图论复习笔记

@2025-06-03, by nictheboy

略去了PPT中所有的定义、证明和例子以及次要的定理和推论，只保留了重要的定理和推论。

第一章 图的基本概念

定理（握手定理）：对任意有向或无向图 G，$\sum_{v\in V(G)} d(v) = 2|E(G)|$。特别地，若 G 为有向图，$\sum_{v\in V(G)} d^+(v) = \sum_{v\in V(G)} d^-(v) = |E(G)|$

推论：在任意有向或无向图 G 中，度数为奇数的顶点个数为偶数。

定理（度序列可简单图化的充要条件）：对于一个非负整数列 $d_1, \ldots, d_n$（$d_1 \geq d_2 \geq \ldots \geq d_n$），存在一个简单图 G 使其度数列为 $d_1, \ldots, d_n$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n d_i$ 为偶数，且 $\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min(d_i, k)$ 对所有 $1 \leq k \leq n$ 成立。

定理（用最大路径法证明）：设 G 为 n（$n \geq 3$）阶无向简单图，$\delta(G) \geq 2$，则 G 中存在至少长度大于或者等于 $\delta(G) + 1$ 的圈。

定理（联通性作为等价关系可用于划分等价类）：对任意无向图 $ G = <V,E> $，存在 V 的一个划分 $V_1, V_2, \ldots, V_k$，使得任意 $G[V_i]$ 是 G 的极大连通子图。

定理（二部图的判定定理）：无向图 G 是二部图当且仅当 G 中没有奇圈。

第二章 树

定理（树的各种定义的等价性）：设 G 为 n 阶图，则以下命题等价：

1. “G 联通”、“G 无圈”和“$m = n - 1$”中任选两个。
2. G 中任意两个顶点之间存在唯一的路径。
3. G 是连通，但去掉任意一条边后不再连通。
4. G 中无圈，但（在不相邻的顶点间）加一条新边后就有圈了。

定理（森林的路分解）：设 G 是森林（或树）且恰有 $2k$ 个奇次顶点，则在 G 中有$ k$ 条边不重合的路 $P_1, P_2, \ldots, P_k$，使得：
$E(G) = E(P_1) \cup E(P_2) \cup \ldots \cup E(P_k)$

定理：若图 G 是满足 $\delta \geq k - 1$ 的简单图，则对于任意的 k 阶树 T，T 同构于 G 的某个子图。

定理（度序列可树化的充要条件）：对于一个非负整数列 $d_1, \ldots, d_n$，存在一个树 T 使其度数列为 $d_1, \ldots, d_n$ 当且仅当 $\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$。

定理（树的中心）：对于任意树 T，其中心点的个数为 1 或 2。

定理（Cayley）：$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G/e)$，其中 $G - e$ 表示从 G 中去掉边 e，G/e 表示从 G 中去掉边 e 后，将 e 的两个端点合并为一个顶点。

定理（Cayley）：$\tau(K_n) = n^{n-2}$。

推论（利用“每条边所对应的生成树的棵数”证明）：$\tau(K_n - e) = (n-2)n^{n-3}$。

定理（Prim算法的正确性）：若 T 是 G 的最小生成树，则 T 的任意边 e 都是连接 $G - e$ 的两个连通分支的最小边。

第三章 平面图

定理（Euler公式）：若 G 是连通平面图，则有 $n-m+\varphi=2$。

推论：若 G 是平面图，则有 $n-m+\varphi=1+\omega$，其中 ω 是 G 的连通分支数。

推论：若 G 是联通平面图，且每个面至少有 l 条边，则 $m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$。

推论：$K_{3,3}$ 不是平面图。

推论：若 G 是平面图，则 $m \le 3n-6$。

推论：K_5 不是平面图。

定理（极大平面图的三角形特征）：设 G 是至少有 3 个顶点的简单平面图，则 G 是极大平面图，当且仅当 G 的每个面的次数是 3。

推论：若 G 是至少有 3 个顶点的极大平面图，则 (1) $m=3n-6$; (2) $\varphi=2n-4$。

推论：设 G 是 n 个点，m 条边的简单平面图，且 $n \ge 3$，则 G 是极大平面图的充要条件是 $m=3n-6$。

定理：设 G 是 $n \ge 4$ 的极大简单平面图, 则 G 的最小度数大于等于 3。

定理（对偶图的对偶图）：G 是平面图，则 $(G^*)^* \cong G$ 当且仅当 G 是连通的。

定理（库拉托斯基定理）：图 G 是可平面的，当且仅当 G 中没有同胚于 K_5 或 $K_{3,3}$ 的子图。（如果两个图可由同一个图细分得到, 称这两个图同胚。）

第四章 匹配

定理（Bergen，1957）：G 的匹配 M 是最大匹配，当且仅当 G 不存在 M 可扩路。

定理（Hall定理）：设 $G=(X,Y)$ 是两分图，则 G 存在饱和 X 每个顶点的匹配的充要条件是：$\forall X \subseteq V(G)$，有 $|N(X)| \ge |X|$。其中 $N(S)$ 是 S 中点的邻集的并集。

定理 (Kφnig，1931)：在两分图中，最大匹配的边数等于最小覆盖的顶点数。

定理（Tutte，1947）：图 G 有完美匹配当且仅当对 V 的任意真子集 S，有：$o(G-S) \le |S|$。其中 $o(G-S)$ 表示 $G-S$ 的奇分支数目。

推论（彼得森定理）：没有割边的 3 正则图存在完美匹配。

推论：一棵树 G 有完美匹配当且仅当对所有顶点 $v \in V(G)$，有：$o(G-v)=1$。

定理：K_{2n} 可一因子分解。

推论：每个 k（$k>0$）正则两分图 G 是一可因子分解的。

定理：K_{2n+1} 可 2 因子分解。

第五章 图着色

引理：设 $G=(X,Y)$ 是一个最大度为 Δ 的两分图，则 G 是某个 Δ 正则两分图 G^* 的子图。

定理（两分图的边色数）：若 G 是两分图，则 $\chi'(G)=\Delta$，其中 Δ 是 G 的最大度数。

定理（维津定理，1964）：若 G 是简单图，则：$\chi'(G)=\Delta$ 或 $\chi'(G)=\Delta+1$。

定理（Vizing定理）：设无环图 G 中边的最大重数为 μ，则 $\chi'(G) \le \Delta+\mu$。

定理：G 是有边的两分图的充要条件是 $\chi(G)=2$。

定理：G 是无边图的充要条件是 $\chi(G)=1$。

定理：G 是完全图的充要条件是 $\chi(G)=|V(G)|$。

定理：对任意图 G，有 $\chi(G)\le\Delta+1$，其中 Δ 是 G 的最大度数。

第六章 欧拉图与H圈

定理：下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：

1. G 是欧拉图；
2. G 的顶点度数为偶数；
3. G 的边集合能划分为圈。

推论：连通非欧拉图 G 存在欧拉迹（连通图 G 是一个半欧拉图）当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数。

定理（H-图的必要条件）：若 G 为H-图，则对 $V(G)$ 的任一非空顶点子集 S，有：
$\omega(G-S)\le|S|$。

定理（H-图的充分条件）：对于 $n\ge3$ 的简单图 G，如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v，有：$d(u)+d(v)\ge n$，那么，G 是 H 图。

定理：设 G 是具有 n 个点的简单图，若 G 的任意两个不相邻顶点 u 和 v，有 $d(u)+d(v)\ge n-1$，则 G 有哈密尔顿路。