Classe I.I.1: Recherche Opérationnelle.
Série Programmation Linéaire

Exercice 1

Un atelier peut fabriquer trois types d'articles:

- Article A_1 à la cadence de 35 pièces à l'heure
- Article A_2 à la cadence de 45 pièces à l'heure
- Article A_3 à la cadence de 20 pièces à l'heure

Cette fabrication utilise une machine-outil unique, disponible 200 heures par mois. Le bénéfice unitaire pour l'article A_1 est de 60 dinars, pour A_2 est de 40 dinars et pour A_3 est de 80 dinars.

Ces articles sont vendus en totalité à des grossiste. On a observé qu'on ne pouvait écouler, par mois, plus de 4900 pièces de types A_1,ni plus de 5400 pièces du type A_2,ni plus de 2000 pièces du type A_3. D'autre part, chaque pièce doit être vérifiée avant sa commercialisation. Une équipe de trois techniciens est chargée de cette mission. Chaque technicien travaille 170 heures par mois. La vérification d'une pièce du type A_1 prend 4 minutes, du type A_2 prend 3 minutes et du type A_3 prend 2 minutes.

1) Formuler un modèle donnant un plan de production qui maximise le profit de l'entreprise.

2) Mettre le modèle obtenu sous forme standard.

Exercice 2

On désire déterminer la composition, à coût minimal, d'un aliment pour bétail qui est obtenu en mélangeant au plus trois produits bruts: orge, arachide et sésame. L'aliment ainsi conditionné devra comporter au moins 22% de protéines et $3,6\%$ de graisses, pour se conformer aux exigences de la clientele.

Dans le tableau ci-dessous, on indique les pourcentages de protéines et de graisses contenus, respectivement, dans l'orge, les arachides et le sésame, ainsi que le coût par tonne de chacun des produits bruts:

produit brut	orge	arachides	sésame
pourcentage de protéines	12%	52%	42%
pourcentage de graisses	2%	2%	10%
coût par tonne	25	41	39

Afin de déterminer la composition, à coût minimal, d'un tonne d'aliment conforme aux exigences de la clientèle, donner une formulation du problème posé sous forme d'un programme linéaire.

Exercice 3

Une compagnie X s'est vue attribuer la tâche de préparer un portefeuille d'investissement pour une société industrielle. Les fonds disponibles représentent un montant de 250 000 dolars. L'analyse financier de la compagnie à retenu 6 possibilités d'investissements réparties dans l'industrie du pétrole, l'industrie de l'électronique et l'industrie pharmaceutique. Les diverses sociétés dans les quelles on désire investir et les rendements anticipés sont présentés dans le tableau ci-après.

Société	Secteur d'activités	Rendement anticipé (%)
Simco	Pétrole	$09,35$
Plurimax	Pétrole	$08,00$
Microtel	Electronique	$10,90$
CAX Electronique	Electronique	$07,80$
Biomed	pharmaceutique	$09,60$
Cronex	pharmaceutique	$08,50$

Les directives suivante ont été émises:

1. Les investissements dans le secteur pharmaceutique devrait représenter au moins 30% des investissements dans le secteur électronique.

2. Aucun secteur d'activités ne devrait se voir allouer plus de 55% des fonds disponibles.

3. Bien que la société électronique Microtel présente un rendement anticipé élevé, on veut limiter le montant investi dans cette société, à cause de son risque élevé, à 60% des investissements dans le secteur électronique.

4. On a demandé également à la compagnie X d'investir au moins 15 000 dolars dans l'industrie pétrolière.

L'objectif de l'analyste financier de la compagnie X est de maximiser le rendement anticipé.

Formuler le modèle de programmation linéaire qui permettrait à l'analyste financier de lui suggérer une stratégie de placement tout en respectant les directives mentionnées.

Exercice 4
Une importante entreprise d'appareils électroniques dispose de trois usines à différents endroits au pays. La production annuelle de chaque unsine pour un certain type d'appareils est la suvante:

Usine	Production annuelle
U-1	15 000 unités
U-2	12 000 unités
U-3	23 000 unités

Ces usines alimentent quatre points de vente dont la demande annuelle est la suivante:

Points de vente	Demande annuelle
A	10 000 unités
B	5 000 unités
C	20 000 unités
D	15 000 unités

Les coûts unitaires de transport de chaque usine à chaque point de vente sont indiqués dans le tableau suivant:

	A	B	C	D
U-1	5	6	6	8
U-2	11	9	4	7
U-3	12	7	8	5

Formuler le modèle de programmation linéaire qui permettrait d'obtenir un plan de transport à coût minimum.

Exercice 5
On considère le programme linéaire suivant:

$$(PL)\begin{cases} Max\ z = 5x_1 + x_2 + 6x_3 + 24x_4 \\ \text{Sous-Contraintes:} \\ 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + x_4 \leq 24 \\ 8x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 36 \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., 4 \end{cases}$$

a- Ecrire (PL) sous forme standard, les variables d'écart seront nomées x_5 et x_6.
b- soit $B = (A_3, A_4)$. Cette base est-elle réalisable? est-elle optimale?

Exercice 6
On considère le programme linéaire suivant:

$$(P.L) \begin{cases} \max z = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \\ \text{Sous Contraintes:} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 430 \\ 3x_1 + 2x_3 + x_5 = 460 \\ x_1 + 4x_2 + x_6 = 420 \\ x_j \geqslant 0, j = 1, ..., 6 \end{cases}$$

1) Montrer que la solution : $X = (0, 0, 230, 200, 0, 420)$ est une solution de base réalisable du programme linéaire $(P.L)$.
2) Donner le tableau du simplexe correspondant à cette solution de base.
3) Le tableau obtenu est-il optimal? Justifier votre réponse.

Exercice 7
On considère le programme linéaire suivant:

$$\text{P.L} \begin{cases} Max\ z = 25x_1 + 15x_2 \\ \text{Sous-Contraintes:} \\ 2x_1 + 2x_2 \leq 240 \\ 3x_1 + x_2 \leq 140 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2 \end{cases}$$

a- Représenter l'ensemble des solutions admissibles.
b- Localiser toutes les solutions de base réalisables.
c- Calculer la valeur de la fonction coût Z en chacun de ces points et donner la solution optimale.
d- Effectuer une résolution graphique de ce problème.

Exercice 8

On considère le programme linéaire suivant:

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = 15x_1 + 40x_2 + 12x_3 \\ \text{Sous-Contraintes :} \\ 6x_1 + 10x_2 + 2x_3 \leq 60 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 \leq 140 \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

Résoudre le programme linéaire à l'aide de la méthode des tableaux du simplexe.

Exercice 9

On considère le programme linéaire suivant:

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = x_1 + 2x_2 \\ \text{Sous-Contraintes :} \\ -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \\ x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1,2 \end{cases}$$

1) Tenter de résoudre ce programme linéaire à l'aide de la méthode du simplexe.
2) Faire une résolution graphique.

Exercice 10

On considère les programmes linéaires suivants:

$$(PL)\begin{cases} \max\ z = 3x_1 + 4x_2 + x_3 \\ \text{Sous-Contraintes :} \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq \frac{8}{3} \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq \frac{7}{3} \\ x_j \geq 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

Résoudre (PL) à l'aide de la méthode des deux phases.

Exercice 11
Donner le programme dual de chaque programme linéaire.

$$\mathrm{P}_1 \begin{cases} \text{Max z} = 15x_1 + 40x_2 + 12x_3 \\ \text{Sous-Contraintes:} \\ 6x_1 + 10x_2 + 2x_3 + x_4 = 60 \\ 2x_1 + 10x_2 + 6x_3 + x_5 = 140 \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., 5 \end{cases} \quad \Bigg| \quad \mathrm{P}_2 \begin{cases} \text{Max z} = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 \\ \text{Sous-Contraintes:} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 16 \\ 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 25 \\ x_j \geq 0, j = 1, ..., 3 \end{cases}$$

Exercice 12
Résoudre, à l'aide de l'algorithme dual simplexe, le programme linéaire suvant:

$$(PL) \begin{cases} \text{Min z} = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ \text{Sous-Contraintes:} \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 6 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$

Exercice 13
On considère le programme linéaire suivant:

$$(P.L) \begin{cases} Min\ z = 2x_1 + 3x_2 \\ Sous - Contraintes : \\ 4x_1 + x_2 \geq 8 \\ x_1 + 4x_2 \geq 8 \\ 7x_1 + 10x_2 \geq 47 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \end{cases}$$

1- Donner le programme dual de P.L.
2- Donner une solution initiale évidente du programme dual.
3- Résoudre le programme dual à l'aide de la méthode du tableau de simplex.
4- Donner le tableau optimal du programme primal à l'aide du tableau optimal dual.
5-Résoudre le programme P.L à l'aide de la méthode dual du simplex.

Exercice 14

On considère le programme linéaire suivant:

$$(PL)\begin{cases} \max\ Z = 6x_1 + 5x_2 \\ sous - contraintes \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0; i = 1, 2 \end{cases}$$

1- Donner une résolution graphique de ce programme linéaire.
2- Soit un modèle de programmation linéaire qui doit être appliqué régulièrement mais dont certains coefficients varient d'une application à l'autre. Prenons le cas où les coefficients de la fonction coût Z varient en fonction d'un facteur extérieur (prix d'une matière première, taux d'intérêt, indice des prix,...etc). Ce phénomène peut être modélisé par un paramètre intervenant dans ces coefficients.
En introduisant un paramètre λ dans la fonction coût Z, le programme linéaire (PL) s'écrit:

$$(PL)\begin{cases} \max\ Z = (6 - 2\lambda)x_1 + (5 + \lambda)x_2 \\ sous - contraintes \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ -2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ x_i \geq 0; i = 1, 2 \end{cases}$$

a- Résoudre ce programme linéaire suivant les valeurs de λ.
b- Parmi les solutions réalisables trouvées dans la première question, quelles sont celles qui ne sont jamais solutions optimales.
c- Pour quelles valeurs de λ, le programme linéaire (PL) admet une infinité de solutions optimales?