

欧拉图

- (一)、欧拉图及其性质
- (二)、Fleury算法
- (三)、中国邮路问题

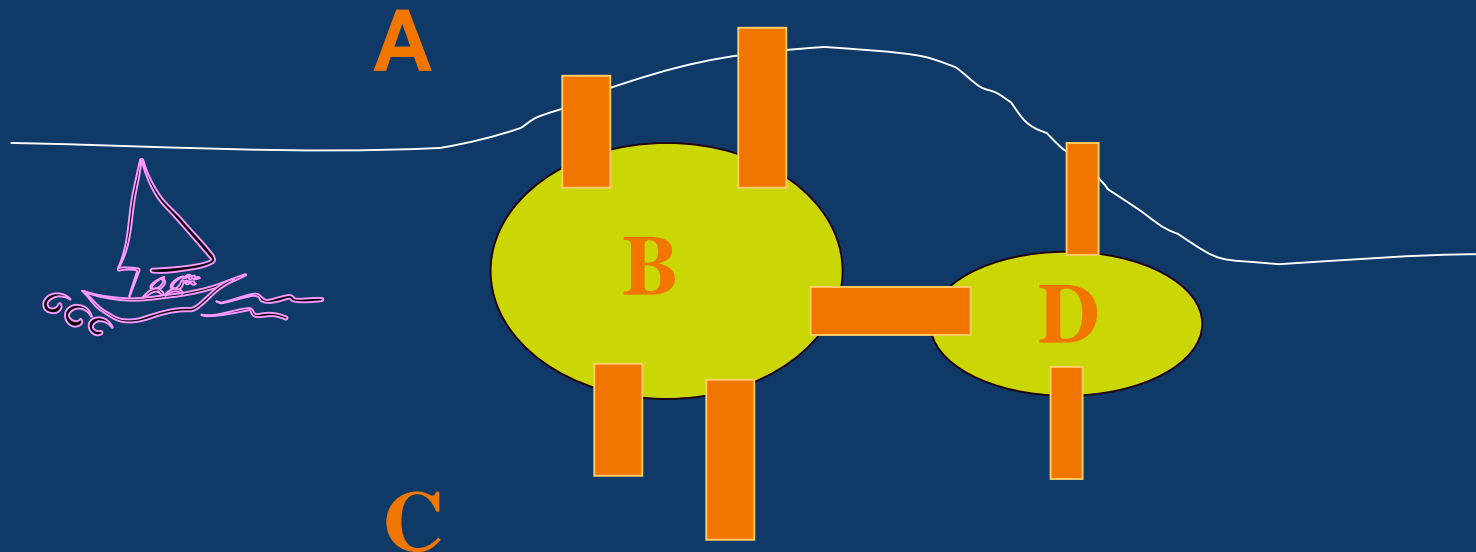
∴ (一)、欧拉图及其性质

1、欧拉图的概念

(1)、问题背景---欧拉与哥尼斯堡七桥问题

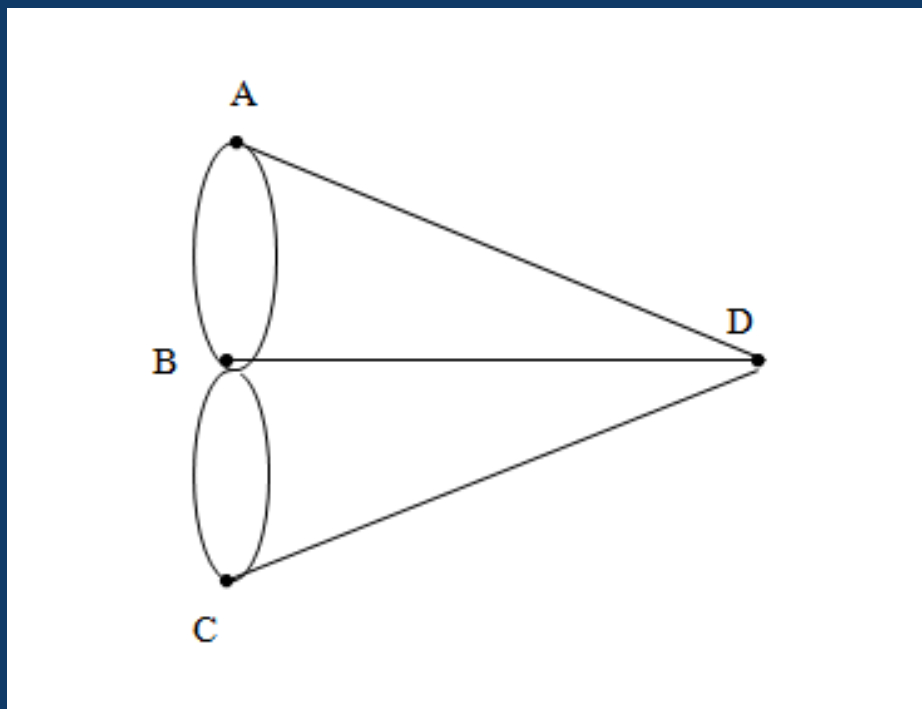
例：(七桥问题)18世纪东普鲁士有一个城市称为哥尼斯堡，它位于普雷格尔河畔，河中有两个小岛，通过七座桥彼此相联（如图）。

当时有人提出：能否从某个地点出发经过每个桥一次且仅一次然后返回出发点？



∴ Euler的解:

首先构建一个图，以两岸和小岛为顶点，两个顶点有边相连当且仅当它们有桥相连， 如下图：



七桥问题变成问题： 在这个图中，能否从A出发，经过每条边一次且仅一次，可以回到出发点？ No



哥尼斯堡城(位于德国北部), 在欧拉的生活与图论历史中扮演着非常重要角色。因为它, 产生了著名的欧拉图定理, 因为它, 产生了图论。

注: 一笔画——中国古老的民间游戏

要求: 对于一个图 G , 笔不离纸, 一笔画成.



(2)、Euler图的定义

设 G 是无孤立点的图。经过 G 中每条边一次且仅一次的通路（回路）称为欧拉通路（回路），存在欧拉回路的图称为欧拉图。有欧拉通路没欧拉回路的图称为半欧拉图。

注：（1）欧拉图（半欧拉图）并不仅仅只针对简单图。

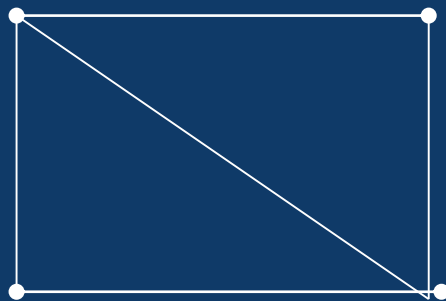
（2）欧拉图或半欧拉图一定是连通图



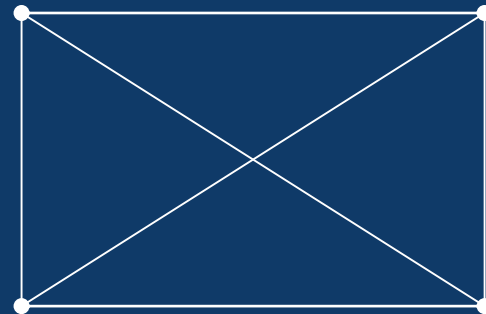
例 1: 下图中, (a), (f) 是欧拉图; (b), (d) 是半欧拉图; (c) 和 (e) 无欧拉通路和回路.



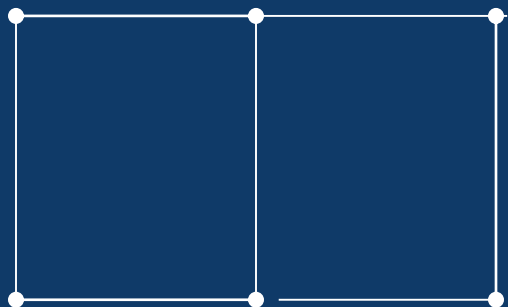
(a)



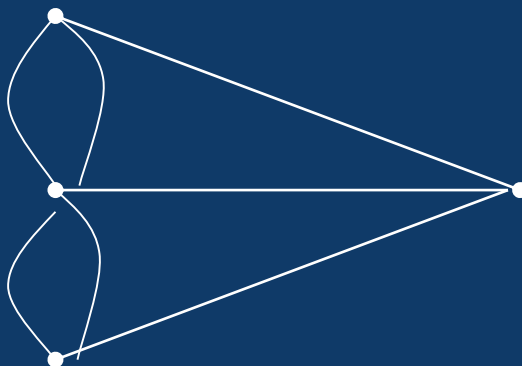
(b)



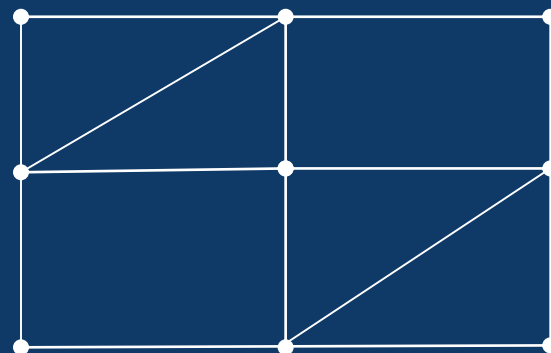
(c)



(d)



(e)



(f)



2、欧拉图的性质

定理1 下列陈述对于非平凡连通图 G 是等价的：

- (1) G 是欧拉图；
- (2) G 的顶点度数为偶数；
- (3) G 的边集合能划分为圈。

证明: (1) \rightarrow (2)

由(1)，设 C 是欧拉图 G 的任一欧拉环游， v 是 G 中任意顶点， v 在环游中每出现一次，意味在 G 中有两条不同边与 v 关联，所以，在 G 中与 v 关联的边数为偶数，即 v 的度数为偶数，由 v 的任意性，即证明(2)。

(2) \rightarrow (3)

由于 G 是连通非平凡的且每个顶点度数为偶数，所以 G 中至少存在圈 C_1 ，从 G 中去掉 C_1 中的边，得到 G 的生成



子图 G_1 ,若 G_1 没有边, 则(3)成立。否则, G_1 的每个非平凡分支是度数为偶数的连通图, 于是又可以抽取一个圈。反复这样抽取, $E(G)$ 最终划分为若干圈。

(3) \rightarrow (1)

设 C_1 是 G 的边划分中的一个圈。若 G 仅由此圈组成, 则 G 显然是欧拉图。

否则, 由于 G 连通, 所以, 必然存在圈 C_2 , 它和 C_1 有公共顶点。于是, $C_1 \cup C_2$ 是一条含有 C_1 与 C_2 的边的欧拉闭迹, 如此拼接下去, 得到包含 G 的所有边的一条欧拉闭迹。即证 G 是欧拉图。



推论1 连通图 G 是欧拉图当且仅当 G 的顶点度数为偶数。

推论2 连通非欧拉图 G 存在欧拉迹（连通图 G 是一个半欧拉图）当且仅当 G 中只有两个顶点度数为奇数。

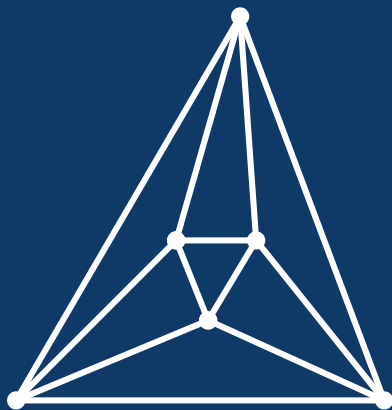
证明：必要性显然。

充分性：设 G 中两个奇次顶点为 u, v , 令 $G_1 = G + \text{新边}(u, v)$ 。根据推论1, G_1 是欧拉图, 将 G_1 中的欧拉回路中的新边 (u, v) 删去, 即为 G 中的欧拉迹。

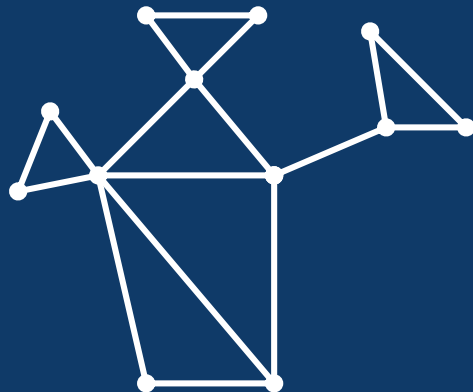
注意： G 中 u, v 之间也许有边, 如果有加的是平行边。



例2 下面图中谁是欧拉图？谁是非欧拉图但存在欧拉迹？谁是非欧拉图且不存在欧拉迹？



G_1



G_2



G_3

解： G_1 是欧拉图； G_2 是非欧拉图，但存在欧拉迹； G_3 既不是欧拉图也不是半欧拉图（4个奇次顶点）。



前面的两个推论解决了欧拉图和半欧拉图的存在性，当我们判断了图是欧拉图或者半欧拉图，是否有算法找到欧拉回路或欧拉通路呢？

Fleury算法-----

解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法。方法是尽可能避割边行走。

当一个连通图存在欧拉通路时，我们可以连接两个奇次点，得到一个欧拉图，用Fleury算法求出这个欧拉图中欧拉环游，然后删掉加的边得到原图的欧拉通路。

∴∴(二)、Fleury算法

该算法解决了在欧拉图中求出一条具体欧拉环游的方法。
方法是尽可能避割边行走。

1、算法

(1) 任意选择一个顶点 v_0 ,置 $w_0=v_0$;

(2) 假设迹 $w_i=v_0e_1v_1\dots e_iv_i$ 已经选定, 那么按下述方法从 $E-\{e_1,e_2,\dots,e_i\}$ 中选取边 e_{i+1} :

1) e_{i+1} 与 v_i 相关联;

2) 除非没有别的边可选择, 否则 e_{i+1} 不能是

$G_i=G-\{e_1,e_2,\dots,e_i\}$ 的割边。

(3) 当(2)不能执行时, 算法停止。

∴ Fleury算法的正确性

定理1 若 G 是欧拉图，则 G 中任意用Fleury算法作出的迹都是 G 的欧拉环游。

证明不做要求， 证明见P127



例 在下面欧拉图 G 中求一条欧拉回路。

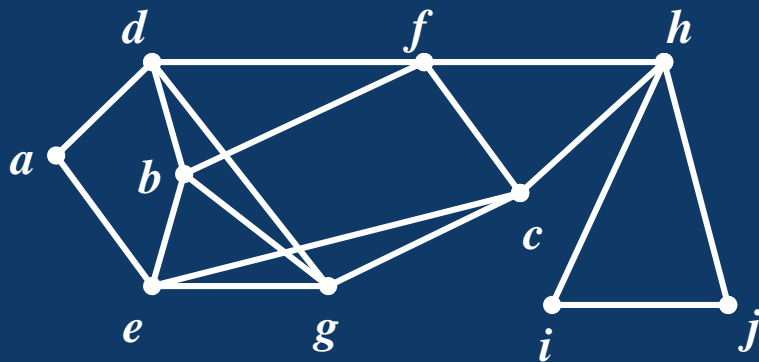


图 G

解:

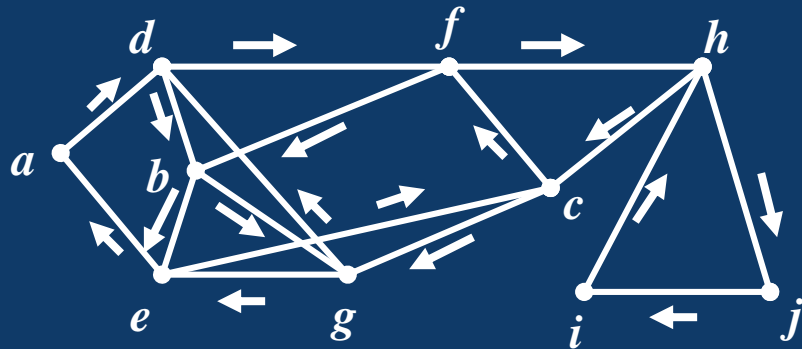
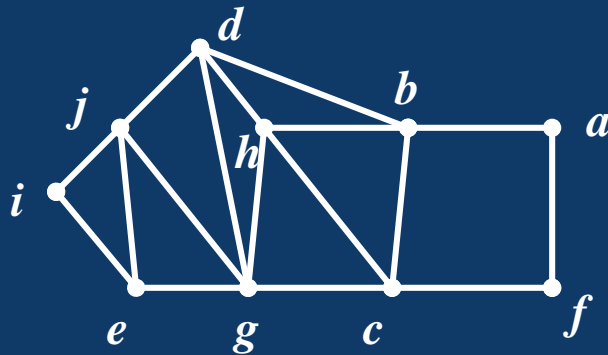


图 G



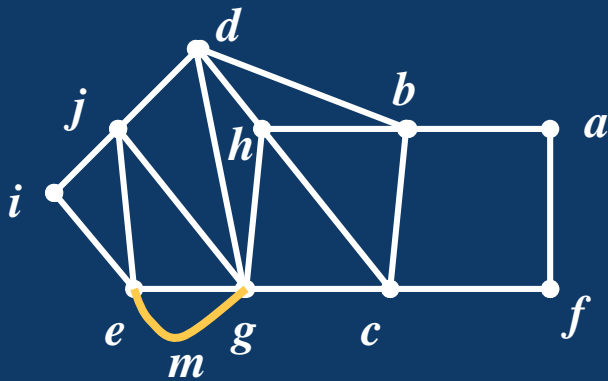
例 某博物馆的一层布置如下图，其中边代表走廊，结点e是入口，结点g是礼品店，通过g我们可以离开博物馆。请找出从博物馆e进入，经过每个走廊恰好一次，最后从g处离开的路线。





解：图中只有两个奇度顶点e和g,因此存在起点为e, 终点为g的欧拉迹。

为了在G中求出一条起点为e,终点为g的欧拉迹，在e和g间添加一条平行边m



用Fleury算法求出欧拉环游为：

emgcfabchbdhgdjiejge

所以解为：*egjei jdghdbhcbafcg*



例 证明：若 G 有 $2k>0$ 个奇数顶点，则存在 k 条边不重的迹 Q_1, Q_2, \dots, Q_k ，使得：

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup L \cup E(Q_k)$$

证明：不失一般性，只就 G 是连通图进行证明（每个连通分支都含偶数个奇次顶点）。

设 $G=(n, m)$ 是连通图。令 $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{2k}$ 是 G 的所有奇度点。

在 v_i 与 v_{i+k} 间连新边 e_i 得图 G^* ($1 \leq i \leq k$)。则 G^* 是欧拉图，因此，由Fleury算法得欧拉环游 C 。

在 C 中删去 e_i ($1 \leq i \leq k$)。得 k 条边不重的迹 Q_i ($1 \leq i \leq k$)：

$$E(G) = E(Q_1) \cup E(Q_2) \cup L \cup E(Q_k)$$



例 设 G 是非平凡的欧拉图，且 $v \in V(G)$ 。证明： G 的每条具有起点 v 的迹都能扩展成 G 的欧拉环游当且仅当 $G-v$ 是森林。

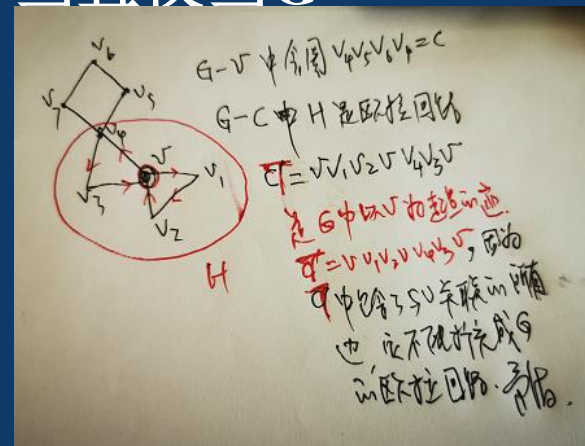
证明：“必要性”

若不然，则 $G-v$ 有圈 C 。

考虑 $G_1 = G - E(C)$ 的含有顶点 v 的分支 H 。

由于 G 是非平凡欧拉图，所以 G_1 的每个顶点度数为偶数，从而， H 是欧拉图。

由于 H 是欧拉图，则存在欧拉环游 T 。对于 T ，把它看成 G 中以 v 为起点和终点的一条迹，显然不能扩充为 G 的欧拉环游（理由：与 v 关联的边都在 T 中）。这与条件矛盾！





“充分性”

若不然，设 $Q=(v, w)$ 是 G 的一条不能扩充为 G 的欧拉环游的最长迹，显然 $v = w$ ，且 Q 包含了与 v 关联的所有边。即 Q 是一条闭迹。

于是， $G - v$ 包含 $G - Q$ 且 $G - Q$ 的每个顶点度数为偶数。

于是， $G - Q$ 的非平凡分支是欧拉图，说明有圈，即 $G - v$ 有圈，这与条件矛盾。



关于欧拉图，尚有一些理论问题没有解决。

(1) 我们知道欧拉图能表示成无公共边的圈的并，对于给定的欧拉图，它能表示成几个圈的并？

(2) 对平面图欧拉图 G , 由于 $|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$, 而每个圈至少三条边，则 G 至多用 $|V(G)| - 2$ 个无公共边的圈的并。但非平面的欧拉图，是否可以表成不超过该图顶点数减2个圈的并呢？这个问题还没人证明或者反驳。



- ✓ 欧拉回路问题既是一个有趣的游戏问题又是一个具有实用价值的问题。
- ✓ 作为欧拉回路的应用，邮递员送递信件时一般的邮递线路是需要遍历某些特定的街道，理想地，他应该走一条欧拉路，即不重复地走遍图中的每条边。
- ✓ 一般邮递员感兴趣的是图中的边。

∴∴(三)、中国邮路问题

1962年，中国数学家管梅谷提出并解决了“中国邮路问题”

1、问题

邮递员派信的街道是边赋权连通图。从邮局出发，每条街道至少行走一次，再回邮局。如何行走，使其行走的环游路程最小？

如果邮路图本身是欧拉图，那么由Fleury算法，可得到他的行走路线。

如果邮路图本身是非欧拉图，那么为得到行走环游，必须重复行走一些街道。于是问题转化为如何重复行走街道？

::: 中国邮路员问题 一数学模型

数学模型： 给定一个图 $G = (V, E, w)$ ，对 $E(G)$ 加权，即对每条边 e 指定一个非负实数 $w(e)$ ，问题是求 G 的一个含有一切边的回路 W 使得 W 的总权最小。

基本思想：

- 如果 G 是一个欧拉图，则所求的中国邮路员问题就是 G 的一条欧拉回路。
- 否则：有些边要走2次或者以上。我们的问题就变成了在 G 中加平行边使得成为欧拉图，且所加的边的权和最小（因为 G 的边一定要走到，这个权是固定的）。



关键问题：怎么在G上加平行边？？？

分析：

G中有偶数个奇次点， 如果可以加新边， 将偶数个奇次点两两配对后加新边就好。

但不能加新边， 如果配对好， 我们可在两个配对的奇次点间加一条路， 但为了所加边的权和最小， 我们加最短路。

问题转化成：将G中所有奇次点当顶点构成一个完全图， 每条边的边长是这两点在G中的最短路长。 求这个完全图中的权和最小的完美匹配。

完美匹配——找到了配对以保证加平行边后每个点的度数为偶数而得到欧拉环游；

权和最小——保证了加的边的总权和最小使得欧拉环游的长度最小。



算法：1) 构造一个完全加权图， 图的顶点集合是 G 的所有奇次点。 任意两个奇次点都连边， 这条边的长度即为这两点在 G 中的最短路长。

2) 求这个完全加权图的最小的完美匹配。

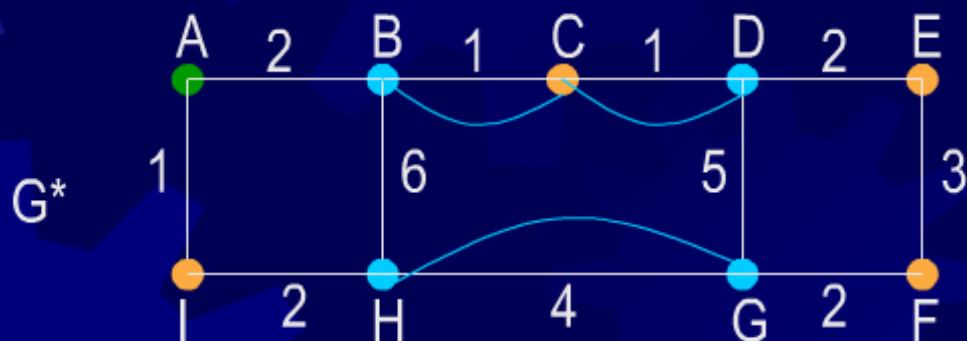
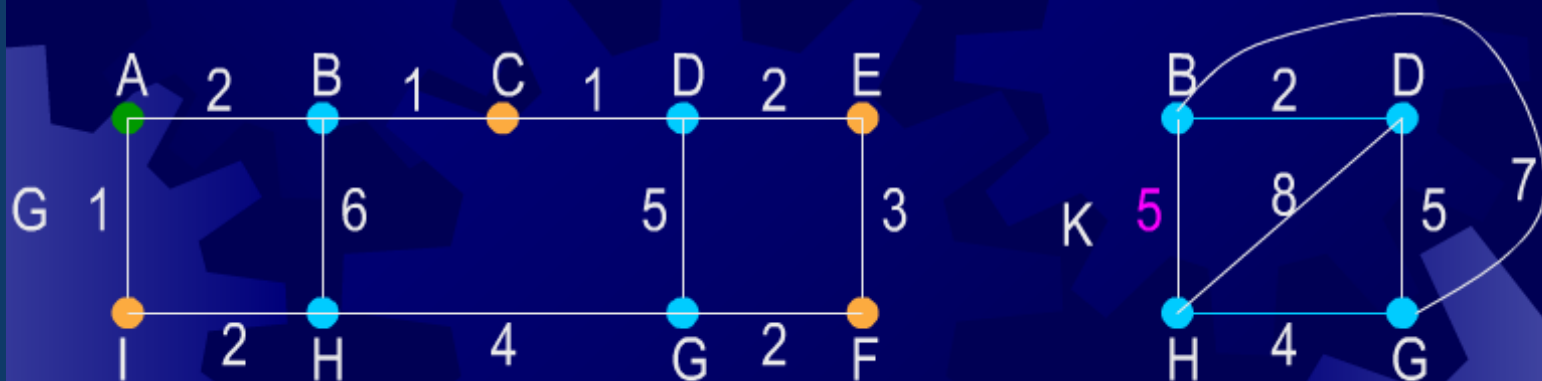
3) 求出完美匹配的边在 G 中对应的最短路。

4) 在 G 中将3) 所求得的所有最短路上的所有边加一条平行边， 边的权一样。 得到 G' 。

5) 求出 G' 上的Euler回路, 即为所要求的回路。

注：完全加权图的最小的完美匹配的算法用到的时候去查即可。

中国邮递员问题(举例)



最优路线: ABCDEFGHBCDGHIA, $W(G^*)=35$



哈密尔顿图

(一)、哈密尔顿图的概念

(二)、性质与判定



(一)、哈密尔顿图的概念

1、背景

1857年，哈密尔顿发明了一个游戏(Icosian Game).它是由一个木制的正十二面体构成，在它的每个棱角处标有当时很有名的城市。游戏目的是“环球旅行”。为了容易记住被旅游过的城市，在每个棱角上放上一个钉子，再用一根线绕在那些旅游过的城市上(钉子),由此可以获得旅程的直观表示。



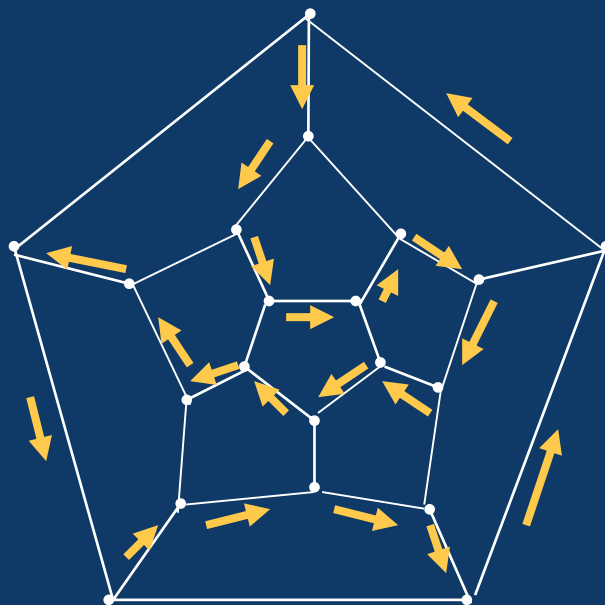
十二面体

∴ 2. 哈密尔顿图与哈密尔顿路

定义：经过图中每个点一次且仅一次的路（回路）称为哈密尔顿路（哈密尔顿圈），存在哈密尔顿圈的图称为哈密尔顿图，简称H-图。



例1、正十二面体是H图。



十二面体



例2 下图G是非H-图。

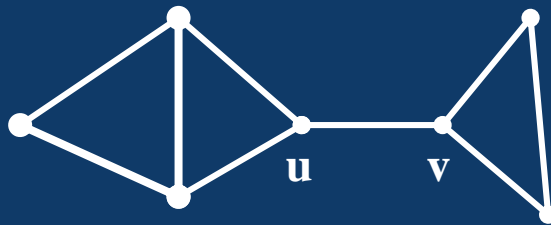


图 G

证明：因为在G中，边 uv 是割边，所以它不在G的任意圈上，于是 u 与 v 不能在G的同一个圈上。故G不存在包括所有顶点的圈，即G是非H图。

⋯⋯ 注意:

- ❑ 欧拉回路和H圈的区别：欧拉回路是包含G中的所有边，但H圈不是，它仅仅包含了G中的n条边……
- ❑ Euler图和H—图相比较，前者是要周游边，后者要周游点，虽然仅有一字之差，但两者的困难程度却大不相同。
- 对于Euler图，我们已经有一个判别定理，简单易行。但寻找一个图是不是Hamilton图的充分必要条件仍然是图论中的一个重要问题。
- 判断一个图是不是欧拉图是P问题。判断一个图是不是Hamilton图是NP-困难问题。
- ❑ 一个邮递员如果他的任务是要遍历某些特定的街道，那么他最好走的是Euler回路，如果他要投放特定的点，最好走H-圈

❖❖ (二)、性质与判定

1、性质

定理1 (必要条件) 若G为H-图, 则对V(G)的任一非空顶点子集S, 有:

$$\omega(G - S) \leq |S|$$

其中 $\omega(G - S)$ 代表G-S的连通分支的个数。

证明: G是H图, 设C是G的H-圈。则对V(G)的任意非空子集S, 容易知道:

$$\omega(C - S) \leq |S|$$

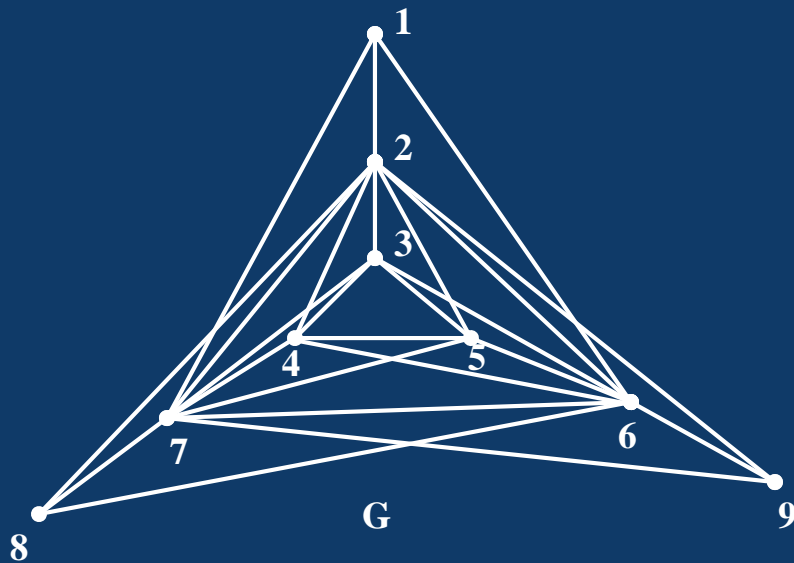
所以, 有:

$$\omega(G - S) \leq \omega(C - S) \leq |S|$$



注意1: 不等式为G是H-图的必要条件, 即不等式不满足时, 可断定对应图是非H-图。

例3 求证下图是非H-图。



证明: 取 $S = \{2, 7, 6\}$, 则有: $\omega(G - S) = 4 > |S| = 3$

所以由定理1知, G为非H图。



注意 2: 满足定理1不等式的图不一定是H-图。

例如: 著名的彼德森图是非H-图, 但它满足定理1的不等式。



Peterson图



注意 3: 只能判断某些图不是H-图, 对是H-图的无法用这个定理判断, 比如这两个图是H图





推论1: 每个H图都无割点。

证明：反证法：假设存在图G是H图但有割点，不妨设割点为v，令 $V' = \{v\}$ ， $\omega(G - V') \geq 2$ ，而 $|V'| = 1$ ，与定理矛盾。

推论2: 奇数阶的两分图不是H图。

证明：反证法：G=(X, Y;E)是奇数阶的两分图，且为H图，则必定 $|X|$ 不等于 $|Y|$ ，不妨设 $|X| < |Y|$ ，则 $\omega(G - X) = |Y| > |X|$ ，与定理矛盾。得证。

2、判定

图的H性判定是NP-困难问题。到目前为止，有关的定理有300多个，但没有一个是理想的。拓展H图的实用特征仍然被图论领域认为是重大而没有解决的问题。

图的哈密尔顿问题和四色问题被谓为挑战图论领域150年智力极限的总和。三位数学“诺奖”获得者Erdős、Whitney、Lovász以及Dirac、Ore等在哈密尔顿问题上有过杰出贡献。

下面，介绍一个著名的定理。



定理2 (充分条件) 对于 $n \geq 3$ 的简单图 G , 如果 G 中的任意两个不相邻顶点 u 与 v , 有:

$$d(u) + d(v) \geq n$$

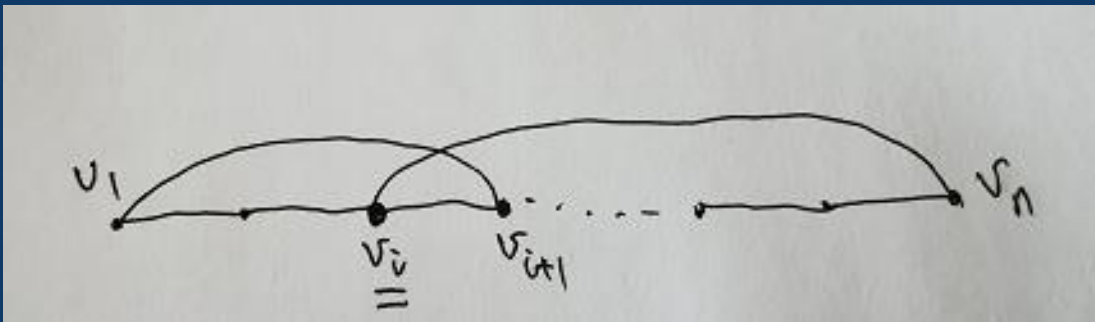
那么, G 是H-图。



证明:反证法:设存在满足条件的图是非Hamilton 图. 我们设 G 是满足条件的非H-图中边数最多的图, 即增加一条边使得变为H图. 则 G 中存在一条哈密尔顿通路, $p=v_1v_2\cdots v_n$ 但 v_1 与 v_n 不相邻, 由于

$d(v_1)+d(v_n) \geq n$, 可知一定存在一个顶点 v_i 在与 v_1 相邻, 且 v_n 与 v_{i-1} 相邻. 证明如下:

令 $S=\{v_i \mid v_1v_{i+1} \in E\}$, $T=\{v_i \mid v_iv_n \in E\}$





我们知道 v_n 不属于 $S \cup T$, 因而 $|S \cup T| < n$

而 $d(v_1) = |S|$, $d(v_n) = |T|$, 但 $d(v_1) + d(v_n) \geq n$, 所以
 $S \cap T \neq \Phi$, 即存在一个顶点 v_i 与 v_1 相邻, 且 v_n 与 v_{i-1} 相邻, 此时 $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_n, v_{n-1}, \dots, v_{i+1}, v_i, v_1)$ 是一个H圈, 矛盾.

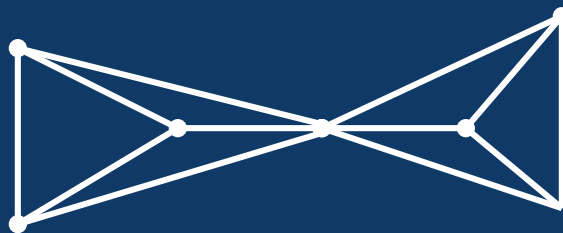
注: 这个证明的巧妙之处在于找出 v_i 满足 v_1 与 v_i 相邻, 但 v_{i-1} 与 v_n 相邻。



(1) 该定理的条件是紧的。例如：设 G 是由 K_{k+1} 的一个顶点和另一个 K_{k+1} 的一个顶点重合得到的图，那么对于 G 的任意两个不相邻顶点 u 与 v ，有：

$$d(u) + d(v) = 2k = n - 1$$

但 G 是非H-图。



$G = K_1 + 2(K_3)$



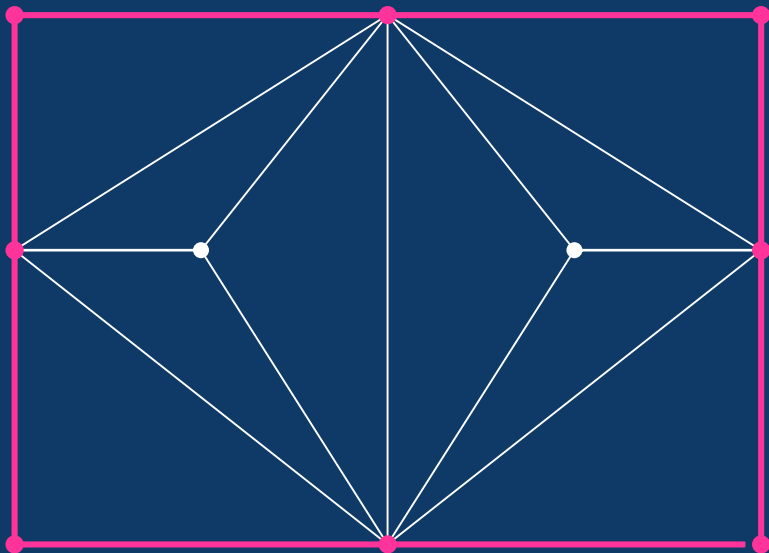
(2) 该定理的条件是哈密尔顿图的充分条件，但不是必要条件。



是哈密尔顿图，
但不满足定理的条件



说明：判断一个图是否哈密尔顿图，往往要结合定义进行。由定义知：一个图若有度为1的顶点，一定不是哈密尔顿图，只可能有哈密尔顿路；若图是哈密尔顿图，则图中2度顶点关联的边必属于所有哈密尔顿圈；一个顶点关联的边再多，一个哈密尔顿圈只能用其两条边。



左图不是哈密尔顿图，因图中二度顶点所关联的8条边（红边）已构成圈，而此圈不是哈密尔顿圈。

哈密尔顿路

定理 设 G 是具有 n 个点的简单图，则对 G 的任意两个不相邻顶点 u 和 v ，

有 $d(u) + d(v) \geq n-1$ ，则 G 有哈密尔顿路。

证明可见P133. 证明不做要求， 会用这个条件就行。

根据定理我们可以证明：

设 G 是 n 个点， m 条边的简单图，若 $m \geq (n^2 - 3n + 6) / 2$ ，
则 G 是 H -图。

证明： 我们只需证明对 G 中的任意两个不相邻的两个点 u, v 有 $d(u) + d(v) \geq n$ 。

反证： 假设存在两个不相邻的两个点 u, v
有 $n - 1 \geq d(u) + d(v)$

令 $G' = G - \{u, v\}$ ， 则

$$|E(G')| \geq (n^2 - 3n + 6) / 2 - (n - 1) = (n^2 - 3n + 6) / 2 - 2n / 2 + 1 = (n - 2)(n - 3) / 2 + 1$$

矛盾



1976年，牛津大学的图论大师Bondy(帮迪)等在Ore定理基础上，得到图 G 和它的闭包间的同哈密尔顿性。



性质： 对于简单图 G ，如果 G 中有两个不相邻顶点 u 与 v ，
满足：

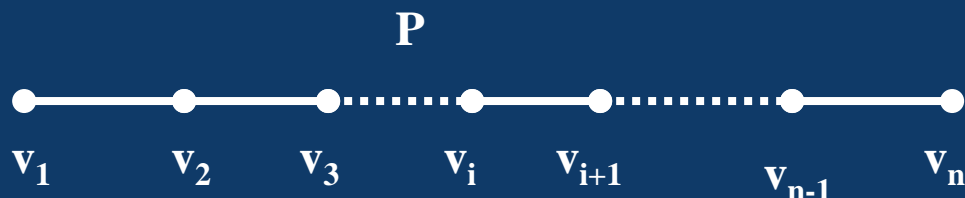
$$d(u) + d(v) \geq n$$

那么 G 是H-图当且仅当 $G + uv$ 是H-图。

证明：“必要性” 显然。

“充分性”

若不然，设 G 是非H图，那么 $G+uv$ 的每个H圈必然经过边 uv ，于是 G 含有一条哈密尔顿 (u, v) 路，其中 $v_1=u, v_n=v$ 。





令:

$$S = \{v_i \mid uv_{i+1} \in E(G)\}$$

$$T = \{v_j \mid v_j v \in E(G)\}$$

对于S与T, 显然, $v_n \notin S \cup T$

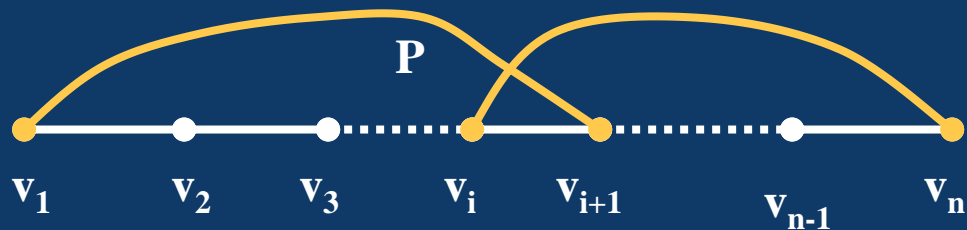
所以: $|S \cup T| < n$

另一方面: 可以证明: $S \cap T = \Phi$

否则, 设 $v_i \in S \cap T$

那么, 由 $v_i \in S$ 有 $v_1 v_{i+1} \in E(G)$

由 $v_i \in T$ 有 $v_n v_i \in E(G)$



这样在G中有H圈，与假设矛盾！

于是：

$$d(u) + d(v) = |S| + |T| = |S \cup T| + |S \cap T| < n$$

这与已知矛盾！



应用：带权图与货郎担问题

◆ 设有 n 个城市，城市之间有道路，道路的长度均大于等于0，可能是无穷大。一个旅行商从一个城市出发要经过每个城市一次且仅一次回到出发点，问他如何走才能使他走的路线最短？

◆ 数学模型：

在边加权图 $G=(V, E, w)$ 中求一个H-圈，使得H-圈的边权和最小。