第三章　平面图

(一)、平面图概念

(二)、平面图的性质

(三)、图的嵌入

(四)、 极大平面图

(五)、 平面图的对偶

(六)、平面图的判断

(一)、平面图的概念

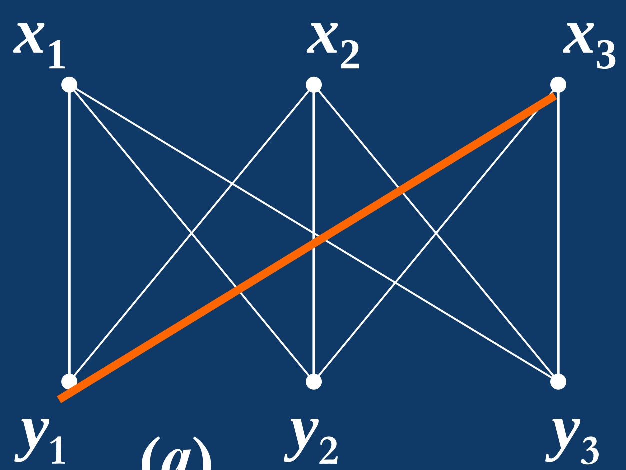
图的平面性问题是图论典型问题之一。生活中许多问题都与该问题有关。

例子1：电路板设计问题

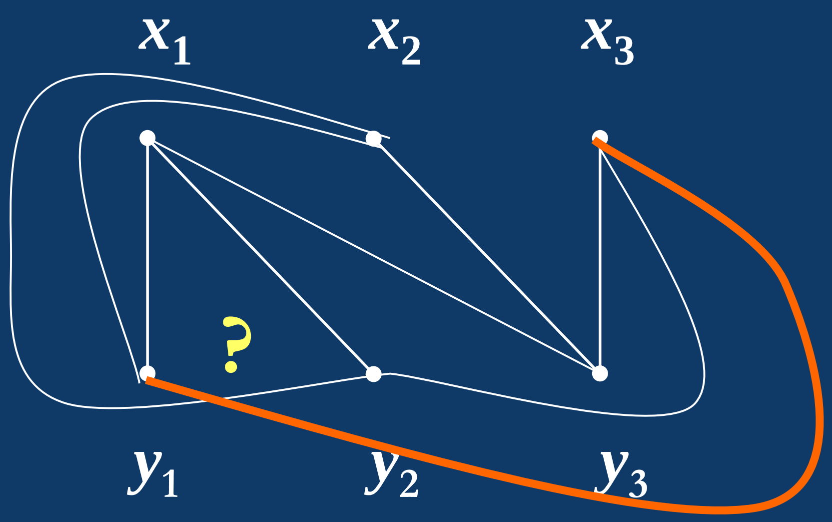
在电路板设计时，需要考虑的问题之一是连接电路元件间的导线间不能交叉。否则，当绝缘层破损时，会出现短路故障。

显然，电路板可以模型为一个图，“要求电路元件间连接导线互不交叉”，对应于“要求图中的边不能相互交叉”。

例2： 假定有三个仓库 x_1，x_2，x_3 和三个车站 y_1，y_2，y_3。为了便于货物运输，准备在仓库与车站间修筑铁路，如图(a) 所示，其中边代表铁路。问是否存在一种使铁路不交叉的路线设计方案，以避免修建立交桥。



(a)



但如果在 x_3 与y_1 之间也要修一条铁路，则可验证满足要求的方案不存在。

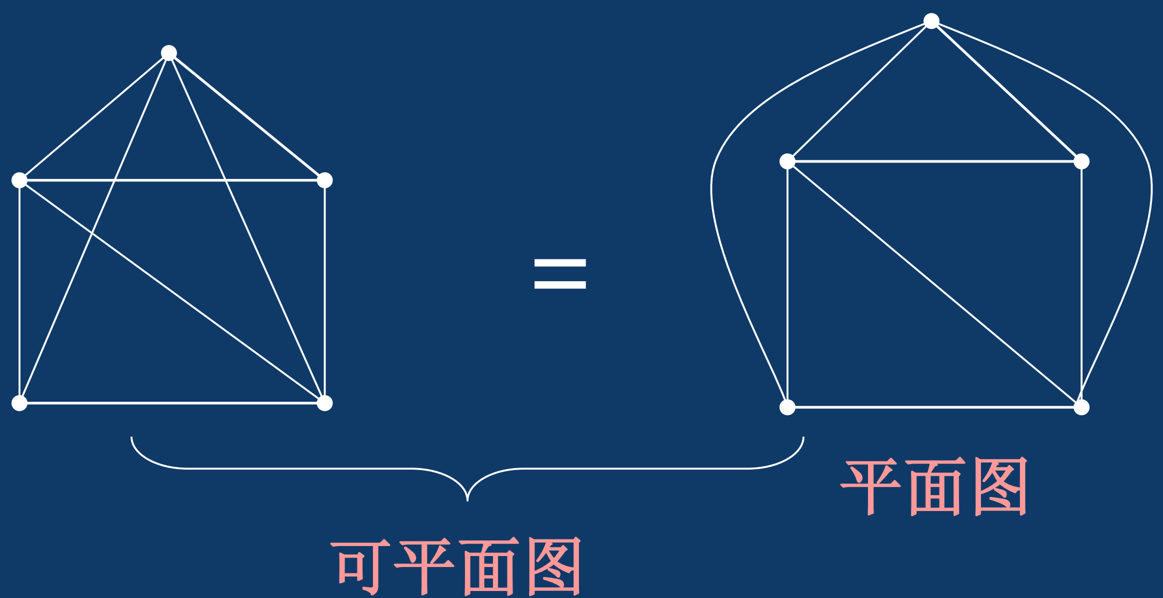
上面的例子都涉及同一个图论问题：

能否把一个图画在平面上，使得边与边之间除顶点外没有交叉？

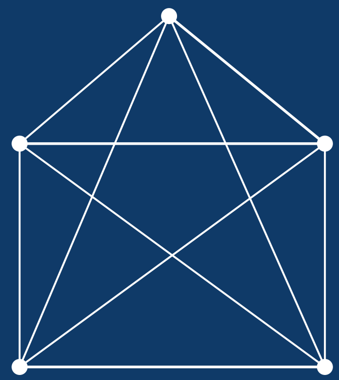
针对这一问题，我们引入平面图与平面嵌入的概念

定义：若图 *G* 可画在一个平面上使除顶点外边不交叉，则称 *G* 可嵌入平面，或称 *G* 为可平面图。可平面图 *G* 的边不交叉的一种画法称为 *G* 的一个平面嵌入，*G* 的平面嵌入表示的图称为平面图。

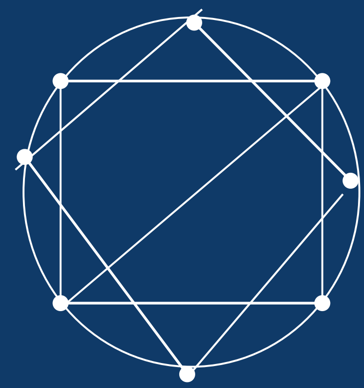
例：



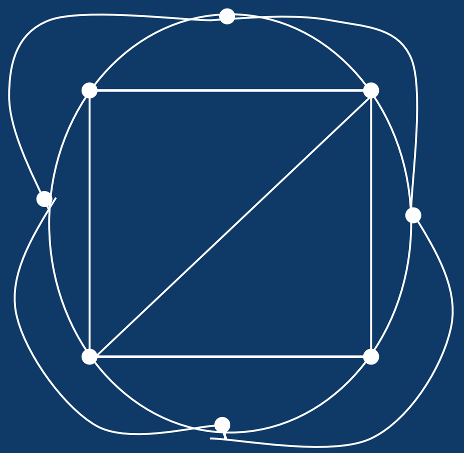
例:



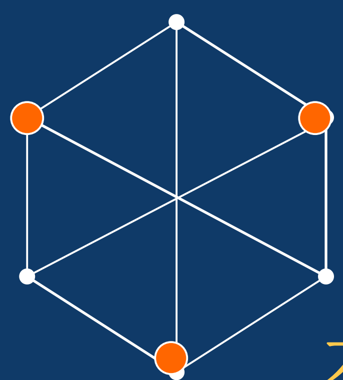
不可平面图



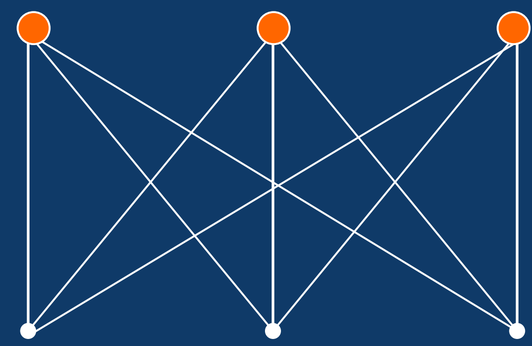
=>



可平面图



=



不可平面图

注: (1) 可平面图概念和平面图概念有时可以等同看待；

(2) 图的平面性问题主要涉及如下几个方面：

①平面图的性质；

②平面图的判定；

③平面嵌入方法(平面性算法)；

④涉及图的平面性问题的拓扑不变量。

由 图的平面性问题研究引申出图的一般嵌入性问题的研究，形成了拓扑图论的主要内容。我国数学家吴文俊、刘彦佩等在该方向都有重要结果。刘彦佩的专著是《图的可嵌入性理论》(1994)，化学工业出版社出版。

我们只针对 ① ② 做介绍。

(二)、平面图性质

从定义我们可得到有如下简单的性质：

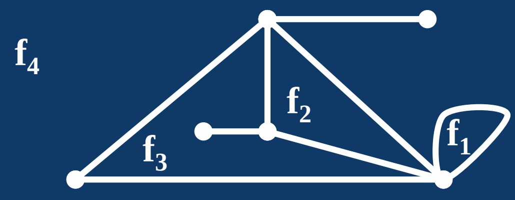
- 一个图是可平面图的充分必要条件是每个连通分支是可平面图；
- 如一个连通图有割点，这从割点切开得到的图是可平面图，则这个图是可平面的，否则不可平面；
- 若G是一个可平面图， 则每个子图都是可平面图。

下面介绍其他性质。再介绍性质之前我们先给出一个定义。

定义：（1）设G是一个平面图，G将所嵌入的平面划分为若干个连通的区域，每个连通的区域称为G的**面**。G的面组成的集合用Ψ表示。

（2）面积有限的区域称为平面图的内部面。无界的区域称为**外部面**或**无限面**。每个平面图有且仅有一个外部面。

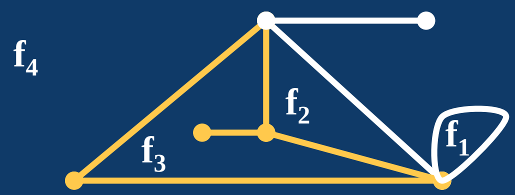
注：这里指的**连续区域**是指区域中的**任意两个点**可由一条**区域中**的曲线连接。



平面图G

在左图G中，共有4个面。其中f_4是外部面，其余是内部面。$\Psi = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$。

(3) 在G中，顶点和边都与某个给定面关联的子图，称为该面的边界。某面 f 的边界中含有的边数(割边计算2次)称为该面 f 的次数, 记为$deg\ (f)$。



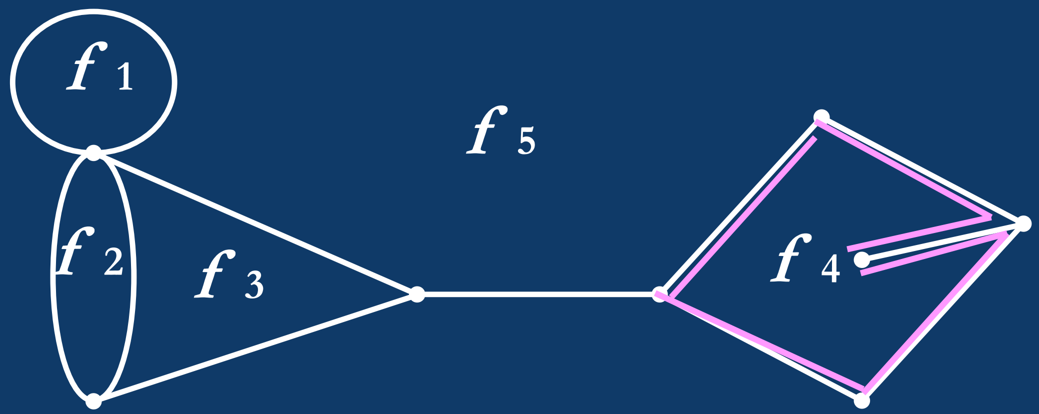
平面图G

在上图中，黄色边在G中的导出子图为面 f_3 的边界。

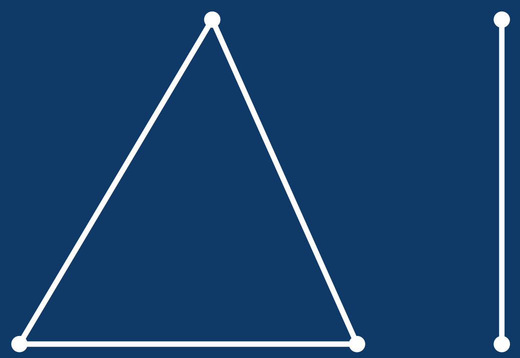
$\deg(f_1) = 1$ $\deg(f_2) = 3$ $\deg(f_3) = 6$ $\deg(f_4) = 6$

- 如果两个面有共同的边界， 称这两个面相邻。
- 非割边一定是某两个面的共同边界。
- 割边只关联一个面。由这可通俗的理解为什么割边计算2次次数。
- 边界是由回路或者回路的并构成，回路可能是复杂回路

例：

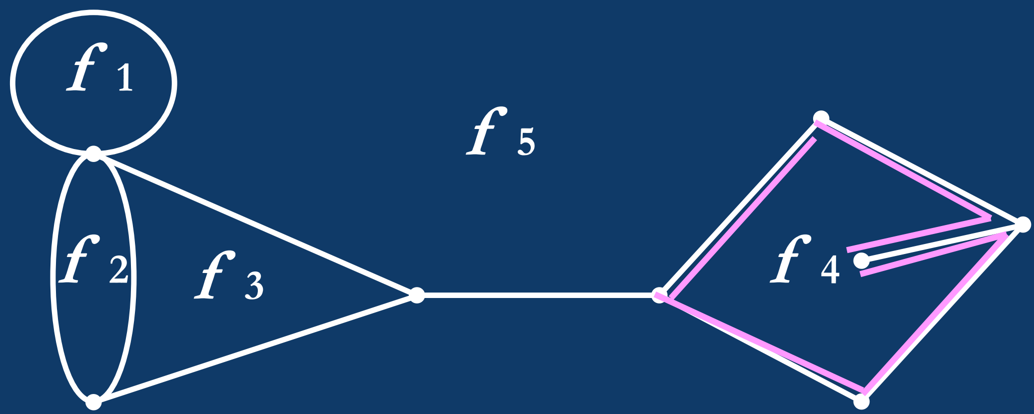


f_4的边界就是红色的复杂回路， 次数是6



左边的图不连通，其外部面的边界由两个回路的并组成， 次数是5，即为abca∪ ded

1、平面图的次数公式



$\deg(f_1) = 1$

$\deg(f_2) = 2$

$\deg(f_3) = 3$

$\deg(f_4) = 6$

$\deg(f_5) = 10$

有5个面：f_1，f_2，f_3，f_4，f_5（f_5为外部面）

相加为22，正好是边数11的2倍

所有面的度数之和为边数的2倍 ←

这个结论是不是可推广到任何平面图？？

定理： 设具有m 条边的平面图G 的所有面的集合为Ψ，则

$$\sum_{f\in\Psi}\deg(f)=2m$$

证明 任取G 的一条边 e ，分类：

（1）若 e 是两个面的公共边，则在计算面的总次数时，e 被计算两次；

（2）若 e 不是公共边，则 e 是 G 的割边，由面的次数的定义，e 也被计算两次。

因此，所有面的次数之和是边数的2倍，即结论成立。

2、平面图的Euler公式

在平面图中，数量除了顶点数和边数外还有面数，它们之是否会有某种定量关系？

树是特殊的平面图。 树的顶点数，边数之间有关系m=n-1，而树的面数就是1. 它们能满足

$n-m+\phi=2$.

问题1： 是否对一般的平面图也满足这个关系？

问题2：如果一个平面图有不同的平面嵌入， 不同的平面嵌入面数是否一样呢？（面数是平面图的最重要的特征之一）

- 下面的定理和推论就回答了这两个问题。

定理：（Euler公式） 设G 是具有 n 个点m 条边φ个面的连通平面图，则有 $n - m + \phi = 2$

证明：证法一：对 φ用归纳法。

当φ =1时 ，G 无圈又连通，从而是树，有 n =m+1，于是

$$n - m + \phi = (m+1) - m + 1 = 2。$$

归纳假设：设所有φ =k的连通平面图满足 $n-m+\phi=2$.

当 φ = k+1 时，设G是任意一个φ =k+1的连通平面图。

此时 G 至少两个面，从而有回路C。C中一定存在一条非割边，删去此条边。记所得之图为 G'，并设 G' 的点数、边数和面数依次为 n'、 m' 和φ'。 易知 G' 仍连通，但只有 k 个面，由归纳假设有 $n' - m' + \phi' = 2$。又因为 $n' = n$， $m' = m - 1$， $\phi' = \phi - 1$，所以有 $n - (m-1)+(\phi - 1) = 2$

证法二：情形1，如果G是树，那么m=n-1, φ=1。在这种情况下，容易验证，定理中的恒等式是成立的。

情形2，G不是树的连通平面图。

反证法：假设在这种情形下，欧拉恒等式不成立。则存在一个含有最少边数的连通平面图G, 使得它不满足欧拉恒等式。设这个最少边数连通平面图G=(n, m), 面数为φ，则：

$$n-m+\phi\neq 2$$

因为G不是树，所以存在非割边e。显然，G-e是连通平面图，边数为m-1, 顶点数为n, 面数为φ-1。

由最少性假设，G-e满足欧拉等式：$n-(m-1)+(\phi-1)=2$

化简得：$n-m+\phi=2$

这是一个矛盾。

3、欧拉公式的几个有趣推论

推论1 设G是具有ϕ个面k个连通分支的平面图，则：

$$n - m + \phi = k + 1$$

证明：对第i (1≦i≦k)个分支来说，设顶点数为n_i，边数为m_i，面数为ϕ_i，由欧拉公式：$n_i - m_i + \phi_i = 2$

所以，$\sum_{i=1}^{k}(n_i - m_i + \phi_i) = 2k$，即，

$$\sum_{i=1}^{k} n_i - \sum_{i=1}^{k} m_i + \sum_{i=1}^{k} \phi_i = 2k$$

而：$\sum_{i=1}^{k} n_i = n$，$\sum_{i=1}^{k} m_i = m$，$\sum_{i=1}^{k} \phi_i = \phi + k - 1$，得：

$$n - m + \phi = k + 1$$

问题1：　是否对一般的平面图也满足这个关系？

定理和推论一回答了这个问题

问题2：如果一个平面图有不同的平面嵌入，　不同的平面嵌入面数是否一样呢？（面数是平面图的最重要的特征之一）

由定理和推论一可得出：一个平面图的不同的平面嵌入面数保持不变。

推论2 设G是具有n个点m条边ϕ个面的连通平面图，如果对G的每个面f，有：deg（f）≥ l ≥3，则：

$$m \le \frac{l}{l-2}(n-2)$$

证明：一方面，由次数公式得：

$$2m = \sum_{f \in \Phi} \deg(f) \ge l\phi \Rightarrow \phi \le \frac{2m}{l}$$

另一方面，由欧拉公式得：$\phi = 2 - n + m$

所以有：$\phi = 2 - n + m \le \dfrac{2m}{l}$

整理得：$m \le \dfrac{l}{l-2}(n-2)$

注： 推论2的条件是平面图的必要条件, 不是充分条件;

必要条件可用来判断某些图是非平面图 ----非常有用

下面举例说明

例 求证：$K_{3,3}$是非可平面图。

证明：反证法： 假设$K_{3,3}$是可平面图。注意到，$K_{3,3}$是两分图，不存在奇圈，所以，每个面的次数至少是4,即l=4

所以，$$\frac{l}{l-2}(n-2)=\frac{4}{2}(6-2)=8$$

而$K_{3,3}$ 的边数m =9，这样有：

$$m>\frac{l}{l-2}(n-2)$$

矛盾。 则$K_{3,3}$是非平面图。

推论3 设G是具有n个点m条边φ个面的简单平面图且n≥3，则：$m \le 3n-6$

证明：情形1，G连通。

因为G是简单图，所以每个面的次数至少为3，即l=3。于是，由推论2得：

$$m \le 3n-6$$

情形2，若G不连通。设$G_1, G_2, \ldots, G_k$是连通分支。

一方面,由推论1：$n-m+\phi=k+1$

另一方面，由次数公式得：$\phi \le \frac{2m}{3}$

所以得：$m \le 3n-3(k+1) \le 3n-6$

简单地，由情形1可分别对每个连通分支得到不等式，然后相加得结论。

例2，证明：K_5是非可平面图。

证明：K_5是简单图，m=10, n=5。3n-6=9。

得，$m > 3n - 6$，所以K_5是非可平面图。

注：K_5和$K_{3,3}$的不可平面性在平面图的判断中起到关键作用

推论4 设G是具有n个点m条边的连通平面图，若G的每个面均由长度是 l 的圈围成，则：

$$m(l-2)=l(n-2)$$

证明：由次数公式，欧拉公式容易得证。

推论5 设G是具有n个点m条边的简单平面图，则：

$$\boxed{\delta \le 5}$$

证明：若不然，设 $\boxed{\delta \ge 6}$

由握手定理：

$$\boxed{6n \le \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \Rightarrow m > 3n - 6}$$

这与G是简单平面图矛盾。

注：该结论是证明“5色定理”的出发点。

(三)、图的嵌入性问题简介

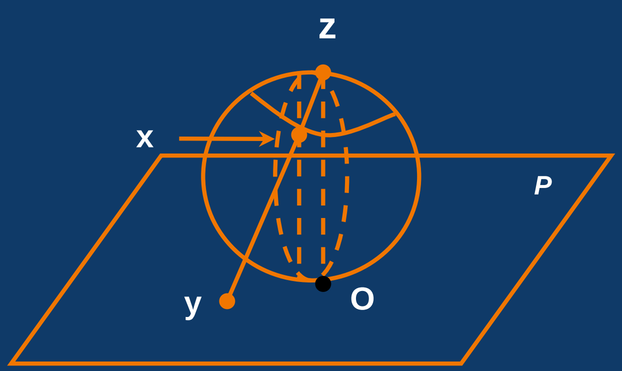
在图的平面嵌入的基础上，简单介绍曲面嵌入：

1)、球面嵌入

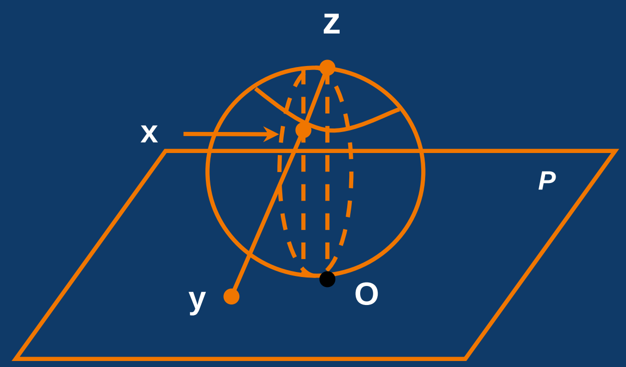
定理 G可球面嵌入当且仅当G可平面嵌入。

证明：我们用建立球极平面射影的方法给出证明。

将球面S放在一个平面P上，设切点为O，过O作垂直于P的直线，该直线与S相交于z。



球极投影示意图



球极投影示意图

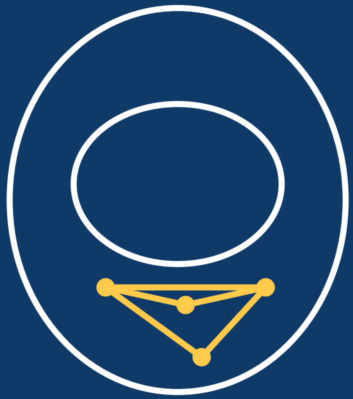
作映射 f : S - {z} → P。定义 f (x) = y, 使得z， x ,y三点共线，即连接z,x延长与P的交点为y。该映射称为球极平面射影。

通过f, 可以把嵌入球面的图映射为嵌入平面的图。反之亦然。即对P上任意一点y， 连接y和z,与S的交点即为x。

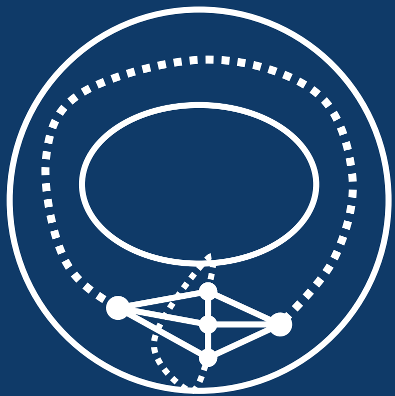
2)、环面嵌入

环面的形状像一个汽车轮胎的表面。

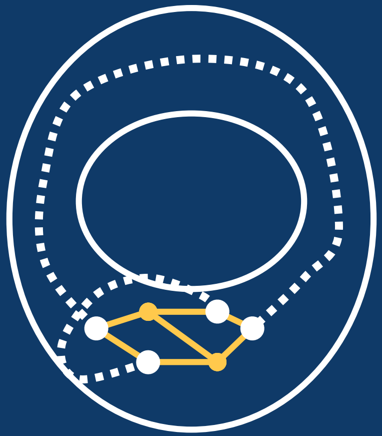
例 将K_4, K_5, $K_{3,3}$嵌入到环面上。



K_4的环面嵌入



K_5的环面嵌入



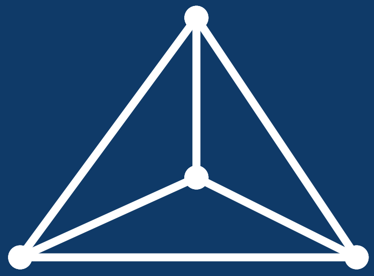
$K_{3,3}$的环面嵌入

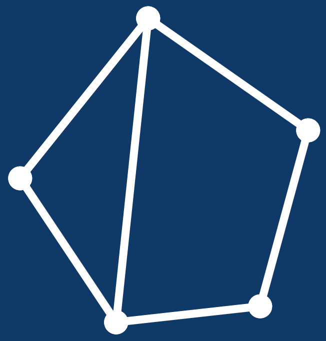
（四）、极大平面图及其性质

对于一个简单平面图来说，在不邻接顶点对间加边，当边数增加到一定数量时，就会变成非平面图。这样，就启发我们研究平面图的极图问题。

定义 设**G**是简单可平面图，如果**G**是K_i ($1 \leqq i \leqq 4$)，或者在G的任意非邻接顶点间添加一条边后，得到的图均是非可平面图，则称G是极大可平面图。

极大可平面图的平面嵌入称为极大平面图。





注：只有在简单图前提下才定义极大平面图。

对任何一个平面嵌入，在已有的边上加任意多条平行边不破坏平面性。

定理 设G是极大平面图，则G必然连通；若G的阶数大于等于3，则G无割边。

（1）先证明G连通。

若不然，G至少两个连通分支。设G_1与G_2是G的任意两个连通分支。

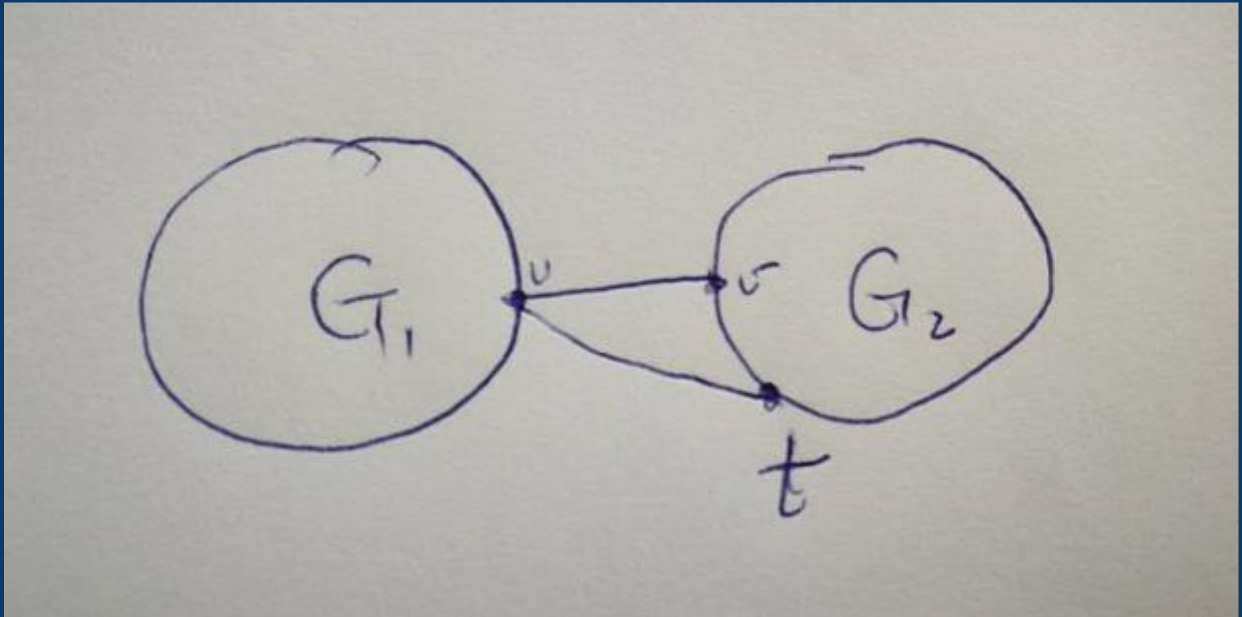
把G_1画在G_2的外部面上，并在G_1, G_2上外部面上分别取一点u与v. 连接u与v得到一个新平面图G^*。但这与G是极大平面图相矛盾。

（2）当G的阶数n≥3时，我们证明G中没有割边。

若不然，设G中有割边e=uv，则G-uv不连通，恰有两个连通分支G_1与G_2。

设u在G_1中，而v在G_2中。由于$n\geq 3$, 所以，至少有一个分支包含两个以上的顶点。设G_2至少含有两个顶点。根据球极投影，可以将u, v分别画在G_1，G_2的外部面上。

由于G是简单图，所以，在G_2的外部面上存在不等于点v的点t。现在，在G中连接点u与t得新平面图G^*,它比G多一条边。这与G的极大性相矛盾。



下面证明极大平面图的一个重要性质。

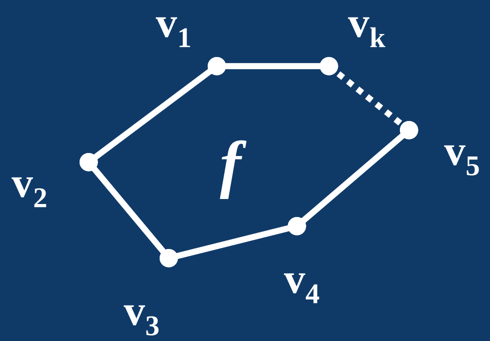
定理 设G是至少有3个顶点的简单平面图，则G是极大平面图，当且仅当G的每个面的次数是3。

注：该定理可以简单记为是“极大平面图的三角形特征”，即每个面的边界是三角形。

证明：“充分性” 设G有ϕ个面且每个面皆3次， 由公式，所有的面的次数之和=2m， 则$3\phi=2m$。 由于每个面的次数为3，G一定是连通图。由欧拉公式$n-m+\phi=2$，则$m=3n-6$ 。由于G是简单平面图，而简单平面图的边的上界是3n-6，G的边数已经达到上界， 故G是极大平面图。

“必要性” 假设G是极大平面图， 由G是简单图则G的每个面的次数至少是3。下证不可能有次数大于等于4的面存在。

假设G中某个面f的次数大于等于4。记f的边界是 $v_1v_2v_3v_4\ldots v_k$。如下图所示。



则连接v_1v_3，没有破坏G的平面性，这与G是极大平面图矛盾。

所以，G的每个面次数一定是3.

推论1：设G是n个点，m条边和φ个面的极大平面图，且n≥3. 则：(1) m=3n-6；(2) φ=2n-4.

证明：因为G是极大平面图，所以，每个面的次数为3.由次数公式：

$$2m = \sum_{f \in \Phi} \deg(f) = 3\phi$$

由欧拉公式：

$$\phi = 2 - n + m$$

所以得：

$$\frac{2}{3}m = 2 - n + m$$

所以得： $m = 3n - 6$

又 $m = n + \phi - 2$

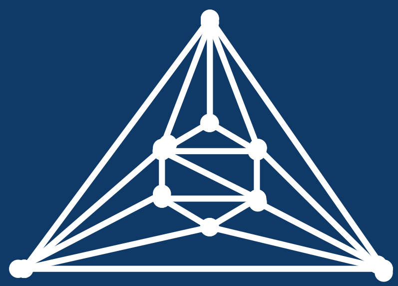
所以： $\phi = 2n - 4$

推论 2：设G是n个点，m条边的简单平面图，且 n≥3. 则G是极大平面图的充要条件是 m=3n-6.

定理：设G是n ≥ 4的极大简单平面图，则G的最小度数大于等于3.

证明：任取G中一个点v， 由于G是平面图， 则G-v也是平面图。 设G’是G的平面嵌入，则v在G’的位置必在G’-v的某个面f’的内部. 又G是极大简单平面图，f’的边界上至少有三个顶点，且这些点必须与v都相邻， 故d(v) ≥ 3. 由v的任意性知，G的最小度数至少是3.

注：顶点数相同的极大平面图并不唯一。例如：



正20面体

非正20面体

还在研究中的问题是：顶点数相同的极大平面图的个数和结构问题。

例　设G是一个简单图，若顶点数n≥11,则G与G的补图中，至少有一个是不可平面图.

证明一：设G是一个n阶可平面图，则：

$$m(G) \le 3n-6$$

所以：

$$m(\bar{G}) = m(K_n) - m(G) \ge \frac{n(n-1)}{2} - (3n-6)$$

考虑：

$$m(\bar{G}) - (3n-6) \ge \frac{n(n-1)}{2} - 2(3n-6) = \frac{1}{2}(n^2 - 13n + 24)$$

令：

$$f(n)=\frac{1}{2}(n^2-13n+24)$$

则：

$$f'(n)=n-\frac{13}{2}$$

所以， 当n≥6.5时，f(n)单调上升。而当n=11时：

$$f(11)>0$$

所以， 当n≥11时，有： $m(\bar{G})>(3n-6)$

由平面图的必要条件得简单可平面图G的补图是非可平面图。

证法二： 假设 G 与 $\bar{G}$ 均为平面图，则

$m(G)\le 3n-6$， $m(\bar{G})\le 3n-6$

而 $m(G)+m(\bar{G})=\frac{1}{2}n(n-1)$

则 $\frac{1}{2}n(n-1)\le 2(3n-6)=6n-12$

即 $n^2-13n+24\le 0$

这 $n<11$ 与 $n\geq 11$ 矛盾.

(五)、平面图的对偶图

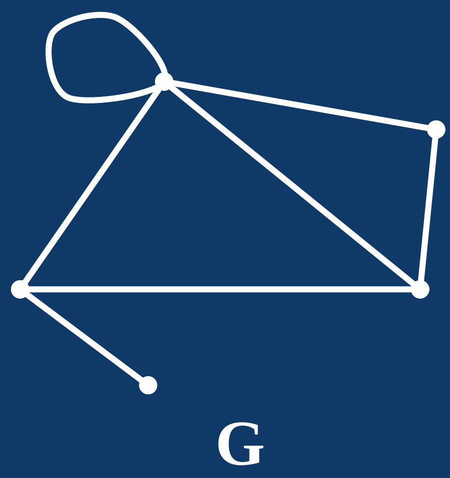
1、对偶图的定义

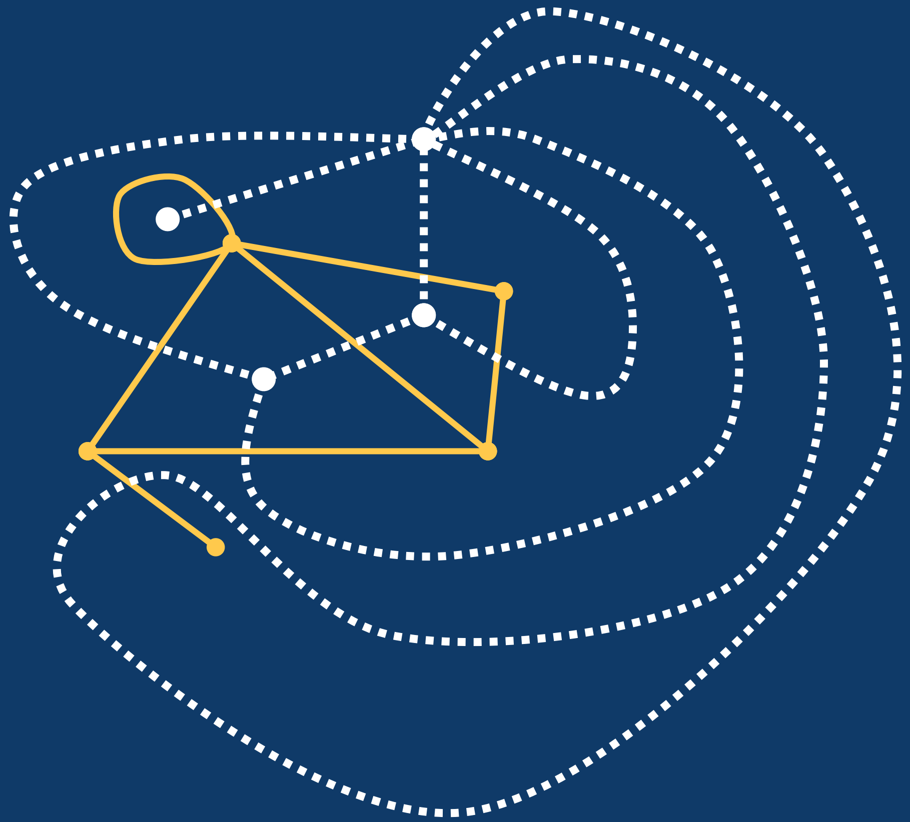
定义 给定平面图G（即一个平面嵌入），G的对偶图G*如下构造：

(1) 在G的每个面f_i内取一个点v_i*作为G*的一个顶点；

(2) 对G的一条边e, 若e是面 f_i 与 f_j 的公共边，则连接v_i*与v_j*，且连线穿过边e; 若e是面f_i中的割边，则以v_i为顶点作环，且让它与e相交。

例如，作出平面图G的对偶图G*





2、对偶图的性质

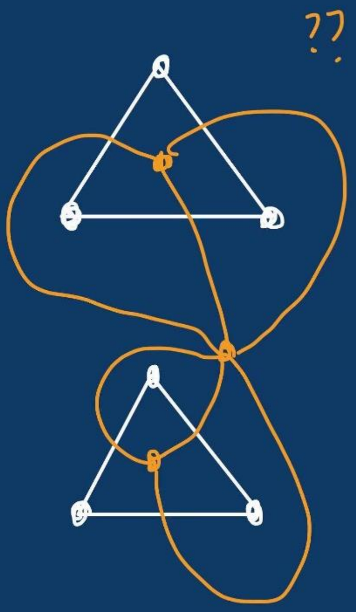
(1)、G与G*的对应关系

1) G*的顶点数等于G的面数；

2) G*的边数等于G的边数；

3) d (v*)=deg(f)；

4)当G是连通图时，G*的面数等于G的顶点数，但G不连通时， G*的面数不一定等于G的顶点数，如右下图。



5) 其他对应关系

平面图*G*	对 应	对偶图
点 边 环 割边 回路 边割集		面 边 割边 环 边割集 回路

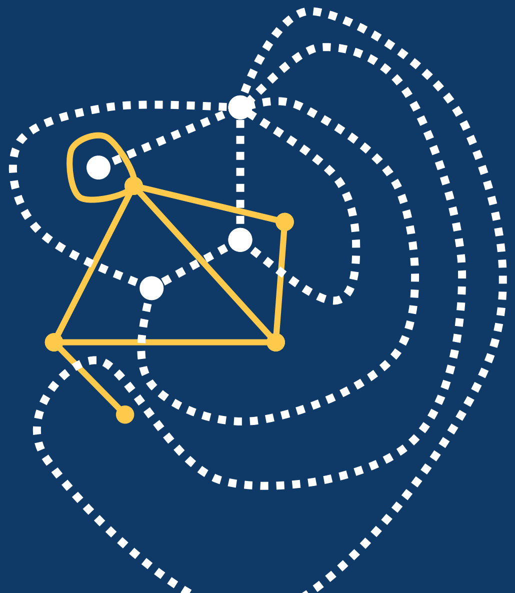
(2)、性质

定理 平面图G的对偶图必然连通

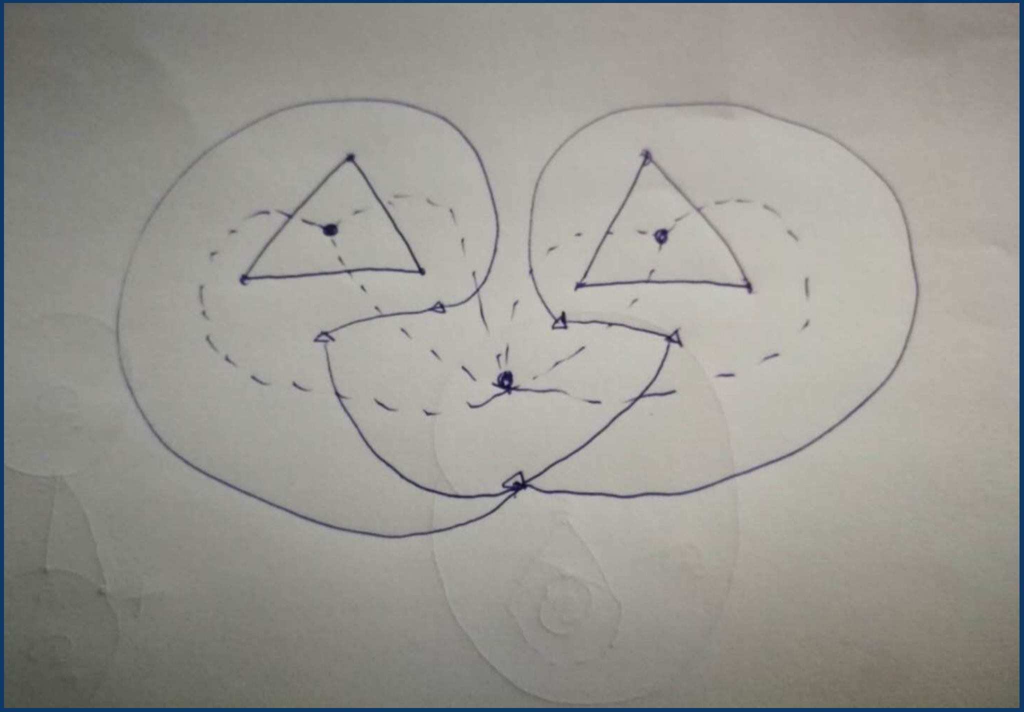
证明：在G*中任意取两点v_i*与v_j*。我们证明该两点连通即可！

用一条曲线 *l* 把v_i*和v_j*连接起来，且 *l* 不与G*的任意顶点相交。

显然，曲线 *l* 从v_i*到v_j*经过的面边序列，对应从v_i*到v_j*的点边序列，该点边序列就是该两点在G*中的通路。



注: (1) 由定理知：(G*)*不一定等于G;



当G是不连通的平面图时， G*是连通的，则 (G*)*是连通平面图， 显然G≠ (G*)*;

但当G是连通平面图时， 是否G= (G*)*呢？

(2) G是平面图，则 $(G^*)^* \cong G$ 当且仅当G是连通的。

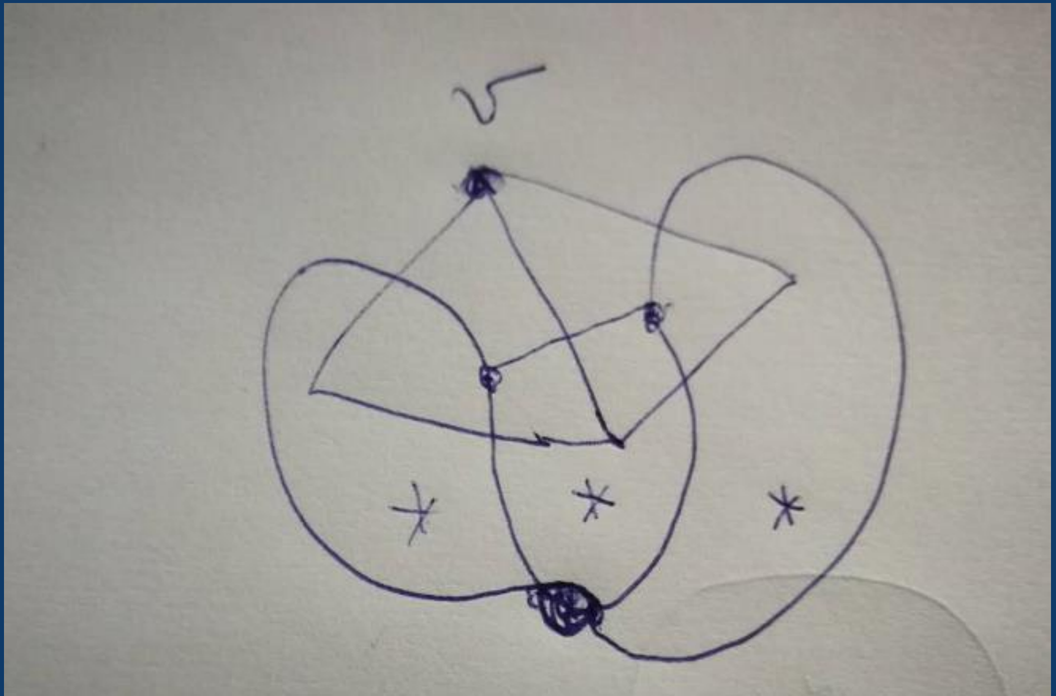
证明：“必要性”

由于G是平面图，由定理，G*是连通的。而由G*是平面图，再由定理，(G*)*是连通的。

所以，由 $(G^*)^* \cong G$ 得：G是连通的。

“充分性”

由对偶图的定义知，平面图G与其对偶图G^*嵌入在同一平面上，当G连通时，容易知道：G^*的无界面 f^{**}中仅含G的唯一顶点v,而除v外，G中其它顶点u均与G*的有限面形成一一对应，于是G中的顶点与G**中的顶点在这种自然对应方式下一一对应且对应顶点间邻接关系保持不变，即：$(G^*)^* \cong G$



(3) 同构的平面图可以有不同构的对偶图。

理由：同构的平面图有不同的平面嵌入，则它们的对偶图不一定能同构。

例如，下面的两个图：$G_1 \simeq G_2$

但 $G_1{}^* \not\simeq G_2{}^*$

这是因为：G_2中有次数是1的面，而G_1没有次数是1的面。所以，它们的对偶图不能同构。

更深层的理由：同构讨论的是点边的对应关系，平面嵌入讨论的是图对应于平面的嵌入或者通俗的说法是平面图的画法。即使同构的图也会有不同的平面图的画法。则 不同的平面嵌入对应的对偶图的度序列都不一样了。

(六)、平面图的判定

对于3阶以上的具有m条边的图G来说，如果G满足如下条件之一：(1)$m>3n-6$; (2) K_5是G的一个子图；(3) $K_{3,3}$是G的一个子图，那么，G是非可平面图。

但上面的条件仅为G是非可平面图的充分条件。

要解决的问题是：给出判定一个图是否是可平面图的充分必要条件。

最早给出图的平面性判定充要条件的是波兰数学家库拉托斯基(30年代给出)。后来，美国数学家惠特尼，加拿大数学家托特，我国数学家吴文俊等都给出了不同的充要条件。

我们主要介绍波兰数学家库拉托斯基的结果。

库拉托斯基定理主要基于K_5和$K_{3,3}$是非可平面图这一事实而提出的平面性判定方法。

所以，我们称K_5与$K_{3,3}$为库拉托斯基图。

一个自然的猜测是：G是可平面图的充分必要条件是G不含子图K_5和$K_{3,3}$。

上面命题必要性显然成立！但充分性能成立吗？

十分遗憾！有例子给出了回答：**NO!**

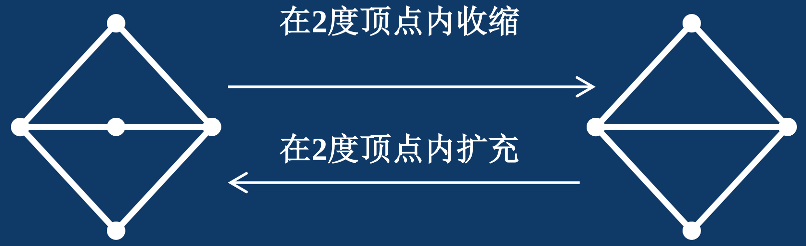
你能给出简单的例子？？？

你能给出简单的例子？？？----- K_5的某条边上加个2次点，或者$K_{3,3}$的某条边上加个2次点

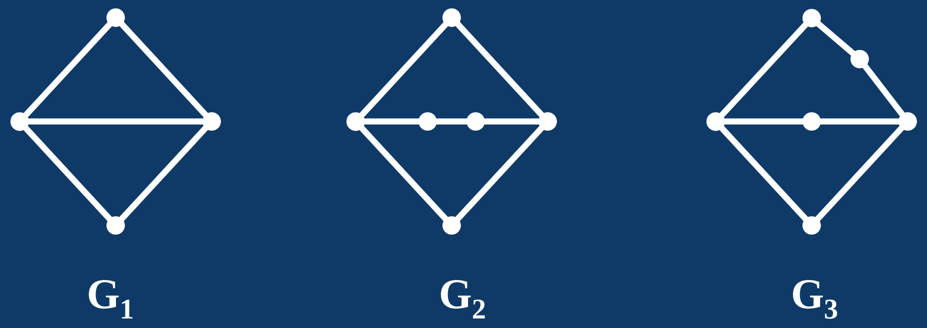
尽管我们的直觉猜测错了，但库拉托斯基还是基于K_5与$K_{3,3}$得到了图的平面性判据。

1、相关概念

定义1 在图G的边上插入一个2度顶点，使一条边分成两条边，称将图在2度顶点内扩充；去掉一个图的2度顶点，使关联它们的两条边合并成一条边，称将图G在2度顶点内收缩。



定义2 两个图G_1与G_2说是同胚的，如果 $G_1 \cong G_2$，或者通过反复在2度顶点内扩充和收缩后能够变成一对同构的图。



上面的G_1, G_2, G_3 是同胚的。

注：图的平面性在同胚意义下不变。

同胚图也可以这样定义：

在一个图的任意一边的中间加上一个新点，将原来的一条边变成两条边，这样得到的图叫原来图的扩张细分。

如果两个图可由同一个图细分得到，称这两个图同胚。

定理 (库拉托斯基定理) 图G是可平面的，当且仅当它不含K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

例1 求证：下面两图均是非平面图。

图 G_1

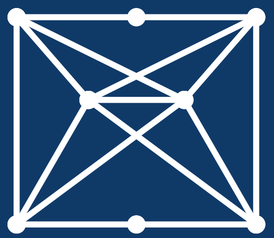


图 G_2

证明：对于G_1来说，按G_1在2度顶点内收缩后，可得到K_5。所以，由库拉托斯基定理知G_1是非可平面图。

对于G_2来说，先取如下子图

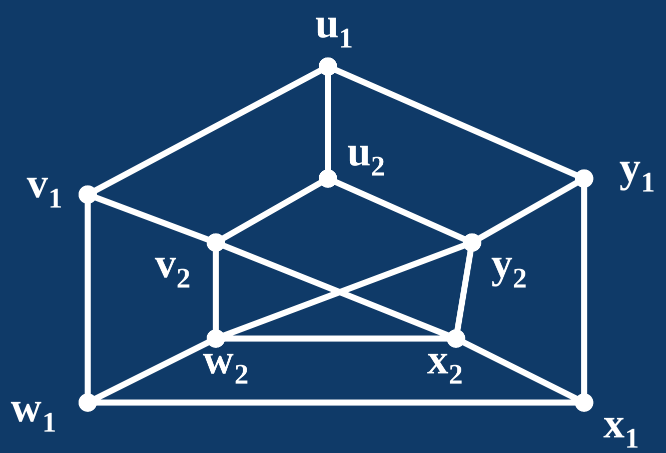
G_2的一个子图

对上面子图，按2度顶点收缩得与之同胚子图$K_{3,3}$:

$K_{3,3}$

所以，G_2是非可平面图。

例2 确定下图是否是可平面图。



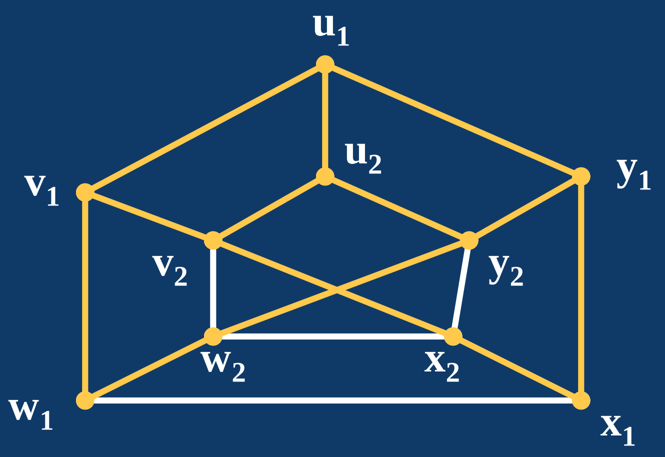
分析：我们根据图的结构形式，怀疑该图是非可平面图。但我们必须找到证据！

当然我们可能考虑是否m>3n-6。遗憾的是该图不满足这个不等式！

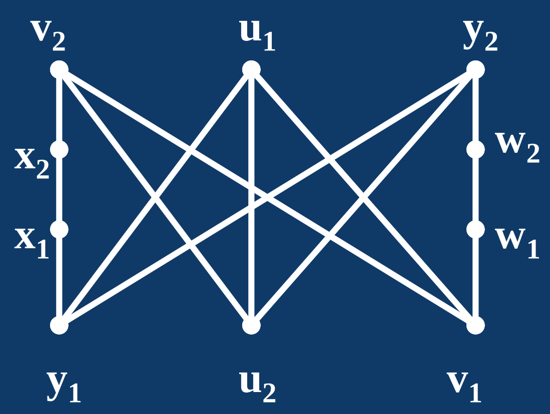
所以，我们要在该图中寻找一个与k_5或$K_{3,3}$同胚的子图！

由于该图的最大度为4的顶点才4个，所以，不存在与K_5同胚的子图。因此，只有寻找与$K_{3,3}$同胚的子图！

解：取G中黄色边的一个导出子图：



也就是得到G的如下形式的一个子图：



上图显然和$K_{3,3}$同胚。由库拉托斯基定理知，G是非可平面的。

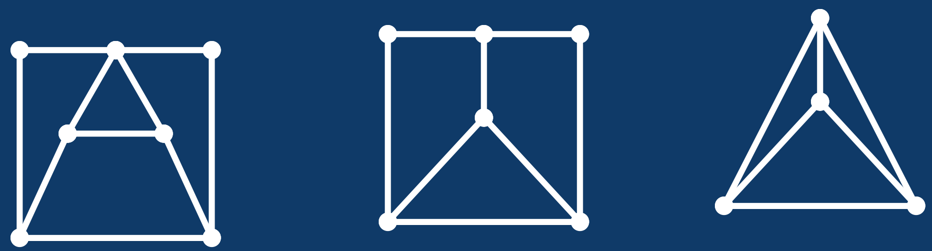
注：(1) 库拉托斯基定理可以等价叙述为：

库拉托斯基定理：图G是非可平面的，当且仅当它含有K_5或$K_{3,3}$同胚的子图。

关于图的可平面性刻画，数学家瓦格纳(Wangner)在1937年得到了一个定理。

定义 设uv是简单图G的一条边。去掉该边，重合其端点，在删去由此产生的环和平行边。这一过程称为图G的初等收缩或图的边收缩运算。

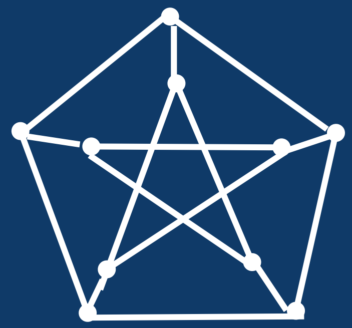
称G可收缩到H,是指对G通过一系列边收缩后可得到图H。



定理 (瓦格纳定理)：简单图G是可平面图当且仅当它不含有可收缩到K_5或$K_{3,3}$的子图。

注：这是瓦格纳1937年在科隆大学博士毕业当年提出并证明过的一个定理。

例3 求证彼得森图是非可平面图。



证明：很明显，彼得森图通过一些列边收缩运算后得到K_5。由瓦格纳定理得证。

平面图的厚度

定义： 如果一个图不是平面图， 我们可以把它的边嵌入到几个平面，使得每个平面上的边不交叉，即把图的边集划分成 $E(G)=\bigcup_{i=1}^{t} E_i, E_i \cap E_j=\emptyset \ (i\neq j)$

且每个边导出的子图 $G[E_i]$ $(i=1,2,\cdots,t)$

皆为平面图， t的最小值称为图G的厚度。

- ✓ 平面图的厚度为1.
- ✓ 非平面图，其厚度最少为2.
- ✓ 单星妖怪的厚度为2. 其外面的五角星和连接内面五角星的边成一平面图， 内五角星成一平面图。

对一般图， 厚度如何求是一个尚未解决的问题，至今既未给出计算厚度的公式， 亦未建立有效的算法。对于厚度下界的估计有定理（见书P57-58）

定理 3.6 若 $\theta(G)$代表图 G 的厚度，则有以下估计式

(i) $\theta(G) \geqslant \left\{\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\right\}, \nu>2$, $\{x\}$是 x 的整数部分加 1.

(ii) 连通图 G 中无三阶圈，则 $\theta(G) \geqslant \left\{\frac{\varepsilon}{2\nu-4}\right\}, \nu>2$.

(iii) $\theta(K_\nu) \geqslant \left[\frac{\nu+7}{6}\right], \nu \geqslant 3$. $[x]$是 x 的整数部分.

- 问题1：　对一个可平面图来说，是否存在一个平面嵌入使其图中的任意一个顶点在外部面的边界上？

- 问题2　　如何证明：一个图是平面图的充要条件是每个块（2-点连通图）是平面图

注：　块----没有割点的图