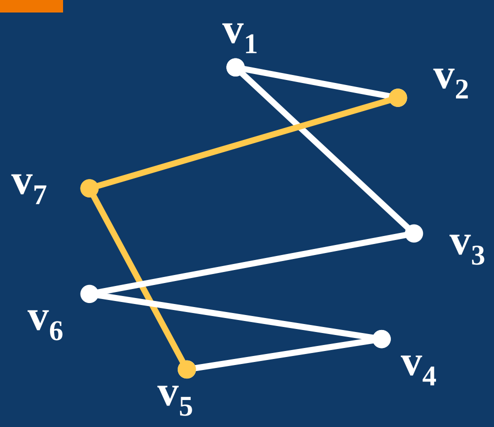
例 对K_7作2因子分解。

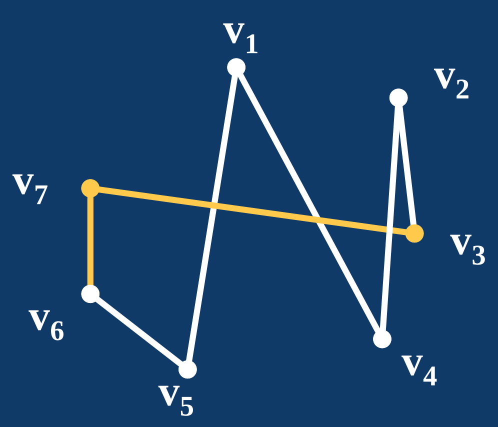


解： $P_1 = v_1 v_6 v_2 v_5 v_3 v_4$ $P_2 = v_2 v_1 v_3 v_6 v_4 v_5$

$P_3 = v_3 v_2 v_4 v_1 v_5 v_6$







希腊字母对希腊文明乃至西方文化影响深远。《新约》里，神说：“我是阿尔法，我是欧米伽；我是初，我是终。”（圣经启示录22:13）。在希腊字母表里，第一个字母是“Α，α”（Alpha），代表开始，最后一个字母是“Ω，ω” 欧米伽（Omega），代表终了。这正是《新约》用希腊语写作的痕迹。

希腊字母简表

希腊字母简表（以下均为英语读法，非希腊语本音）本表格字母内容来自《现代汉语词典》（2002增补本）【希腊字母】词条

字母名称	英语音标	大写	小写	字母名称	英语音标	大写	小写
alpha	/'ælfə/	Α	α	nu	/nju:/	Ν	ν
beta	/'bi:tə/ 或 /'beɪtə/	Β	β	xi	希腊 /ksi/； 英美 /ˈzaɪ/ 或 /ˈksaɪ/	Ξ	ξ
gamma	/'gæmə/	Γ	γ	omicron	/əuˈmaikrən/ 或 /ˈɑmɪˌkrɑn/	Ο	ο
delta	/'deltə/	Δ	δ	pi	/paɪ/	Π	π
epsilon	/'epsɪlɒn/	Ε	ε	rho	/rəʊ/	Ρ	ρ
zeta	/'zi:tə/	Ζ	ζ	sigma	/'sɪgmə/	Σ	σ，ς
eta	/'i:tə/	Η	η	tau	/tɔ:/ 或 /taʊ/	Τ	τ
theta	/'θi:tə/	Θ	θ	upsilon	/ˈipsilon/ 或 /ˈʌpsilɒn/	Υ	υ
iota	/aɪ'əutə/	Ι	ι	phi	/faɪ/	Φ	φ
kappa	/'kæpə/	Κ	κ	chi	/kaɪ/	Χ	χ
lambda	/'læmdə/	Λ	λ	psi	/psaɪ/	Ψ	ψ
mu	/mju:/	Μ	μ	omega	/'əʊmɪgə/ 或 /oʊ'megə/	Ω	ω

- Α α（alpha）常用作形容词，以显示某件事物中最重要或最初的。
- Β β（beta）也能表示电脑软件的测试版，通常指的是公开测试版，提供一般使用者协助测试并回报问题。
- Ι ι 有时用来表示细微的差别。
- Δ在初中数学里也表示一元二次方程的判别式。