第二章　树

本次课主要内容

(一)、树的定义

(二)、树的性质

(三)、树的度序列

(四)、树的中心

(五)、生成树

（一）、 无向树的定义

1. 定义

无向树——连通无圈的简单无向图，简称树，用T表示。

平凡树——平凡图。

森林——若无向图G至少有两个连通分支且每个连通分支都是树。

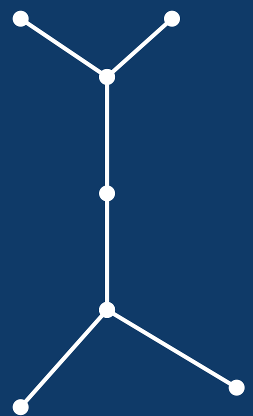
树叶——无向图中悬挂顶点。

分支点——度数大于或等于2的顶点。

说明： 树与森林都是两分图

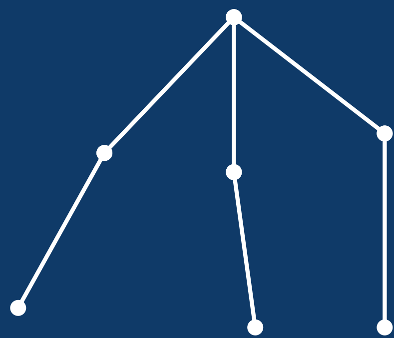
例如：下面的图均是树

树T_1



树T_2

树T_3



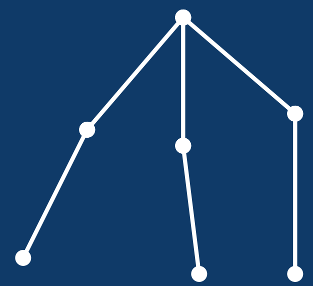
树T_4

2、树的应用

树是图论中应用最为广泛的一类图。在理论上，由于树的简单结构，常常是图论理论研究的“试验田”。在实际问题中，许多实际问题的图论模型就是树。

例1 族谱图与树

要把一个家族的繁衍情况简洁直观表达出来，用点表示家族中成员，成员x是成员y的儿女，把点x画在点y的下方，并连线。如此得到的图，是一颗树，称为根树。示意如下：

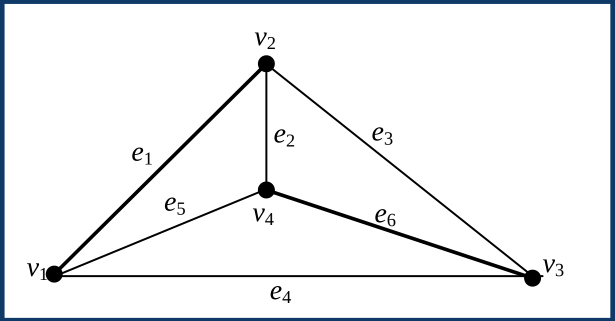


根树

实际上，根树是许多问题的模型，如社会结构，计算机数据结构，数学中的公式结构，分类枚举表示等。

例2 道路的铺设与树

假设要在某地建造5个工厂，拟修筑道路连接这5处。经勘探，其道路可按下图的无向边铺设。现在每条边的长度已经测出并标记在图的对应边上，如果我们要求铺设的道路总长度最短，这样既能节省费用，又能缩短工期，如何铺设？



该问题归结于在图中求所谓的最小生成树问题。或称为赋权图中的最小连接问题。

例3 通信网络中的组播树

在单播模型中，数据包通过网络沿着单一路径从源主机向目标主机传递，但在组播模型中，组播源向某一组地址传递数据包，而这一地址却代表一个主机组。为了向所有接收者传递数据，一般采用组播分布树描述IP组播在网络里经过的路径。组播分布树有四种基本类型：泛洪法、有源树、有核树和Steiner树 。

3. 无向树的等价定义

定理2.1 设$G=\langle V, E\rangle$是n阶m条边的简单无向图，则下面各命题是等价的：

（1）G是树—连通无圈。

（2）G中任意两个顶点之间存在唯一的路径。

（3）G中无圈且$m=n-1$。

（4）G是连通的且$m=n-1$。

（5）G是连通的且G中任何边均为桥。

（6）G中无圈，但在任何两个不相邻的顶点之间加一条新边，所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

说明（5）等价说法： G是连通的，且对任意e∈E，G-e不连通。

(1)⇒(2)

如果G是树，则G中任意两个顶点之间存在唯一的路径。

存在性：

由G的连通性及定理14. 5的推论（在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j($v_i \neq v_j$)存在通路，则v_i到v_j 一定存在长度小于等于$n-1$的初级通路(路径)）可知，

$\forall u, v \in V$，u与v之间存在路径。

唯一性：反证法

假设路径不是唯一的，设Γ_1与Γ_2是u到v的两个不同的路径，

从u到v看， 第一个不是u的Γ_1与Γ_2 的公共顶点记为w，则$\Gamma_1(u, w)$与$\Gamma_2(u, w)$构成圈，与G中无圈矛盾。

(2)⇒(3)

如果G中任意两个顶点之间存在唯一的路径， 则G中无圈且$m=n-1$。

首先证明 G中无圈。

若G中存在长度大于等于3的圈，则圈上任何两个顶点之间都存在两条不同的路径，这也与已知矛盾。

其次证明 $m=n-1$。（归纳法）

$n=1$时，G为平凡图，结论显然成立。

设$n\leqslant k\,(k\geqslant 1)$时结论成立.

当$n=k+1$时，设$e=(u, v)$为G中的一条边，由于G中无圈，所以$G-e$ 必为两个连通分支G_1、G_2。设n_i、m_i分别为G_i中的顶点数和边数，则$n_i\leqslant k$ ，$i=1, 2$， 由归纳假设可知$m_i=n_i-1$，于是

$$m=m_1+m_2+1=n_1-1+n_2-1+1=n_1+n_2-1=n-1。$$

(3)⇒(4)

如果G中无圈且$m=n-1$，则G是连通的且$m=n-1$。

只需证明G是连通的。（采用反证法）

假设G是不连通的，由s($s\geqslant 2$)个连通分支$G_1,G_2,\ldots,G_s$组成，并且G_i中均无圈，满足（1）的特性。

由(1)⇒(2)⇒(3)可知，$m_i=n_i-1$。于是，

$$m=\sum_{i=1}^{s}m_i=\sum_{i=1}^{s}(n_i-1)=\sum_{i=1}^{s}n_i-s=n-s$$

由于$s\geqslant 2$，与$m=n-1$矛盾。

$(4) \Rightarrow (5)$

如果G是连通的且$m=n-1$，则G是连通的且G中任何边均为桥。

只需证明G中每条边均为桥。

$\forall e \in E$，均有$|E(G-e)|=n-1-1=n-2$，

由（若G是n阶m条边的无向连通图，则$m \geq n-1$）可知，

$G-e$已不是连通图，所以，e为桥。

$(5) \Rightarrow (6)$

如果G是连通的且G中任何边均为桥，则G中没有圈，但在任何两个不相邻的顶点之间加一条新边，在所得图中得到唯一的一个含新边的圈。

因为G中每条边均为桥，删掉任何边，将使G变成不连通图，所以，G中没有圈。又由于G连通，所以G为树，由$(1) \Rightarrow (2)$可知，

$\forall u,v \in V$，$u \neq v$，且u与v不相邻则u与v之间存在唯一的路径Γ，则$\Gamma \cup (u,v)$为G中的圈，显然圈是唯一的。

(6) $\Rightarrow$ (1)

如果G中没有圈，但在任何两个不相邻的顶点之间加一条新边，所得图中得到唯一的一个含新边的圈，则G是树。

只需证明G是连通的。

$\forall u,v \in V$，$u \neq v$，且u与v不相邻，则加新边(u,v)后$(u,v)\cup G$产生唯一的圈C，显然有$C-(u,v)$为G中u到v的通路，故$u \sim v$，

由u,v的任意性可知，G是连通的。

4. 森林

推论： 具有k个分支的森林有$n-k$条边， 其中n是G的顶点数。

（二）、无向树的性质

定理 设T是n阶非平凡的无向树，则T中至少有两片树叶。

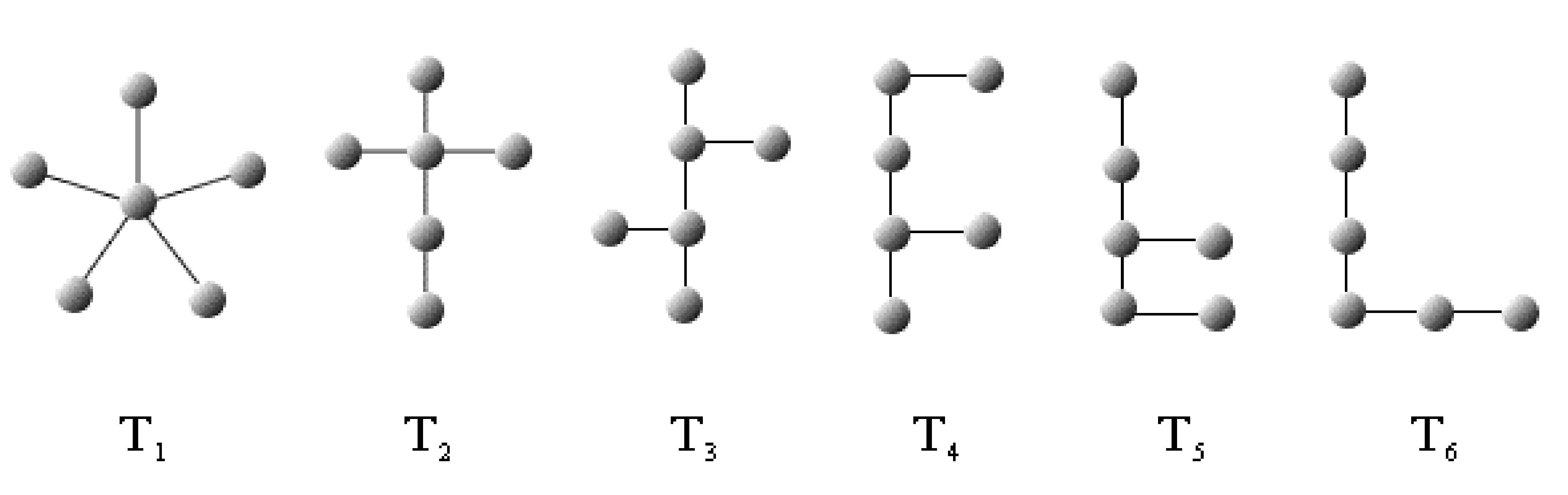
证明

设T有x片树叶，由握手定理及定理2.1可知，

$$2(n-1)=\sum d(v_i)\geq x+2(n-x)$$

由上式解出$x\geqslant 2$。

6个顶点的非同构的无向树



- 人们常称只有一个分支点，且分支点的度数为n−1的n(n≥3)阶无向树为**星形图**，称唯一的分支点为**星心**。

森林(树)的路分解-P48T6

定理：设G是森林（或树）且恰有2k个奇次顶点，则在G中有k条边不重合的路P_1, P_2 ,…, P_k,使得：

$$E(G)=E(P_1)\cup E(P_2)\cup\cdots\cup E(P_k)$$

证明：对k作数学归纳。

当k=1时，G只有两个奇数度顶点，此时，容易证明，G是一条路；

设当k=t时，结论成立。令k=t+1

在G中一个连通分支中取两个一度顶点u与v，令P是连接该两个顶点的唯一路，则G-E(P)是具有2t个奇次顶点的森林，由归纳假设，它可以分解为t条边不重合的路之并，所以G可以分解为t+1条边不重合的路之并。

注：(1) 对图作某种形式的分解，是图论的一个研究对象，它在网络结构分析中具有重要作用。在第四章匹配中会有其他的图分解介绍。

(2) 学了欧拉图后， 这个定理还可以有其他的证法。

树的性质（续）

例：设T_1和T_2都是树T的子树， T_3是T_1与T_2的公共边端点形成的顶点子集的导出子图， 则T_3也是树。

注： 树T的子树即为T的子图，且是一棵树。

讨论：由于T是树，T_3是T的子图， T_3一定不含圈，只需证明T_3连通。

证明： 如T_3是空图， 得证。否则，T_3一定不含圈， 我们只需要证明T_3连通。 在$V(T_3)$中任取两个顶点 u， v， 则u， v属于T_1也属于T_2。又由于T_1和T_2都是树， 则在T_1和T_2中分别存在唯一的路$P_1(u, v)$和$P_2(u, v)$. 又因为$P_1(u,v)$和$P_2(u,v)$是T上的路，而T又是树，所有$P_1(u,v)=P_2(u,v)$， 即$P_1(u,v)$上的边也在T_2上. 从而$P_1(u,v)$是T_3上子图， 即， u,v在T_3上连通。由于u， v的任意性知T_3连通，则T_3也是树。 证毕。

例 设T是k阶树。若图G是满足 $\delta \geqq k-1$ 的简单图, 则T同构于G的某个子图。 P48T8

证明：对k作数学归纳。

当k=1时，结论显然。

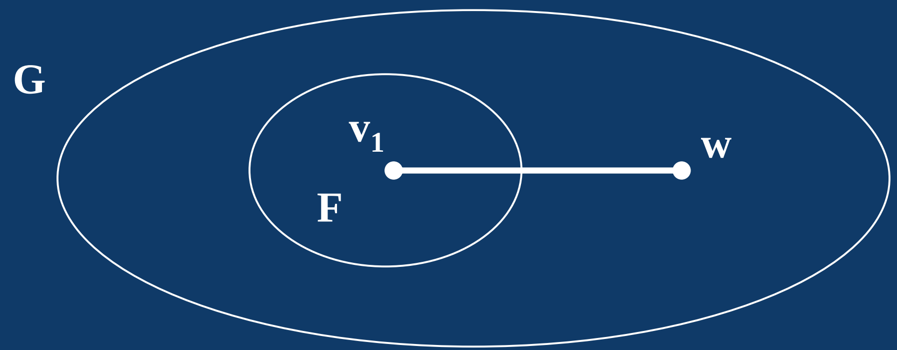
假设对k-1(k≧3)的每颗树T_1, 以及最小度至少为k-2的每个图 H，T_1同构于H的某个子图F。

设T是k阶树，且G是满足 $\delta(G) \geqq k-1$ 的图。我们证明T同构于G的某个子图。

设u是T的树叶，v是u的邻接顶点。则T-u是k-1阶树。

由于$\delta(G) \geqq k-1 \geqq k-2$，由归纳假设，T-u同构于G的某个子图F.

设v_1是与T中v相对应的F中的点，由于$d_G(v_1) \geqq k-1$,所以v_1在G中一定有相异于F中的邻点w, 作$F \cup \{v_1 w\}$，则该子图和T同构。



证明示意图

（三）、树的度序列

在第一章中，介绍了判定一个非增非负序列是否为简单图的度序列定理。下面介绍一个判定非增非负序列是否为树的度序列的简单方法。

定理 设S=｛$d_1,d_2,\ldots,d_n$｝是n个正整数序列，它们满足：$d_1 \geqq d_2 \geqq \cdots \geqq d_n$，$\sum d_i=2(n-1)$. 则存在一颗树T，其度序列为S。 P48T7

证明：对n作数学归纳。

当n=1和2时，结论显然。

假设对n=k时结论成立。设n=k+1

首先, 序列中至少一个数为1，否则，序列和大于2(k+1)，与条件相矛盾！

则 $d_{k+1}=1$. 我们从序列中删掉d_1和d_{k+1}, 增加数 $d^*=d_1-1$放在它应该在的位置。得到序列S_1. 该序列含k个数，序列和为2(k-1), 由归纳假设，存在树T_1，它的度序列为S_1.

现在，增加结点v，把它和T_1中点度数d^*相连得到树T。树T为所求。

(四)、树的中心

(1) 图的顶点的离心率

$$e(v) = \max\left\{d(u,v)\middle|u \in V(G)\right\}$$

(2) 图的半径

$$r(G) = \min\left\{e(v)\middle|v \in V(G)\right\}$$

(3) 图的直径：最大离心率。

(4) 图的中心点：离心率等于半径的点。

(5) 图的中心：中心点的集合。

说明： 和我们第一章的定义一样，只是用不同的表述--点的离心率来定义

定理 每棵树的中心由一个点或两个相邻点组成。

P48T5

证明： 对树T的阶数n作归纳证明。

当n=1或2时，结论显然成立。

设对n<k(k≧3)的树结论成立。设T是k阶树。

容易知道：删掉T的所有叶，得到的树T_1的每个点的离心率比它们在T中离心率减少1。又因T的叶不能是中心点，所以T的中心点在T_1中。这样，若点u的离心率在T中最小，则在T_1中依然最小，即说明T的中心点是T_1的中心点，反之亦然。

因为T_1的阶数<k,所以，由归纳假设，T_1的中心为一个点或两个相邻点组成，即证明T的中心由一个点或两个相邻点组成。

确定图的中心有应用价值。

例如，确定社区医院的修建位置，就可以建模成求图的中心问题

（五）、 生成树

定义 设G为无向图，

（1）T为G的**树**—T是G的子图并且是树。

（2）T为G的**生成树**—T是G的生成子图并且是树。

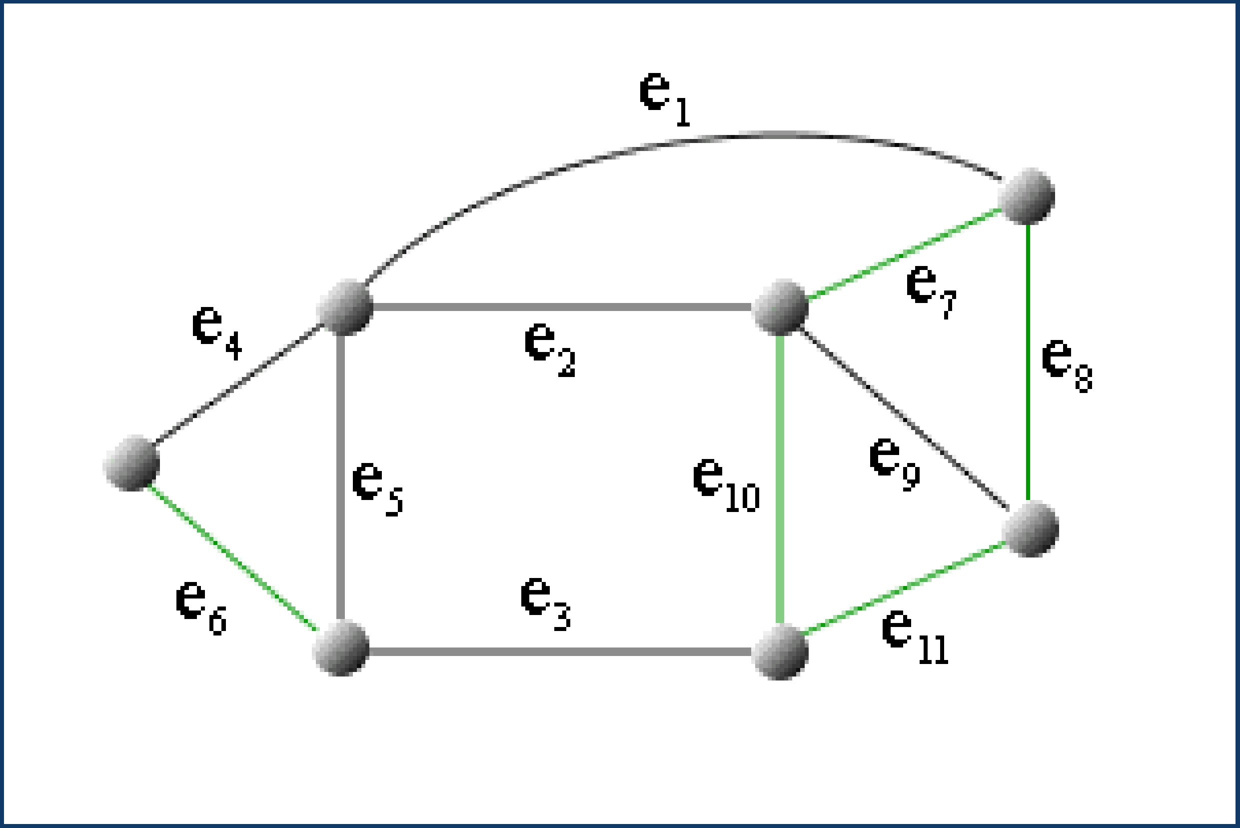
（3）e为T的**树枝**—设T是G的生成树，$\forall e\in E(G)$，若$e\in E(T)$。

（4）e为T的**弦**—设T是G的生成树，$\forall e\in E(G)$，若$e\notin E(T)$。

（5）生成树T的**余树**—导出子图$G[E(G)-E(T)]$。记作 $\overline{T}$

说明

注意：$\overline{T}$ 不一定连通，也不一定不含回路。



生成树的存在条件

定理 无向图G具有生成树当且仅当G连通。

证明 **必要性**，显然。

充分性（破圈法）。

若G中无圈，G为自己的生成树。

若G中含圈，任取一圈，随意地删除圈上的一条边，

若再有圈再删除圈上的一条边，直到最后无圈为止。

易知所得图无圈、连通且为G的生成子图，

所以为G的生成树。

- 充分性的另外一种证法：若G是连通图，T是G的边数最少的连通生成子图，则任取$e \in E(T)$，T-e已不连通。 由树的定价定义可得， T是树。从而知连通图G有生成树。

例题：连通图G的无圈子图T是G的某个生成树的子图。

- 注：　等价于要找到一个生成树包含无圈子图T的所有边。

证明：若G是树，结论已经成立。

若G不是树，　则G中含圈C。由于T是无圈子图，则在C上有一条边e它不在T上。　令G_1=G-e，仍然连通，且T是G_1的无圈子图。G_1上的圈数比G的圈数少。　用G_1代替G，　可使G_1是圈数减少而保持连通，但仍以T为子图。由于G的圈数有限，　最后得到一个图G_k，G_k无圈连通仍包含无圈子图T，而G_k是图G的生成树。于是T是G的生成树G_k的子图。

- 另外一种证法（避圈法）：T是无圈子图。 我们设

  T_1=(V（G)，E(T))，也就是让G的所有点当现在图的顶点集， T的边集当我们设的子图的边集.

  为什么要这样设？（理由是我们需要找到一个支撑树，包含T，支撑树就得包含G的所有顶点）

如T_1不连通， 我们可以找到G中的一条边（如何找呢？），加进T_1使得这个图不含圈，。。。直到T_t连通不含圈。

方法：只需要将T以外的边任意排序，将每条边e加入T1，$T1 \cup \{e\}$中如果没有圈，保留e， 有圈舍弃e， 直到所得图连通即为所求。

定理 **设T是**无向图连通G的一棵生成树， e为T的任意一条弦，则T∪{e}中存在只含一条弦e，其他边均为树枝的圈，而且不同的弦对应的圈不同。

证明：假设e=(u, v)为T的任意一条弦，则e $\notin E(T)$. 由于T是生成树，则T上存在唯一的从u到v的路径，因而T∪{e}中存在唯一的圈包含e, 其他边均为树枝。且不同的的弦对应的圈不同。

先给出边割集的定义

定义　设无向图$G=\langle V, E\rangle$，若存在$E'\subseteq E$，且$E'\neq\varnothing$，使得$\omega(G-E')>\omega(G)$，则称E'是G的**边割集**，或简称为**割集**。

若E'是G的**边割集**，且对于任意的$E''\subset E'$，均有$\omega(G-E'')=\omega(G)$，则称E'是G的极小**边割集**。

- G如果是连通图，（V1，V2）是V的划分，设[V1,V2]表示从V1中的点到V2中的点的所有边，则[V1,V2]是边割集。

定理：设T是无向图连通G的一棵生成树， e为T的任意树枝，则G中存在只含树枝e其他边都是弦的割集，且不同树枝对应的割集不同。

证明：T-e有两个连通分支 T_1，T_2。 令 S_e =[V(T_1)，V(T_2)]代表边的集合， 其中每条边的一个顶点属于V(T_1),另外一个顶点属于V(T_2）。 则 $e \in S_e$，且为满足条件的割集。

显然不同树枝对应的割集不同。