第一章 图的基本概念

本次课主要内容

(一)、 图序列及图化

图序列

任何一个图都有一个非负整数列为其度序列。

思考： 是否任何非负整数列都有一个图以它为度序列？

或满足什么条件的非负整数列可以成为一个图的度序列呢？

定义 对于给定的非负整数列$d=\{d_1, d_2, \cdots, d_n\}$，若存在以V $=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$为顶点集的$n$阶无向图G，使得$d(v_i)=d_i$，则称$d$是可图化的（或者称$d$为图序列）。

图序列

定理 非负整数列 $d=(d_1,d_2,...d_n)$ 是一个图的度序列当且仅当 $\sum_{j=1}^{n} d_j \equiv 0(\bmod 2)$

证明 **必要性。**由握手定理显然得证。

充分性。由已知条件可知，d中有偶数个奇数度点。

奇数度点两两之间连一边，剩余度用环来实现。

可图化举例

由定理立即可知，

(3, 3, 2, 1)，(3, 2, 2, 1, 1)等不是一个图的度序列，

(3, 3, 2, 2)，(3, 2, 2, 2, 1)等是一个图的度序列。

问题：　简单图化呢？

3. 度序列的简单图化

定义 一个非负整数组d如果是某个简单图的度序列，我们称它为简单图序列或者称可简单图化。

关于简单图序列，主要研究3个问题：

(1) 存在问题：什么样的非负整数组是简单图序列？==》寻找判别条件

(2) 计数问题：一个简单图序列对应多少不同构的图？

(3) 构造问题：如何画出简单图序列对应的所有不同构的图？

研究现状: (1)彻底解决了---判别条件找到了，(2)解决得不好，(3)没有解决。

简单图序列的充要条件

定理：若 $d_1, d_2, \ldots d_n$ 是简单图的次序列，且$d_1 \geq d \geq \ldots \geq d_n$

则 $\sum_{i=1}^{n} d_i$是偶数，则对 $1 \leq k \leq n$

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$$

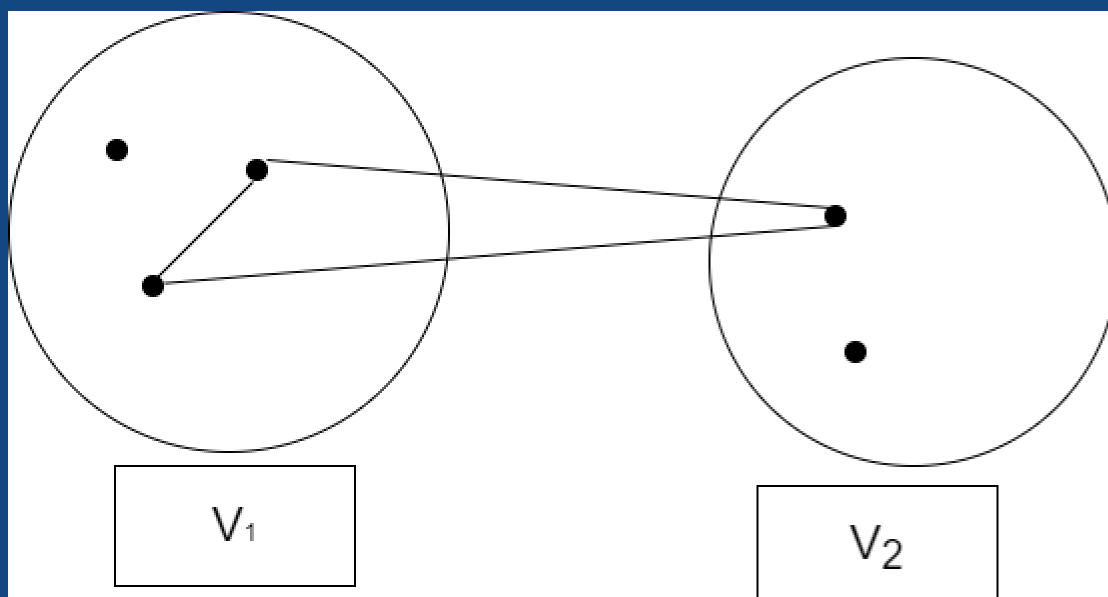
1960年Erdos和Gallai已经证明这也是充分条件。

充分性证明很难！！！

必要性的证明：

- 证明：大致思路：

对任意的k（1≤k≤n），把图分成两部分：一部分是1到k个点组成的，设为V_1，另外的n-k点组成另外一部分，设为V_2。



必要性的证明：

- 我们再来计算V_1中的1到k点的度数之和。

　　这k个点的总度数由两部分贡献：一部分是来自于V_1的贡献，其最大可能的贡献是由V_1导出的子图是完全图（即V_1任意两点都相邻），它们贡献的度数之和最多为$k(k-1)$。

　　第二部分来自于V_2，V_2中的每个点给V_1的所有点贡献的次数最多是d_i和k之间的最小值（原因是V_2的每个点的度数全部贡献给V_1，但V_1中的点最多只有k个，最多只能接受k次）。

必要条件

定理 设G为任意n阶无向简单图，则$\Delta(G) \leqslant n-1$。

证明 因为G既无平行边也无环，

所以G中任何顶点v至多与其余的$n-1$个顶点均相邻，

于是$d(v) \leqslant n-1$，由于v的任意性，所以$\Delta(G) \leqslant n-1$。

必要条件的作用：

快速判断某些非负整数列不是简单图的度序列。

例 判断下列各非负整数列哪些是简单图序列？哪些不是？

（1）（5, 5, 4, 4, 2, 1）

不是图序列， 理由是数列中各数之和不是偶数。

（2）（5, 4, 3, 2, 2）

是图序列，但不是简单图序列。

反证若它是简单图序列，设所得图为G，则△(G)＝max{5, 4, 3, 2, 2}＝5，而这个图只有5个顶点，矛盾。

(3) (3, 3, 3, 1)

是图序列，但不是简单图序列。假设该序列是简单图序列，设G＝<V，E>以该序列为度数列。

不妨设V＝{v_1, v_2, v_3, v_4}

且 $d(v_1)=d(v_2)=d(v_3)=3, d(v_4)=1$,

由于$d(v_4)=1$，因而v_4只能与v_1，v_2，v_3之一相邻，

于是v_1，v_2，v_3不可能都是3度顶点，这是矛盾的，

因而(3)中序列也不可简单图化。

(4) $(d_1, d_2, \ldots d_n), d_1 > d_2 > \ldots > d_n \geq 1$且$\sum_{i=1}^{n} d_i$为偶数。

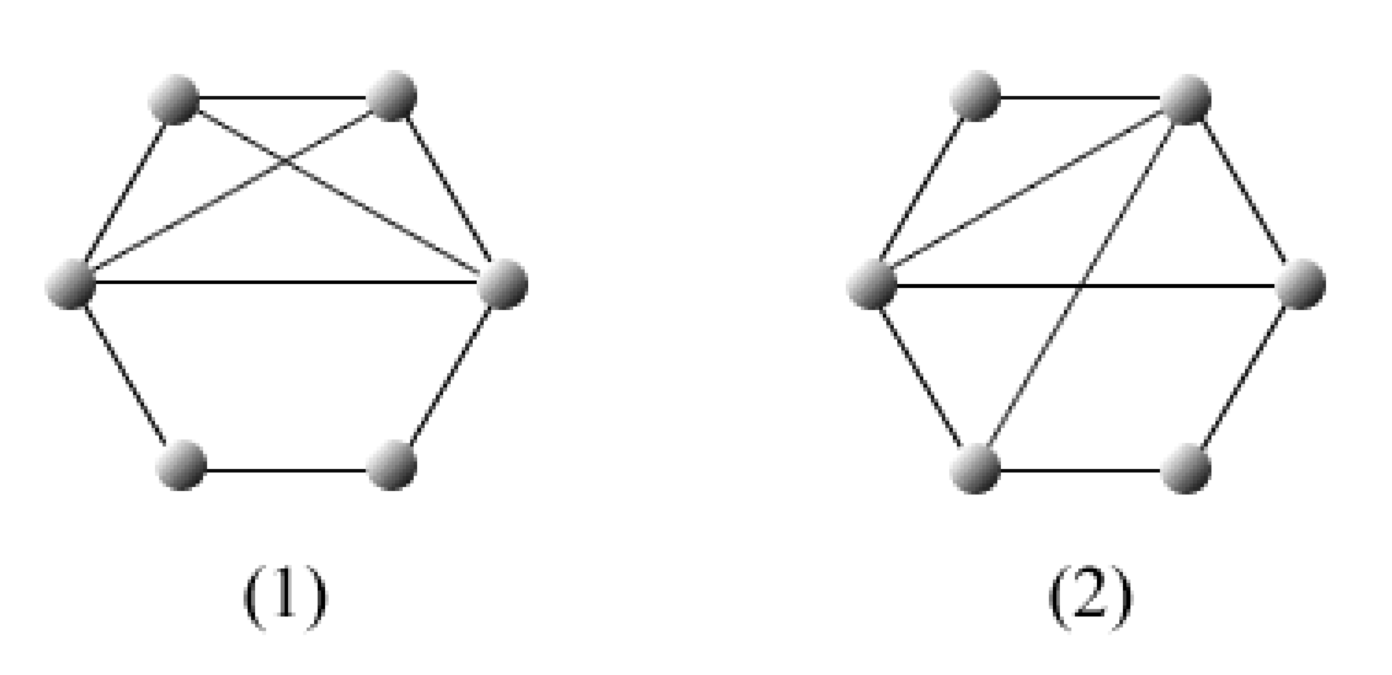
是图序列，但不是简单图序列。原因?

虽然有判断一个非负整数列是否可简单图化的充要条件，但即使判断能简单图化， 也没有有效的算法计数及构造，但对小规模的数组， 我们可以采用枚举+性质等方式来构造出所有的简单图。

请看下面的例子

(5) (4, 4, 3, 3, 2, 2)

简单图序列。下图中两个6阶无向简单图都以(5)中序列为度数列。



问题： 是否求出了所有的以它为度序列的不同构简单图?

简单图化的算法

一个数列是否可简单图化根据判断条件很容易验证。

判断出可简单图化后也没有给出计数和构造的有效算法。

退而求其次考虑下列问题：

一个非负整数的非增序列$d_1, d_2, \cdots d_n$，如果是简单图序列， 是否有算法来构造一个简单图以它为度序列?

回答： yes. 为什么？

先证明一个性质

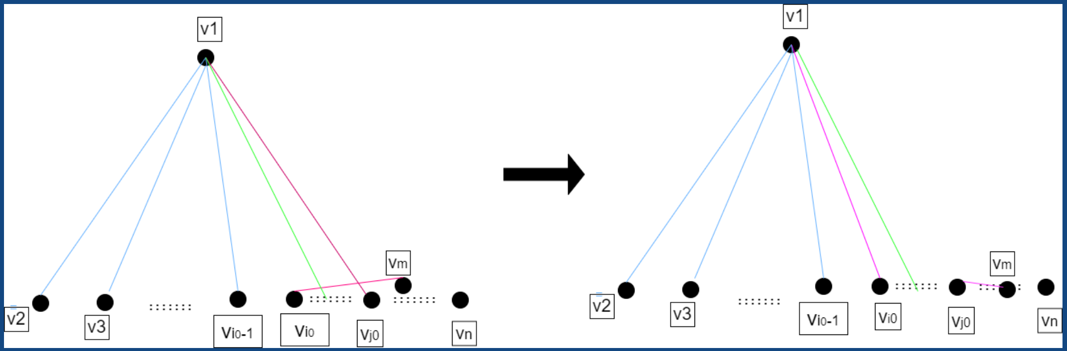
定理：设$\pi=(d_1,d_2,\ldots d_n)$是非负整数的非增序列，π_1是序列 d_2-1， d_3-1 $d_{d1+1}-1$, d_{d1+2}, …, d_n，则π是简单图次序列的充要条件是π_1是简单图次序列。

证明: "$\Leftarrow$" 是显然的。

"$\Rightarrow$" 设G是D对应的简单图，$d(v_i)=d_i$

情形1：点v_1与点$v_2,v_3,\ldots,v_{d1+1}$邻接，则$G-v_1$的度序列正好为 π_1

情形2：点v_1与点v_{d1+2}，….v_n的某些顶点邻接。在这种情况下，作如下假设：设v_1与v_{j0}邻接，但当$k>j_0$时，v_1与v_k不邻接；又设v_1与v_{i0}不邻接，但当$k<i_0$时，v_1与点v_k邻接。其实是v_{j0}与v_1相邻的最大的下标的顶点，v_{i0}是与v_1不相邻的最小下标的顶点。



则在图中，必然存在点v_m，使得v_m与v_{i0}邻接，但是它与v_{j0}不邻接，否则，有$d_{j0} \geq d_{i0}+1$,矛盾！

现在，在图中去掉边v_1v_{j0}和$v_{i0}v_m$,加上边$v_{j0}v_m$和v_1v_{i0},显然新图与原图度序列相同，但j_0减小了，i_0增大了！

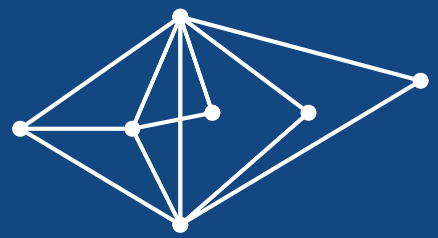
如此进行下去，最后可以变为情形1。

例 $\pi=(6,5,4,3,2,2,2)$ 是否为简单图序列？如果是，作出对应的一个简单图。

解：$\pi_1=(4,3,2,1,1,1)$

$\pi_2=(2,1,0,0,1)$

由于 $\pi_2=(2,1,0,0,1)$ 是简单图序列，所以原序列是简单图序列。



- 根据判断定理和性质设计构造一个简单图的算法：

1）先根据判断定理判断这个非负整数序列是否可图化

2）如果是， 根据性质设计构造出一个简单图以它为度序列

作业：P25T36（b）

- 解决了我们前面提到的构造问题么？

✓ 这仅仅解决了部分问题。只给出了一个简单图化，并不能画出所有不同构的简单图。

✓ 计数问题仍然没解决。

这节课就是解决P25T34,35,36.充分体现了图论课本的特点：定理就是题目， 题目就是定理

(二)、图运算

- 在图论中，将两个或更多的图按照某种方式合并，或者对一个图作某种形式的操作，可以得到很有意义的新图。将图合并 或对一个图进行操作，称为图运算。
- 图运算形式很多，如删点、删边、收缩边。
- 图论的定理性质的证明中常用到图运算。

∵ 1、图的删边、删点运算

定义 1 设$G=<V,E>$为无向图。

(1)设$e\in E$，用G-e表示从G中去掉边e，称为删除e。

设$E'\subset E$，用G-E'表示从G中删除E'中所有的边，称为删除E'。

(2) 设$v\in V$，用G-v表示从G中去掉v及v所关联的一切边，称为删除顶点v。

设$V'\subset V$，用G-V'表示从G中删除V'中所有顶点，称为删除V'。

说明：1）删边只删边，保留顶点，但删点必须删除这个点及与这个点关联的所有边。

2）删边相当于道路网络图中的某条主干道坏了；删点相当于道路网络图的某个十字路口坏掉。

2.图的边收缩、加边运算

定义 2 设$G=<V, E>$为无向图。

(1) 设边$e=(u,v)\in E$，用$G\backslash e$表示从G中删除e后，将e的两个端点u,v用一个新的顶点w(或用u或v充当w)代替，使w关联除e外u,v关联的所有边，称为边e的收缩。

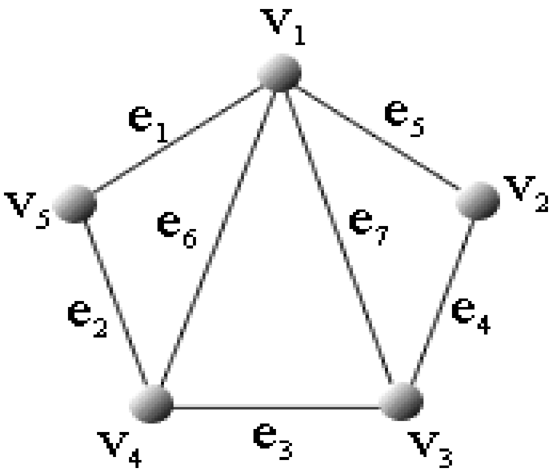
(2) 设$u,v\in V$(u,v可能相邻，也可能不相邻)，用$G\cup(u,v)$（或$G+(u,v)$）表示在u,v之间加一条边(u,v)，称为加新边。

说明 1. 在收缩边和加新边过程中可能产生环和平行边。收缩边时一定会产生环，为了和原图的环区别，一般这个环都不记录。当还原成原图只需记录那些边被收缩了

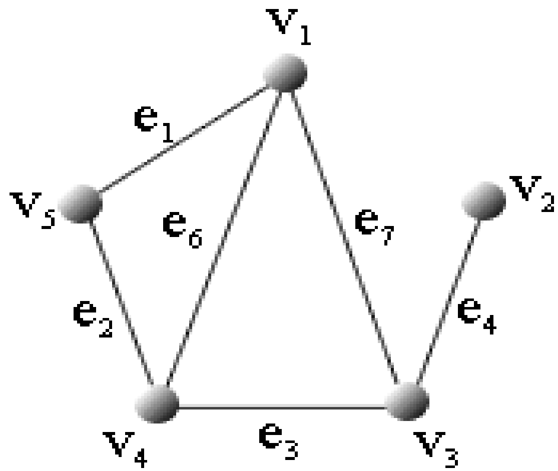
2. 收缩边可理解为收缩有相邻关系的两个点构成的集合。

收缩点集V’?? ----证明有时可能用到

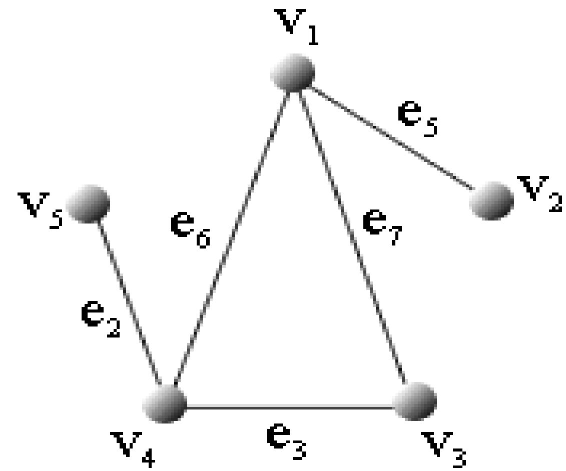
举例



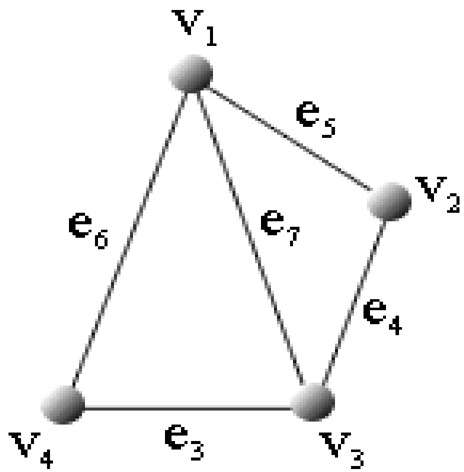
G



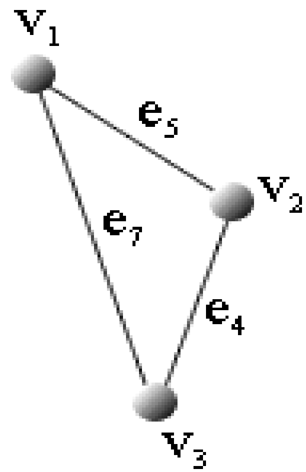
$G-e_5$



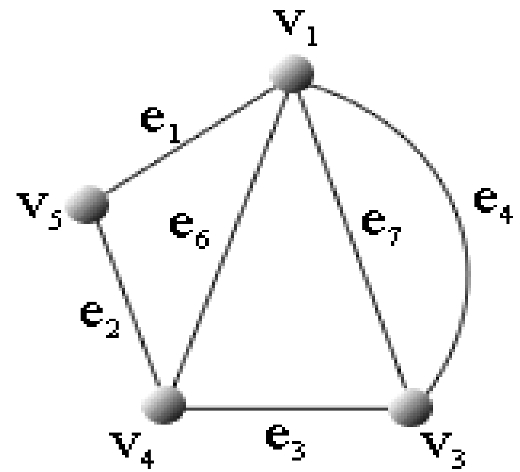
$G-\{e_1, e_4\}$



$G-v_5$



$G-\{v_4, v_5\}$



$G\backslash e_5$

3、图不交、边不交

定义3 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为两个图。

若$V_1\cap V_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是不交的。

若$E_1\cap E_2=\varnothing$，则称G_1与G_2是边不交的或边不重的。

说明：不交的图，必然是边不交的，但反之不真。

4、图的并、差、交、环和

定义4 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）。

(1) 称以$E_1\cup E_2$为边集，以$E_1\cup E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**并图**，

记作$G_1\cup G_2$。

(2) 称以E_1-E_2为边集，以E_1-E_2中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**差图**，记作G_1-G_2。

图的交、环和

定义5 设$G_1=\langle V_1, E_1\rangle$，$G_2=\langle V_2, E_2\rangle$为不含孤立点的两个图（它们同为无向图或同为有向图）。

(1) 称以$E_1\cap E_2$为边集，以$E_1\cap E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**交图**，

记作$G_1\cap G_2$。

(2) 称以$E_1\oplus E_2$为边集（为集合之间的对称差运算），以$E_1\oplus E_2$中边关联的顶点组成的集合为顶点集的图为G_1与G_2的**环和**，记作$G_1\oplus G_2$。

注：

(1) 若$G_1=G_2$，则

$$G_1\cup G_2=G_1\cap G_2=G_1(G_2)$$

$$G_1-G_2=G_2-G_1=G_1\oplus G_2=\varnothing$$

这就是在图的定义中给出空图概念的原因。

(2) 当G_1与G_2边不重时，

$$G_1\cap G_2=\varnothing \qquad G_1-G_2=G_1$$

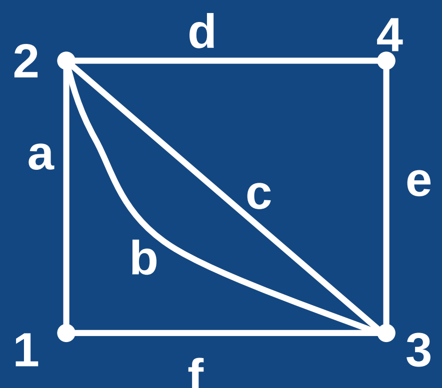
$$G_2-G_1=G_2 \qquad G_1\oplus G_2=G_1\cup G_2$$

(3) 图之间环和的定义也可以用并、交、差给出，即

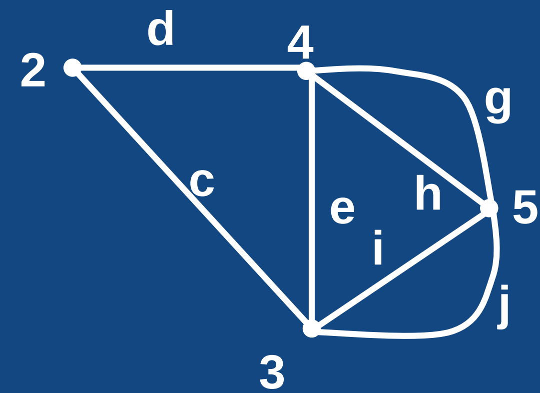
$$G_1\oplus G_2=(G_1\cup G_2)-(G_1\cap G_2)$$

例 已知G_1与G_2，求 $G_1 \cup G_2$ $G_1 \cap G_2$ $G_1 - G_2$ $G_2 - G_1$

$G_1 \oplus G_2$

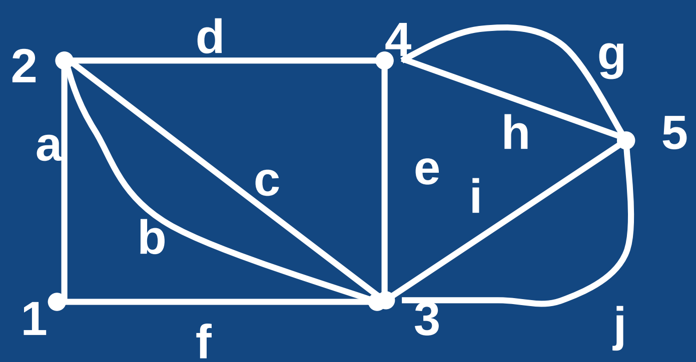


G_1

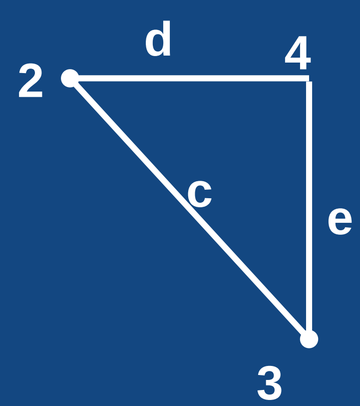


G_2

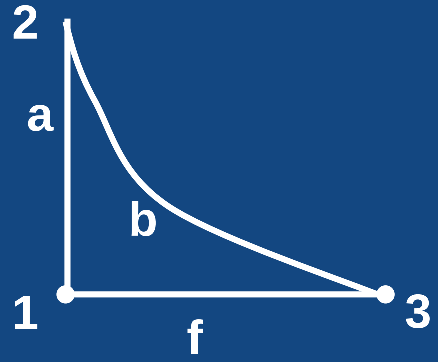
解：由相应运算定义得下面结果：



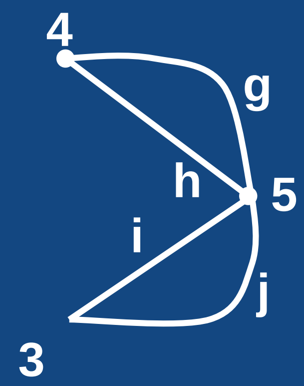
$G_1 \cup G_2$



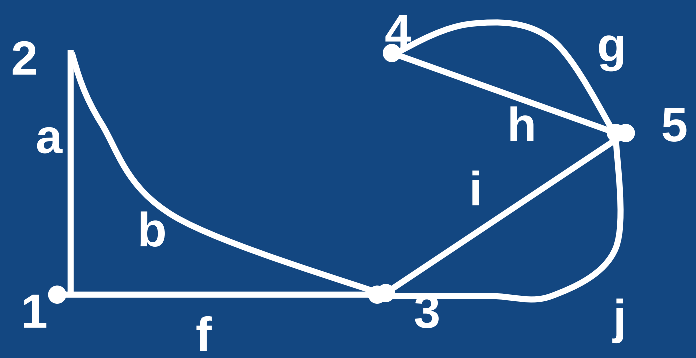
$G_1 \cap G_2$



$G_1 - G_2$



$G_2 - G_1$



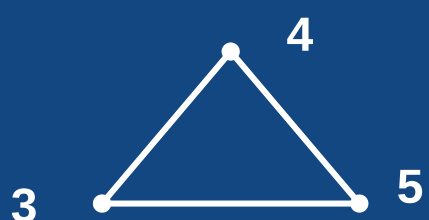
$G_1 \oplus G_2$

5、图的联运算

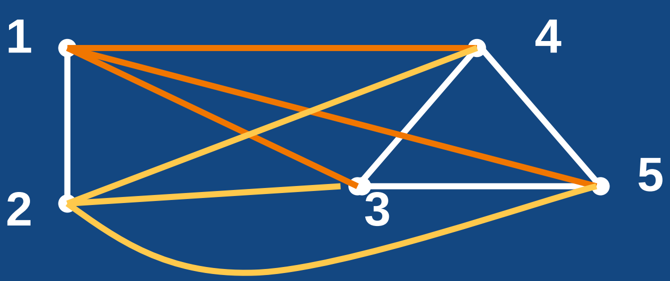
设G_1,G_2是两个不相交的图，作$G_1 \cup G_2$，并且将G_1中每个顶点和G_2中的每个顶点连接，这样得到的新图称为G_1与G_2的联图。记为：$G_1 \vee G_2$

例 已知G_1与G_2，求 $G_1 \vee G_2$

G_1



G_2



$G_1 \vee G_2$