# 图论

- 上课时间：周一上午10:00-11:30
  地点：　　　3506

教材 《图论》（第二版）

作者： 王树禾

出版社： 科学出版社

# 第一章  图的基本概念

## 本次课主要内容

(一)、图论课程简介

(二)、图的定义

（三）顶点的度及握手定理

（四）图的度序列

(五)、图同构

(六)、特殊图、补图、子图

# (一)、图论课程简介

## 1、研究对象

数学层面：图论是研究点与线组成的“图形”问题的一门科学。属于应用数学分支。

计算机层面：图论是离散数学的骨干分支，离散数学则是计算机科学技术与网络信息科学的理论基础。

## 2、发展历史

图论起源于18世纪的1736年，标志事件是“哥尼斯堡七桥问题”

数学家欧拉被称为“图论之父”

20世纪30年代出版第一本图论著作

目前，图论已形成很多分支：如结构图论、网络图论、代数图论、拓扑图论等

## 3、应用状况

图论的应用已经涵盖了人类学、计算机科学、化学、环境保护、流体动力学、心理学、社会学、交通管理、电信以及数学本身等。

## 4、教学安排

主要介绍图的一些基本概念、基本理论和图论的典型应用。

周2学时。

# ∵ (二)、图的定义与图论模型

## 1. 图的定义的预备知识

无序积、笛卡尔积、多重集合

1）、无序积

- 设$A$，$B$为任意的两个集合，称$\{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}$为A与B的无序积，记作$A\&B$。

无序积的元素是无序对(a,b)。无论$a, b$是否相等，均有$(a, b)=(b, a)$，因而A&B＝B&A。

例：A=\{1，2\}， B=\{a, b\}

**A&B= {(1,a), (1,b), (2,a), (2,b)}**

**={(a,1), (b,1),(a,2),(b,2)}**= B&A

**A&A= {(1,1), (1,2),(2,1),(2,2)}**

## 2)、笛卡尔积

- 设A，B为任意的两个集合，称$\{\langle a, b\rangle \mid a \in A, b \in B\}$为A与B的**笛卡尔积**，记作$A \times B$。

  **笛卡尔积**的元素是有序对$\langle a, b\rangle$。只有a, b相等的时候才有$\langle a, b\rangle = \langle b, a\rangle$. 也只有A=B时才有$A \times B = B \times A$。

例： A={1，2}， B={a， b}

$A \times B = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 2, b\rangle\}$

$B \times A = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle, \langle b, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

$A \times A = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle\}$

# 3）多重集合

- 元素可以重复出现的集合称为多重集合或者多重集，某元素重复出现的次数称为该元素的重复度。

例　在多重集合$\{a, a, b, b, b, c, d\}$中，

$a, b, c, d$的重复度分别为2, 3, 1, 1。

现实生活中的例子：比如 有苹果2个，香蕉3根，西瓜1个，我们只记录类别可以用集合{a, b c}表示， 其中，苹果a， 香蕉b， 西瓜c。 如果要记录全部信息，苹果不加区分，香蕉不加区分，西瓜也不加区分的话，用{a, a, b, b， b， c} 表示。

但如果2个苹果要加区分， 直接用a1, a2表示就好。

# 2. 无向图和有向图的定义

定义1.1 一个无向图是一个有序的二元组<V, E>，记作G，其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E称为边集，它是无序积V&V的多重子集，其元素称为无向边，简称边。

定义 1.2 一个有向图是一个有序的二元组<V, E>，记作D，其中

（1）V≠∅称为顶点集，其元素称为顶点或结点。

（2）E为边集，它是笛卡儿积V×V的多重子集，其元素称为有向边，简称边。

说明

- 可以用图形表示图，即用小圆圈（或实心点）表示顶点，用顶点之间的连线表示无向边，用有方向的连线表示有向边。

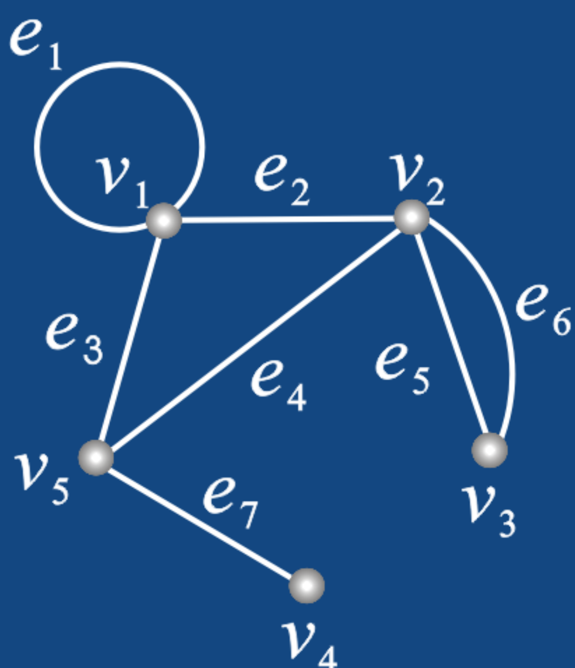
这是图的集合定义和图形表示，随后会介绍矩阵表示。

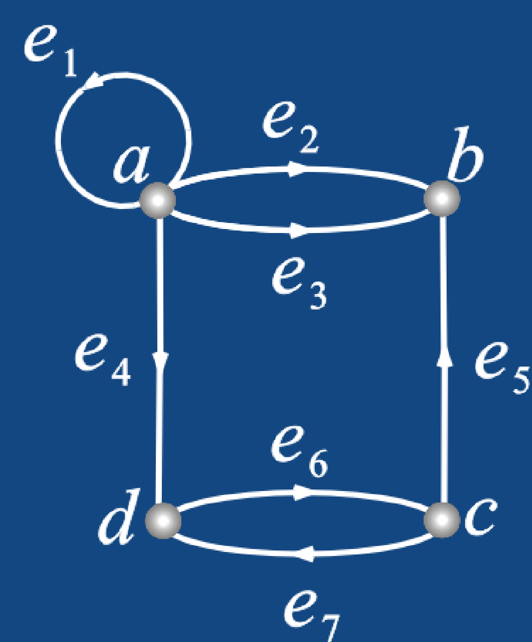
# 例1.1

例1.1 （1） 给定无向图G＝<V, E>，其中 V＝{$v_1, v_2, v_3, v_4, v_5$}，
E={($v_1, v_1$)，($v_1, v_2$)，($v_2, v_3$)，($v_2, v_3$)，($v_2, v_5$)，($v_1, v_5$)，($v_4, v_5$)}.

（2） 给定有向图D=<V, E>，其中 V＝{a, b, c, d}，
E＝{<a, a>, <a, b>, <a, b>, <a, d>, <c, d>, <d, c>, <c, b>}。

画出G与D的图形。



# 图的一些概念和规定

- $G$表示无向图，但有时用$G$泛指图(无向的或有向的)。
- $D$通常表示有向图。
- $V(G)$，$E(G)$分别表示G的顶点集和边集。不发生混淆的情况下可用$V$和$E$表示。
- 若$|V(G)|=n$，则称G为n阶图。如果$|V(G)|=n$, $|E(G)|=m$, $G$也称为$(n, m)$图。
- 若$|V(G)|$与$|E(G)|$均为有限数，则称$G$为有限图。
- 若边集$E(G)=\varnothing$，则称$G$为零图，此时，又若$G$为$n$阶图，则称$G$为$n$阶零图，记作$N_n$，特别地，称$N_1$为平凡图。

# 标定图与非标定图、基图

- 在图的定义中规定顶点集V为非空集，但在图的运算中可能产生顶点集为空集的运算结果，为此规定顶点集为空集的图为空图，并将空图记为$\varnothing$。
- 将图的集合定义转化成图形表示之后，常用$e_k$表示无向边$(v_i, v_j)$（或有向边$\langle v_i, v_j\rangle$），并称顶点或边用字母标定的图为标定图，否则称为非标定图。
- 将有向图各有向边均改成无向边后的无向图称为原来图的基图。
- 易知标定图与非标定图是可以相互转化的；任何无向图G的各边均加上箭头就可以得到以G为基图的有向图。

# 关联与关联次数、环、孤立点

设G＝<V, E>为无向图，$e_k=(v_i, v_j)\in$E，

称$v_i, v_j$为$e_k$**的端点**，$e_k$与$v_i$或$e_k$与$v_j$是彼此相**关联**的。

若$v_i\neq v_j$，则称$e_k$与$v_i$或$e_k$与$v_j$的**关联次数为1**。

若$v_i=v_j$，则称$e_k$与$v_i$的**关联次数为2**，并称$e_k$为**环**。

任意的$v_l\in$V，若$v_l\neq v_i$且$v_l\neq v_j$，则称$e_k$与$v_l$的**关联次数为0**。

- 设D＝<V, E>为有向图，$e_k=\langle v_i, v_j\rangle\in$E，称$v_i, v_j$为$e_k$的**端点**。

  若$v_i=v_j$，则称$e_k$为D中的**环**。

- 无论在无向图中还是在有向图中，无边关联的顶点均称为**孤立点**。

# 相邻与邻接

- 设无向图G＝<V，E>，$v_i$，$v_j$∈V，$e_k$，$e_l$∈E。

  若∃$e_t$∈E，使得$e_t$＝($v_i$，$v_j$)，则称$v_i$与$v_j$是**相邻的**。

  若$e_k$与$e_l$至少有一个公共端点，则称$e_k$与$e_l$是**相邻的**。

- 设有向图D＝<V，E>，$v_i$，$v_j$∈V，$e_k$，$e_l$∈E。

  若∃$e_t$∈E，使得$e_t$＝<$v_i$，$v_j$>，则称$v_i$为$e_t$的**始点**，$v_j$为$e_t$的**终点**，并称$v_i$**邻接到**$v_j$，$v_j$**邻接于**$v_i$。

  若$e_k$的终点为$e_l$的始点，则称$e_k$与$e_l$**相邻**。

# 邻域

- 设无向图$G=\langle V, E\rangle$，$\forall v\in V$，

  称$\{u \mid u\in V\wedge (u,v)\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**邻域**，记做$N_G(v)$。

  称$N_G(v)\cup\{v\}$为$v$的**闭邻域**，记做$\overline{N_G}(v)$。

  称$\{e \mid e\in E\wedge e$与$v$相关联$\}$为$v$的**关联集**，记做$I_G(v)$。

- 设有向图$D=\langle V, E\rangle$，$\forall v\in V$，

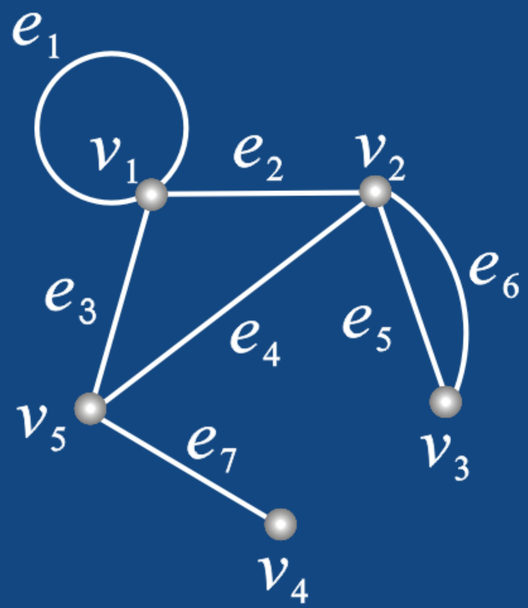
  称$\{u \mid u\in V\wedge\langle v,u\rangle\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**后继元集**，记做$\Gamma^+_D(v)$。

  称$\{u \mid u\in V\wedge\langle u,v\rangle\in E\wedge u\neq v\}$为$v$的**先驱元集**，记做$\Gamma^-_D(v)$。

  称$\Gamma^+_D(v)$为v的出**邻域**，$\Gamma^-_D(v)$为v 的入**邻域**．$\Gamma^+_D(v)\cup\Gamma^-_D(v)$为$v$的**邻域**，记做$N_D(v)$。

  称$N_D(v)\cup\{v\}$为$v$的**闭邻域**，记做$\overline{N_D}(v)$。

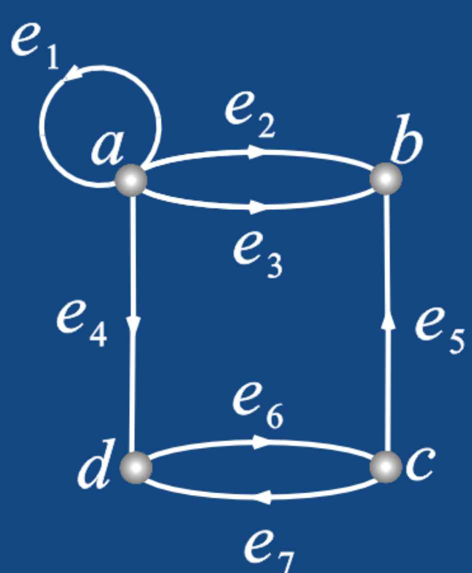
# 举例




$$N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}$$

$$\overline{N_G}(v_1) = \{v_1, v_2, v_5\}$$

$$I_G(v_1) = \{e_1, e_2, e_3\}$$




$$\Gamma^{+}_{D}(d) = \{c\}$$

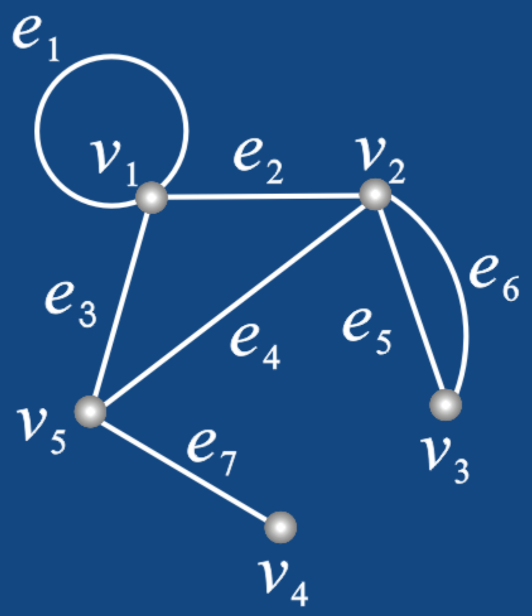
$$\Gamma^{-}_{D}(d) = \{a, c\}$$

$$N_D(d) = \{a, c\}$$

$$\overline{N_D}(d) = \{a, c, d\}$$

# 子集的邻域

- V的子集S的邻域：$N(S)=\cup_{v\in S} N(v) \quad \forall S \subseteq V$




$N_G(\{v_1, v_2\}) = \{v_1, v_2, v_3, v_5\}$

# 简单图与多重图

定义1.3 在无向图中，关联一对顶点的无向边如果多于1条，则称这些边为平行边(重边)，平行边的条数称为重数。

在有向图中，关联一对顶点的有向边如果多于1条，并且这些边的始点和终点相同(也就是它们的方向相同)，则称这些边为平行边（或重边）。

含平行边的图称为多重图。

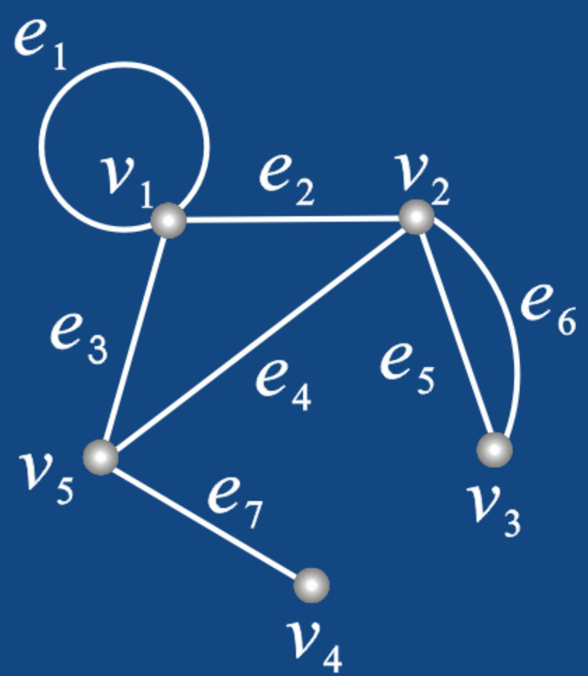
既不含平行边也不含环的图称为简单图。

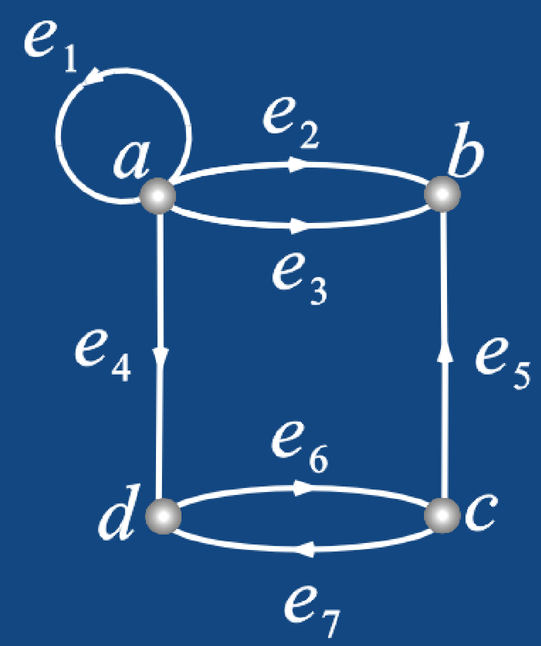
**例如：**在下图中，

(a) 中$e_5$与$e_6$是平行边，

(b) 中$e_2$与$e_3$是平行边，但$e_6$与$e_7$不是平行边。

(a) 和 (b) 两个图都不是简单图。



# （三） 顶点的度与图的度序列

## 1、顶点的度及其性质

**定义1.4** 设$G=\langle V,E\rangle$为一无向图，$\forall v\in V$，与顶点$v$相关联的边的次数（每个环计算二次）称为**$v$的度数（次数）**，简称为**度（次数）**，记做 $d_G(v)$。

在不发生混淆时，简记为$d(v)$。

**注：** 某个点上的环要对这个点计算2次度数。即$v$的度数为$v$关联的非环边的条数加上2倍的关联的环的条数

**问题：** $d(v)=|N(v)|$

当$v$上有环或者与$v$关联的边有重边时都不对

**定义1.5** 设D＝<V，E>为有向图，$\forall v \in V$，

称$v$作为边的始点次数为$v$**的出度**，

记做 $d^{+}_{D}(v)$，简记作$d^{+}(v)$。

称$v$作为边的终点次数为$v$**的入度**，

记做$d^{-}_{D}(v)$，简记作$d^{-}(v)$。

称$d^{+}(v)+d^{-}(v)$为v的**度数**，记做$d(v)$。

**注:** 某个点上的有向环要对这个点计算一次入度计算一次出度.

# 图的度数的相关概念

- 在无向图G中，

  最大度　　$\Delta(G)=\max\{d(v)\,|\,v\in V(G)\}$

  最小度　　$\delta(G)=\min\{d(v)\,|\,v\in V(G)\}$

- 称度数为1的顶点为**悬挂顶点**，与它关联的边称为**悬挂边**。度为偶数(奇数)的顶点称为**偶度(奇度)顶点**。

- 在有向图D中，

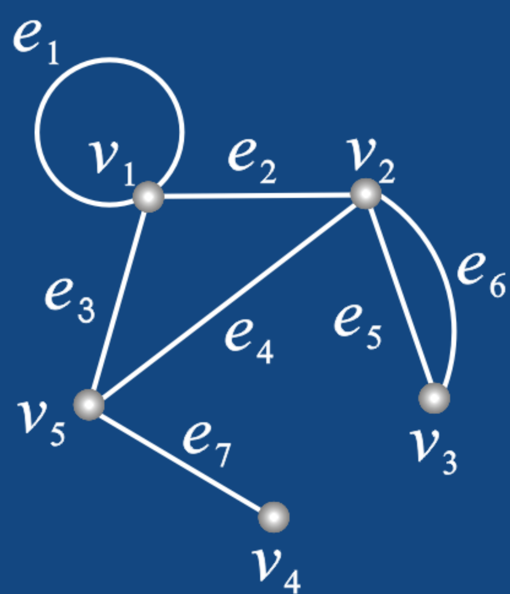
  最大出度　$\Delta^{+}(D)=\max\{d^{+}(v)\,|\,v\in V(D)\}$

  最小出度　$\delta^{+}(D)=\min\{d^{+}(v)\,|\,v\in V(D)\}$

  最大入度　$\Delta^{-}(D)=\max\{d^{-}(v)\,|\,v\in V(D)\}$

  最小入度　$\delta^{-}(D)=\min\{d^{-}(v)\,|\,v\in V(D)\}$

# 图的度数举例

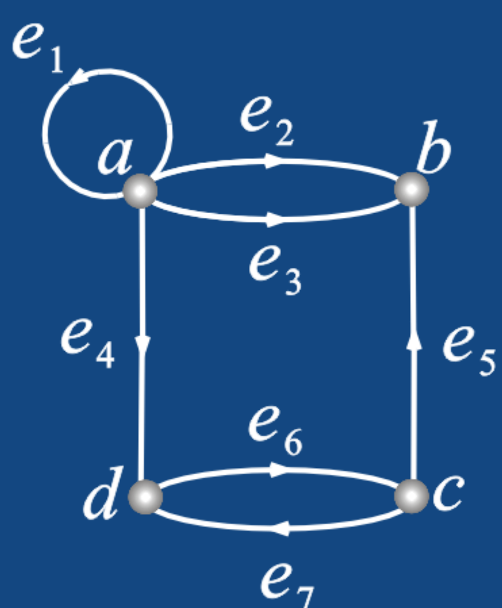



$d(v_1)=4$(注意，环提供2度)，

$\triangle=4$， $\delta=1$，

$v_4$是悬挂顶点，$e_7$是悬挂边。

$N_G(v_1) = \{v_2, v_5\}$




$d^+(a)=4$，$d^-(a)=1$

(环$e_1$提供出度1，提供入度1)，

$d(a)=4+1=5$。$\triangle=5$， $\delta=3$，

$\triangle^+=4$（在$a$点达到）

$\delta^+=0$(在$b$点达到)

$\triangle^-=3$(在$b$点达到)

$\delta^-=1$(在$a$和$c$点达到)

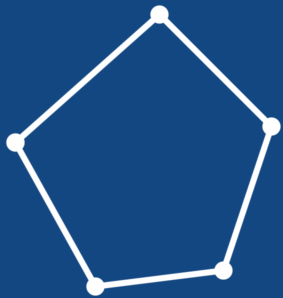
# 正则图

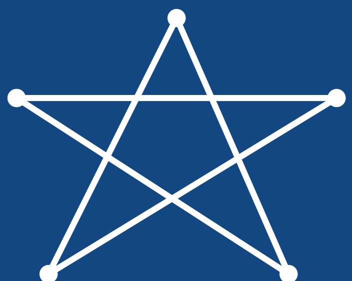
定义 1. 6 设$G = (V, E)$是图，如果对所有$v \in V$，

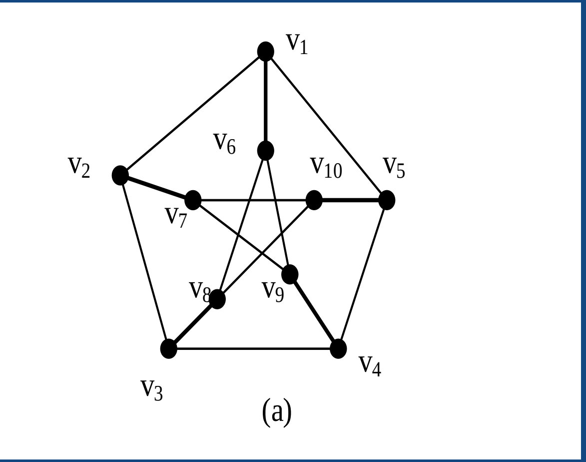
$d(v) = k$，称图$G$为$k$-正则图

$K_n$为n-1-正则图，$K_{3,3}$为3-正则图，单星妖怪也是3-正则图。

下图是2-正则图。







## 握手定理

**定理1.1** 设G=<V, E>为任意无向图，V={$v_1, v_2, \ldots, v_n$}，|E|=$m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m$$

**说明** 任何无向图中，各顶点度数之和等于边数的两倍。

**证明** G中每条边(包括环)均有两个端点，所以在计算G中各顶点度数之和时，每条边均提供2度，当然，$m$条边，共提供$2m$度。

注： 该定理称为图论第一定理，是由欧拉提出了。欧拉一生共发表论文886篇，著作90部

# 证明方法（二）：

- 当G是简单图时

$$\xi(v_i,v_j)=\begin{cases}1, & \text{当}(v_i,v_j)\in E(G),\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$$i=1,2,\ldots n,\ j=1,2,\ldots n$$

$$d(v_j)=\sum_{i=1}^{n}\xi(v_i,v_j),$$

$$\sum_{j=1}^{n}d(v_j)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\xi(v_i,v_j)=\xi(v_1,v_1)+\xi(v_1,v_2)+\ldots.+\xi(v_1,v_n)$$
$$+\xi(v_2,v_1)+\xi(v_2,v_2)+\ldots.+\xi(v_2,v_n)$$
$$+\ldots+\xi(v_n,v_1)+\xi(v_n,v_2)+\ldots+\xi(v_n,v_n)=2|E|=2m$$

- 当图G不是简单图时

将每一个环上“嵌入”两个新的顶点及将每条重边上“嵌入”一个新的顶点得到新图G1， G1是简单图。 对于图G1的任意一个顶点v

（1）若v是G中的顶点，则v在G1的度数与在G中的度数一样；

（2）若v是新点，则v在G1中的度数为2 。

假设有t个新的顶点，则图G1的边数比图G的边数多了t条，这是因为在环上加入2个新点后， 原来的1条边变成了3条边，增加2个新点增加了2条边，而重边上加入1个新点后，将原来的1条边变成了2条边，增加一个新点也增加了1条边。

- 不妨设G中的点为G1前n个顶点，新点为从n+1到n+t, 对G1利用前面的证明结果:

$$2(m+t)=\sum_{j=1}^{n+t} d_{G1}(v_j)=\sum_{j=1}^{n} d_{G1}(v_j)+\sum_{j=n+1}^{n+t} d_{G1}(v_j)$$

$$=\sum_{j=1}^{n} d_{G}(v_j)+2t$$

两边消去2t,得到结论。

# 握手定理

**定理1.2** 设D = <V,E>为任意有向图，V = $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，|E| = $m$，则

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2m,\text{且}\sum_{i=1}^{n} d^{+}(v_i) = \sum_{i=1}^{n} d^{-}(v_i) = m$$

# 握手定理的推论

**推论** 任何图(无向的或有向的)中，奇度顶点的个数是偶数。

**证明** 设G = <V，E>为任意一图，令

$V_1 = \{v | v \in V \wedge d(v)\text{为奇数}\}$

$V_2 = \{v | v \in V \wedge d(v)\text{为偶数}\}$

则$V_1 \cup V_2 = V$，$V_1 \cap V_2 = \varnothing$ ，由握手定理可知

$$2m = \sum_{v \in V} d(v) = \sum_{v \in V_1} d(v) + \sum_{v \in V_2} d(v)$$

由于$2m$和 $\sum_{v \in V_2} d(v)$ ，所以 $\sum_{v \in V_1} d(v)$ 为偶数，

但因$V_1$中顶点度数为奇数，所以$|V_1|$必为偶数。

# 握手定理的推论（续）

推论 2  正则图的阶数和度数不能同时为奇数 。

证明：  设*G*是*k*-正则图，且顶点数为n,边数为m,
由握手定理知：2m=kn. 由于2m是偶数，  则k，n
中至少一个为偶数。 得证。

# 关于度的例

例 Δ与δ是简单图G的最大度与最小度，求证：

$$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$$

证明：由握手定理有：

$$n\delta \le \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2m \le n\Delta$$

所以有：

$$\delta \le \frac{2m}{n} \le \Delta$$

# 问题研究—握手定理的应用

**问题1：**在一个部门的25个人中间，由于意见不同，是否可能每个人恰好与其他5个人意见一致？

**解答：**不可能。考虑一个图，其中顶点代表人，如果两个人意见相同，可用边连接。这个问题转化成了是否存在一个阶为25的图使得每个顶点的度数是5. 根据握手定理的推论，不可能存在奇数个点的度数为奇数的图。即问题的答案是否。

**说明：**

(1) 很多离散问题可以用图模型求解。

(2) 为了建立一个图模型，需要决定顶点和边分别代表什么。

(3) 在一个图模型中，边经常代表两个顶点之间的关系。

例：　晚会上大家握手言欢，试证握过奇次手的人数是偶数。

注：　这个图模型很直观，　点是人，边表示握手关系。

- 解：构造一个图，　以参加晚会的人为顶，仅当二人握手时在相应的二顶间加一条边。 于是每个人握手的次数为这个图的相应顶点的度数。 用握手定理的推论得到结论。

例： 空间中不可能有这样的多面体存在， 它的面数是奇数，而且每个面是由奇数条棱围成的。

建立图模型： 点、边怎么选取？？

直观的会把多面体当作一个图（点是多面体的顶点，边是棱)， 但不适合这个问题。 这个问题的图模型：多面体的面当点，边是两个面的相邻关系。

解：如果有这样的多面体存在，以此多面体的面集合为顶点集构造一个图G,当且仅当两个面有公共边界线时在相应的两顶间连一条边， 于是|V(G)|是奇数，而且对每个顶点v, d(v)等于围住这个面的棱的条数，它是奇数,则所有的顶点的度数之和为奇数， 与握手定理矛盾。

# 图的度数列及性质

定义1.7 设G＝<V, E>为一个$n$阶无向图，V＝$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$，称$d(v_1)$，$d(v_2)$，…，$d(v_n)$为G的**度数列（度序列）**。

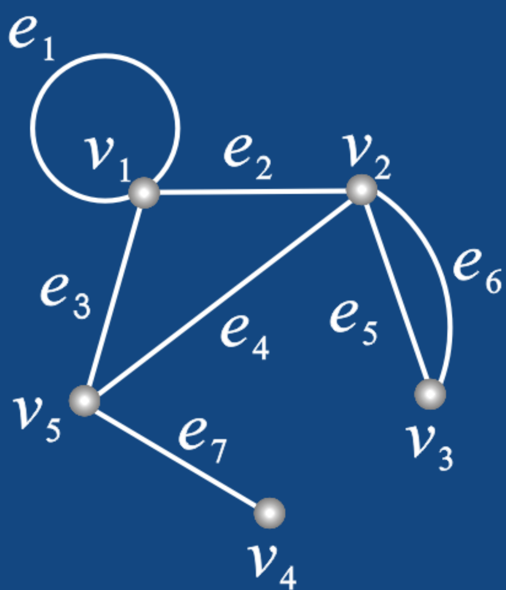
- 任意一个图$G$ 对应唯一一个度序列（当把度序列按照从小到大或者从大到小排列后），图的度序列是刻画图的特征的重要“拓扑不变量”。

- 图$G$ 的“拓扑不变量”是指与图G有关的一个数

或数组(向量)。它对于与图G同构的所有图来说，不会发生改变。

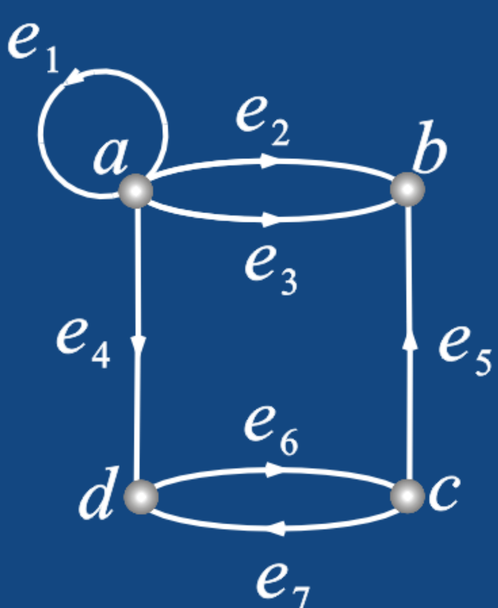
- 类似地，设D=<V, E>为一个n阶有向图，V= $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，称$d(v_1)$，$d(v_2)$，…，$d(v_n)$为D的**度数列**，另外称$d^+(v_1)$，$d^+(v_2)$，…，$d^+(v_n)$与$d^-(v_1)$，$d^-(v_2)$，…，$d^-(v_n)$分别为D的**出度列**和**入度列**。

# 度数列举例




按顶点的标定顺序，度数列为

4, 4, 2, 1, 3。




按字母顺序，度数列，出度列，入度列分别为

5, 3, 3, 3

4, 0, 2, 1

1, 3, 1, 2

# 度序列的性质

定理：　一个简单图$G$的$n$个点的度不能互不相同

证明：　因为图$G$为简单图，所以：$\triangle(G)\leq n$-1。

情形1：若G没有孤立点，则 $1 \leq d(v) \leq n-1, \forall v \in V(G)$

由鸽笼原理：必有两顶点度数相同；

情形2：若G只有一个孤立点，设G1表示G去掉孤立点后的部分，则：$1 \leq d(v) \leq n-2, \forall v \in V(G_1)$

由鸽笼原理：在$G_1$里必有两顶点度数相同；

情形3：若G只有两个以上的孤立点，则定理显然成立。

# （二）图的同构

**定义1.8** 设$G_1=\langle V_1,E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2,E_2\rangle$为两个无向图，

若存在双射函数$f:V_1\to V_2$，使得对于任意的$v_i,v_j\in V_1$，$(v_i,v_j)\in E_1$ 当且仅当 $(f(v_i),f(v_j))\in E_2$，并且$(v_i,v_j)$与$(f(v_i),f(v_j))$的重数相同，

则称**$G_1$与$G_2$是同构的**，记做$G_1\cong G_2$。

**说明** （1）类似地，可以定义两个有向图的同构。

（2）图的同构关系看成全体图集合上的二元关系。

（3）图的同构关系是等价关系。

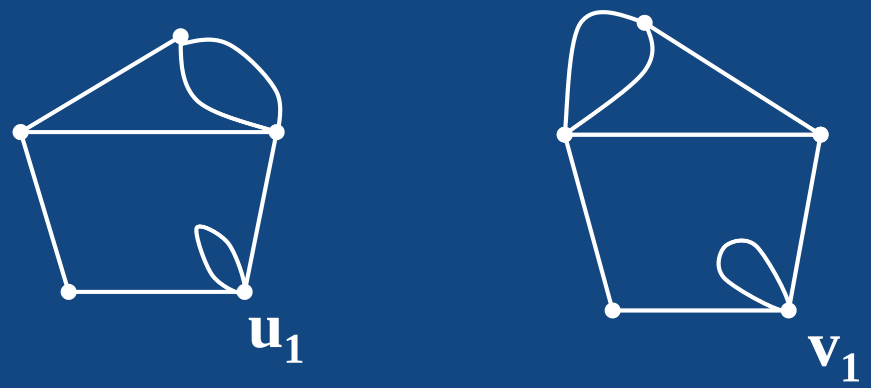
（4）在图同构的意义下，图的数学定义与图形表示是一一对应的。

**由定义可以得到图同构的几个必要条件：**

**（a）顶点数相同；（b）边数相同；（c）关联边数相同的顶点个数相同。**

判定图的同构是很困难的，属于NP完全问题。对于规模不大的两个图，判定其是否同构，可以采用观察加推证的方法。

例 1.2 证明下面两图不同构。

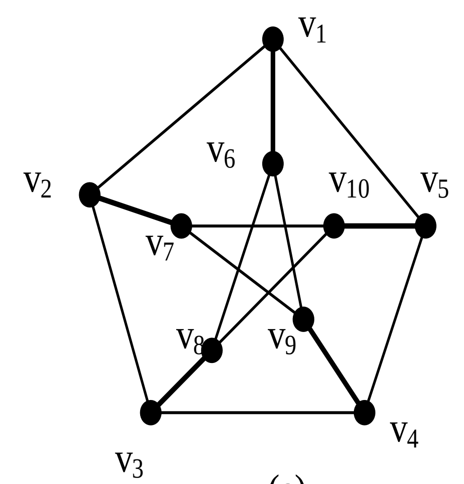



证明:（一）如果两个图同构， 只可能$u_1$和$v_1$对应，但$u_1$的两个邻接点是2度点和4度点， 但$v_1$的两个邻接点是2度点和3度点。所以，两图不同构。

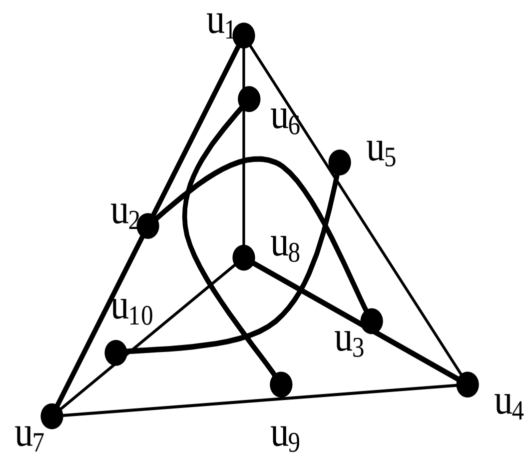
（二）两个图的度序列一样(后续会讨论图的度序列).

虽然两个图的度序列一样， 但图中两个四度点的的邻接状况不一样， 左边的图中两个四度点相邻， 但右边的图两个四度点不相邻。所以，两图不同构。

# 例 1.3 证明下面两图同构。




(a)




(b)

**证明:作映射f : $v_i \leftrightarrow u_i$ (i=1,2….10)**

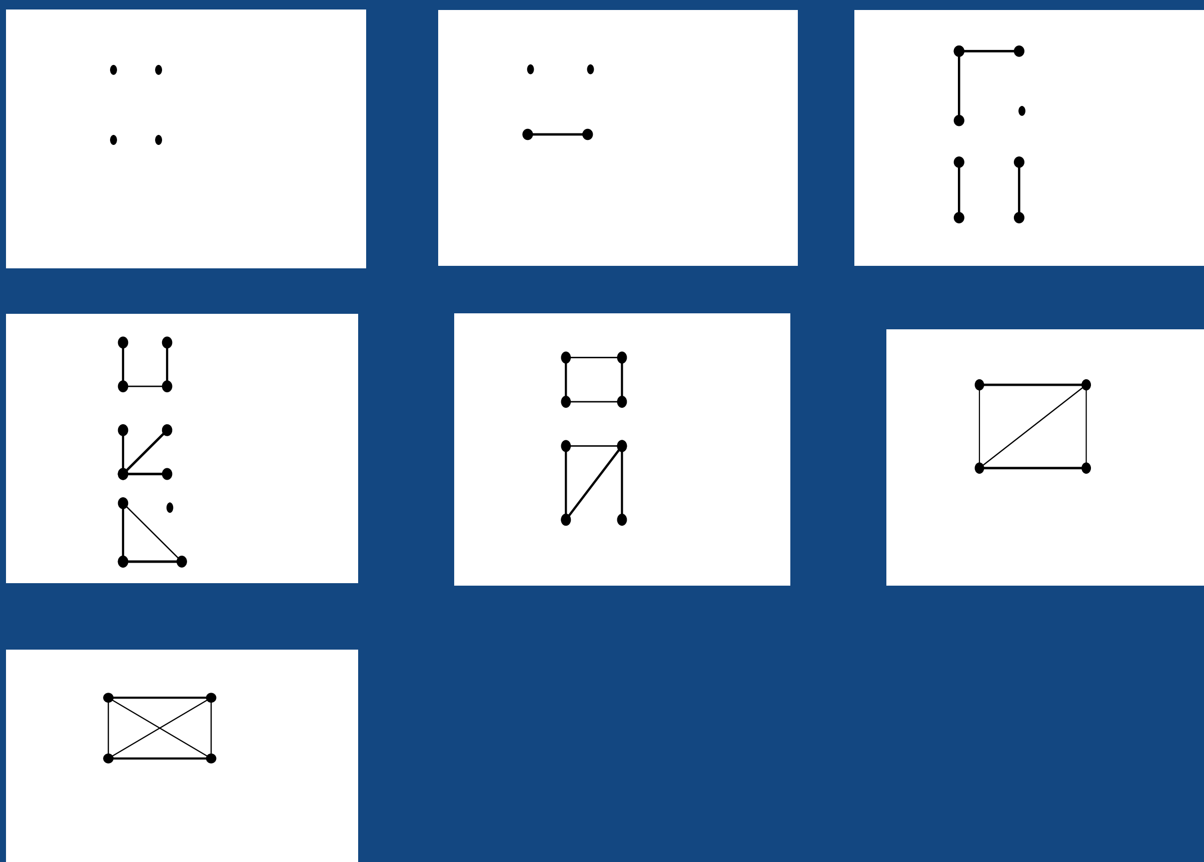
**容易证明，对$\forall v_i v_j \in E$ ((a)),有(f ($v_i$), f($v_j$))=$u_i u_j \in E$((b)) ($1\le i \le 10$, $1\le j\le 10$ )**

**由图的同构定义知，图(a)与(b)是同构的。**

**这是单星妖怪，也称Petersen图。**

例 1.4 指出4个顶点的非同构的所有简单图。

分析：四个顶点的简单图最少边数为0，最多边数为6，所以可按边数进行枚举。



# 图同构的猜想：

关于同构，有一个Ulam猜想，至今未解决。

Ulam猜想（1929）：G与H是两个图， $|V(G)|=|V(H)|$，$V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$V(H)=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$，且$G-v_i \cong H-u_i$，

$i=1,2,...,n$，则 $G \cong H$。

类似的猜想：

设G与H分别是含至少四条边的图，且存在一个双射$f: E(G)\to E(H)$，使得$G-e \cong H-f(e)$对每个$e \in E(G)$都成立， 则$G \cong H$。

其中G-v表示从G中删除顶点v，自然与v关联的所有边也一并删除。G-e表示从G中删除边e，其他不变。

# ∵ 三、完全图、补图、特殊图及子图

## 1、完全图

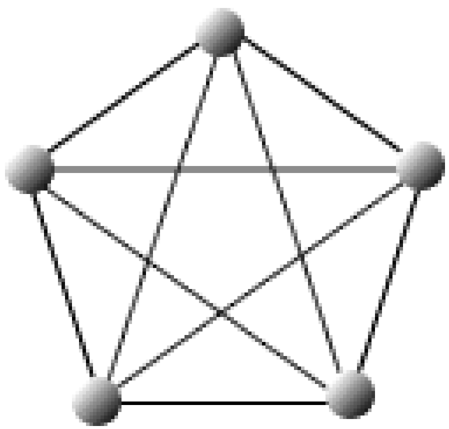
定义1.9 设G为$n$阶无向简单图，若G中每个顶点均与其余的$n$-1个顶点相邻，则称G为$n$阶无向完全图，简称$n$阶完全图。

在同构意义下，$n$个顶点的完全图只有一个，记做$K_n$（$n \geq 1$）。

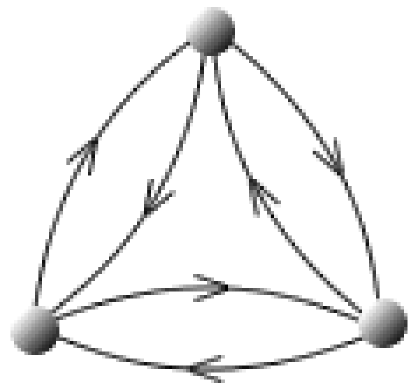
定义1.10 设D为$n$阶有向简单图，若D中每个顶点都邻接到其余的$n$-1个顶点，又邻接于其余的$n$-1个顶点，则称D是$n$阶有向完全图。

设D为$n$阶有向简单图，若D的基图为$n$阶无向完全图K$n$，则称D是$n$阶竞赛图。

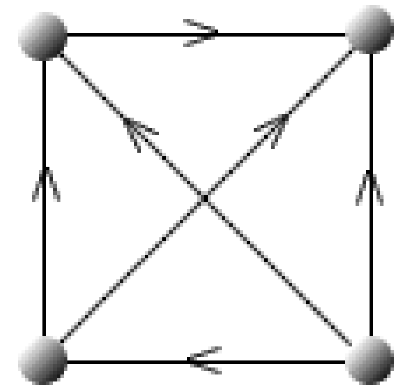
# 完全图举例



$K_5$



3阶有向完全图



4阶竞赛图

$n$阶无向完全图的边数为： $n(n-1)/2$

$n$阶有向完全图的边数为： $n(n-1)$

$n$阶竞赛图的边数为： $n(n-1)/2$

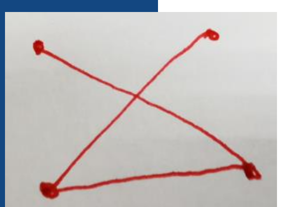
# ∷ 2、补图

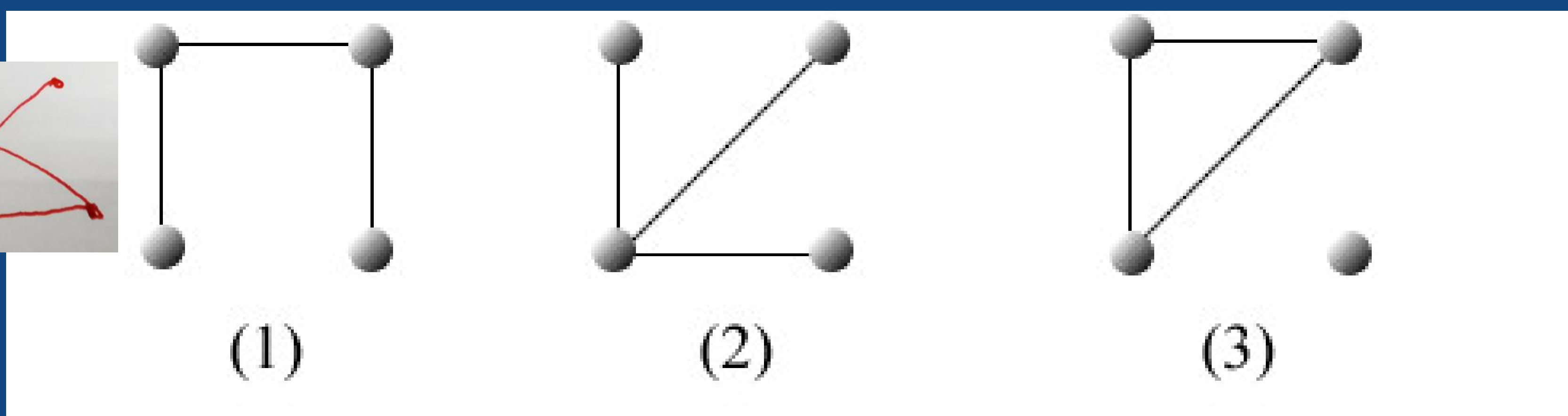
$E_1=\{uv \mid u\neq v, u,v\in V\}$

定义1.7 设$G=\langle V, E\rangle$为$n$阶无向简单图，称 $H=(V, E_1\backslash E)$ 称为$G$的补图，记作$\overline{G}$或者 $G^c$。

若图$G\cong\overline{G}$，则称为$G$是自补图。

注：E1是n点完全图的边集， 补图的边集由n点完全图中G中不存在的边组成。






(1)为自补图

(2)和(3)互为补图

## 自补图的性质

定理 1：若n阶图G是自补图( $G \cong \overline{G}$ ),则有：

$$n = 0,1(\mathrm{mod}\,4)$$

证明：n阶图G是自补图，则有：

$$m(G) + m(\overline{G}) = m(K_n) = \frac{1}{2}n(n-1)$$

所以：

$$m(G) = \frac{1}{4}n(n-1)$$

由于n是正整数，所以： $n = 0,1(\mathrm{mod}\,4)$

# 3、特殊图之二部图（两分图、偶图）

定义 1.11 设$G=\langle V, E\rangle$为一个无向图，若能将$V$分成$V_1$和$V_2$（$V_1 \cup V_2 = V$, $V_1 \cap V_2 = \varnothing$），使得$G$中的每条边的两个端点都是一个属于$V_1$，另一个属于$V_2$，则称$G$为**二部图**（或称**二分图**，**偶图**等），称$V_1$和$V_2$为**互补顶点子集**。

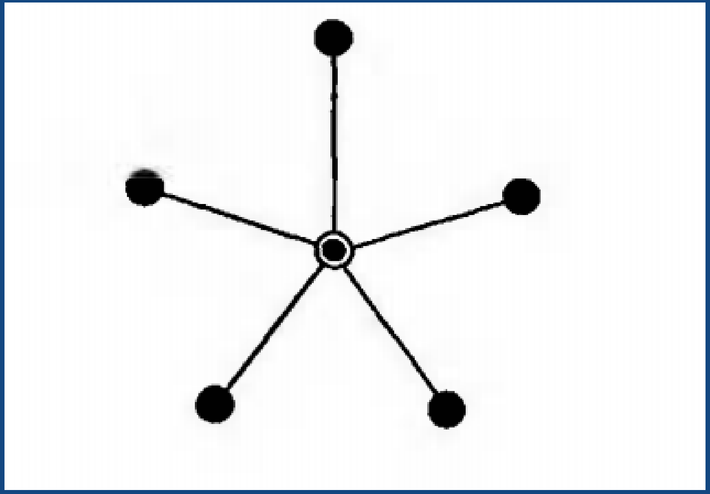
常将二部图$G$记为$\langle V_1, V_2, E\rangle$。

若$G$是简单二部图，$V_1$中每个顶点均与$V_2$中所有顶点相邻，则称$G$为**完全二部图**，记为$K_{r,s}$，其中$r=|V_1|$，$s=|V_2|$。

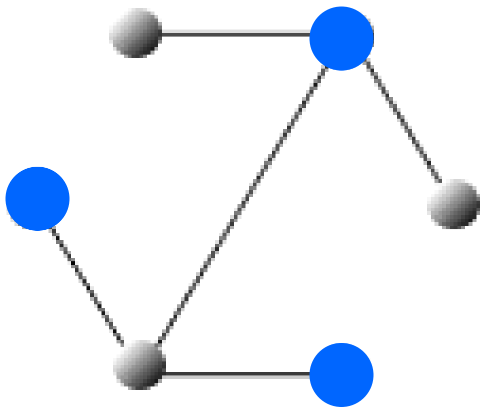
**说明** 1）$n$阶零图为二部图。

2）$K_{1,n}$ 也叫做星。

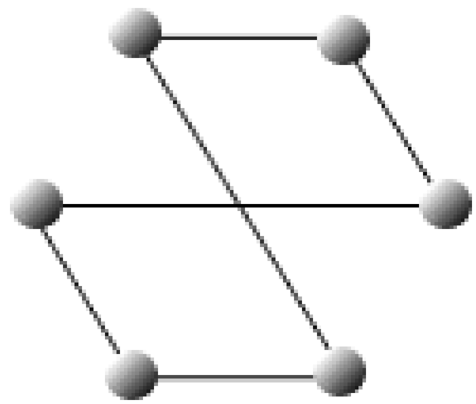
$K_{1,3}$也叫做爪图。



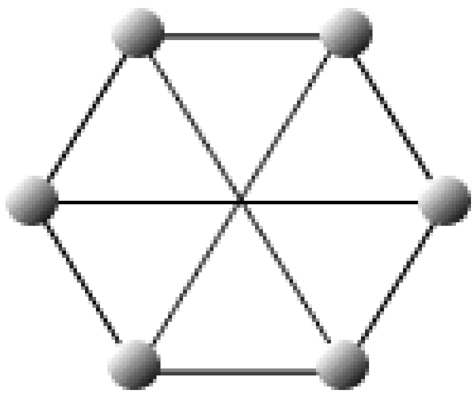
# 二部图举例



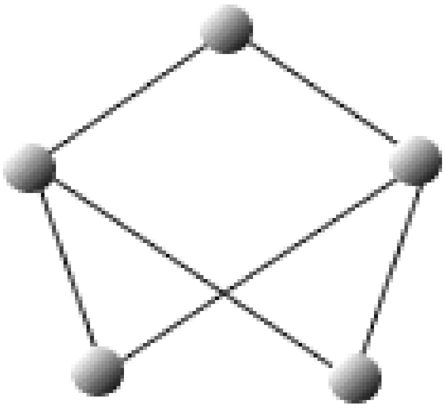
$K_6$的子图



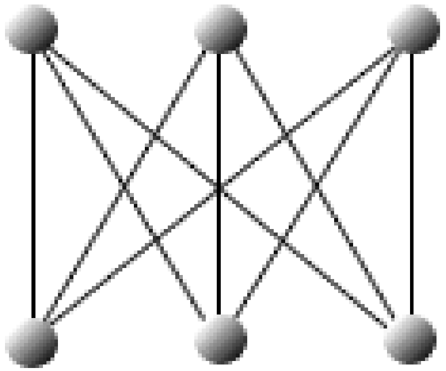
$K_6$的子图



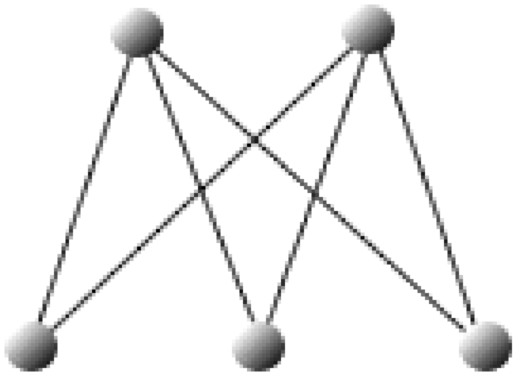
$K_{3,3}$



$K_{2,3}$



$K_{3,3}$



$K_{2,3}$

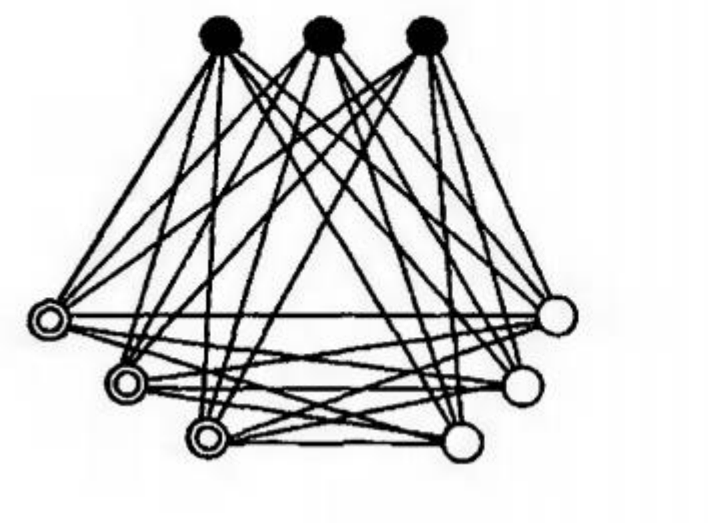
# 特殊图之多部图

定义 1.8 设$G=\langle V, E\rangle$为一个无向图，若能将$V$分成$V_1$，$V_2$，…，$V_k$（$V_1 \cup V_2 \cdots \cup V_k = V$，$V_i \cap V_j = \varnothing$，对任意不同的i，j，），使得$G$中的每条边的两个端点都是一个属于$V_i$，另一个属于$V_j$，则称$G$为k**部图**。

常将k部图$G$记为$\langle V_1, V_2, \cdots, V_k; E\rangle$。

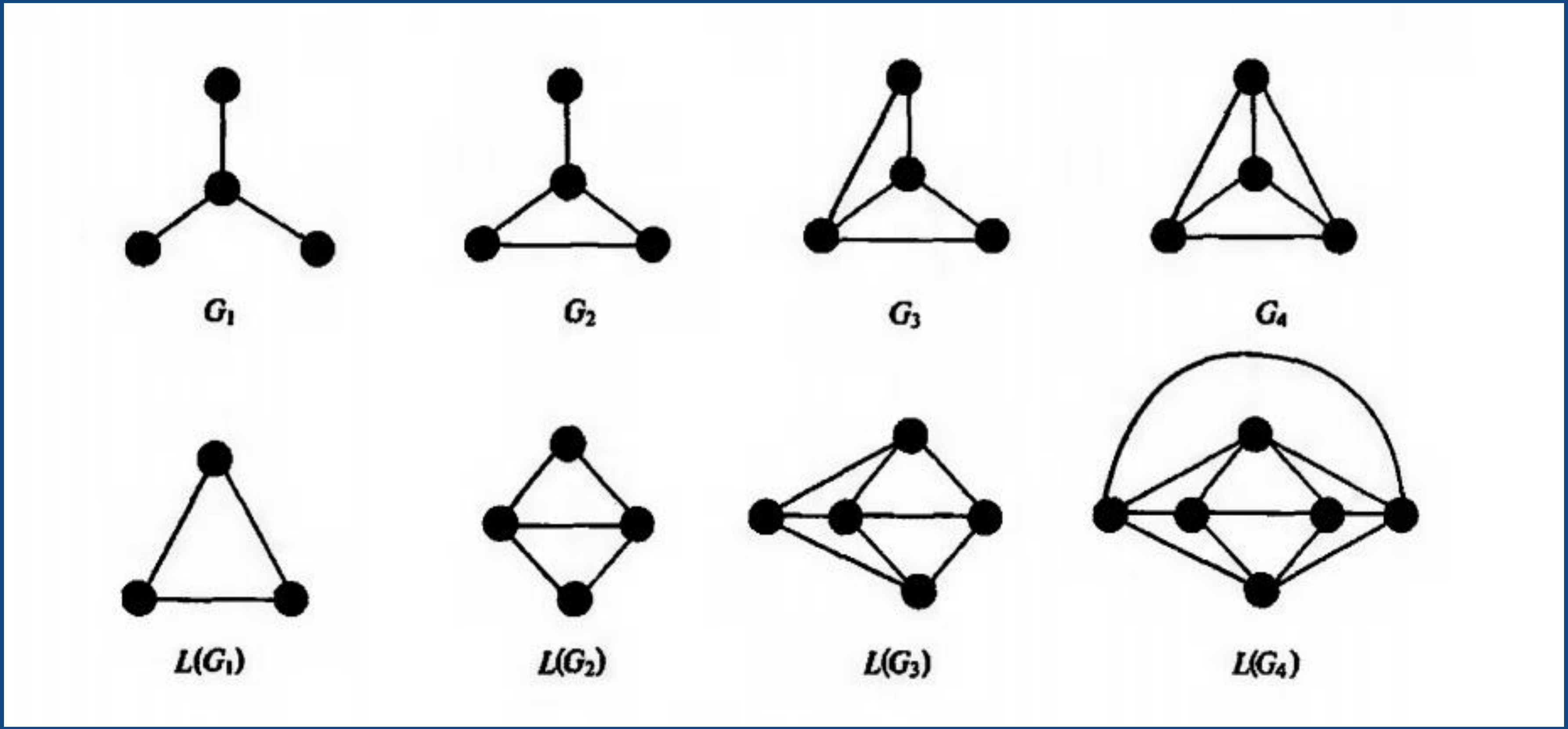
若$G$是简单k部图，$V_i$中每个顶点均与$V_j$中所有顶点相邻，则称$G$为**完全k部图**，记为$K_{r1,r2,\ldots,rk}$，其中$r_i = |V_i|$。

**说明** 3部完全图 $K_{3,3,3}$。



# 4、边图（线图）

- 定义1.13： 设G是一个无环图，边图L(G)这样构成：将E(G)中的每条边作为L(G)的顶点集，即 V（L(G)）=E(G)，L(G)中的两顶相邻当且仅当它们是G中的两条相邻的边。
- 线图的例子



# 线图的有趣性质

- 线图的顶点的度数？ $d_{L(G)}(uv) = d_G(u) + d_G(v) - 2$
- 线图的边数： $|E(L(G))| = \sum_{v \in G} \binom{d_G(v)}{2}$

- 线图总是无爪图，即线图的所有导出子图均不是$K_{1,3}$
- G ≌L(G)当且仅当G是一个圈。
- 若G ≌ H， 则L(G) ≌ L(H)
- 若L(G) ≌ L(H)， 是否能推出G ≌ H?

  反例：$K_{1,3}$和$K_3$ 的线图同构， 但这两个图显然不同构。

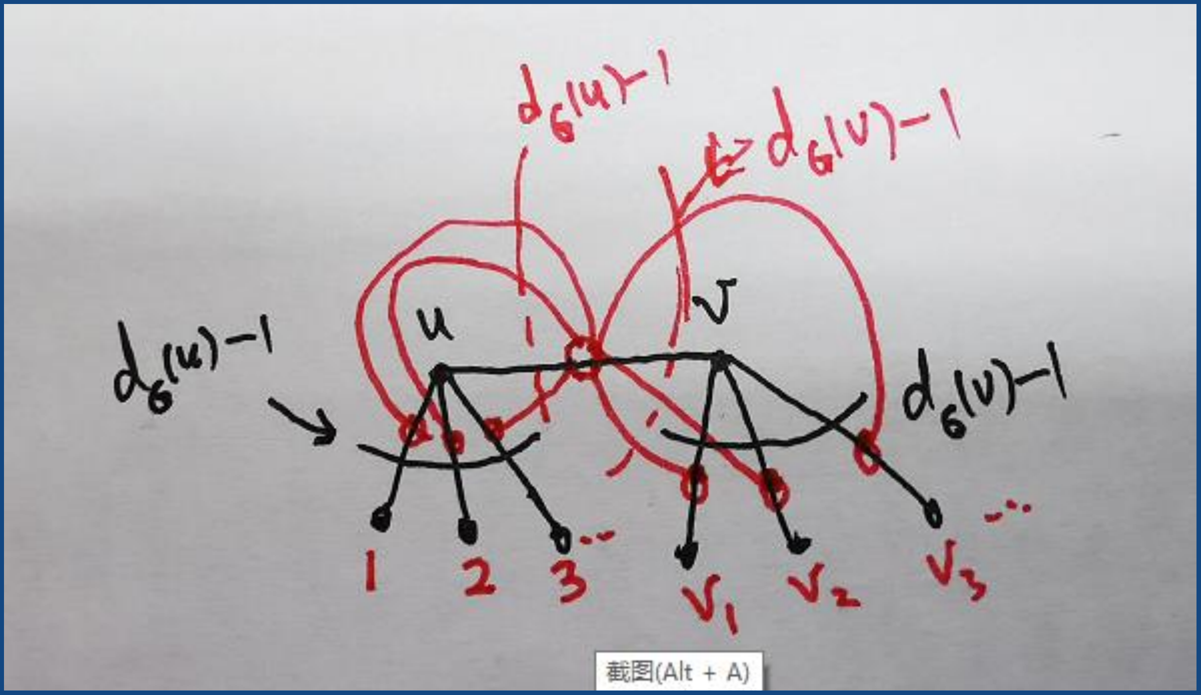
除了这个特殊情况呢？

惠特尼同构定理[1]阐述了以下事实：设有连通图 $G_1$ 和$G_2$ 且它们均不是三角形 $K_3$ 或爪形 $K_{1,3}$ 。如果 $L(G_1) \cong L(G_2)$ ，那么 $G_1 \cong G_2$ 。也就是说，除了极特殊的情形，图G的结构可以由线图 $L(G)$ 的结构中唯一地恢复出来。

# 例子：

- 线图的顶点的度数？ $d_{L(G)}(uv) = d_G(u) + d_G(v) - 2$

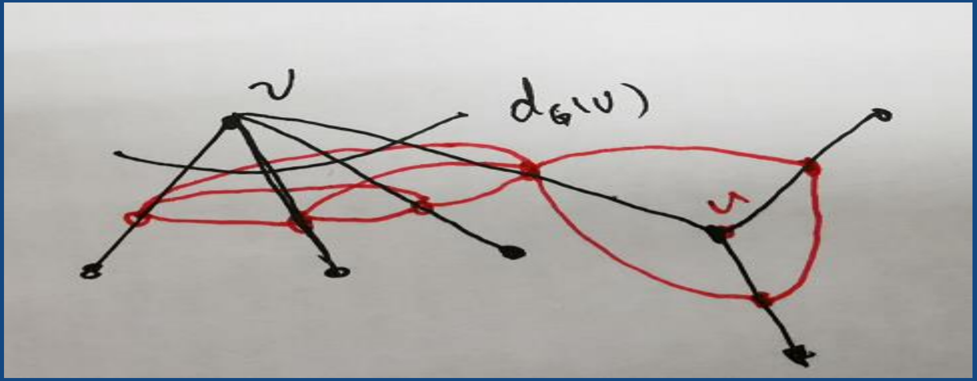
理由：由于G是无环图，其边的两个端点都不相同， 则uv对应的顶点的度数为除uv这条边以外的与u，v相邻的边的条数之和，即：$(d_G(u) - 1) + (d_G(v) - 1)$。



# 例子：

- 线图的边数：$$|E(L(G))| = \sum_{v \in G} \binom{d_G(v)}{2}$$

方法一：由于原图G是无环图， G中任意两条相邻的边都产生L(G)中的一条边，则对G中每个顶点v所关联的边在对应的线图中产生 $\binom{d_G(v)}{2}$ 边，得证。



# 握手定理的应用

- **线图的边数：** $|E(L(G))| = \sum_{v \in G} \binom{d_G(v)}{2}$

方法二 利用线图的顶点度数和握手定理证明。

由于$d_{L(G)}$(uv)=$d_G(u) + d_G(v)$−2，由握手定理得：

$$2|E(L(G))| = \sum_{uv \in V(L(G))} d_{L(G)}(uv) = \sum_{uv \in V(L(G))} (d_G(u)-1+d_G(v)-1)$$

$$= \sum_{uv \in E(G)} (d_G(u)-1+d_G(v)-1)$$

与之相同

?

$$= \sum_{v \in V(G)} \Big(\sum_{uv \in I(v)} (d_G(v)-1)\Big)$$

这个求和中，每条边属于两个端点的关联集，对每条边的端点各计算一次，即如

$$= \sum_{v \in V(G)} d_G(v)(d_G(v)-1)$$

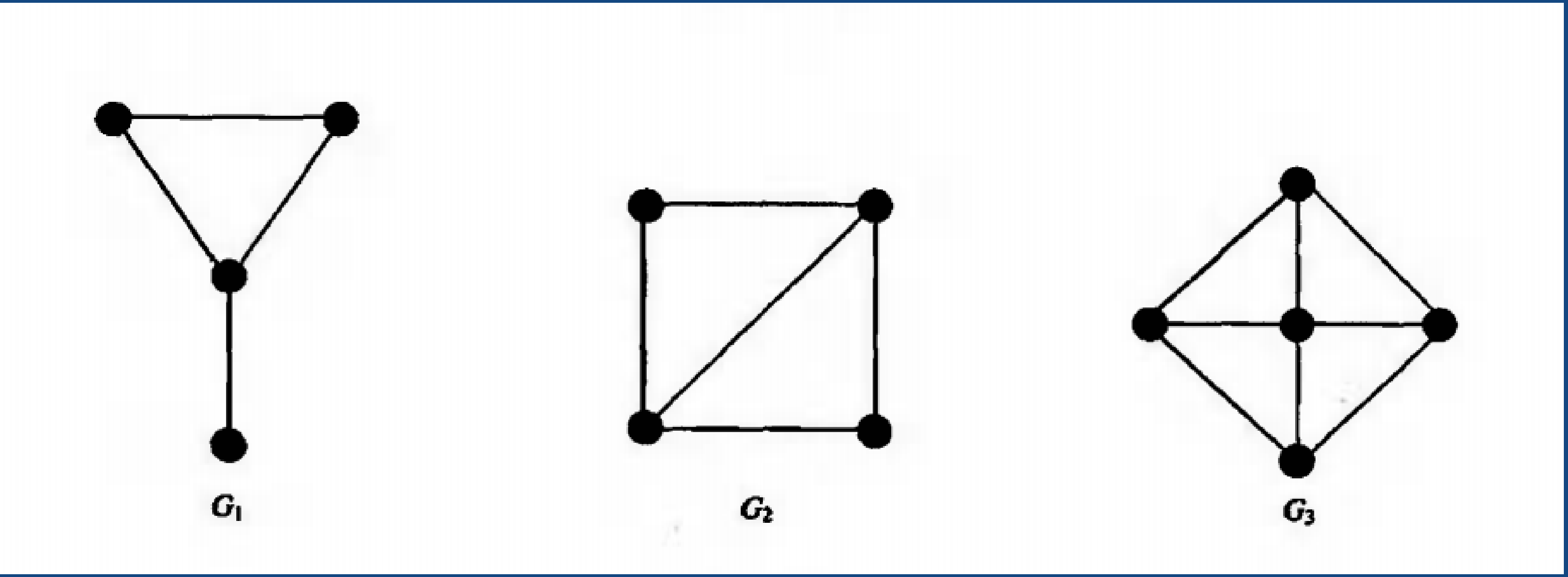
$$= 2\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$$

在v的关联集中的每条边贡献相同，都是$d_G(v)-1$，共有$d_G(v)$条边。

$L^1(G) = L(G)$， $L^2(G) = L(L(G))$，一般记

$L^n(G) = L(L^{n-1}(G))$

- 下图中 $G_2 = L(G_1)$， $G_3 = L^2(G_1)$。



# 5、子图

**定义1.11** 设$G=\langle V, E\rangle$，$G'=\langle V', E'\rangle$为两个图(同为无向图或同为有向图)，若$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$，则称G′是G的**子图**，$G$为$G'$的**母图**，记作$G'\subseteq G$。

若$V'\subset V$或$E'\subset E$，则称$G'$为$G$的**真子图**。

若$V'=V$，则称$G'$为$G$的**生成子图（或支撑子图）**。

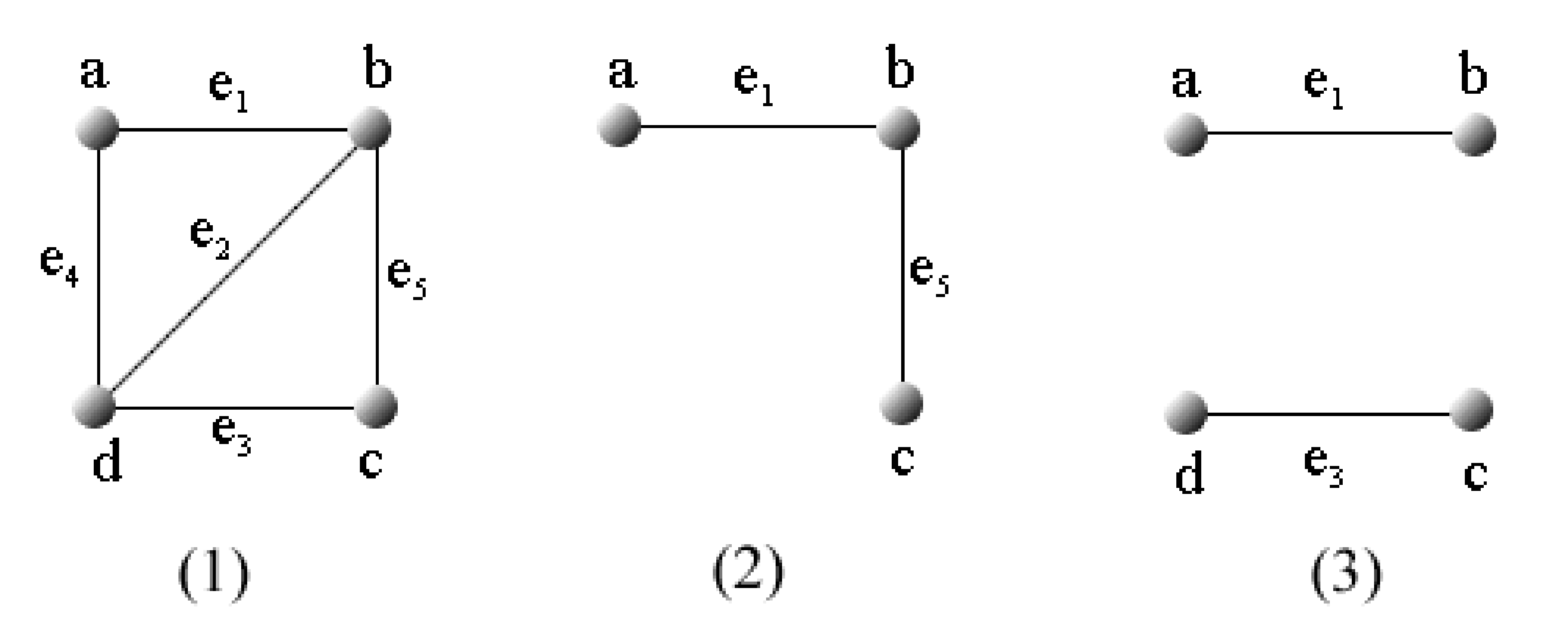
特别强调：定义中一定是先要保证$G'$是图这个前提， 如果仅仅$V'\subseteq V$且$E'\subseteq E$ 不能说明$G'=\langle V', E'\rangle$是G的子图。

# 导出子图

**定义1.12** 设$G=\langle V,E\rangle$为一图，$V_1\subset V$且$V_1\neq\varnothing$，称以$V_1$为顶点集，以$G$中两个端点都在$V_1$中的边组成边集$E_1$的图为$G$的$V_1$导出的子图，记作$G[V_1]$。

设$E_1\subset E$且$E_1\neq\varnothing$，称以$E_1$为边集，以$E_1$中边关联的顶点为顶点集$V_1$的图为$G$的$E_1$导出的子图，记作$G[E_1]$。

# 导出子图举例




在上图中，设G为(1)中图所表示，

取$V_1=\{a, b, c\}$，则$V_1$的导出子图$G[V_1]$为(2)中图所示。

取$E_1=\{e_1, e_3\}$，则$E_1$的导出子图$G[E_1]$为(3)中图所示。

# 生成子图和度的综合举例

证明： 无环图G含有两分生成子图H，使得 $d_H(x) \geq \frac{1}{2} d_G(x)$ 对每个v∈V(G)成立。

证明思路： **1.** 先证明两分生成子图存在；

**2.** 找边数最多的两分生成子图，证明满足条件；

**3.** 直接证明满足条件困难， 用反证法证明，利用边数最多这个条件得到矛盾。