第五章 着色理论

(一)、图的边着色

(二)、图的点着色

∵ (一)、边着色相关概念

现实生活中很多问题，可以模型为所谓的边着色问题来处理。例如排课表问题。

排课表问题：设有m位教师，n个班级，其中教师x_i要给班级y_j上p_{ij}节课。求如何在最少节次排完所有课。

建模：令$X=\{x_1,x_2,\ldots,x_m\}$，$Y=\{y_1,y_2,\ldots,y_n\}$，x_i与y_j间连p_{ij}条边，得两分图$G=(X, Y)$.

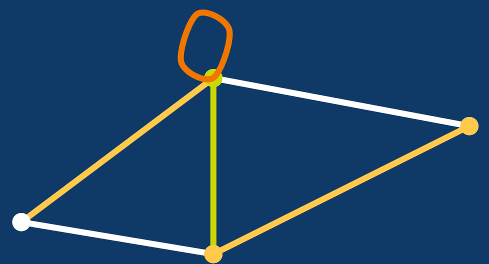
于是，问题转化为如何在G中将边集E划分为互不相交的p个匹配，且使得p最小。

如果每个匹配中的边用同一种颜色染色，不同匹配中的边用不同颜色染色，则问题转化为在G中给每条边染色，相邻边染不同色，至少需要的颜色数。

这就需要我们研究所谓的边着色问题。

定义1 设G是图，对G的边进行染色，若相邻边染不同颜色，则称对G进行正常边着色；

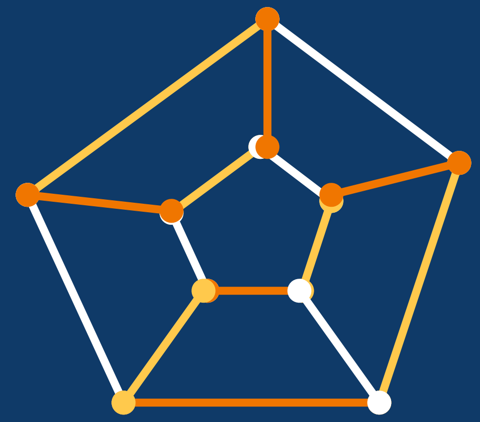
如果能用k种颜色对图G进行正常边着色，称G是k边可着色的。



正常边着色

在对G正常边着色时，着相同颜色的边集称为该正常着色的一个色组。

定义2 设G是图，对G进行正常边着色需要的最少颜色数，称为G的边色数，记为：$\chi'(G)$



$\chi'(G)=3$

注：对图的正常边着色，实际上是对G的边集的一种划分，使得每个划分块是G的一个边独立集(无环时是匹配); 图的边色数对应的是图的最小边独立集划分数。

因此，图的边着色，本质上是对应实际问题中的“划分”问题或“分类”问题。

(二)、几类特殊图的边色数

1、两分图的边色数

定理1 $\chi'(K_{m,n})=\Delta$

证明：设 $X=\{x_0,x_1,\ldots,x_{m-1}\}$ $Y=\{y_0,y_1,\ldots,y_{n-1}\}$

又设Δ=n。设颜色集合设为｛0，1，2，…，n-1｝，π是$K_{m,n}$的一种n着色方案，满足：

$$\forall x_iy_j\in E(K_{m,n}),\pi(x_iy_j)=(i+j)(\bmod n)$$

我们证明：上面的着色是正常边着色，即n个颜色可正常染色。

对$K_{m,n}$中任意的两条邻接边x_iy_j和x_iy_k。若

$$\pi(x_i y_j) = \pi(x_i y_k)$$

则：i+ j (mod n)=i +k (mod n), 得到j=k，矛盾！

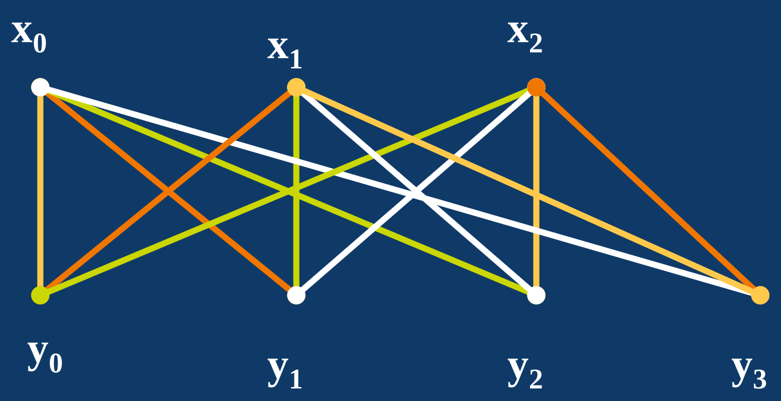
同理可证，对$K_{m,n}$中任意的两条邻接边x_iy_j和x_ly_j若染色不同。

所以，上面着色是正常边着色。所以：

$$\chi'(K_{m,n}) \le n$$

又显然 $\chi'(K_{m,n}) \ge \Delta = n$ ，所以，$\chi'(K_{m,n}) = \Delta$

例1 用最少的颜色数对$K_{3,4}$正常边着色。



最大度$\Delta=4$，边色数为4. 染色方式如下：

黄色： x_0y_0 x_1y_3 x_2y_2

橙色： x_0y_1 x_1y_0 x_2y_3

绿色： x_0y_2 x_1y_1 x_2y_0

白色： x_0y_3 x_1y_2 x_2y_1

定理2 (哥尼，1916)若G是两分图，则 $\boxed{\chi'(G)=\Delta}$

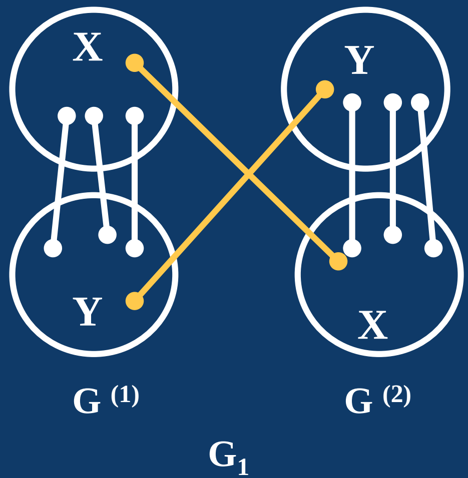
在证明定理前， 我们先证明一个引理

引理：设G=(X, Y)是一个最大度为Δ的两分图，则G是某个Δ正则两分图 G*的子图。

目标：构造出Δ正则两分图以G为子图 √

证明： 按如下方式构造G^*。

如果G不是Δ正则两分图，先将G按下图所示方式构造成为G_1



$G^{(1)}$与$G^{(2)}$分别是G的拷贝。

如果$d(x_i)<\Delta$，则将 $G^{(1)}$中对应x_i与$G^{(2)}$对应的x_i连边；如果$d(y_j)<\Delta$，则将 $G^{(1)}$中对应y_j与$G^{(2)}$对应的y_j连边；

这样得到的新两分图就是G_1。

如果G_1是Δ正则两分图，则$G^*=G_1$

否则，在G_1的基础上，重复上面的过程，可得到G_2，这样不断下去，最终得到包含G的Δ正则偶图G^*。

定理2 (哥尼，1916)若G是两分图，则 $\chi'(G)=\Delta$

证明： 由引理可得：对于任意最大度为Δ的两分图G,均存在G的Δ正则母图G*。又由于正则两分图存在完美匹配，所以，G*可以划分为Δ个不相交的完美匹配的并，从而其边色数为Δ。由于G是G* 的子图， 则G可用Δ色进行正常染色， 又由于G的最大度是Δ，则G的染色数至少是Δ，所以 $\chi'(G)=\Delta$。

2、简单图的边色数

定理3 (维津定理，1964) 若G是简单图，则：

$$\chi'(G)=\Delta \text{或} \chi'(G)=\Delta+1$$

注：根据维津定理，简单图可以按边色数分成两类图：一是色数等于Δ(G)的简单图，通常称为第一类图；二是色数等于Δ(G)+1的简单图，通常称为第二类图。

定理4 设G是简单图。若点数n=2k+1且边数m>kΔ, 则：

$$\chi'(G)=\Delta(G)+1$$

证明：反证法：若不然，由维津定理，$\chi'(G)=\Delta(G)$

设π是G的Δ(G)正常边着色方案，对于G的每个色组来说，包含的边数至多(n-1)/2=k。这样：$m(G)\le\Delta k$，与条件矛盾。

注：这是书上的习题。

例3 确定下图的边色数。

G

解：由定理4：$\chi'(G)=\Delta(G)+1=5$

注：通常是直接利用维津定理（不需要记定理4），用反证法证明4个颜色染边是不够的。

定理5 设G是奇数阶Δ正则简单图, 若Δ>0, 则:

$$\chi'(G)=\Delta(G)+1$$

证明：设n=2k+1。因G是Δ正则简单图，且Δ>0，所以

$$m(G)=\frac{n\Delta}{2}=\frac{(2k+1)\Delta}{2}>k\Delta$$

由定理4： $\chi'(G)=\Delta(G)+1$

注意： 这是书上的习题， 可以直接利用维津定理，用反证法证明不可能有 $\chi'(G)=\Delta(G)$

作业：**P119T5** 请利用维津定理证明。

例 6 设n=2k+1, k>0。求 $\chi'(C_n)$ $\chi'(K_n)$

解：方法1：由定理5知：$\chi'(C_n)=2+1=3$

$$\chi'(K_n)=(n-1)+1=n$$

方法二：利用维津定理证明 不可能有

$$\chi'(G)=\Delta(G)$$

例7 求出彼得森图的边色数。

G

解：一方面，彼得森图中去掉任意一个1因子后，剩下两个5点圈，所以，不能进行1因子分解，所以：

$$\chi'(G) \geq 4$$

另一方面：通过验证，G可以4正常作色。所以：

$$\chi'(G) = 4$$

总结： 如何证明或者判断某个图的边染色数：

(a) 如果要证明某一个图是第一类图， 只要找到了一种染色方式用的色数是Δ就可以了；

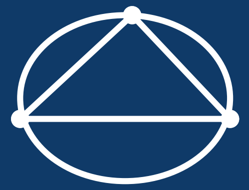
(b) 如果要证明某一个图是第二类图， 只需要证明用Δ色不能正常染色。一般用反证法， 假设能用 Δ染色，得到矛盾。

※※※※※

定理 6（Vizing定理）设无环图G中边的最大重数为 μ，则

$$\chi'(G) \le \Delta + \mu$$

例8 下图是一个边色数达到Δ+μ 的图，其中Δ=4, μ=2。



(三)、边着色的应用

边着色对应的实际问题就是图的匹配分解问题。边色数对应的是最小匹配分解问题。所以，生活中的许多问题都可模型为边着色问题来解决。

例 (排课表问题) 在一个学校中，有7个教师12个班级。在每周5天教学日条件下，教课的要求由如下矩阵给出：

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccccccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{array} \\ P= & \left(\begin{array}{cccccccccccc} 3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{array} \end{array}$$

其中，p_{ij}表示x_i必须教y_j班的节数。求：

(1) 一天分成几节课，才能满足所提出的要求？

(2) 若安排出每天8节课的时间表，需要多少间教室？

$$
P = \begin{array}{cc}
\begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 & y_7 & y_8 & y_9 & y_{10} & y_{11} & y_{12} \end{matrix} & \\
\begin{pmatrix}
3 & 2 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\
1 & 3 & 6 & 0 & 4 & 2 & 5 & 1 & 3 & 3 & 0 & 4 \\
5 & 0 & 5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 \\
2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 4 & 2 & 3 \\
3 & 5 & 2 & 2 & 0 & 3 & 1 & 4 & 4 & 3 & 2 & 5 \\
5 & 5 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\
0 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 4 & 3 & 3 & 0
\end{pmatrix} &
\begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{matrix}
\end{array}
$$

解：问题可模型为一个两分图。

一节课对应边正常着色的一个色组。由于G是两分图，所以边色数为G的最大度35。这样，最少总课时为35节课。平均每天要安排7节课。

如果每天安排8节课，因为G的总边数为240，所以需要的教室数为240/40=6。

∵(四)、点着色

和图的边着色问题一样，生活中的很多问题，也可以模型为所谓的图的顶点着色问题来处理。例如课程安排问题。

定义1 设G是一个图，对G的每个顶点着色，使得相邻顶点着不同颜色，称为对G的正常顶点着色；

如果用k种颜色可以对G进行正常顶点着色，称G可k正常顶点着色；

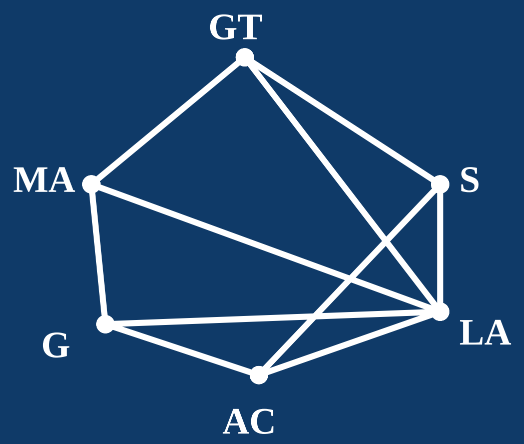
对图G正常顶点着色需要的最少颜色数，称为图G的点色数。图G的点色数用 $\chi(G)$ 表示。

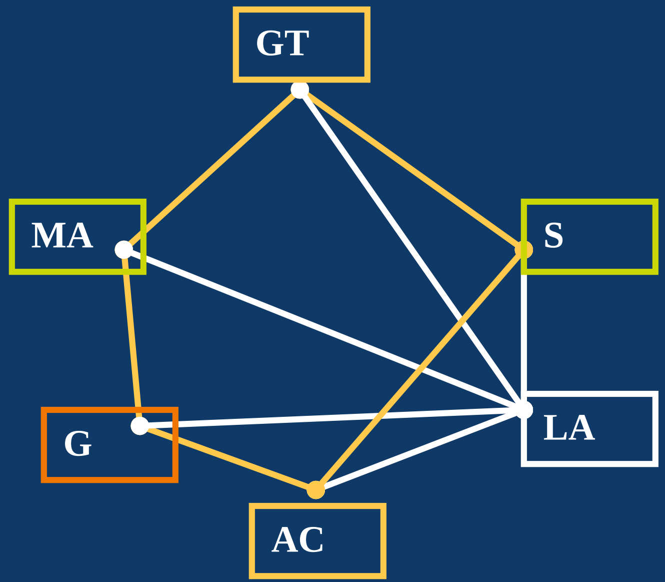
定义2 色数为k的图称为k色图。

定义3 用点色数种颜色对图G正常着色，称为对图G的最优点着色。

注： 对图的正常顶点着色，带来的是图的顶点集合的一种划分方式。顶点着色对应的实际问题也是分类问题。属于同一种颜色的顶点集合称为一个色组，同一色组的顶点间彼此不相邻接，所以又称为点独立集。

例1 说明下图的点色数是4。





解：一方面，由图的结构特征，拿掉LA后是一个5点圈，必须用三个颜色. 由于LA和其他五个点都相邻，它必须和其他五个点染不同的颜色，则 $\chi(G) \geq 4$

另一方面，通过具体着色，用4种颜色可以得到该图的一种正常点着色，则：$\chi(G) \leq 4$

所以，$\chi(G) = 4$

(五)、图的点色数的几个结论

- G是有边的两分图的充要条件是 x =2
- G是无边图的充要条件是 x =1
- G是完全图的充要条件是 x =|V(G)|
- X(轮）=3（轮的顶点数是奇数）； 4（否则）

定理 1 对任意的图G，有: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$

分析：事实上，定理结论容易想到，因为任意一个顶点度数至多为Δ，因此，正常着色过程中，其邻点最多用去Δ种颜色，所以，至少还有一种色可供该点正常着色使用。

证明：我们对顶点数作数学归纳证明。

当n=1时，结论显然成立。

设对顶点数少于n的图来说，定理结论成立。考虑一般的n阶图G。

任取v $\in$ V(G), 令G_1=G-v， 由归纳假设：

$$\chi(G_1) \le \Delta(G_1) + 1 \le \Delta(G) + 1$$

设π是G_1的一种Δ(G)+1正常点着色方案，因为v的邻点在π下至多用去Δ(G)种色，所以给v染上其邻点没有用过的色，就把π扩充成了G的Δ(G)+1着色方案。

对于G来说，可以给出其Δ(G)+1正常点着色算法。

(六)、四色与五色定理

1、四色定理

1852年，刚毕业于伦敦大学的格斯里(1831—1899)发现：给一张平面地图的国家正常着色（相邻边界的国家染不同的颜色），至少需要4种颜色。这就是著名的4色定理。

著名的地图着色问题，可以化成顶点着色问题。 事实上，平面图的对偶图的点着色数即为地图的面着色所需要的颜色数。

定义：　设G是平面图的平面嵌入，G*为G的对偶图，称 $\chi(G^*)$为图G的面色数。

四色猜想：任何平面图的面色数不大于4.

四色猜想可以转化成：　χ（平面图）$\leqslant 4$

1976年**7**月，美国伊利诺大学的两位数学家**Kenneth Appel**和**Wolfgang Haken**用计算机证明了四色猜想成立。

2、五色定理

定理8 (希五德) 每个平面图是5可着色的。

根据平面图和其对偶图的关系，上面定理等价于每个平面图是5可顶点正常着色的。

证明：　　我们对图的顶点作数学归纳证明。

（证明不做要求）

当n=1时，结论显然。

设n=k时，结论成立。考虑n=k+1的平面图G。

因G是平面图，所以$\delta(G)\leq 5$

设$d(u)=\delta(G)\leq 5$。

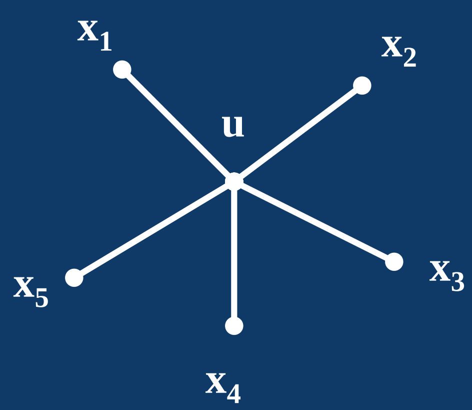
令G_1=G – u。由归纳假设，G_1是5可顶点正常着色的。设π是G_1的5着色方案。

(1) 如果$d(u)=\delta(G)<5$, 显然π可以扩充为G的5正常顶点着色；

(2) 如果$d(u)=\delta(G) = 5$, 分两种情况讨论。

情形1 在π下，如果u的邻接点中，至少有两个顶点着相同颜色，则容易知道，π可以扩充为G的5正常顶点着色；

情形2 在π下，设u的邻接点中，5个顶点着了5种不同颜色。

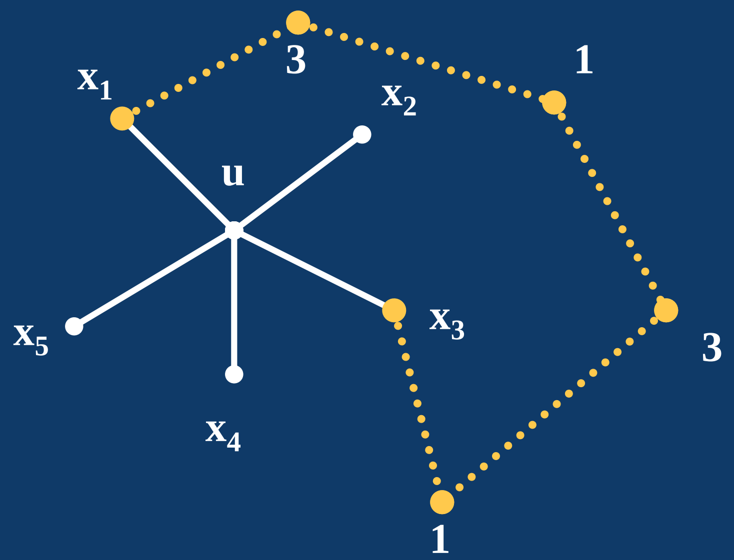


不失一般性，设 π（x_i）=i （1≦i≦5）。

设H (i, j)表示着i和j色的点在G_1中的点导出子图。

如果x_1与x_3属于H(1, 3) 的不同分支。则通过交换含x_1的分支中的着色顺序，可得到G_1的新正常点着色方案，使x_1与x_3着同色，于是由情形1，可以得到G的5正常顶点着色方案；

设x_1与x_3属于H(1, 3) 的相同分支。



在上面假设下，x_2与x_4必属于H(2, 4) 的不同分支。否则，将会得到H(1, 3) 与H(2, 4) 的交叉点。因此，π 可以扩充为G的5正常顶点着色。

P120 T14. 若G是简单图，求证 $\chi(G) \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$. 其中 $n=|V(G)|$, $m=|E(G)|$.

证明：假设 $\chi(G)=x$，则 $V(G)$ 可分成 x 个独立集. 设第 i 个独立集的顶点数为 n_i.

则 $\sum_{i=1}^{x} n_i = n$, ~~$2m \leq 2m(T_{x,v})$~~. 则 G 的边数小于等于完全多 x 部图. 每部分为 $n_1, n_2, \cdots n_x$. 记为 $T_{n_1,n_2,\cdots n_x}$.

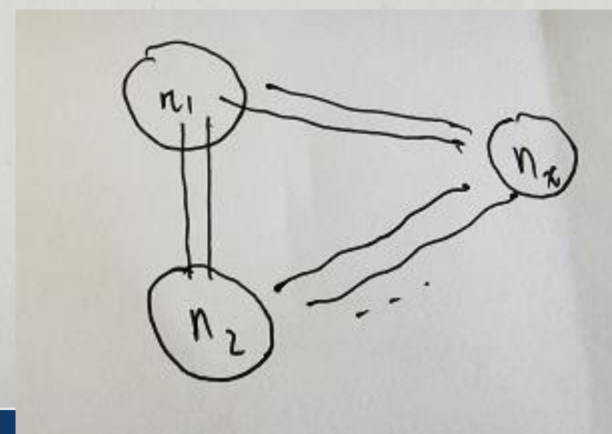
即 $2m \leq 2m(T_{n_1,n_2,\cdots n_x}) = \sum_{i=1}^{x} n_i(n-n_i) = n^2 - \sum_{i=1}^{x} n_i^2$ ①

而 $\sum_{i=1}^{x} n_i^2$ 当 $n_i = \frac{n}{x}$ 时达到最小值.

最小值为 $x\left(\frac{n}{x}\right)^2 = \frac{n^2}{x}$

由①得 $n^2 - 2m \geq \sum_{i=1}^{x} n_i^2 \geq \frac{n^2}{x}$

即 $x \geq \frac{n^2}{n^2-2m}$.



T15. 设图G中任二奇圈皆有公共顶点，则 $\chi(G)\le 5$.

证明：反证法. 假设 $\chi(G)\ge 6$. 则 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \cdots$ 对点进行染色.

令 $G_1 = G[\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3]$，$G_2 = G[\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6]$. $G[\alpha_i, \alpha_j, \alpha_l]$ 代表染色为 $\alpha_i \alpha_j \alpha_l$ 的点导出的子图.

则 G_1, G_2 均不是两分图. 否则 G_1 为两分图，则 $\chi(G_1)=2$，导致 G 的染色数至少减少1. 矛盾.

$\therefore$ G_1 中含奇圈 C_1，G_2 中也含奇圈 C_2，但 C_1 与 C_2 无公共顶点. 矛盾.

$\therefore$ $\chi(G)\le 5$.