第一章 图的基本概念

本次课主要内容

（一）路与圈

（一）、路与图

对图的路与连通性进行研究，在计算机网络研究中有十分重要的意义。因为网络的抽象就是一个图。研究网络信息传递，信息寻径是主要问题之一，这恰对应于图中路的研究。

1、路与圈的相关概念

(1)、图中的通路

*G*的一条通路（或通道或途径）是指一个有限非空序列$w= v_0\ e_1\ v_1\ e_2\ v_2\ldots e_k\ v_k$，它的项交替地为顶点和边，使得 对任意的i, $1 \le i \le k$ e_i的端点是v_{i-1}和v_i

通路中边数称为通路的长度；v_0,v_k分别称为通路的起点与终点，其余顶点称为通路的内部点。

(2)、图中的迹

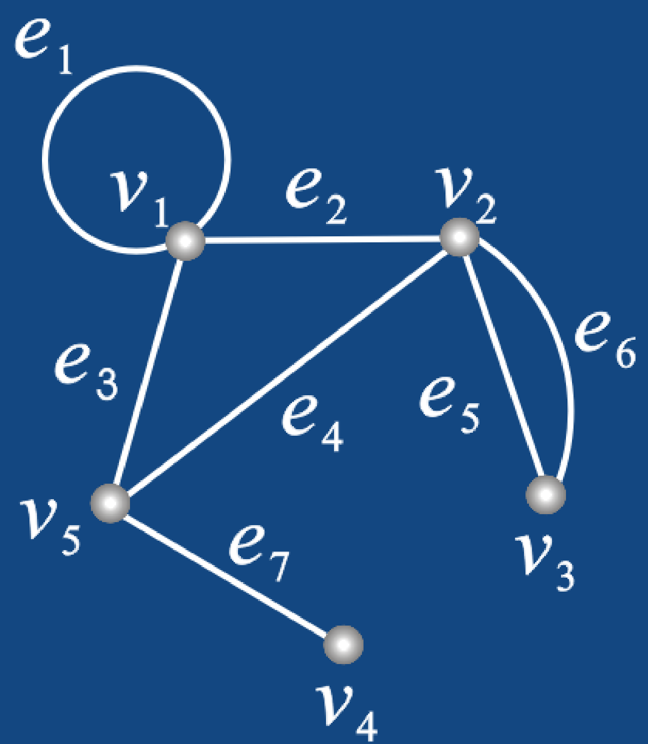
边不重复(或各边相异)的通路称为图的一条迹（行迹）。

(3)、图中的路

顶点不重复的通路称为图的一条路（或轨道）。

例子

- $v_1e_2v_2e_6v_3e_5v_2e_4v_5$ ----通路
- $v_1e_2v_2e_4v_5$——顶点不重路、边不重的路



(4)、回路和圈

- 起点与终点重合的途径、迹、路分别称为图的闭途径、闭迹与圈。闭迹也称为回路。
- 长度为k的圈称为k圈，k为奇数时称为奇圈，k为偶数时称为偶圈。

- 注：每本书上对路和回路的名字有细微的差别。其实就是3类： 一般的通路， 边不重的通路， 点不重的通路。 回路也是一般的闭回路，边不重的闭回路，点不重的闭回路。

(5)、图中两顶点的距离

图中顶点u与v的距离：u与v间最短路的长度称为u与v间距离。记为d (u, v).

如果u与v间不存在路，定义 d (u, v)=∞.

注：这里说的路的长度是指的路上边的条数，相对于非加权图而言（每条边的长度为1 ）；

对边加权图，路的长度是指路上的边权之和。距离是最短路的长度。

例 无向完全图$K_n(n\geqslant 3)$中有几种非同构的圈？

解答 长度相同的圈都是同构的，

因而只有长度不同的圈才是非同构的。

易知$K_n(n\geqslant 3)$中含长度为3，4，…，n的圈，

所以$K_n(n\geqslant 3)$中有$n-2$种非同构的圈。

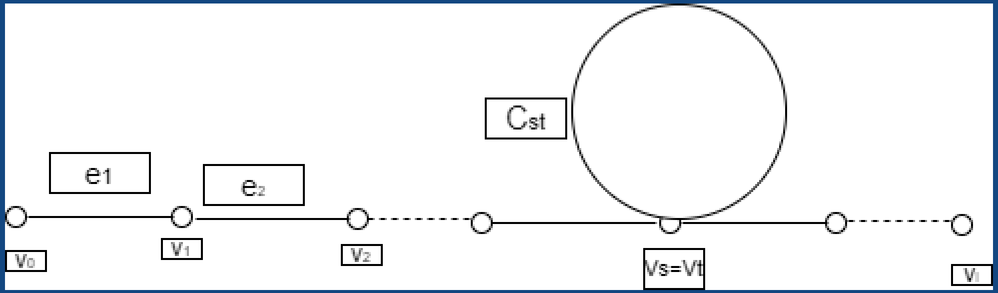
路的有关性质：

定理 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j ($v_i \neq v_j$) 存在通路，则从v_i到v_j存在长度小于或等于$n-1$的通路。

证明： 设$\Gamma = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots e_l v_l$ ($v_0 = v_i$, $v_l = v_j$) 为G中一条长度为l的通路，若$l \leqslant n-1$，则Γ满足要求。

否则必有$l+1>n$，即Γ上的顶点数大于G中的顶点数，于是必存在k, s, $0 \leqslant t<s \leqslant l$，使得 $v_s = v_t$, 即在Γ上存在v_s到自身的回路C_{st}, 在Γ上删除C_{sk}上的一切边得$\Gamma' = v_0 e_1 v_1 e_2 \ldots v_t e_{s+1} \ldots e_l v_l$，$\Gamma'$仍为$v_i$到$v_j$的通路，且长度至少比$\Gamma'$减少1。

若Γ'还不满足要求，则重复上述过程，由于G是有限图，经过有限步后，必得到v_i到v_j长度小于或等于$n-1$的通路。



路的有关性质（续）：

定理 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则v_i到v_j一定存在长度小于或等于$n-1$的顶点不重复的路。

证明类似，只需要把重复的点形成的回路删掉，使得重复的点的情形变少，直到没有重复的点出现就形成了路。既然是顶点不重复的，路长一定小于等于n-1。

回路、圈的性质：

类似可证明下列定理：

定理 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的回路。

定理 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的边不重的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的圈。

问题： **路：** 为什么不同的两点之间只要存在通路就一定有顶点不重复的路？

回路：必须要求存在边不重的回路才有顶点不重的回路？

比如图G就是一条边，e=ab，回路是aba，但没有圈存在。

扩大路径法：

解决关于路和圈的相关问题的常用方法

- 设$G=\langle V, E\rangle$为n阶无向图，$E\neq\varnothing$，设 Γ_l为G中一条路径，

  若此路径的始点或终点与通路外的顶点相邻，就将它们扩到通路中来。

  继续这一过程，直到最后得到的通路的两个端点不与通路外的顶点相邻为止。

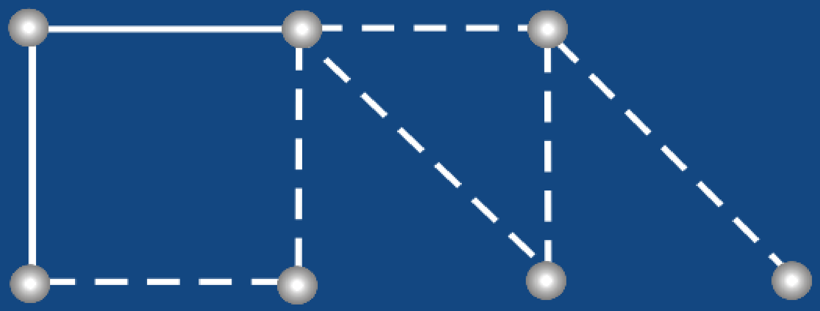
  设最后得到的路径为Γ_{l+k}（长度为l的路径扩大成了长度为$l+k$的路径），称Γ_{l+k}为“极大路径”，

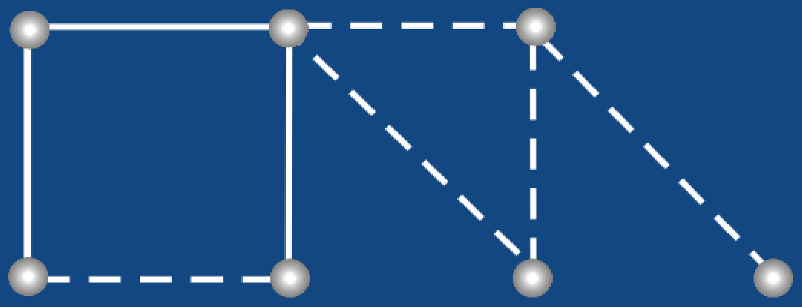
  称使用此种方法证明问题的方法为“扩大路径法”。

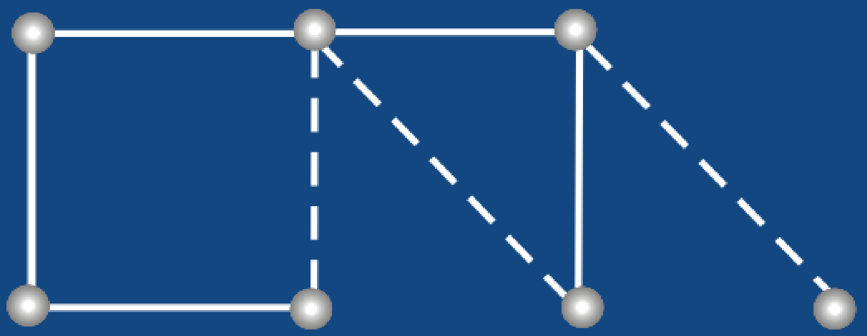
- 有向图中可以类似地讨论，只须注意，在每步扩大中保持有向边方向的一致性。

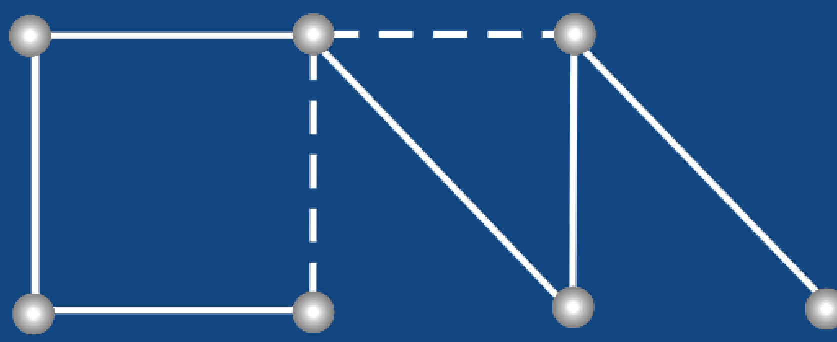
关于极大路径的说明

- 由某条路经扩大出的极大路径不唯一。
- 最长路径一定是极大路径
- 极大路径不一定是图中最长的路径。



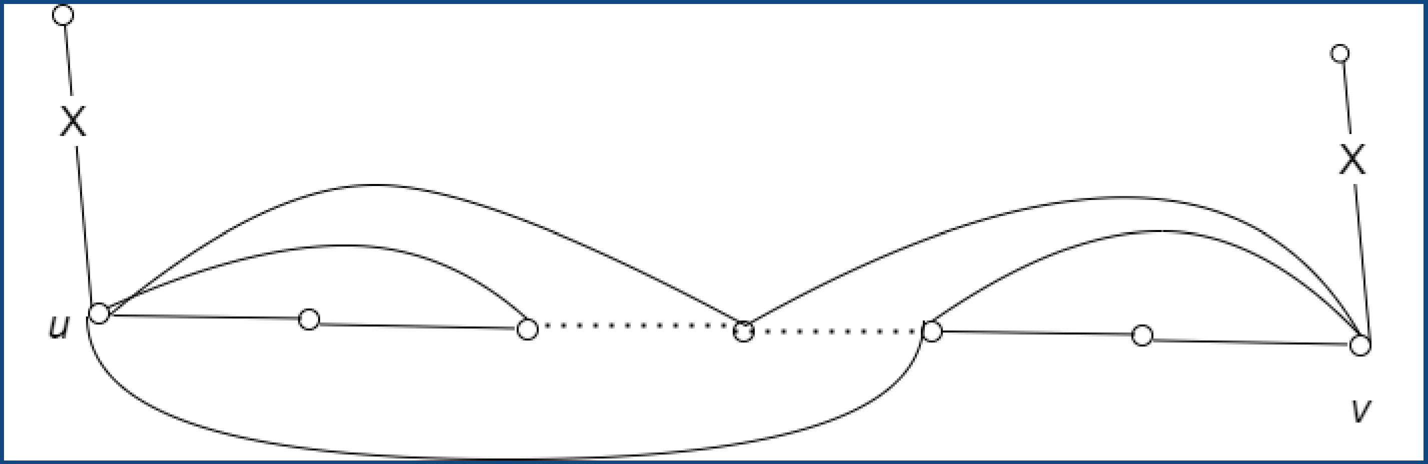






极大路径或者最长路径的性质

- 如P是图G中u到v的极大路径， 则u的所有邻点都在这条路上，且v的所有邻点都在这条路上。 利用这个特征性质可以得到很多有趣的结论。



- 例：若简单图G的最小度数$\delta(G)\geq 2$，则G中存在圈。

证明：假设$P(u_1,u_k)=u_1u_2\ldots u_k$是G中最长的路(顶点不重的路)，$u_1$，$u_k$为P的两个端点，则$u_1$的邻点全在P上。否则， 设w是$u_1$的邻点，且不在P上， 则路$wu_1u_2\ldots u_k$比P的长度多1，与P是最长路矛盾。由于$\delta(G)\geq 2$，则 u_1除u_2外至少存在一个邻点， 不妨设为$u_j(3\leq j\leq k)$，则$u_1u_2\ldots u_ju_1$形成一个圈。

- 例：若简单图G的最小度数δ(G)≥k, 则G中有长为k的路。

方法一：假设$P(u_1, u_l) = u_1u_2 \dots u_l$是G中最长的路(顶点不重的路)，$u_1$，$u_l$为P的两个端点，则$u_1$的邻点全在P上。否则，设w是$u_1$的邻点，且不在P上， 则路$wu_1u_2 \dots u_k$比P的长度多1，与P是最长路矛盾。由于$\delta$(G)≥k，则 P上至少含有k+1个点，即P的长度至少为k, 在其中取长度为k的路即可。

方法二： 设u, v为G的一个连通分支中的任意两个点，则u, v之间一定存在通路，用“扩大路径法”扩大这条路径，最后得到的极大路径为$\Gamma = v_0v_1 \dots v_l$, 则$v_0$的所有邻点都在$\Gamma$上。 由于$\delta$(G)≥k，则$l$ ≥k, 即Γ的长度至少为k, 取长度为k的路即可。

例　设G为n（$n\geq4$）阶无向简单图，$\delta(G)\geq3$。

证明G中存在长度大于或等于4的圈。

方法一：不妨设$\Gamma_l=v_0v_1\ldots v_l$为G的最长路， 易知$l\geq3$。

若v_0与v_l相邻，则$\Gamma_l\cup(v_0, v_l)$为长度大于或等于4的圈。

否则，由于$d(v_0)\geq\delta(G)\geq3$，因而v_0除与Γ_l上的v_1相邻外，还存在Γ_l上的顶点v_k($k\neq1$)和v_t($k<t<l$)与v_0相邻，则$v_0v_1\ldots v_k\ldots v_tv_0$为一个圈且长度大于或等于4。

下面是说明找极大路径的过程

例　设G为n（n≥4）阶无向简单图，δ(G)≥3。

证明G中存在长度大于或等于4的圈。

方法二： 不妨设G是连通图，否则，因为G的各连通分支的最小度也都大于或等于3，因而可对它的某个连通分支进行讨论。

设u, v为G中任意两个顶点，由G是连通图，因而u, v之间存在通路，由定理14. 5的推论可知，u, v之间存在路径，用“扩大路径法”扩大这条路径，设最后得到的“极大路径”为$\Gamma_l = v_0v_1\ldots v_l$，易知$l \geq 3$。

若v_0与v_l相邻，则$\Gamma_l \cup (v_0, v_l)$为长度大于或等于4的圈。

否则，由于$d(v_0) \geq \delta(G) \geq 3$，因而$v_0$除与$\Gamma_l$上的$v_1$相邻外，还存在$\Gamma_l$上的顶点$v_k$ $(k \neq 1)$和v_t $(k < t < l)$与v_0相邻，则$v_0v_1\ldots v_k\ldots v_tv_0$为一个圈且长度大于或等于4。

- 有如下一般性结论：

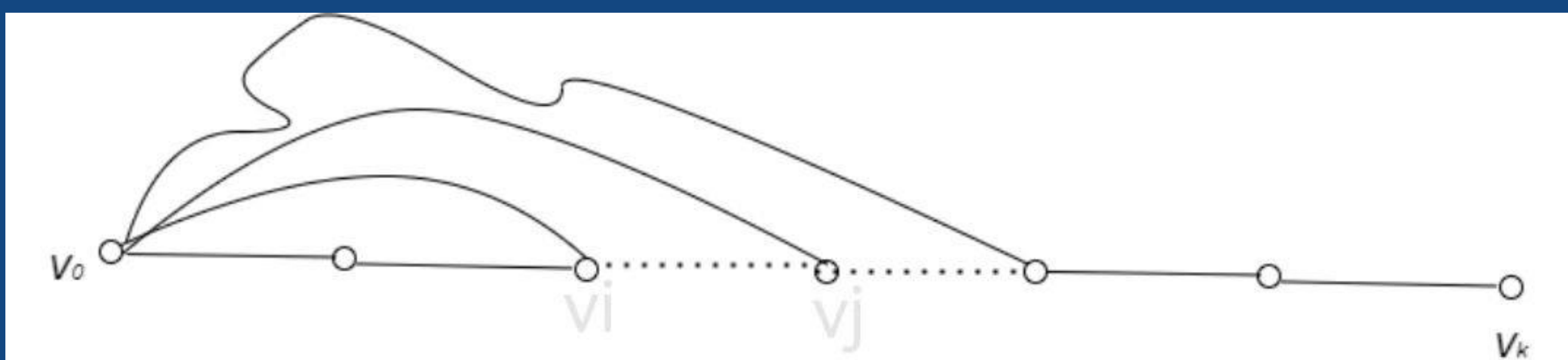
定理：设G为n（$n \geqslant 3$）阶无向简单图，$\delta(G) \geqslant 2$，则G中存在至少长度大于或者等于$\delta+1$的圈。

类似的利用最大路径法证明

例 ：G是简单图，每个顶点的次数不小于3，则G中有偶圈。

证明： 用最长轨方法

设$v_0v_1\ldots v_k$是G中的最长路，则v_0的所有邻点都在这条路上。由于$d(v_0)\geq 3$, 则存在两个不同的点v_i， v_j, $1<i<j\leq k$, v_i与v_j均与v_0相邻。 若i，j 中有一个奇数， 不妨设j为奇数，
则$v_0v_1\ldots v_iv_0$为偶圈。 否则， i，j都为偶数的话，
$v_0v_iv_{i+1}\ldots v_jv_0$为偶圈， 长度为$j-i+2$.



例题： 若G是简单图， 每顶的次数不小于3，则G中各圈长的最大公约数是1或者2。

注：和上例题类似，用最长路法我们能证明G还有圈i+1，j+1和j-i+2的圈（j>i≥2）。

证明：反证法：假设G中各圈长的最大公约数k>2,而用最长路法我们能证明G存在圈长为i+1,j+1和j-i+2的圈(j>i≥2)。则i+1， j+1和j-i+2有公因子k,因此k可除尽

（j+1）-（I+1）=j-i。 由于k可除尽j-i+2， 于是k可除2，矛盾。即G中各圈长的最大公约数是1或者2。

作业：1. 设G为n（$n \geqslant 3$）阶无向简单图，δ（G）$\geqslant 2$， 则G中存在至少长度大于或者等于δ+1的圈。

2. 在n阶图G中，若从顶点v_i到v_j（$v_i \neq v_j$）存在通路，则v_i到v_j一定存在长度小于或等于$n-1$的顶点不重复的路。

3. 在一个n阶图G中，若存在v_i到自身的边不重的回路，则一定存在v_i到自身长度小于或等于n的圈。