L. Budin

ANALIZA I PROJEKTIRANJE RAČUNALOM

skripta s predavanjima

Zagreb, 2002.

1. UVOD

Vjerojatno je najšire prihvaćena definicija inženjerskog projektiranja američke organizacije ABET (Accreditation Board for Engineering and Technology) ona glasi:

" Inženjersko projektiranje je proces zasnivanja sustava , komponente ili procesa usklađenog sa željenim potrebama. To je proces donošenja odluka (često iterativan) u kojem se prirodne znanosti (engl. basic sciences), matematika i tehničke znanosti (engl. engineering sciences) primjenjuju za optimalnu pretvorbu zaliha (engl. resources) u skladu s postavljenim zahtjevima. Temeljna počela procesa projektiranja jesu:

- postavljanje zahtjeva i kriterija ,
- sinteza ,
- analiza ,
- konstrukcija
- ispitivanje i
- vrednovanje .

Najznačajnije u tom procesu su suštinske i komplementarne uloge sinteze i analize. "

Matematika i prirodne znanosti su izrazito zastupljene u inženjerskom djelovanju, ali treba uočiti da tehničke znanosti imaju svoju vlastitu paradigmu.

U području matematike paradigma djelovanja zasniva se na slijedeća četiri koraka:

- opisu objekta studiranja (definicija),
- postavljanju hipoteze o odnosima između tih objekata (teorem),
- ustanovljenju istinitosti tih odnosa (dokaz),
- interpretaciji rezultata.

Matematičari iteriraju te korake kada se ustanovi pogreška ili nekonzistentnost.

U prirodnim znanostima koristi se eksperimentalni pristup u istraživanju nekog fenomena i sastoji se od slijedećih koraka:

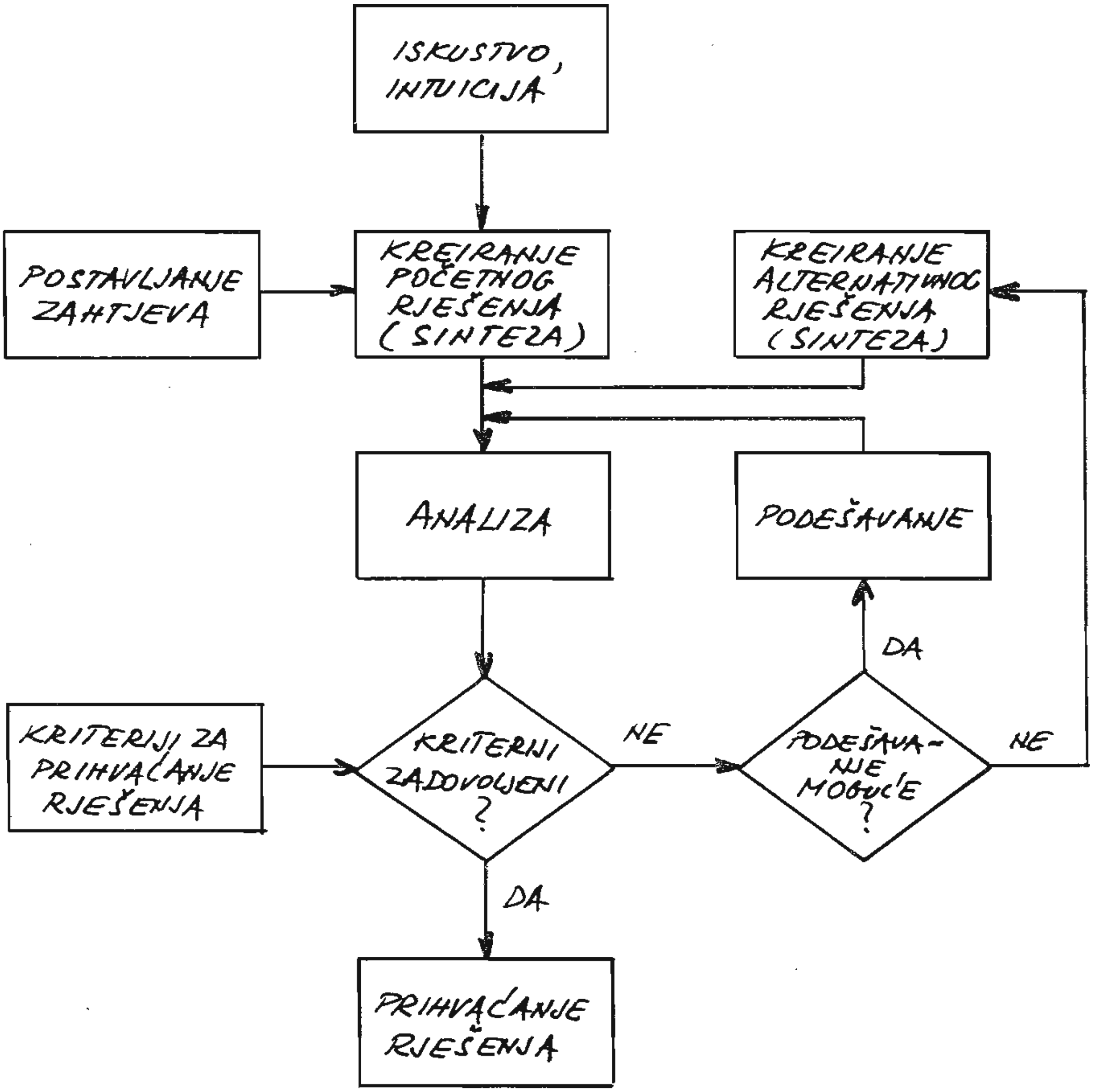
- uspostavljanja hipoteze,
- konstrukcije modela i predviđanja njegova ponašanja,
- postavljanja eksperimenta i prikupljanja podataka iz tog eksperimenta,
- te analize rezultata.

U tom kulturnom okruženju znastvenici iteriraju te korake kada se ustanovi neslaganje između predviđenog ponašanja i rezultata eksperimenta.

Treća paradigma, koja se pretežito njeguje u području tehničkih znanosti sastoji se iz slijedećih koraka:

- postavljanje zahtjeva,
- specifikacija
- projektiranja i izgradnje
- ispitivanje.

Inženjersko projektiranje svodi se na iteriranje ta četiri koraka kada se ustanovi neslaganje postignutog rezultata s postavljenim zahtijevima.


ISKUSTVO, INTUICIJA
POSTAVLJANJE ZAHTJEVA
KREIRANJE POČETNOG RJEŠENJA (SINTEZA)
KREIRANJE ALTERNATIVNOG RJEŠENJA (SINTEZA)
ANALIZA
PODEŠAVANJE
DA
KRITERIJI ZA PRIHVAĆANJE RJEŠENJA
KRITERIJI ZADOVOLJENI ?
NE
PODEŠAVANJE MOGUĆE ?
NE
DA
PRIHVAĆANJE RJEŠENJA

2. POGREŠKE U POSTUPCIMA ANALIZE

2.1. Mogući uzroci pogrešaka

U načelu postoje tri uzroka pogrešaka:

- matematički model ne opisuje vjerno modeliranu pojavu i (ili) ulazni podaci nisu točni;
- metoda rješavanja nije točna, zasniva se na aproksimacijama;
- pogreške zaokruživanja zbog ograničenog broja znamenaka pri zapisivanju brojeva i računanju s brojevima.

Vjernost modela ovisi o području primjene i mogućnosti spoznaje i opisa problema.

Primjerice:

- modeli tranzistora samo približno opisuju njegovo ponašanje;
- matematičko njihalo opisuje se diferencijalnom jednadžbom

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g \sin\varphi = 0$$

i uz $\varphi << $

$$l \frac{d^2\varphi}{dt^2} + g\varphi = 0$$

Taj tip pogreške povezan je s odabirom modela u pojedinim područjima primjene.

Drugi tip pogrešaka potiče od aproksimacija u numeričkim postupcima.

Npr.

- $$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

  Ako se e^x izračunava s n članova reda, ostatak određuje pogrešku

- diferencijalni kvocijent se može nadomjestiti kvocijentom diferencija

  $$\frac{dx}{dt} \doteq \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

  i pritom čini tzv. pogrešku diskretizacije.

Taj tip pogreška ovisi o odabranom numeričkom postupku i razmotrat će se za svaki postupak **posebice**

Pogreške zaokruživanja nastaju zbog toga što se ulazni podaci i međurezultati <u>ne mogu</u> točno zapisati

2.2. Prikaz brojeva s pomičnom točkom

Baza β

Preciznost p

Raspon eksponenata

e_{max} najveći eksponent

e_{min} najmanji eksponent

Prikaz:

$$\pm \underbrace{(d_0 + d_1\beta^{-1} + d_2\beta^{-2} + \dots + d_{p-1}\beta^{-(p-1)})}_{\text{signifikand}} \cdot \beta^{\overbrace{e}^{\text{eksponent}}}$$

$0 \leq d_i < \beta$

Postoji:

- β^p različitih signifikanada
- $e_{max} - e_{min} + 1$ različitih eksponenata
- dvije vrijednosti predznaka

Time je određen skup A brojeva s pomičnom točkom

Za kodiranje brojeva iz skupa A potreban je sljedeći broj bitova:

$$\lceil \log_2(\beta^p) \rceil + \lceil \log_2(e_{max} - e_{min} + 1) \rceil + 1$$

Normalizirani broj s pomičnom točkom ima

$d_0 \neq 0$

Primjeri: Broj 0,1 se zapisuje uz

- $\beta = 10$
  $p = 3$ 1.00×10^{-1}

- $\beta = 2$
  $p = 24$ $1.10011001100110011001101 \times 2^{-4}$

IEEE Standard 754

IEEE - Institute of Electrical and Electronic Engineers

Standard propisuje način zapisivanja brojeva. Pojedine komponente broja zapisuju se ovako:

- $\beta = 2$
- predznak $\pm$ zapisuje se u najljeviji bit

  \+ vrijednost 0

  \- vrijednost 1
- Slijedeće polje bitova služi za zapisivanje eksponenta e i to s k bitova u kôdu s posmakom $2^{k-1} - 1$

Kôd s pomakom :

- k bitova se pročita kao binarni broj i od toga oduzme $2^{k-1}-1$
- posebno se razmatra sadržaj kada su svi bitovi jednaki 1 (tj. očitanje je 2^k-1) i kada su svi bitovi jednaki 0

- Normirani signifikand ima samo jednu znamenku lijevo od binarne točke i ima uvijek vrijednost 1 (samo iznimno ona ima vrijednost 0)

Tako je $\quad s = 1.f$

i iznimno $\quad s = 0.f$

Dovoljno je zapisati vrijednost razlomljenog dijela f (engl. fraction).

Drugim riječima s m bitova se zapisuje signifikand koji ima $m+1$ bitova.

U IEEE standardu osnovna su dva formata:

- brojevi jednostruke preciznosti s 32 bita
- brojevi dvostruke preciznosti s 64 bita

jednostruka preciznost

31	30 … 23	22 … 0
z	e	f

dvostruka preciznost

63	62 … 52	51 … 0
z	e	f

Jednostruka preciznost

- 1 bit za predznak — z
- 8 bitova za eksponent — e
- 23 bitova za razlomljeni dio signifikanda — f

vrijednost eksponenta e	vrijednost f	zapisani broj	objašnjenje
$00000000_2 = 0$	$f = 0$	$(-1)^z \times 0$	pozitivna ili negativna nula
$00000000_2 = 0$	$f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{-126} \times (0.f)$	denormirani signifikand
$0 < e < 255$	$f = 0$ ili $f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{e-127} \times (1.f)$	normalne vrijednosti
$11111111_2 = 255$	$f = 0$	$(-1)^z \times \infty$	pozitivno ili negativno beskonačno
$11111111_2 = 255$	$f \neq 0$	NaN	nije broj

NaN – Not a Number $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \sqrt{-1}, \infty + (-\infty) \right)$

$(-1)^0 = 1$, $(-1)^1 = -1$

Primjer:

Pretpostavimo format zapisa s okupno 8 bitova:

- 1 bit za predznak z
- 3 bita za eksponent e
- 4 bita za razlomljeni dio signifikanda f

vrijednost eksponenta e	vrijednost f	zapisani broj	objašnjenje
$000_2 = 0$	$f=0$	$(-1)^z \times 0$	pozitivna ili negativna nula
$000_2 = 0$	$f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{-2} \times (0.f)$	denormirani signifikand
$0 < e < 7$	$f=0$ ili $f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{e-3} \times (1.f)$	normalne vrijednosti
$111_2 = 7$	$f=0$	$(-1)^z \times \infty$	pozitivno ili negativno beskonačno
$111_2 = 7$	$f \neq 0$	NaN	nije broj

z	e	f		
0	000	0000	$(+1) \times 0$	nula
0	000	0001	$(+1) \times 2^{-2} \times 0.0625 = +0.015625$	denormirano
0	000	0010	$(+1) \times 2^{-2} \times 0.125 = +0.03125$	
0	000	1111	$(+1) \times 2^{-2} \times 0.9375 = +0.234375$	
0	001	0000	$(+1) \times 2^{-2} \times 1.0 = +0.25$	
0	001	0001	$(+1) \times 2^{-2} \times 1.0625 = +0.265625$	
0	001	1111	$(+1) \times 2^{-2} \times 1.9375 = +0.48425$	
0	110	0000	$(+1) \times 2^{3} \times 1.0 = +8.0$	
0	110	0001	$(+1) \times 2^{3} \times 1.0625 = +8.5$	
0	110	1111	$(+1) \times 2^{3} \times 1.9375 = +15.5$	najveći broj koji se može zapisati
0	111	0000	$(+1) \times \infty = +\infty$	beskonačno
0	111	0001	NaN	nije broj
0	111	1111	NaN	nije broj

Uz $z = 1$ dobivaju se negativni brojevi

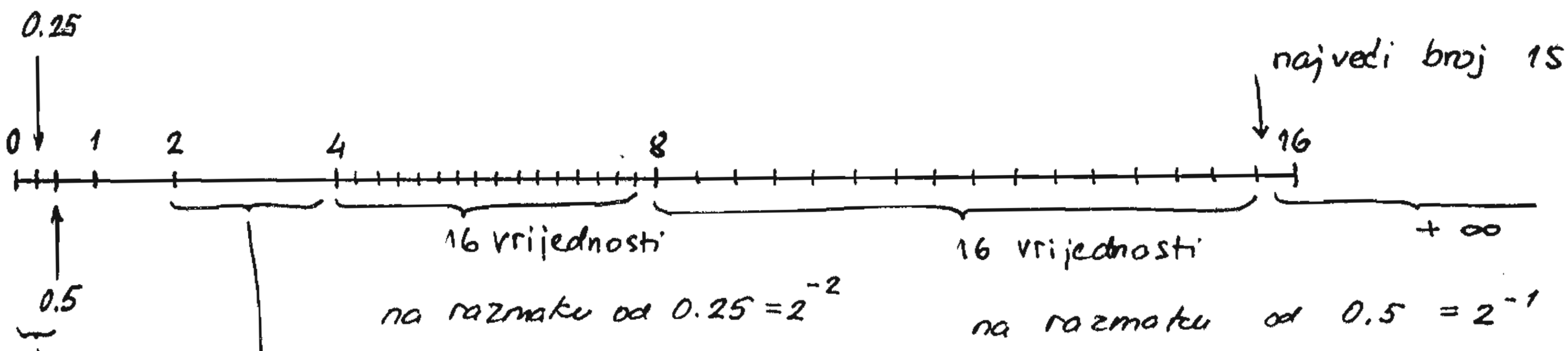
Dvostruka preciznost

1 bit za predznak z
11 bitova za eksponent e
52 bita za razlomljeni dio signifikanda f

Vrijednost eksponenta e	Vrijednost f	zapisani broj	Objašnjenje
0	$f = 0$	$(-1)^z \times 0$	pozitivna ili negativna nula
0	$f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{-1022} \times (0.f)$	denormirani signifikand
$0 < e < 2047$	$f = 0$ ili $f \neq 0$	$(-1)^z \times 2^{e-1023} \times (1.f)$	normalne vrijednosti
2047	$f = 0$	$(-1)^z \times \infty$	pozitivno ili negativno beskonačno
2047	$f \neq 0$	NaN	nije broj

Standard propisuje i detalje obavljanja pojedinih operacija i zastavice za signaliziranje nenormalnih pojava ili netočnih rezultata, kao npr.

- dijeljenje s nulom
- nastanak preliva (rezultat je veći od mogućnosti zapisa
- rezultat nije broj (NaN)
- nastanak podliva (rezultat je premalen i ne može se zapisati



na razmaku od $0.25 = 2^{-2}$

na razmaku od $0.5 = 2^{-1}$

16 vrijednosti na razmaku od 2^{-3}

2 x 16 vrijednosti na razmaku od 2^{-6}

[8, 16)

apsolutna pogreška $0.5 = 2^{-1}$

relativna pogreška $\frac{0.5}{8} = \frac{2^{-1}}{2^{3}} = 2^{-4}$

ili: $\frac{0.5}{16} = \frac{2^{-1}}{2^{4}} = 2^{-5}$

[4, 8)

apsolutna pogreška $= 0.25 = 2^{-2}$

relativna pogreška $= \frac{0.25}{4} = \frac{2^{-2}}{2^{2}} = 2^{-4}$

ili: $\frac{0.25}{8} = \frac{2^{-2}}{2^{3}} = 2^{-5}$

[0.25, 0.5)

apsolutna pogreška $= 2^{-6}$

relativna pogreška $= \frac{2^{-6}}{0.25} = \frac{2^{-6}}{2^{-2}} = 2^{-4}$

ili: $\frac{2^{-6}}{0.5} = \frac{2^{-6}}{2^{-1}} = 2^{-5}$

2.3. Pogreške zaokruživanja

Skup A brojeva s pomičnom točkom je ograničen.

Postavlja se pitanje kako beskonačni skup R realnih brojeva preslikati u A.

$x \in R$ točna vrijednost

$rd(x) \in A$ „strojna" vrijednost s pomičnom točkom

$rd : R \to A$

Zaokruživanje se provodi tako da je

$|x - rd(x)| \leq \frac{1}{2}$ vrijednosti zadnjeg prikazanog mjesta

U dekadnom zapisu

$x = a \cdot 10^e$ $e_{min} \leq e \leq e_{max}$

$rd(x) = sign(x) \cdot a' \cdot 10^e$ $0 \leq d_i \leq 9$

$d_0 \neq 0$

$|a| = d_0 . d_1 d_2 \cdots d_{p-1} d_p d_{p+1} \cdots$

$$a' = \begin{cases} d_0 . d_1 d_2 \ldots d_{p-1} & \text{za } 0 \leq d_p \leq 4 \\ d_0 . d_1 d_2 \ldots d_{p-1} + 10^{-(p-1)} & \text{za } d_p \geq 5 \end{cases}$$

U binarnom zapisu

$$x = a \cdot 2^e$$

$e_{min} \leq e \leq e_{max}$

$0 \leq d_i \leq 1$

$d_0 = 1$

$$rd(x) = \text{sign}(x) \cdot a' \cdot 2^e$$

$$|a| = d_0 . d_1 d_2 \dots d_{p-1} d_p d_{p+1} \dots$$

$$a' = \begin{cases} d_0 . d_1 d_2 \dots d_{p-1} & \text{ako je } d_p = 0 \\ d_0 . d_1 d_2 \dots d_{p-1} + 2^{-(p-1)} & \text{ako je } d_p = 1 \end{cases}$$

Apsolutna pogreška

$$| rd(x) - x |$$

Maksimalna apsolutna pogreška

$$| rd(x) - x | \leq \underbrace{0.00 \dots 0}_{p} \underset{\uparrow \atop \frac{\beta}{2}}{d'} \times \beta^e =$$

$$= \frac{\beta}{2} \cdot \beta^{-p} \cdot \beta^e = \frac{1}{2} \underbrace{\beta^{-(p-1)} \cdot \beta^e}_{ulp}$$

ulp - units in the last place

jedinica zadnjeg mjesta

Relativna pogreška

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right|$$

koji broj x ?

$$x_{min} = \underbrace{1.00\ldots0}_{p} \times \beta^e = \beta^e$$

$$x_{max} = \delta.\delta\delta\ldots\delta \times \beta^e \doteq \beta \cdot \beta^e$$

$$\delta = \beta - 1$$

$$\frac{\frac{3}{2} \cdot \beta^{-p} \cdot \beta^e}{\beta \cdot \beta^e} \leq \left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \frac{\frac{\beta}{2} \cdot \beta^{-p} \beta^e}{\beta^e}$$

$$\frac{1}{2} \beta^{-p} \leq \left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \frac{\beta}{2} \cdot \beta^{-p}$$

$$\frac{1}{2} \beta^{-p} \leq \left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{2} \beta^{-(p-1)}}_{eps \quad (\varepsilon)}$$

$$eps = \frac{1}{2} \beta^{-(p-1)}$$

„strojna preciznost"

„strojni epsilon"

uz $\beta = 10$ $\quad eps = 5 \cdot 10^{-p}$

uz $\beta = 2$ $\quad eps = 2^{-p}$

Primjer:

$$\beta = 10$$
$$p = 3$$

$$x = 0.0314159$$
$$rd(x) = 3.14 \times 10^{-2}$$

$$|rd(x) - x| = 0.0000159$$

$$ulp = \beta^{-(p-1)} \times \beta^{e} = 10^{-2} \times 10^{-2} = 10^{-4}$$

$$|rd(x) - x| = 0{,}159\ ulp < 0.5\ ulp$$

Kod ispravno zaokruženih brojeva apsolutna pogreška ne može biti veća od $\frac{1}{2}$ ulp!

$$\left|\frac{rd(x) - x}{x}\right| = \frac{0.0000159}{0.0314159} \doteq 0.0005$$

$$eps = 5 \cdot 10^{-p} = 5 \cdot 10^{-3} = 0.005$$

$$\left|\frac{rd(x) - x}{x}\right| = 0.1\ eps$$

Može se dakle zaključiti da preslikavanje $R \to A$ unosi relativnu pogrešku koja je manja od eps (pisat će se ε), tj.

$$\forall x \in R$$
$$rd: \quad R \to A$$

$$rd(x) = x(1+\varepsilon) \qquad |\varepsilon| \leq eps$$

Primjer:

$$\beta = 10$$
$$p = 3$$

$$eps = 5 \cdot 10^{-3} = 0.005$$

$$x = 12.35$$
$$rd(x) = 1.24 \times 10^{1}$$

$$ulp = 10^{-2} \cdot 10^{1} = 10^{-1}$$

$$|rd(x) - x| = 0.05 = 0.5\, ulp$$

$$\left| \frac{rd(x) - x}{x} \right| = \frac{0.05}{12.35} = 0.00404858 3 =$$

$$\doteq 0.8\, eps$$

ali

$$y = 8x = 98.8$$
$$rd(\tilde{y}) = 8 \cdot rd(x) = 9.92 \times 10^{1}$$
$$rd(y) = rd(8x) = 9.88 \times 10^{1}$$
$$|rd(\tilde{y}) - y| = 0.4 = 4 ulp$$
$$\left| \frac{rd(\tilde{y}) - y}{y} \right| = \frac{0.4}{98.8} = 0.0040485 \doteq 0.8 eps$$

2.4 Aritmetika brojeva s pomičnom točkom

Operacije $+, -, \times, /$ „ne vrijede potpuno".

Npr.

$$x + y = x$$

ne znači da je $y = 0$

već da je

$$|y| < \frac{eps}{\beta} |x|$$

$$x, y \in A$$

U skladu s tim može se definirati eps.

$$eps = \min \{ g \in A \mid 1 + g > 1,\ g > 0 \},$$

tj. eps je jednak najmanjem pozitivnom broju g za koji je

$$1 + g > 1$$

Isto tako, zakoni asocijativnosti i distributivnosti „ne vrijede potpuno"

Primjer:

$\beta = 10$

$p = 8$

$a = 2.3371258 \times 10^{-5}$

$b = 3.3678429 \times 10^{1}$

$c = -3.3677811 \times 10^{1}$

$\boxed{a + (b+c)}$

$b+c$

$$
\begin{array}{r}
3.3678429 \times 10^{1} \\
-\ 3.3677811 \times 10^{1} \\
\hline
0.0000618 \times 10^{1} \\
6.1800000 \times 10^{-4}
\end{array}
$$

$a + (b+c)$

$$
\begin{array}{r}
0.2337126 \times 10^{-4} \\
6.1800000 \times 10^{-4} \\
\hline
6.4137126 \times 10^{-4}
\end{array}
$$

$\boxed{(a+b)+c}$

$a+b$

$$
\begin{array}{r}
0.0000023 \times 10^{1} \\
3.3678429 \times 10^{1} \\
\hline
3.3678452 \times 10^{1}
\end{array}
$$

$(a+b)+c$

$$
\begin{array}{r}
3.3678452 \times 10^{1} \\
-\ 3.3677811 \times 10^{1} \\
\hline
0.0000641 \times 10^{1}
\end{array}
= 6.4100000 \times 10^{-4}
$$

Točan rezultat (ako se operacije provode s proizvoljnim brojem mjesta i na kraju zaokruživanje):

$$a + b + c = 6.41371258 \times 10^{-4}$$

Oduzimanje dvaju brojeva $x, y \in A$ istog predznaka može dovesti do poništavanja vodećih znamenki.

Npr.

$$x = 3.15876 \times 10^2$$
$$y = 3.14289 \times 10^2$$

$$x - y = 0.01587 \times 10^2$$
$$= 1.58700 \times 10^0$$

To samo po sebi nije opasno, ali će se kasnije pokazati da može dovesti do velikih pogrešaka ako su x i y već prethodno računati s pogreškama

Teorem 2.1.

Ako se u sustavu brojeva s pomičnim zarezom s parametrima β i p pri oduzimanju dvaju brojeva razlika koristi p znamenki relativna pogreška rezultata može biti velika $\beta - 1$.

U općem slučaju se dobiva:

$$\left|\frac{\beta^{-p} - \beta^{-(p-1)}}{\beta^{-p}}\right| = \left|\frac{\beta^{-p}(1-\beta)}{\beta^{-p}}\right| = \beta - 1$$

$\square$

Uz $\beta = 2$ relativna pogreška može biti velika

$$\beta - 1 = 2 - 1 = 1,$$

tj. 100% !

To znači da je apsolutna pogreška jednaka rezultatu.

Teorem 2.2.

Ako su x i y pozitivni brojevi s pomičnom točkom u formatu s parametrima β i p, te ako se oduzimanje obavlja s $p+1$ znamenkom (tzv. zaštitnom znamenkom, engl. guard digit) tada je relativna pogreška u rezultatu manja od

$$\left(\frac{\beta}{2} + 1\right) \cdot \beta^{-p} = \left(1 + \frac{2}{\beta}\right) eps \leq 2eps.$$

Dokaz:

Neka bude $x > y$.
(Ako je potrebno može se x i y zamijeniti)
Neka je:

$$x = x_0 . x_1 x_2 \dots x_{p-1} * \beta^{e_x}$$
$$y = y_0 . y_1 y_2 \dots y_{p-1} * \beta^{e_y}$$

Dokaz:

Relativna pogreška iznosa $\beta - 1$ pojavljuje se u slučaju kada je (uz $\beta = 10$)

$$x = 1.00\ldots0$$

$$y = 0.\underbrace{99\ldots9}_{p}$$

točan rezultat: $x - y = 0.\underbrace{00\ldots1}_{p} = 10^{-p}$

Izračunavanje u sustavu brojeva s pomičnom točkom:

$$x = \overbrace{1.00\ldots0}^{p} \times 10^{0}$$

$$y = 9.99\ldots9 \times 10^{-1}$$

$$x = 1.00\ldots0 \times 10^{0}$$

$$y = 0.99\ldots9 \times 10^{0}$$

$$x - y = 0.00\ldots1 \times 10^{0} = 1.00\ldots0 \times 10^{-(p-1)}$$

te je:

$$\left|\frac{10^{-p} - 10^{-(p-1)}}{10^{-p}}\right| = \left|\frac{10^{-p}(1-10)}{10^{-p}}\right| = 9$$

Uz $e_y = e_x$ rezultat je točan

Uz $e_y = e_x - 1$

$$\overbrace{x_0 . x_1 x_2 \ldots x_{p-1}\, 0}^{p+1} \times \beta^{e_x}$$
$$0 . y_0 y_1 \ldots y_{p-2}\, y_{p-1} \times \beta^{e_x}$$

↑ zaštitni bit

Rezultat je „točan", tj. zaokružen na broj s pogreškom eps

Uz $e_y = e_x - k$, $p \geq k > 1$

x $\quad x_0 . x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_{p-1}\, 0 \times \beta^{e_x}$

$\bar{y}$ $\quad 0 . 0\, 0 \ldots y_0 y_1 \ldots y_{p-1-k}\, y_{p-k} \times \beta^{e_x}$

Skalira se s β^{e_x}

$$x = x_0 . x_1 \ldots x_{p-1}$$
$$y = y_0 . y_1 \ldots y_{p-1} \times \beta^{-k}$$

$\beta^{-(p-1)}$ β^{-p} β^{-p-1} β^{-p-k}

$$x = x_0 . x_1 x_2 \ldots x_k x_{k+1} \ldots x_{p-1}\, 0 \mid \ldots 0$$
$$y = 0 . 0\, 0 \ldots y_0 y_1 \ldots y_{p-k-1} y_{p-k} \mid \ldots y_{p-1}$$

$$\bar{y} = 0 . 0\, 0 \ldots y_0 y_1 \ldots y_{p-k-1} y_{p-k} \ldots 0$$

$$y - \bar{y} = y_{p-k+1} \times \beta^{-p-1} + y_{p-k+2} \times \beta^{-p-2} + \ldots + y_{p-1} \times \beta^{-p-k}$$

$$\leq \underbrace{(\beta - 1)}_{\text{najveća znamenka}} (\beta^{-p-1} + \beta^{-p-2} + \ldots + \beta^{-p-k}) =$$

$$= \beta^{-p} - \beta^{-p-k} = \beta^{-p}(1 - \beta^{-k}) < \beta^{-p}$$

Točna vrijednost razlike je $x - y$

Izračunata vrijednost je

$x - \bar{y}$ s pogreškom nakon zaokruženja na p znamenaka

$$|\delta| \leq \frac{\beta}{2}\beta^{-p}$$

Stoga je pogreška

$$|(x-y) - (x-\bar{y} \pm \delta)| = |y - \bar{y} + \delta|$$

Relativna pogreška je

$$\left| \frac{y - \bar{y} + \delta}{x - y} \right|$$

Za $x - y \geq 1$

$$\left| \frac{y - \bar{y} + \delta}{x - y} \right| \leq \left| \frac{x - \bar{y} + \delta}{1} \right| \leq \frac{\beta^{-p} + \frac{\beta}{2}\beta^{-p}}{1} =$$

$$= \beta^{-p}\left(1 + \frac{\beta}{2}\right)$$

Može se pokazati da vrijedi i za $x - y < 1$

2.5. Rasprostiranje pogrešaka

Na temelju primjera iz prethodne točke je vidljivo da dva matematički ekvivalentna postupka:

$$a + (b+c)$$
$$(a+b) + c$$

ne moraju dati iste rezultate.
Tako, dva algoritma, uz $a, b, c \in A$, nisu ekvivalentna:

$x := b+c;$ $\qquad$ $x := a+b;$

$y := a+x;$ $\qquad$ $y := x+c;$

Uvedimo neke oznake:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

ulazne vrijednosti $\qquad$ izlazne vrijednosti

$$\underline{y} = \underline{\varphi}(\underline{x})$$

$$y_j = \varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \qquad j \in [1, m]$$

ili:

$$\varphi : D \to R^m, \qquad D \in R^n$$

$\underline{\tilde{x}}$ aproksimacija za $\underline{x}$

$$\underline{\Delta x} = \underline{\tilde{x}} - \underline{x}$$

ili:

$$\underline{\tilde{x}} = \underline{x} + \underline{\Delta x}$$

$$\Delta x_i = \tilde{x}_i - x_i$$

relativna pogreška

apsolutna pogreška

$$\varepsilon_{x_i} = \frac{\tilde{x}_i - x_i}{x_i} \quad , \text{ uz } x_i \neq 0$$

$$= \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

Razvojem u red i odbacivanjem viših članova dobiva se

$$y_j(\underline{\tilde{x}}) = y_j(\underline{x} + \underline{\Delta x}) \doteq y_j(\underline{x}) + (\underline{\nabla y_j})^t \cdot \underline{\Delta x} + \cdots$$

gdje je

$$\underline{\nabla y_j} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\Delta y_j = y_j(\underline{x} + \underline{\Delta x}) - y_j(\underline{x}) \doteq (\underline{\nabla y_j})^t \cdot \underline{\Delta x}$$

$$\Delta y_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \Delta x_i$$

Ako se svaki sumand pomnoži s $\frac{x_i}{x_i}$ i desna strana s $\frac{y_j}{\varphi_j(\underline{x})}$

$$\Delta y_j = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \cdot \frac{x_i}{x_i} \right) \frac{y_j}{\varphi_j(\underline{x})}$$

$$\frac{\Delta y_j}{y_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi_j(\underline{x})} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_i} \cdot \frac{\Delta x_i}{x_i}$$

$$\varepsilon_{y_j} \doteq \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\varphi_j(\underline{x})} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_i} \cdot \varepsilon_{x_i}$$

Faktor pojačanja pogreške $\qquad S_{y_j}^{x_i} = \frac{x_i}{\varphi_j(\underline{x})} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_i}$

Primjer:

$$y = \varphi(a, b, c) = a + b + c$$

$$\varepsilon_y \doteq \frac{a}{a+b+c} \cdot \varepsilon_a + \frac{b}{a+b+c} \cdot \varepsilon_b + \frac{c}{a+b+c} \cdot \varepsilon_c$$

Za osnovne operacije:
(uz $x \neq 0$, $y \neq 0$)

(1) $\varphi(x,y) = x \cdot y$ $\qquad \varepsilon_{xy} \doteq \varepsilon_x + \varepsilon_y$

(2) $\varphi(x,y) = x/y$ $\qquad \varepsilon_{x/y} \doteq \varepsilon_x - \varepsilon_y$

(3) $\varphi(x,y) = x \pm y$ $\qquad \varepsilon_{x\pm y} \doteq \frac{x}{x\pm y}\varepsilon_x \pm \frac{y}{x \pm y}\varepsilon_y$

(uz $x \pm y \neq 0$)

(4) $\varphi(x) = \sqrt{x}$ $\qquad \varepsilon_{\sqrt{x}} \doteq \frac{1}{2}\varepsilon_x$

Jer je:

(1) $\frac{x_i}{\varphi_j(\underline{x})} \cdot \frac{\partial \varphi_j(\underline{x})}{\partial x_i}$

$$\frac{x}{x \cdot y} \cdot y = 1$$

$$\frac{y}{x \cdot y} \cdot x = 1$$

(2)

$$\frac{x}{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = 1$$

$$\frac{y}{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -1$$

(3)

$$\frac{x}{x \pm y} \cdot 1$$

$$\frac{y}{x \pm y} (\pm 1)$$

(4)

$$\frac{x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Opasno je <u>oduzimanje brojeva.</u>

Ako su brojevi <u>točni</u> (tj. $\epsilon_i = 0$) tada je poništavanje vodećih znamenki benigno.

Maligno ili katastrofalno poništavanje nastaje kada su brojevi pogrešni (tj. $\epsilon_i \neq 0$).

Primjer:

Rješavanje kvadratne jednadžbe

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\text{(A)} \qquad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{(B)} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Neka je

$p = 3$ $\qquad a = 1.22$

$\beta = 10$ $\qquad b = 3.34$

$\qquad c = 2.28$

Točna vrijednost

$$b^2 - 4ac = 0.0292$$

b^2 se zaokružuje na 11.2

$4ac$ se zaokružuje na 11.1

$$b^2 - 4ac = 0.1$$

Ako je $b^2 >> 4ac$, računanje $b^2 - 4ac$ nije opasno, ali je

$$\sqrt{b^2 - 4ac} \doteq |b|$$

pa u izrazima (A) i (B) može doći do poništavanja.

Što činiti?

$$(C) \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}} =$$

$$= \frac{2c}{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

$$(D) \quad x_2 = \frac{2c}{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}$$

Izračunavanje se može načiniti „robustnim" tako da se

uz $b > 0$ koristi (C) i (B)

uz $b < 0$ koristi (A) i (D)

$\square$

Neki numerički algoritam sastoji se od slijeda koraka. U svakom koraku se koristi skup operanada i dobiva skup rezultata

$$\underline{x}^{(i)} = \begin{bmatrix} x_1^{(i)} \\ \\ \\ x_{n_i}^{(i)} \end{bmatrix} \in D_i \qquad D_i \subseteq R^{n_i}$$

$$\varphi^{(i)} : \quad D_i \longrightarrow R^{n_{i+1}}, \quad \text{odnosno} \quad D_i \to D_{i+1} \subseteq R^{n_{i+1}}$$

$$\underline{x}^{(i+1)} = \underline{\varphi}^{(i)}(\underline{x}^{(i)})$$

Slijed koraka daje

$$i = 0, 1, \dots, r$$

$$\varphi = \varphi^{(r)} \circ \varphi^{(r-1)} \circ \dots \circ \varphi^{(0)}$$

$$D_0 = D, \qquad D_{r+1} \subseteq R^m$$

$$\varphi^{(i)} : \quad D_i \to D_{i+1}$$

Primjer:

$$\varphi(a, b, c) = a + b + c$$

Dva algoritma

$$\text{I} \qquad \eta := a + b;$$

$$y := \eta + c;$$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_0} \begin{bmatrix} \eta \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_1} \begin{bmatrix} y \end{bmatrix}$$

II $\quad \eta := b+c$

$\quad\quad y := a+\eta$

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_0} \begin{bmatrix} a \\ \eta \end{bmatrix} \xrightarrow{\varphi_1} [y]$$

Analiza algoritma I

$$\begin{aligned} \eta &= (a+b)(1+\varepsilon_1) \\ \tilde{y} &= (\eta+c)(1+\varepsilon_2) \\ &= \left[(a+b)(1+\varepsilon_1)+c\right](1+\varepsilon_2) \\ &= (a+b+c)\left[1+\frac{a+b}{a+b+c}\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\tilde{y}-y}{y} \\ &= \frac{a+b}{a+b+c}\varepsilon_1(1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2 \end{aligned}$$

uz zanemarenje $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$

$$\begin{aligned} &\doteq \frac{a+b}{a+b+c}\varepsilon_1+\varepsilon_2 \\ &\leq \left(1+\frac{a+b}{a+b+c}\right)\mathrm{eps} \end{aligned}$$

Analiza algoritma II

$$\varepsilon_y \leq \left(1+\frac{b+c}{a+b+c}\right)\mathrm{eps}$$

Primjer za vježbu

Izračunati

$$y = a^2 - b^2$$

Analizirati algoritme

I

$r_1 := a * a;$

$r_2 := b * b;$

$y := r_1 - r_2;$

II

$r_1 := a + b;$

$r_2 := a - b;$

$y := r_1 * r_2;$

3. ALGORITMI ZA MATRICE

3.1. Osnovna svojstva matrica

Matrica je pravokutni poredak brojeva (dvodimenzijski poredak)

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

a_{ij} je element matrice $\underline{A}$

i – indeks retka

j – indeks stupca

Transponirana matrica dobiva se zamjenom redaka i stupaca

$$\underline{A}^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Primjer:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix} \qquad \underline{A}^t = \begin{bmatrix} 10 & 40 \\ 20 & 50 \\ 30 & 60 \end{bmatrix}$$

Vektor je jednodimenzijski poredak

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

x_i element vektora

i – indeks retka

Vektor je jednostupčana matrica, matrica dimenzije $n \times 1$

Transpozicija vektora daje jednorednu matricu

$$\underline{x}^t = [\, x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n \,]$$

Dvodimenzijska matrica $\underline{A}$ dimenzije $n \times m$ može se prikazati po stupcima

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [\, \underline{a}_1 \; \underline{a}_2 \; \underline{a}_3 \cdots \underline{a}_m \,]$$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{n3} \end{bmatrix} \quad \underline{a}_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ a_{3m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

ili po retcima

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{2n} \end{bmatrix} \quad \underline{b}_3 = \begin{bmatrix} a_{31} \\ a_{32} \\ a_{33} \\ \vdots \\ a_{3n} \end{bmatrix} \quad \underline{b}_n = \begin{bmatrix} a_{n1} \\ a_{n2} \\ a_{n3} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1^t \\ \underline{b}_2^t \\ \underline{b}_3^t \\ \vdots \\ \underline{b}_n^t \end{bmatrix}$$

Primjer:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 40 & 50 & 60 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 40 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 20 \\ 50 \end{bmatrix} \quad \underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 30 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{a}_1 & \underline{a}_2 & \underline{a}_3 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b}_1 = \begin{bmatrix} 10 \\ 20 \\ 30 \end{bmatrix} \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1^t \\ \underline{b}_2^t \end{bmatrix}$$

<u>Jedinični vektor</u> $\underline{e}_i$ ima u i-tom retku jedinicu, a u ostalim recima nule

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>Nul-vektor</u> ima sve elemente jednake nuli

$$\underline{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

<u>Nul-matrica</u> ima sve elemente jednake nuli

U primjeni se često pojavljuju <u>kvadratne matrice</u> (dimenzija $n \times n$).

Postoje neke posebno važne kvadratne matrice.

<u>Dijagonalna matrica</u> ima elemente

$$a_{ij} = 0 \qquad \text{za} \quad i \neq j$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

<u>Jedinična matrica</u> je dijagonalna matrica koja na dijagonali ima same jedinice

$$a_{ii} = 1 \qquad a_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

$$\underline{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jedinična matrica sastavljena je od jediničnih vektora

$$\underline{E}_n = [\, \underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \ \underline{e}_3 \ \dots \ \underline{e}_n \,]$$

<u>Permutacijska matrica</u> dobiva se permutacijom jediničnih vektora matrice $\underline{E}$

$$\underline{P} = [\, \underline{e}_{i_1}, \underline{e}_{i_2}, \underline{e}_{i_3}, \dots, \underline{e}_{i_n} \,]$$

gdje $(i_1, i_2, i_3, \dots, i_n)$ jedna od permutacija indeksa $(1, 2, 3, \dots, n)$.

<u>Gornja trokutna matrica</u> $\underline{U}$ ima elemente ispod dijagonale jednake nuli, tj.

$$u_{ij} = 0 \qquad \text{za } i > j$$

$$\underline{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Posebni slučaj gornje trokutne matrice je matrica s $u_{ii} = 1$.

<u>Donja trokutna matrica</u> $\underline{L}$ ima elemente iznad dijagonale jednake nuli, tj

$$l_{ij} = 0 \quad \text{za } i<j$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & l_{nn} \end{bmatrix}$$

Posebni slučaj kada je $l_{ii} = 1$.

<u>Simetrična matrica</u> $\underline{A}$ ima jednake elemente simetrično na dijagonalu

$$a_{ij} = a_{ji}$$

Za simetričnu matricu vrijedi:

$$\underline{A}^t = \underline{A}$$

3.2. Osnovne operacije s matricama

Operacije s matricama određene su operacijama nad njihovim elementima.

Elementi mogu biti: cijeli brojevi, realni brojevi, kompleksni brojevi, prirodni brojevi po modulu nekog prostog broja itd.

Promatrat ćemo operacije nad matricama čiji su elementi cijeli ili realni brojevi.

Zbrajanje matrica

Zbrajati se mogu matrice jednakih dimenzija.

$$\underline{C} = \underline{A} + \underline{B}$$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \qquad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, m \end{array}$$

Nul-matrica je identitet za zbrajanje

$$\underline{A} + \underline{O} = \underline{A}$$
$$\underline{O} + \underline{A} = \underline{A}$$

Zbrajanje je komutativno.

Množenje matrice skalarom

$$\lambda \underline{A} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nm} \end{bmatrix}$$

Uz $\lambda = -1$

$$-1 \cdot \underline{A} = -\underline{A}$$

$$\underline{A} + (-\underline{A}) = \underline{0}$$

Oduzimanje matrica može se svesti na zbrajanje

$$\underline{A} - \underline{B} = \underline{A} + (-\underline{B})$$

Množenje matrica

Množiti se mogu matrice koje su kompatibilne u smislu množenja.

$$\underline{C} = \underline{A} \cdot \underline{B}$$

Broj stupaca matrice $\underline{A}$ mora biti jednak broju redaka matrice $\underline{B}$

$\underline{A}$ dimenzije $n \times m$

$\underline{B}$ dimenzije $m \times p$

$\underline{C}$ dimenzije $n \times p$

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{jk}$$

```
za (I = 1, I++, I ≤ N) {
    za (K = 1, K++, K ≤ P) {
        C[I,K] = 0;
        za (J = 1, J++, J ≤ M)
            C[I,K] = C[I,K] + A[I,J] * B[J,K];
    }
}
```

Za kvadratne matrice $m = n = p$.

Množenje dviju kvadratnih matrica obavlja se s

$$n^3 \text{ množenja},$$
$$\text{i } n^2(n-1) \text{ zbrajanja}.$$

Složenost je prema tome $O(n^3)$.

Jedinična matrica je identitet za množenje

$$\underline{E} \cdot \underline{A} = \underline{A}\underline{E} = \underline{A}$$

Množenje s nul-matricom daje nul-matricu

$$\underline{O} \cdot \underline{A} = \underline{A} \cdot \underline{O} = \underline{O}$$

Množenje nije komutativno, tj.

$$\underline{A} \cdot \underline{B} \neq \underline{B}\underline{A}$$ (osim u specijalnim slučajevima)

Vrijedi:

- asocijativnost zbrajanja i množenja

$$\underline{A} + (\underline{B} + \underline{C}) = (\underline{A} + \underline{B}) + \underline{C}$$
$$A \cdot (\underline{B} \cdot \underline{C}) = (\underline{A} \cdot \underline{B}) \cdot \underline{C}$$

- distributivnost množenja nad zbrajanjem

$$A \cdot (\underline{B} + \underline{C}) = \underline{A} \cdot \underline{B} + \underline{A} \cdot C$$
$$(\underline{B} + \underline{C}) \cdot \underline{D} = \underline{B} \cdot \underline{D} + \underline{C} \cdot \underline{D}$$

Množenje matrice vektorom daje vektor

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m \\ &\vdots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{aligned}$$

Pogledajmo što ćemo dobiti ovim produktom

$$[x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_m] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} =$$

$$[y_1 \; y_2 \; \cdots \; y_n]$$

ili:

$$\underline{x}^t \underline{A}^t = \underline{y}^t$$

Prema tome,

$$\underline{y} = \underline{A}\,\underline{x} \implies \underline{y}^t = (\underline{A}\,\underline{x})^t$$

$$\underline{y}^t = \underline{x}^t \underline{A}^t$$

$$\boxed{(\underline{A}\,\underline{x})^t = \underline{x}^t \underline{A}^t}$$

Općenito, za kvadratne matrice vrijedi

$$(\underline{A}\,\underline{B})^t = \underline{B}^t \underline{A}^t$$

Skalarni ili unutarnji produkt dvaju vektora daje skalarnu vrijednost

$$\underline{x}^t \underline{y} = [x_1\ x_2\ \cdots\ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Vanjski produkt dvaju vektora daje matricu

$$\underline{x}\,\underline{y}^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} [y_1\ y_2 \cdots\ y_n] = \begin{bmatrix} x_1 y_1 & x_1 y_2 & \cdots & x_1 y_n \\ x_2 y_1 & x_2 y_2 & \cdots & x_2 y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & x_n y_2 & \cdots & x_n y_n \end{bmatrix}$$

Euklidska norma $\|\underline{x}\|$ vektora $\underline{x}$ u n-dimenzijskom euklidskom prostoru je

$$\|\underline{x}\| = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n)^{1/2}$$
$$= (\underline{x}^t \underline{x})^{1/2}$$

Inverzija matrice

Inverzija $n \times n$ matrice $\underline{A}$ je $n \times n$ matrica $\underline{A}^{-1}$ tako da vrijedi:

$$\underline{A}^{-1}\underline{A} = \underline{A}\,\underline{A}^{-1} = \underline{E}$$

Mnoge matrice nemaju inverziju i zovu se singularne matrice

Matrice koje imaju inverziju su nesingularne.

Ako su $\underline{A}$ i $\underline{B}$ nesingularne matrice vrijedi:

$$(\underline{A}\,\underline{B})^{-1} = \underline{B}^{-1}\underline{A}^{-1}$$

Inverzija je komutativna s transponiranjem:

$$(\underline{A}^{-1})^{t} = (\underline{A}^{t})^{-1}$$

Rang matrice

Vektori $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n$ su linearno nezavisni, ako postoje koeficijenti

$$c_1, c_2, \dots, c_n$$

(koji nisu svi jednaki nuli) takvi da je

$$c_1\underline{x}_1 + c_2\underline{x}_2 + \dots + c_n\underline{x}_n = \underline{0}$$

Primjer: Vektori $\underline{x}_1 = [1\ 2\ 3]^t$, $x_2 = [2\ 6\ 4]^t$ i $\underline{x}_3 = [4\ 11\ 9]^t$ su linearno zavisni jer je

$$2\underline{x}_1 + 3\underline{x}_2 - 2\underline{x}_3 = \underline{0}$$

<u>Stupčasti rang</u> $m \times n$ matrice je najveći skup linearno nezavisnih stupaca matrice $\underline{A}$.

<u>Retkovni rang</u> $m \times n$ matrice $\underline{A}$ je najveći skup linearno nezavisnih redaka matrice $\underline{A}$.

Osnovno je svojstvo matrica da su im stupčasti i retkovni rangovi jednaki i govorimo samo o <u>rangu matrice</u>.

Prema tome, rang matrice $\underline{A}$ može biti broj u granicama od 0 do $\min(m,n)$.

Nul-matrica ima rang 0. Jedinična $n \times n$ matrica ima rang n.

Kvadratna $n \times n$ matrica ima <u>puni rang</u> n, ako je nesingularna

Matrica ima puni rang samo onda ako ne sadrži nul-vektor kao stupac ili nul-redak.

Determinanta matrice $\underline{A}$ dimenzije $n \times n$

Submatrica $\underline{A}_{[ij]}$ dobiva se izostavljanje i-tog retka i j-tog stupca u matrici $\underline{A}$.

Determinanta se može definirati rekurzivno:

$$\det(\underline{A}) = a_{11} \qquad \text{za } n = 1$$

$$\det(\underline{A}) = a_{11} \det(\underline{A}_{[11]}) - a_{12} \det(\underline{A}_{[12]}) + \dots + (-1)^{n+1} a_{1n} \det(\underline{A}_{[1n]})$$

Determinanta matrice ima sljedeće svojstva:

- Ako je bilo koji redak ili stupac od $\underline{A}$ jednak nuli $\det(\underline{A}) = 0$.
- Ako se elementi retka ili stupca pomnože s λ, onda je determinanta jednaka $\lambda \det(\underline{A})$.
- $\det(\underline{A})$ se ne mijenja ako se elementi jednog stupca pribroje drugom (isto vrijedi i za stupce).
- $\det(\underline{A}) = \det(\underline{A}^t)$.
- Ako se zamijene bilo koja dva retka ili stupca determinanta mijenja predznak.

Ako je matrica singularna $\det(\underline{A}) = 0$.

Pozitivno definitne matrice

Kvadratna matrica $\underline{A}$ je pozitivno definitna ako je

$$\underline{x}^t \underline{A} \underline{x} > 0$$

za bilo koji vektor $\underline{x} \neq \underline{0}$.

Primer:

Matrica $\underline{E}$ je pozitivno definitna

$$\underline{x}^t \underline{E} \underline{x} = \underline{x}^t \underline{x} = \|\underline{x}\|$$
$$= \sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$$

Ako matrica $\underline{A}$ ima puni rang onda je $\underline{A}^t \underline{A}$ pozitivno definitna matrica.

Dokaz:

$$\underline{x}^t (\underline{A}^t \underline{A}) \underline{x} = (\underline{x}^t \underline{A}^t)(\underline{A} \underline{x})$$
$$= (\underline{A} \underline{x})^t (\underline{A} \underline{x})$$
$$= \| \underline{A} \underline{x} \| > 0$$

4. Rješavanje sustava linearnih jednadžbi

Postupak rješavanja sustava linearnih jednadžbi pojavljuje se u mnogim primjenama.

Sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \quad &\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Ako je matrica nesingularna i ima inverziju $\underline{A}^{-1}$, može se dobiti množenjem s lijeva

$$\underline{A}^{-1}\underline{A}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{E}\,\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

$$\underline{x} = \underline{A}^{-1}\underline{b}$$

Ako su elementi a_{ij} i x_i iz R, pri rješavanju zbog pogreške zaokruživanja postupak rješavanja mora biti izgrađen robusno.

LUP postupak

Dan je sustav jednadžbi:

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$$

Osnovna zamisao postupka je slijedeća:

1. Treba odrediti tri matrice

   $\underline{P}$ – permutacijska matrica

   $\underline{L}$ – donja trokutna matrica s jedinicama na dijagonali

   $\underline{U}$ – gornja trokutna matrica

tako da vrijedi

$$\underline{P}\,\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U}.$$

To se može načiniti za svaku nesingularnu matricu

2. Pomnoži se izvorni sustav s $\underline{P}$

$$\underline{P}\underline{A}\underline{x} = \underline{P}\,\underline{b}$$

i dobiva

$$\underline{L}\,\underline{U}\,\underline{x} = \underline{P}\,\underline{b}$$

3. Zamislimo pomoćni vektor

$$\underline{y} = \underline{U}\,\underline{x}$$

i rješavamo donji trokutni sustav

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{P}\,\underline{b}$$

te dobivamo $\underline{y}$ postupkom koji se zove „unapredna supstitucija".

(forward substitution)

4. Rješavamo sustav

$$\underline{U}\,\underline{x} = \underline{y}$$

i dobivamo traženi vektor $\underline{x}$ postupkom koji se zove „unatražna supstitucija"

(back substitution)

Unapredna supstitucija

Rješava sustav

$$\underline{L}\,\underline{y} = \underline{P}\,\underline{b}$$

Desna strana $\underline{P}\,\underline{b}$ je jedna od permutacija elemenata vektora $\underline{b}$

Neka je poredak π neka permutacija indeksa

$$\pi[1], \pi[2], \pi[3], \ldots, \pi[n]$$

$$
\begin{aligned}
y_1 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_{\pi[1]} \\
l_{21} y_1 + y_2 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad &= b_{\pi[2]} \\
l_{31} y_1 + l_{32} y_2 + y_3 \qquad\qquad\qquad\qquad &= b_{\pi[3]} \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad & \\
l_{n1} y_1 + l_{n2} y_2 + l_{n3} y_3 + \dots + y_n &= b_{\pi[n]}
\end{aligned}
$$

Dobiva se:

$$y_1 = b_{\pi[1]}$$

$$y_2 = b_{\pi[2]} - l_{21} y_1$$

$$y_3 = b_{\pi[3]} - (l_{31} y_1 + l_{32} y_2)$$

$$\vdots$$

$$y_i = b_{\pi[i]} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j$$

Rješenje ovog donjeg trokutnog sustava je složenosti $O(n^2)$.

Unatražna supstitucija

$$
\begin{aligned}
u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \dots u_{1,n-2} x_{n-2} + u_{1,n-1} x_{n-1} + u_{1n} x_n &= y_1 \\
u_{22} x_2 + \dots + u_{2,n-2} x_{n-2} + u_{2,n-1} x_{n-1} + u_{2n} x_n &= y_2 \\
&\vdots \\
u_{n-2,n-2} x_{n-2} + u_{n-2,n-1} x_{n-1} + u_{n-2,n} x_n &= y_{n-2} \\
u_{n-1,n-1} x_{n-1} + u_{n-1,n} x_n &= y_{n-1} \\
u_{n,n} x_n &= y_n
\end{aligned}
$$

Slijedi:

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} y_n$$

$$x_{n-1} = \frac{1}{u_{n-1,n-1}} \left(y_{n-1} - u_{n-1,n} x_n \right)$$

$$x_{n-2} = \frac{1}{u_{n-2,n-2}} \left(y_{n-2} - \left(u_{n-2,n-1} x_{n-1} + u_{n-2,n} x_n \right) \right)$$

$$\vdots$$

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^{n} u_{ij} x_j \right)$$

složenost: $O(n^2)$

Primjer:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 5 & 6 & 3 \end{bmatrix}}_{\underline{A}} \underline{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0.1 \\ 12.5 \\ 10.3 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.571 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{U} = \begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.14 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1.850 \end{bmatrix}$$

Strategija:

- Oduzimamo prvi red matrice pomnožen odgovarajućim faktorom od ostalih redova matrice i tako eliminiramo prvu varijablu iz pripadnih jednadžbi.
- Nakon toga oduzimamo drugi redak pomnožen pripadnim faktorima od trećeg i daljnjih redaka.
- Na taj način nastavljamo dok ne dobijemo gornji trokutni oblik, tj. matricu $\underline{U}$.
- Matrica L sastoji se od faktora redova koji su uzrokovali eliminaciju

Implementacija strategije može se definirati rekurzivno:

za $n = 1$

možemo odabrati $\underline{L} = \underline{E}_1$ i

$\underline{U} = \underline{A}$

$$\underline{L} = [1] \qquad \underline{U} = [a_{11}]$$

Uvjeriti se da je $\underline{P}\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U}$!

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.6 & 1 & 0 \\ 0.2 & 0.571 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 12.5 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 6.32 \\ -5.569 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 0.14 & 2.2 \\ 0 & 0 & -1.856 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10.3 \\ 6.32 \\ -5.569 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.2 \\ 3.0 \end{bmatrix}$$

Izvođenje LU dekompozicije

Pretpostavimo da je $\underline{P} = \underline{E}$, te da je

$$\underline{A} = \underline{L}\,\underline{U}$$

$\underline{L}\,\underline{U}$ dekompozicija može se obaviti Gaussovom eliminacijom.

Za $n > 1$

$$\underline{A} = \left[\begin{array}{c|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \hline a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{v} & \underline{A}' \end{bmatrix}$$

$$\underline{w} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \end{bmatrix} \qquad \underline{v} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

Matrica $\underline{A}$ se može faktorizirati:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{v} & \underline{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{A}' - \underline{v}\underline{w}^t \cdot \frac{1}{a_{11}} \end{bmatrix}$$

Matrica $\underline{A}' - \frac{1}{a_{11}} \underline{v}\, \underline{w}^t$

naziva se: Shurov komplement od $\underline{A}$ u odnosu na a_{11}

Ako je Shurov komplement

$$\underline{A}' - \underline{v}\,\underline{w}^t \cdot \frac{1}{a_{11}} = L'U'$$

slijedi:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^t_{n-1} \\ \frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{L}'\underline{U}' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}^t_{n-1} \\ \frac{1}{a_{11}} & \underline{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{U}' \end{bmatrix}$$

$$= \underline{L}\ \underline{U}$$

tj. ako $\underline{L}'$ donja trokutna matrica s jedinicama na dijagonali onda je to i $\underline{L}$

ako je $\underline{U}'$ gornja trokutna matrica to je i $\underline{U}$.

LU dekompozicija je moguća ako za svi $a_{ii} \neq 0$!

Rekurzivni oblik LU dekompozicije može se jednostavno prepisati u iterativni oblik

$L[N,N]$, $U[N,N]$ treba računati samo elemente različite od nule i jedinice

```
za (I = 1, I++, I ≤ N) {
    za (J = 1, J++, J ≤ N) {
        L[I,J] = 0.0;
        U[I,J] = 0.0;
    }
    L[I,I] = 1.0;
}
za (K = 1, K++, K ≤ N) {
    U[K,K] = A[K,K];
    za (I = K+1, I++, I ≤ N) {
        L[I,K] = A[I,K] / U[K,K];
        za (J = K+1, J++, J ≤ N) {
            A[I,J] = A[I,J] - L[I,K] * U[K,J];
        }
    }
}
```

Dekomponiranu matricu možemo smjestiti na isto mjesto.

Pritom se jedinična dijagonala matrice L ne mora pisati.

LU dekompozicija postaje mnogo jednostavnija :

```
za ( K = 1, K++ , K < N ) {
    za ( I = K+1, I++, I ≤ N ) {
        A[I,K] = A[I,K] / A[K,K];
        za ( J = K+1, J++, J ≤ N )
            A[I,J] = A[I,J] - A[I,K] * A[K,J];
    }
}
```

Primjer:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix}$$

$k = 1$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 16 & 9 & 18 \\ 2 & 4 & 9 & 21 \end{bmatrix}$$

$k = 2$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 17 \end{bmatrix}$$

$k = 3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$
\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 6 & 13 & 5 & 19 \\ 2 & 19 & 10 & 23 \\ 4 & 10 & 11 & 31 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}
$$

$$\underline{A} \qquad\qquad \underline{L} \qquad\qquad \underline{U}$$

LUP dekompozicija

S obzirom da u matrici $\underline{A}$ element a_{11} postoje pivot s kojim treba dijeliti, razumno bi bilo načiniti barem stupčasti odabir najvećeg elementa.

Neka je a_{l1} najveći element u stupcu 1.

Matricu $\underline{A}$ pomnožimo s lijeva s permutacijskom matricom Q, tako da se l-ti i 1. redak zamijene.

$$\underline{Q}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{l1} & \underline{w}^t \\ \underline{v} & \underline{A}' \end{bmatrix}$$

$$\underline{w}^t = \left[a_{k2} \;\; a_{k3} \;\; \cdots \;\; a_{kn} \right]$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} a_{21} \\ a_{31} \\ \vdots \\ a_{3n} \end{bmatrix}$$

s tim da je $a_{l1} = a_{11}$

$$\underline{A}' = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

s tim da su $a_{l j}$ zamijenjeni s a_{1j}.

Možemo pisati

$$\underline{Q}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} a_{l1} & \underline{w}^t \\ \underline{v} & \underline{A}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{l1}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{l1} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & A' - \frac{1}{a_{l1}}\underline{v}\underline{w}^t \end{bmatrix}$$

Shurov komplement $\quad \underline{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\underline{v}\,\underline{w}^t$

neka se može permutirati i dekomponirati tako da je

$$\underline{P}'\left(\underline{A}' - \frac{1}{a_{l1}}\underline{v}\,\underline{w}^t\right) = \underline{L}'\underline{U}'.$$

Definirajmo permutacijsku matricu

$$\underline{P} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{P}' \end{bmatrix} \underline{Q}$$

(umnožak dviju permutacijskih matrica je permutacijska matrica!)

Sada imamo:

$$\underline{P}\,\underline{A} = \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{P}' \end{bmatrix} \underline{Q}\,\underline{A} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{A}' - \frac{1}{a_{11}}\underline{v}\,\underline{w}^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{P}'\frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{P}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{A}' - \frac{1}{a_{11}}\underline{v}\,\underline{w}^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{P}'\frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{P}'(\underline{A}' - \frac{1}{a_{11}}\underline{v}\,\underline{w}^t) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{P}'\frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{E}_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{L}'\underline{U}' \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \underline{0}_{n-1}^t \\ \underline{P}'\frac{1}{a_{11}}\underline{v} & \underline{L}' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \underline{w}^t \\ \underline{0}_{n-1} & \underline{U}' \end{bmatrix}$$

$$= \underline{L} \cdot \underline{U}$$

- ako je $\underline{L}'$ donja trokutna matrica onda je to i $\underline{L}$
- ako je $\underline{U}'$ gornja trokutna matrica onda je to i $\underline{U}$.

za $n = 1$ je $\underline{L}'$ i $\underline{U}'$ u redu!

Algoritam za LUP dekompoziciju

- smještamo dekomponirane matrice u izvornu
- Permutacijska matrica se pohranjuje sažeto u poredak $\pi[N]$

$\pi[I] = J$ označava da I-ti redak matrice P sadržava u J-tom stupcu jedinicu

```
za (I = 1, I++, I ≤ N)  π[I] = I;
za (K = 1, K++, K < N) {
    Pivot = 0.0;
    za (I = K, I++, I ≤ N) {
        ako je (abs(A[I,K]) > Pivot) {
            Pivot = abs(A[I,K]);
            L = I;
        }
    }
    ako je (Pivot = 0.0) javiti "matrica je singularna" i prekinuti;
    zamijeniti (π[K], π[L]);
    za (J = 1, J++, J ≤ N) zamijeniti (A[K,J], A[L,J]);
    za (I = K+1, I++, I ≤ N) {
        A[I,K] = A[I,K] / A[K,K];
        za (J = K+1, J++, J ≤ N)
            A[I,J] = A[I,J] - A[I,K] * A[K,J];
    }
}
```

Inverzija matrica

Iako se inverzija matrice često pojavljuje u algebarskim izrazima, ona se ne mora često izračunavati.

Ako je to ipak potrebno inverziju možemo obaviti s pomoću LUP dekompozicije.

LUP dekompozicija ima složenost $O(n^3)$.

Nakon što je LUP dekompozicija obavljena potrebno je obaviti unaprednu i unatražnu supstituciju čija je složenost $O(n^2)$.

Izračunavanje inverzije matrice A svodi se na izračunavanje matrice $\underline{X}$, tako da vrijedi:

$$\underline{A}\,\underline{X} = \underline{E}_n$$

$$\uparrow \quad \underline{X} = \underline{A}^{-1}$$

Možemo pisati $\underline{X} = [\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \ \dots \ \underline{x}_n]$, pa je

$$\underline{A}\ [\underline{x}_1 \ \underline{x}_2 \dots \underline{x}_n] = [\underline{e}_1 \ \underline{e}_2 \dots \underline{e}_n]$$

što daje

$$\underline{A}\,\underline{x}_1 = \underline{e}_1$$
$$\underline{A}\,\underline{x}_2 = \underline{e}_2$$
$$\vdots$$
$$\underline{A}\,\underline{x}_n = \underline{e}_n$$

To znači da se inverzija može obaviti rješavanjem gornjih n jednadžbi.

Nakon jedne LUP dekompozicije slijedi n supstitucija.

Složenost je

$$O(n^3) + n \cdot O(n^2) =$$
$$= \underline{O(n^3)}$$

4. POSTUPCI NELINEARNOG OPTIMIRANJA

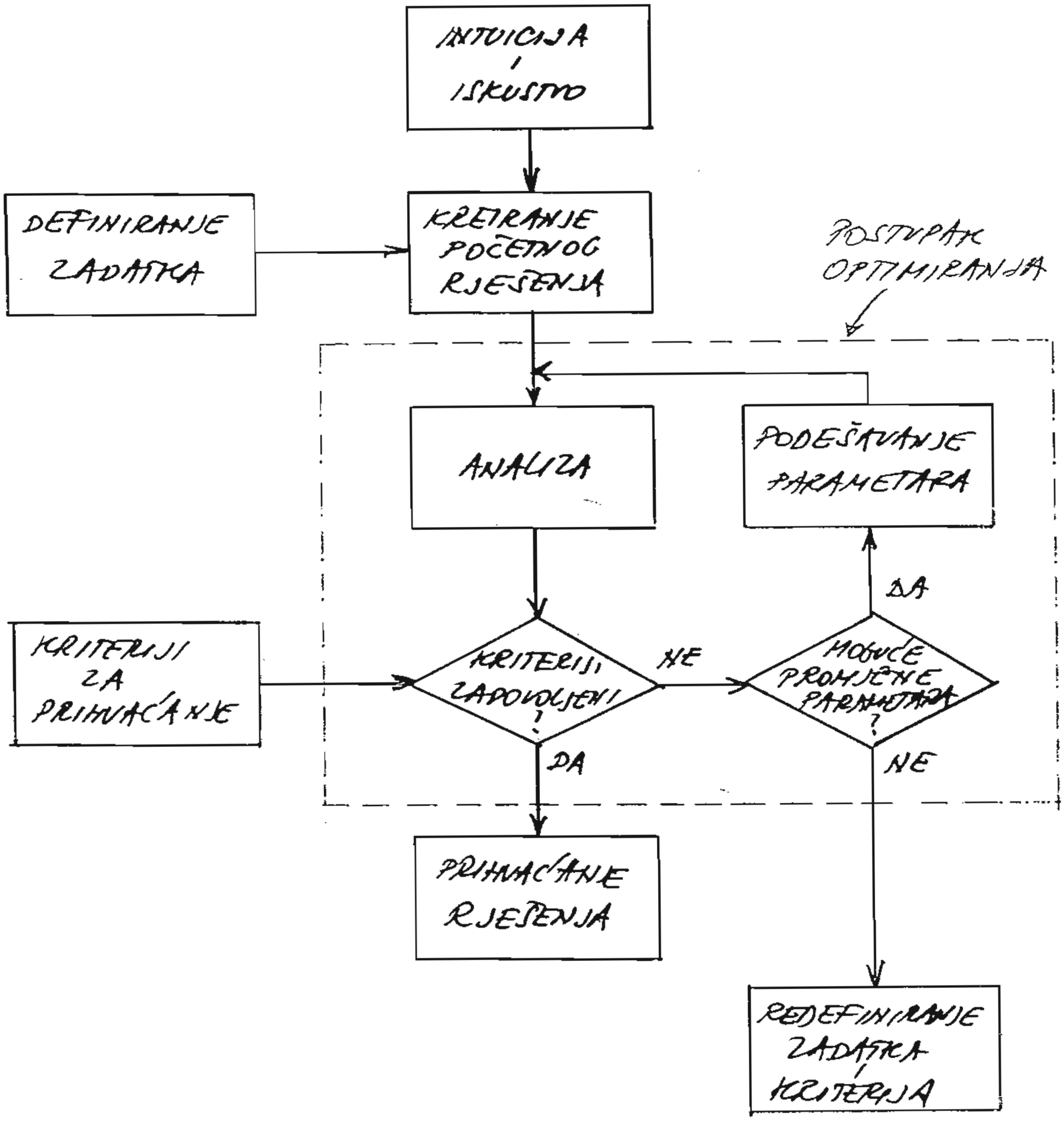
4.1. Uvodno razmatranje

Najbolja definicija inženjerskog projektiranja je ona od američke organizacije Accreditation Bord for Engineering and Technology – ABET:

„Inženjersko projektiranje je proces zasnivanja sustava, komponente ili procesa usklađenog sa željenim potrebama. To je proces donošenja odluka (često iterativan) u kojem se prirodne znanosti, matematika i tehničke znanosti primjenjuju za optimalnu pretvorbu zaliha u skladu s postavljenim zahtjevima. Temeljna počela procesa projektiranja jesu postavljanje zahtjeva i kriterija, sinteza, analiza, konstrukcija, ispitivanje i vrednovanje. Najznačajnije u tom procesu su suštinske i komplementarne uloge sinteze i analize."

U svakom koraku projektiranja može se nazrijeti komponenta traženja najboljeg, najprikladnijeg, najbržeg, ...

Praktički svaki ljudski poduhvat svodi se na optimiranje nekog svojstva ili postupka.



Postupak optimiranja može se automatizirati ako se može formulirati jedna skalarna funkcija koja predočava odstupanje dobivenog rješenja od zadanih kriterija.

Podešavanje parametara mora se provoditi tako da se odstupanje smanjuje, tj. ako se funkcija minimizira.

4.2. Formuliranje funkcije cilja

Svojstva rješenja ovise o parametrima koji se mogu podešavati.

Pretpostavimo da su to varijable

$$x_1, x_2, \cdots, x_n$$

$$x_i \in R$$

ili

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{x} \in R^n$$

Potrebno je formulirati jednu skalarnu funkciju

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = F(\underline{x})$$

$$F : R^n \rightarrow R$$

Funkcija $F(\underline{x})$ je funkcija cilja

(engl. cost function)

(njem. Ziel Funktion)

Do rješenja se dolazi tako da se odredi vrijednosti parametara $\underline{x}_m$, tako da se $F(\underline{x})$ minimizira

$$\min_{\underline{x}} F(\underline{x})$$

S obzirom da je funkcija skalarna određivanje položaja maksimuma funkcije može odrediti traženjem minimuma funkcije $-F(\underline{x})$

Definiranje jedne skalarne funkcije cilja izgleda u prvi čas kao veliko ograničenje. Naime, vrlo često treba istovremeno zadovoljiti više parcijalnih funkcija cilja $f_k(\underline{x})$, koje istovremeno moraju biti minimizirane.

Funkcija $F(\underline{x})$ može se konstruirati na više načina:

1. suma kvadrata

$$F(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} f_k^2(\underline{x})$$

2. težinska suma kvadrata

$$F(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} t_k f_k^2(\underline{x})$$

3. težinska suma parnih potencija

$$F(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{m} t_k f_k^{2p}(\underline{x}) \qquad p \in N$$

4. maksimalna apsolutna vrijednost

$$F(\underline{x}) = \max_k |f_k(\underline{x})|$$

Funkcije cilja konstruirane s apsolutnim vrijednostima imaju diskontinuirane prve derivacije, koje mogu u nekim postupcima izazvati poteškoće.

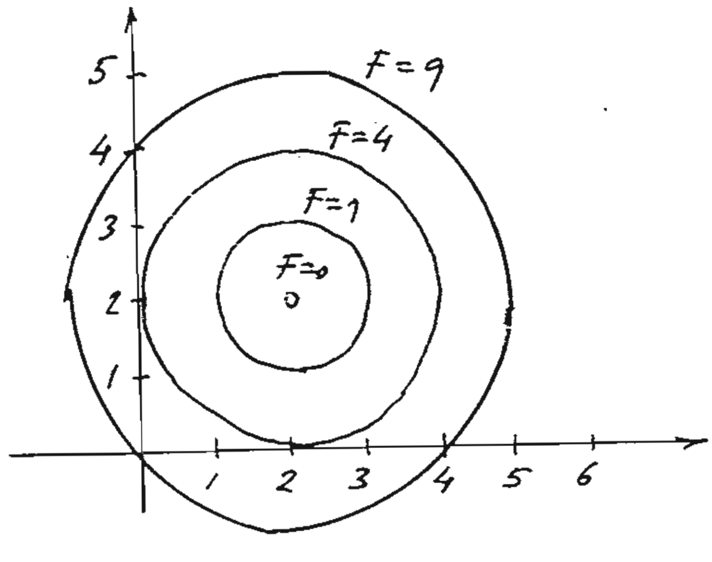
Primjer:

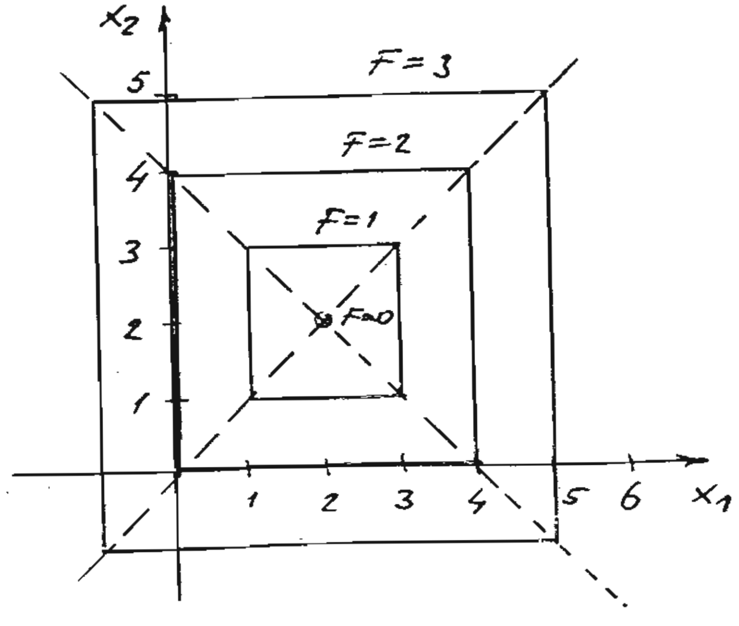
Ako se u R^2 želi minimizirati udaljenost od točke $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ može se formulirati dvije funkcije cilja

$$F(\underline{x}) = (x_1-2)^2 + (x_2-2)^2$$

ili

$$F(\underline{x}) = \max\left(|x_1-2|, |x_2-2|\right)$$





Jedna od značajnih primjena optimiranja je postizanje zadanih dinamičkih svojstava sustava.

Ako je npr. odziv sustava $y(t) = f(\underline{x}, t)$, gdje je $\underline{x}$ vektor parametara, želi se postići da bude

$$y(t) = \varphi(t)$$

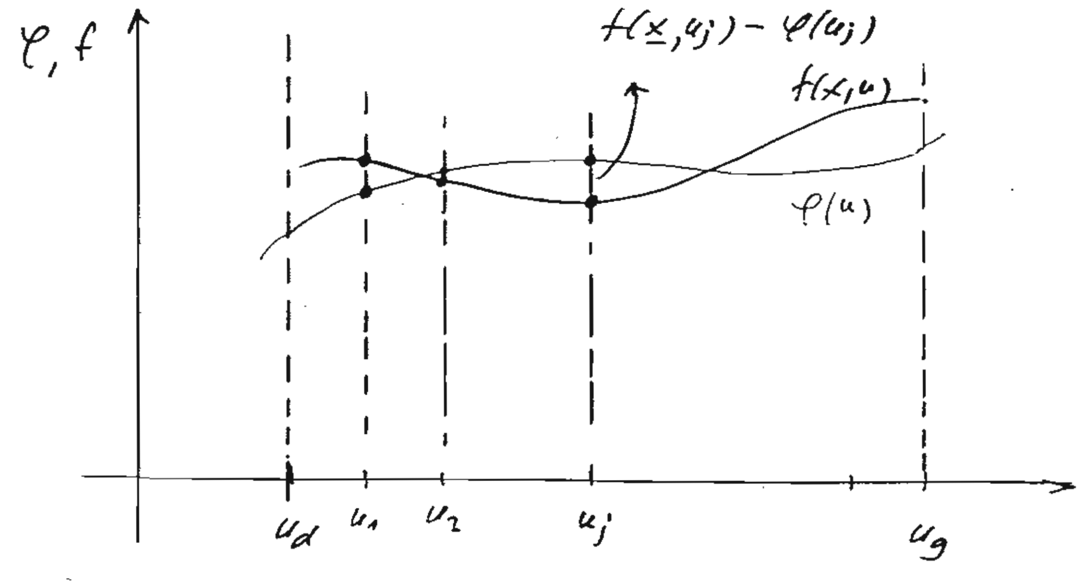
↑ zadani željeni odziv

Slično, ako se želi ostvariti frekvencijska karakteristika $\varphi(\omega)$, a za dane parametre $\underline{x}$ dobiva se $f(\underline{x}, \omega)$, trebalo bi postići da bude

$$\varphi(\omega) = f(\underline{x}, \omega)$$

Općenito, se može reći da za neki parametar u (umjesto ω ili t) želimo postići da bude

$f(\underline{x}, u)$ što „bliže" $\varphi(u)$



$$F(\underline{x}) = \sum_j \left(f(\underline{x}, u_j) - \varphi(u_j)\right)^2$$

$$F(\underline{x}) = \sum_j t_j \left(f(\underline{x}, u_j) - \varphi(u_j)\right)^2$$

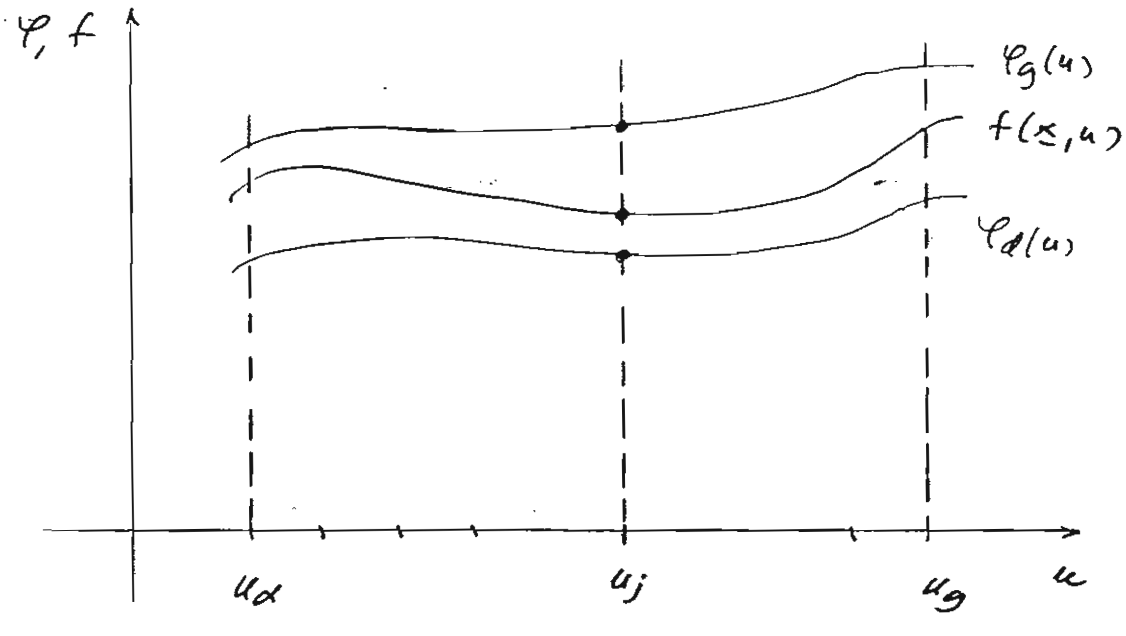
$$F(\underline{x}) = \max_j \left| f(\underline{x}, u_j) - \varphi(u_j) \right|$$

Formulacija funkcije cilja ovisi o konkretnom zadatku!

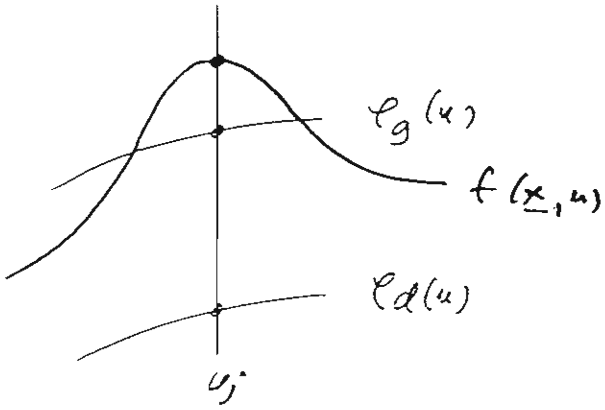
Primjer domišljatog oblikovanja funkcije cilja.

Želi se ostvariti $f(x,u)$, tako da za svaki $u \in [u_d, u_g]$ bude

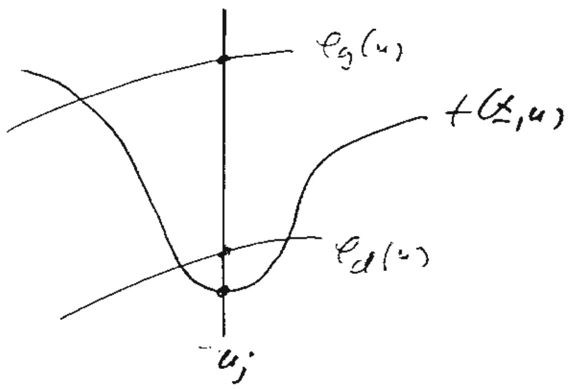
$$f(x,u) \le \varphi_g(u)$$
$$f(\underline{x},u) \ge \varphi_d(u)$$



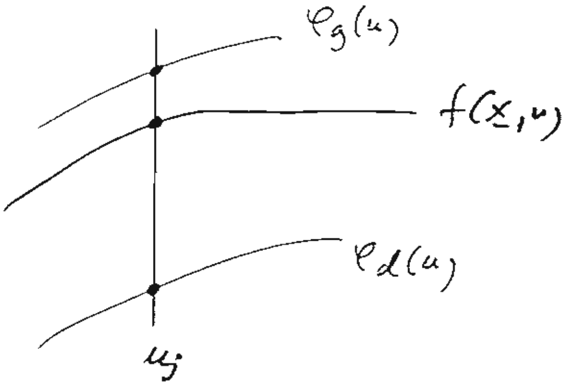
$$F(\underline{x}) = \min_j \left\{ \max \left[t_g(u_j)\left(f(\underline{x}, u_j) - e_g(u_j)\right), \; t_d(u_j)\left(e_d(u_j) - f(\underline{x}, u_j)\right) \right] \right\}$$



$$f(\underline{x}, u_j) - e_g(u_j) > 0$$
$$e_d(u_j) - f(\underline{x}, u_j) < 0$$



$$f(\underline{x}, u_j) - e_g(u_j) < 0$$
$$e_d(u_j) - f(\underline{x}, u_j) > 0$$



$$f(\underline{x}, u_j) - e_g(u_j) < 0$$
$$e_d(u_j) - f(\underline{x}, u_j) < 0$$

4.3. Osnovne koncepcije i definicije

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ n-torka brojeva

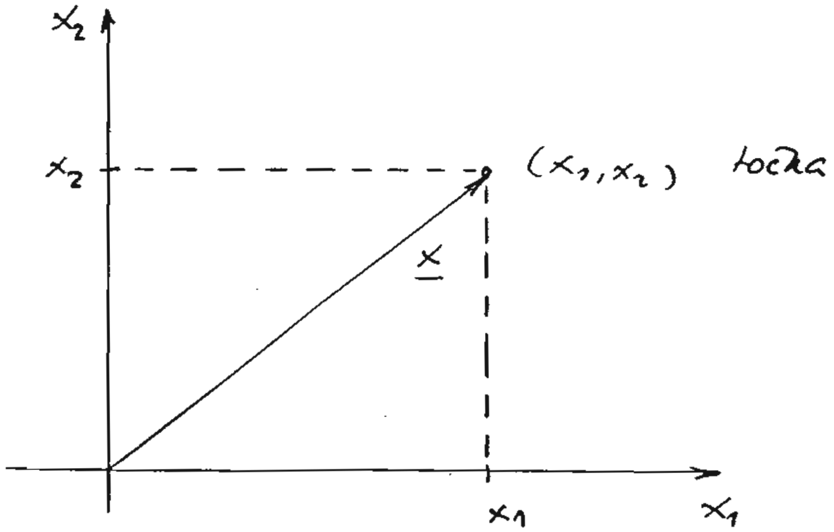
$x_i \in R$

određuje <u>točku</u> u n-dimenzionalnom prostoru, tj. $x_1, x_2, \dots, x_n$ su koordinate točke.

S druge strane

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \text{ili} \qquad \underline{x}^t = [x_1 x_2 \cdots x_n]$$

predstavlja <u>vektor</u> u n-dimenzionalnom prostoru, preciznije radij-vektor



Kako bi se mogle koristiti metode analitičke geometrije treba uvesti euklidsku metriku

Udaljenost dviju točaka definira se kao

$$d(\underline{x}, \underline{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}$$

Označimo jedinične vektore u smjeru koordinatnih osi s

$$\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \dots \quad \underline{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Skalarni produkt dvaju vektora $\underline{x}$ i $\underline{y}$ definiran je kao

$$\underline{x}^t \underline{y} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} =$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Dva su vektora ortogonalna ako im je skalarni produkt jednak nuli, tj.

$$\underline{x}^t \underline{y} = 0$$

Duljina radij-vektora $\underline{x}$ označava se s $\| \underline{x} \|$ i naziva se normom vektora $\underline{x}$

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\sum_{i=0}^{n} (x_i - 0)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\|\underline{x}\| = \sqrt{\underline{x}^t \underline{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

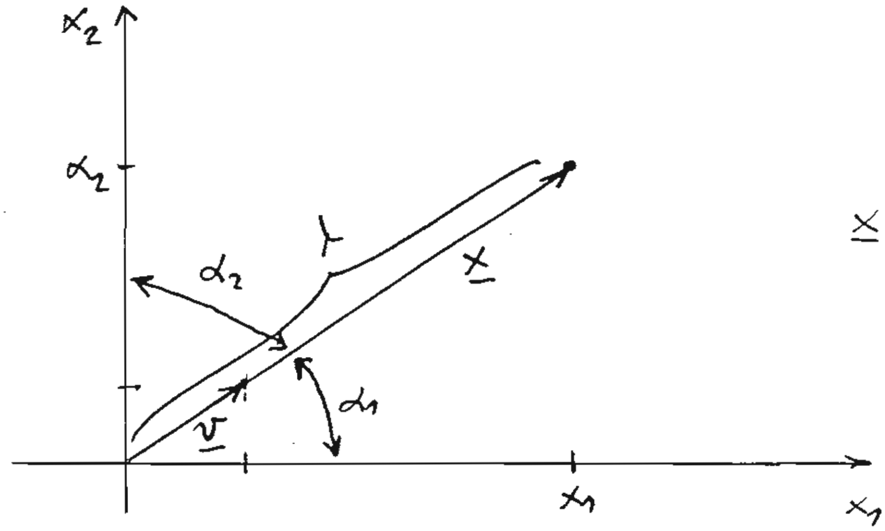
Jedinični vektor $\underline{v}$ u smjeru vektora $\underline{x}$

$$\underline{v} = \frac{\underline{x}}{\|\underline{x}\|}$$

Označimo li $\|\underline{x}\| = \lambda$

$$\underline{x} = \lambda \underline{v}$$

u R^2



$$\underline{x} = \lambda \underline{v}$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{x} = \lambda \begin{bmatrix} \cos\alpha_1 \\ \cos\alpha_2 \end{bmatrix}$$

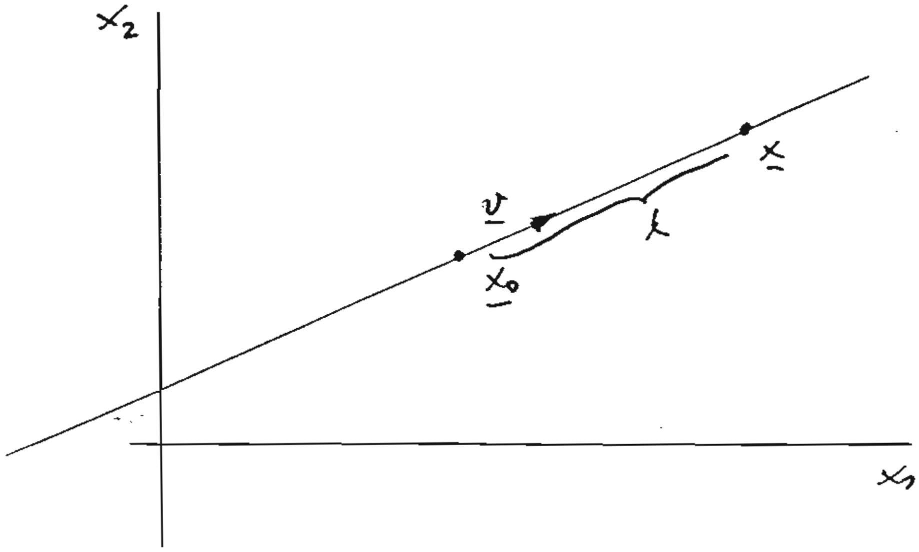
$$\sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2} = 1$$

$$\cos\alpha_1 = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$\cos\alpha_2 = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

Jednadžba pravca sa smjerom $\underline{v}$ kroz točku $\underline{x}_0$ glasi

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \lambda \underline{v} \qquad \lambda \in R$$



Umnožak $\underline{x}\,\underline{y}^t$

$$\underline{x}\,\underline{y}^t = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_ny_1 & x_ny_2 & \cdots & x_ny_n \end{bmatrix}$$

daje matricu dimenzije $n \times n$

Formalno definiranje minimuma funkcije $F(\underline{x})$ može se provesti temeljem razvoja u red u okolini minimuma.

Promotrimo slučaj R^2.

Neka minimum leži u točki (x_{1m}, x_{2m})

Funkciju $F(x_1, x_2)$ razvijamo u Taylorov red oko (x_{1m}, x_{2m}) :

$$F(x_1,x_2) = F(x_{1m}, x_{2m}) + \frac{\partial F}{\partial x_1}(x_1 - x_{1m}) + \\ + \frac{\partial F}{\partial x_2}(x_2 - x_{2m}) + \frac{1}{2}\left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(x_1 - x_{1m})^2 + \right. \\ \left. + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1 - x_{1m})(x_2 - x_{2m}) + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_2 - x_{2m})^2 \right\} + \\ + \dots$$

uz vrijednosti derivacija u točki (x_{1m}, x_{2m})

Uvodimo vektorske oznake :

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \; ; \quad \underline{x}_m = \begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \end{bmatrix} \; ;$$

$$\Delta \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 - x_{1m} \\ x_2 - x_{2m} \end{bmatrix} = \underline{x} - \underline{x}_m$$

gradijent $\quad \underline{\nabla F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix}$

Matrica drugih derivacija, tzv. Hesseova matrica

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

uz

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1}$$

Prva tri člana razvoja u red se mogu napisati u obliku

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_m) + \underbrace{\underline{DF}^t \, \underline{\Delta x}}_{\text{linearni član}} + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{\Delta x}^t \, \underline{H} \, \underline{\Delta x}}_{\text{kvadratni član}}$$

S obzirom da je $F(\underline{x}_m)$ minimum funkcije $F(\underline{x})$, mala promjena $\underline{\Delta x}$ u bilo kojem smjeru u okolini $\underline{x}_m$ mora izazvati porast funkcije.

To znači da mora biti

$$\underline{\nabla F}\Big|_{\underline{x} = \underline{x}_m} = \underline{0}$$

i

$$\underline{\Delta x}^t \, \underline{H}\Big|_{\underline{x} = \underline{x}_m} \underline{\Delta x} > 0$$

Drugim riječima:

- Uvjet za postojanje minimuma je da sve prve parcijalne derivacije budu jednake nuli, tj. gradijent je nul-vektor.

- Kvadratna forma mora biti pozitivna, tj. Hesseova matrica mora biti pozitivno definitna.

- Matrica H je simetrična matrica. Stoga ima realne svojstvene vrijednosti.
- Pozitivno definitna matrica je ona matrica čije su sve svojstvene vrijednosti pozitivne.

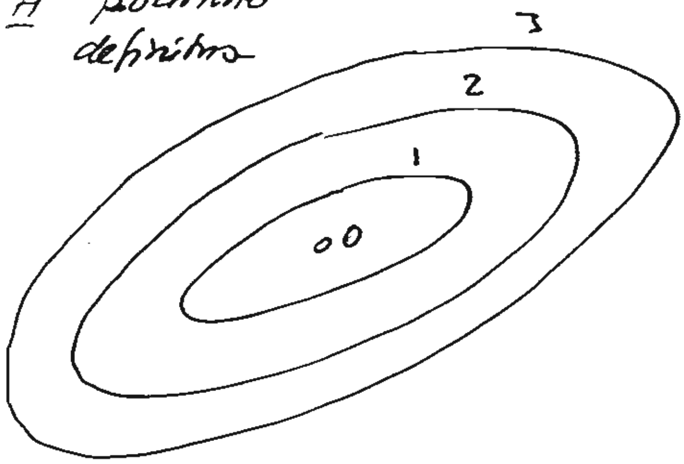
- Ako matrica ima sve negativne svojstvene vrijednosti ona je negativno definitna i radi se o maksimumu.

- Ako postoje i pozitivne i negativne svojstvene vrijednosti, matrica je indefinitna, te funkcija u danoj točki ima sedlo.

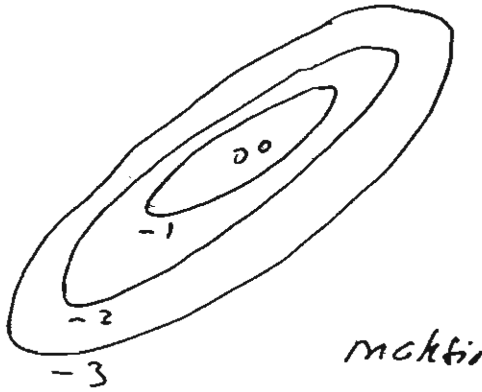
Krivulje jednakih vrijednosti

$\underline{H}$ pozitivno definitna

Neka je $F(\underline{x}_m) = 0$

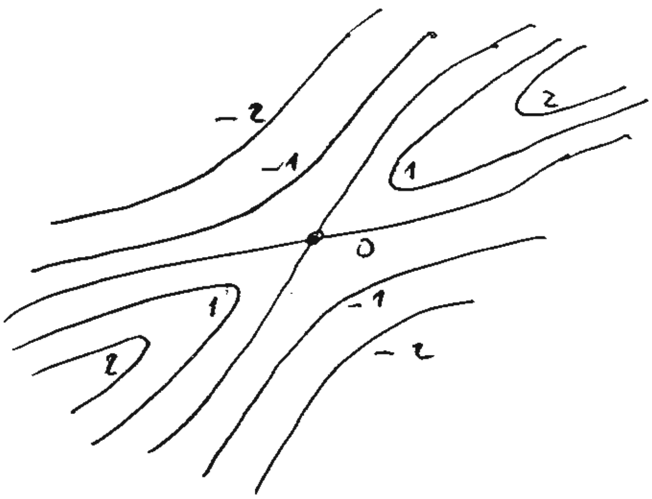


minimum



maksimum

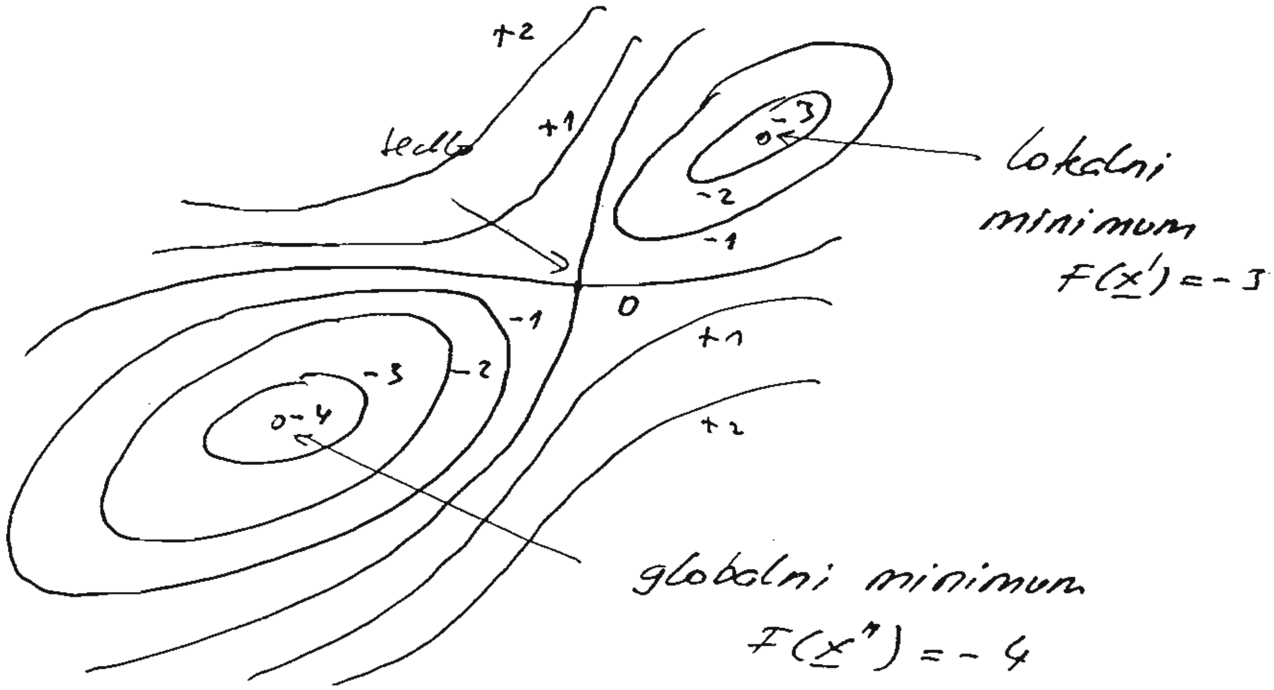
$\underline{H}$ indefinitna



sedlo

Ako funkcija u cijelom području definicije ima samo jedan minimum (odnosno maksimum) ona je unimodalna.

Višemodalna funkcija može imati više tzv. <u>lokalnih minimuma</u> od kojih je onaj s najmanjom vrijednošću funkcije <u>globalni minimum</u>.


+2
+1
sedlo
-3
-2
-1
lokalni minimum
$F(\underline{x}') = -3$
0
-1
+1
-3
-2
-4
+2
globalni minimum
$F(\underline{x}'') = -4$

Svi zaključci mogu se proširiti na funkcije više varijabli. (Pritom se gubi geometrijski zor!)

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \qquad \underline{\nabla F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

$$\underline{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

Razvoj u red ima jednak vektorski oblik

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_m) + \underline{\nabla F}^t \underline{\Delta x} + \frac{1}{2} \underline{\Delta x}^t \underline{H} \, \underline{\Delta x} + \ldots$$

Korisno je istražiti svojstva kvadratne funkcije

$$F(\underline{x}) = c + \underline{b}^t \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{x}^t \underline{A} \underline{x}$$

za $n = 2$

$$F(x_1, x_2) = c + \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

u kanonskom obliku: $a_{12} = a_{21}$

$$F(x_1, x_2) = c + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{c}_{\text{konstantni član}} + \underbrace{b_1 x_1 + b_2 x_2}_{\text{linearni član}} + \underbrace{\frac{1}{2} a_{11} x_1^2 + a_{12} x_1 x_2 + \frac{1}{2} a_{22} x_2^2}_{\text{kvadratni član}}$$

Primjer:

$$F(x_1, x_2) = 2 + 6x_1 + 3x_2 + 4x_1^2 + 12 x_1 x_2 + 3 x_2^2$$

$$= 2 + \begin{bmatrix} 6 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Derivacije:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = b_1 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = b_2 + a_{21} x_1 + a_{22} x_2$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \underline{\nabla F} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\nabla F} = \underline{b} + \underline{A}\,\underline{x}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = a_{11} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = a_{12}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} = a_{21} \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = a_{22}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \underline{H} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \underline{A}$$

$$\underline{H} = \underline{A}$$

$$\underline{\nabla F} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \underline{b} + \underline{A}\,\underline{x} = 0$$

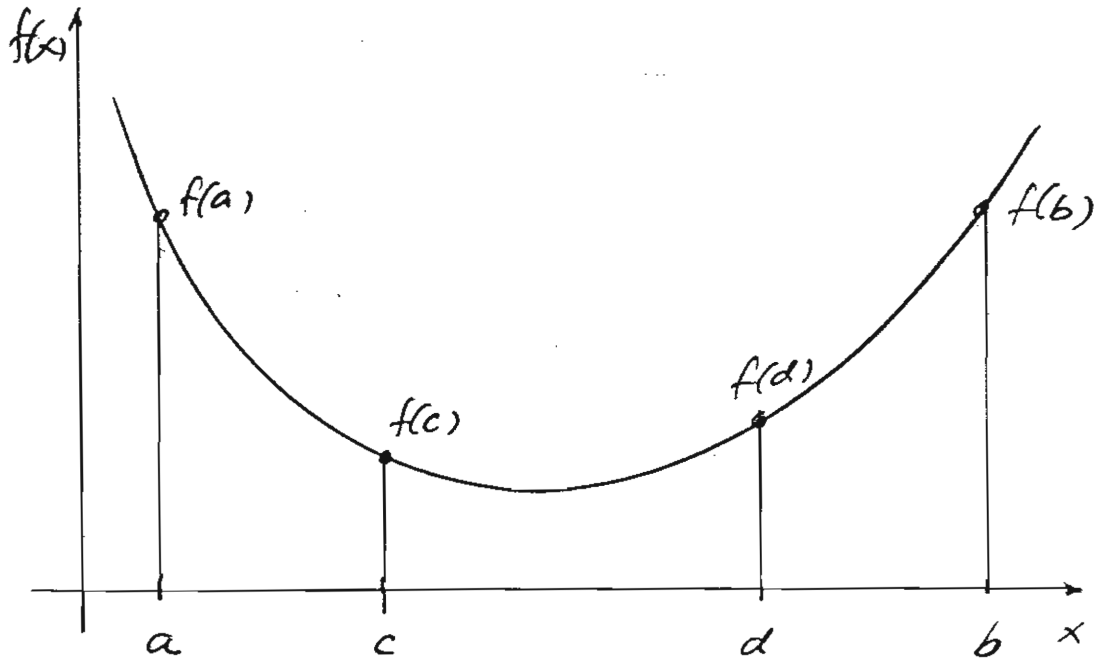
$$\underline{x}_m = -\underline{A}^{-1}\underline{b}$$

Ako je $\underline{H} = \underline{A}$ pozitivno definitna, onda je $\underline{x}_m$ točka minimuma.

4.4. Pronalaženje minimuma funkcije jedne varijable

4.4.1. Postupak zlatnog reza

Pretpostavka:
- Polazi se od intervala $[a, b]$ u kojem se nalazi minimum
- Funkcija je unimodalna

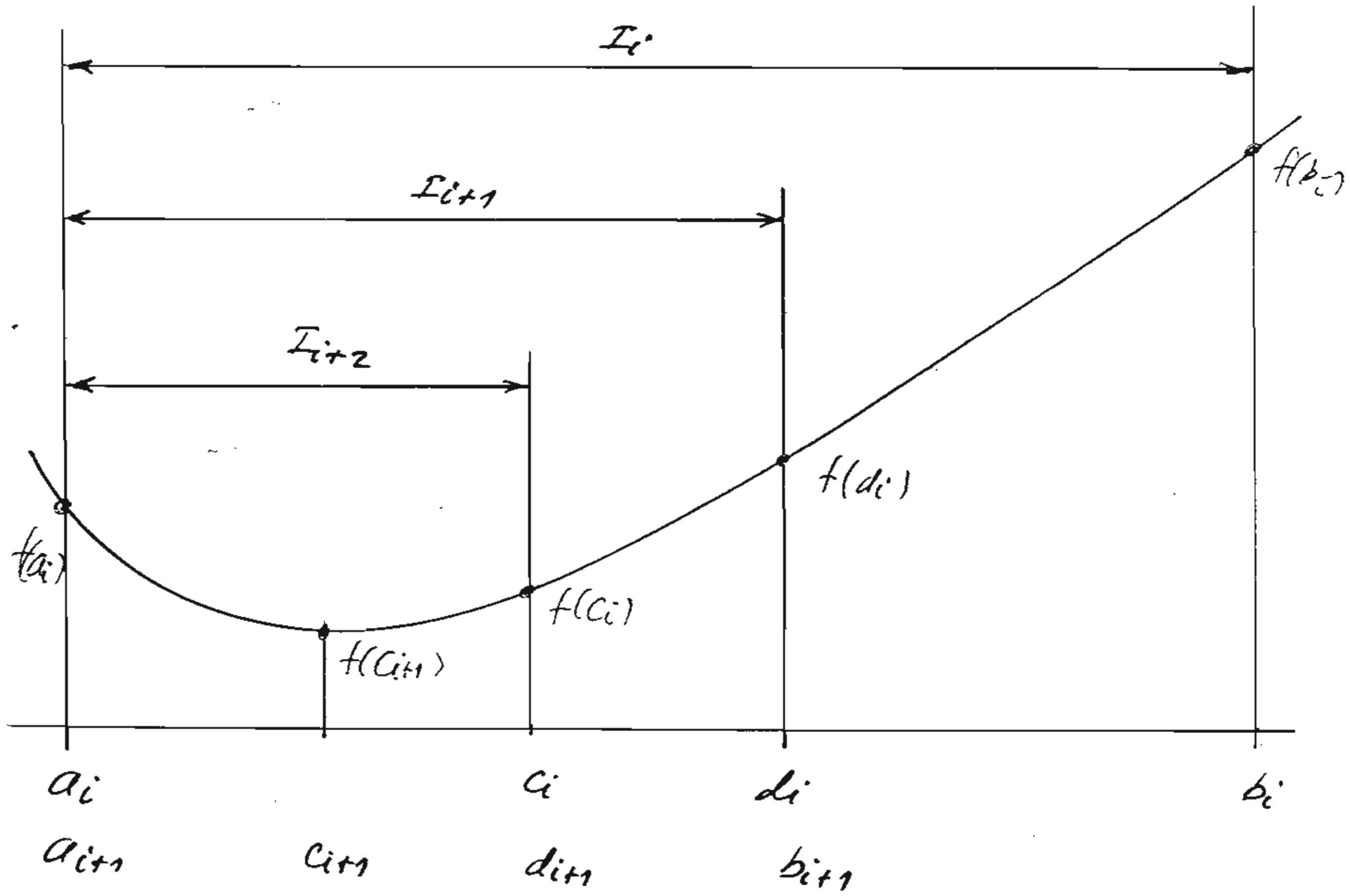


- Računa se $f(x)$ u dvije točke c i d
- Neka je $a < c < d < b$

- Ako je $f(c) < f(d)$ minimum nalazi u subintervalu $[a, d]$, inače u subintervalu $[c, b]$

Zamisao: 1. Postaviti unutarnje točke tako da jedna od njih posluži za unutarnju točku u slijedećoj iteraciji.

2. Postići jednaku redukciju intervala u svakoj iteraciji



Točke c_i i d_i postavljaju se simetrično

$$\frac{d_i - a_i}{b_i - a_i} = \frac{b_i - c_i}{b_i - a_i} = k$$

$$\frac{I_{i+1}}{I_i} = k \quad , \quad \frac{I_{i+2}}{I_{i+1}} = k$$

odnosno $\displaystyle \frac{I_{i+2}}{I_i} = k^2$

Zbog simetrije

$$I_{i+2} = I_i - I_{i+1}$$

$$I_{i+2} + I_{i+1} - I_i = 0 \quad /: I_i$$

$$k^2 + k - 1 = 0$$

pozitivni korijen

$$k = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \approx 0{,}618$$

Nakon N iteracija dobiva se

$$I_N = k^N I_0$$

uz $I_0 = b - a$

Želi li se minimum lokalizirati s točnošću ε mora biti:

$$I_N \leq \varepsilon$$

$$k^N I_0 \leq \varepsilon$$

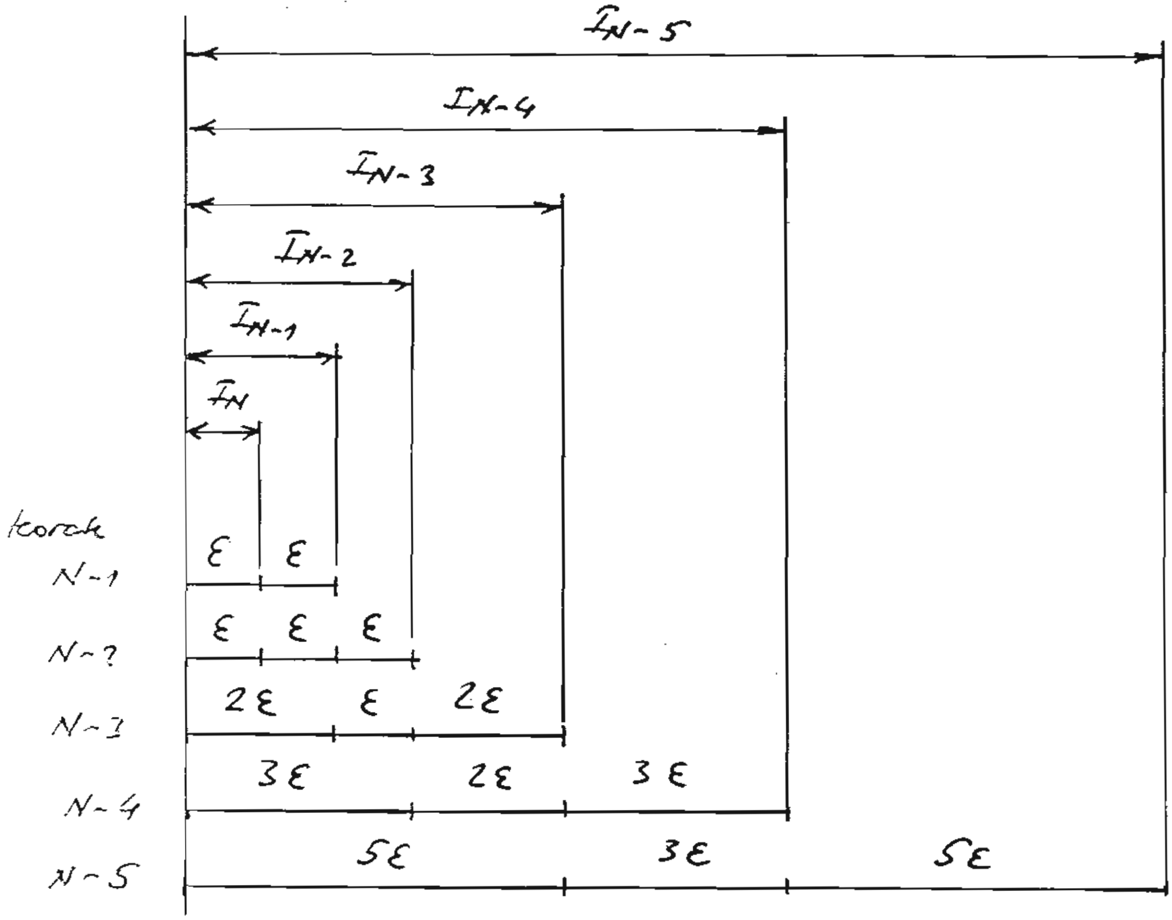
Uz pretpostavku da je $f(x)$ pozitivna može se skicirati jednostavna procedura.

```
funkcija Zlatni_rez (a, b, ε, x_min) {
    c = b - k * (b-a);
    d = a + k * (b-a);
    fc = f(c);   fd = f(d);
    dok je ((b-a) < ε) {
        ako je fc < fd {
            b = d ; d = c , c = b - k * (b-a);
            fd = f(c);  fc = f(c);
        }
        inače {
            a = c ; c = d ; d = a + k * (b-c);
            fc = fd ;  fd = f(d);
        }
    }
    x_min = (c+d)/2 ;
}
```

4.4.1. Fibonaccijev postupak

Zbog jednostavnijeg prikaza pretpostavimo da minimum leži uz rub intervala $[a,b]$.

Uz zadani ε može se poći od zadnjeg koraka, tj. intervala I_N



U koraku $N-1$ se redukcija obavlja tako da se postavi jedna točka bliže sredine i tako odluči o odbacivanju jednog od intervala širine ε

Koeficijenti uz ε su Fibonaccijevi brojevi

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

$$\varphi_0 = \varphi_1 = 1$$

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \varphi_{i-2}$$

korak

N-1 $\quad \frac{I_N}{I_{N-1}} = \frac{1}{2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} = 0,5$

N-2 $\quad \frac{I_{N-1}}{I_{N-2}} = \frac{2}{3} = \frac{\varphi_2}{\varphi_3} = 0.66$

N-3 $\quad \frac{I_{N-2}}{I_{N-3}} = \frac{3}{5} = \frac{\varphi_3}{\varphi_4} = 0.6$

N-4 $\quad \frac{I_{N-3}}{I_{N-4}} = \frac{5}{8} = \frac{\varphi_4}{\varphi_5} = 0.625$

$\vdots$

$i \quad \frac{I_{i+1}}{I_i} = \frac{\varphi_{N-i}}{\varphi_{N-i+1}}$

$\vdots$

korak 1 $\quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{\varphi_{N-1}}{\varphi_N}$

$$\frac{I_N}{I_1} = \prod_{i=1}^{N-1} \frac{\varphi_{N-i}}{\varphi_{N-i+1}} = \frac{1}{\varphi_N}$$

$I_1 = b-a$

$I_N = \varepsilon \qquad \varphi_N \geq \frac{b-a}{\varepsilon}$

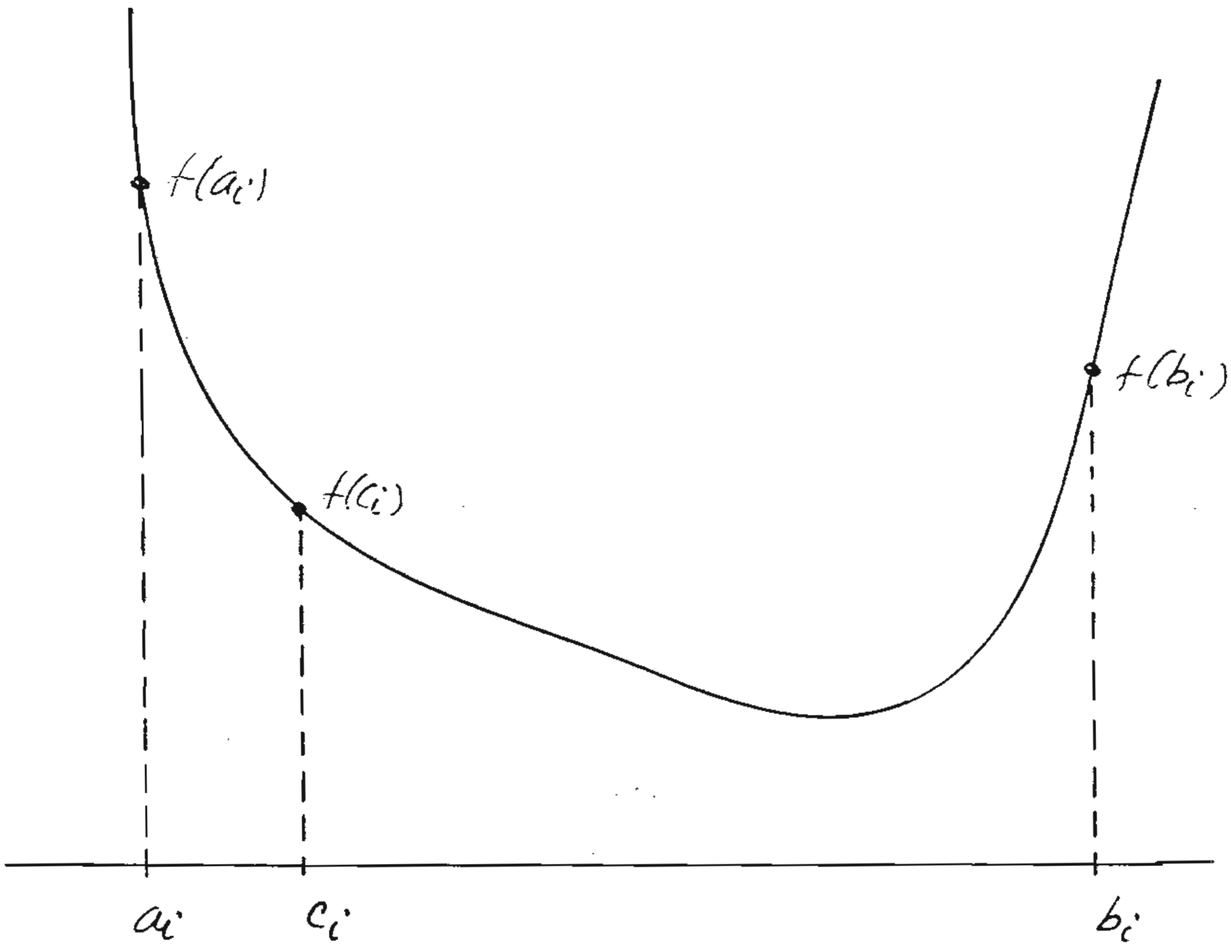
Treba najprije generirati Fibonaccijev niz do φ_N.

Unutarnje točke se postavljaju u

$$c = b - \frac{\varphi_{N-1}}{\varphi_N}(b-a)$$

$$d = a + \frac{\varphi_{N-1}}{\varphi_N}(b-a)$$

```
funkcija Fibonacci (a, b, ε, x_min) {
    fi1 = 1 ; fi2 = 2 , k = 1 ;
    dok je ((b-a)/ε > fi2 ) {
        k = k + 1 ;
        fipom = fi2 ; fi2 = fi2+fi1 ; f1 = fipom ;
    }
    d = a + fi1/fi2 * (b-a);
    c = b - fi1/fi2 * (b-a);
    fc = f(c) ; fd = f(d);
    za ( i = 1 , i++ , i ≤ k ) {
        fipom = fi1 ; f1 = fi2 - fi1 ; fi2 = fipom ;
        ako je ( fc < fd ) {
            b = d ; d = c ; c = b - fi1/f2 * (b-a);
            fd = fc ; fc = f(c) ;
        }
        inače {
            a = c ; c = d ; d = a + fi1/fi2 * (b-a);
            fc = fd ; fd = f(d) ;
        }
    }
    x_min = (b-a)/2 ;
}
```



f(a_i)
f(c_i)
f(b_i)
a_i
c_i
b_i

4.4.3. Postupak zasnovan na kvadratnoj interpolaciji

Zlatni rez i Fibonaccijev postupak konvergiraju linearno.

Zamisao kvadratne interpolacije:

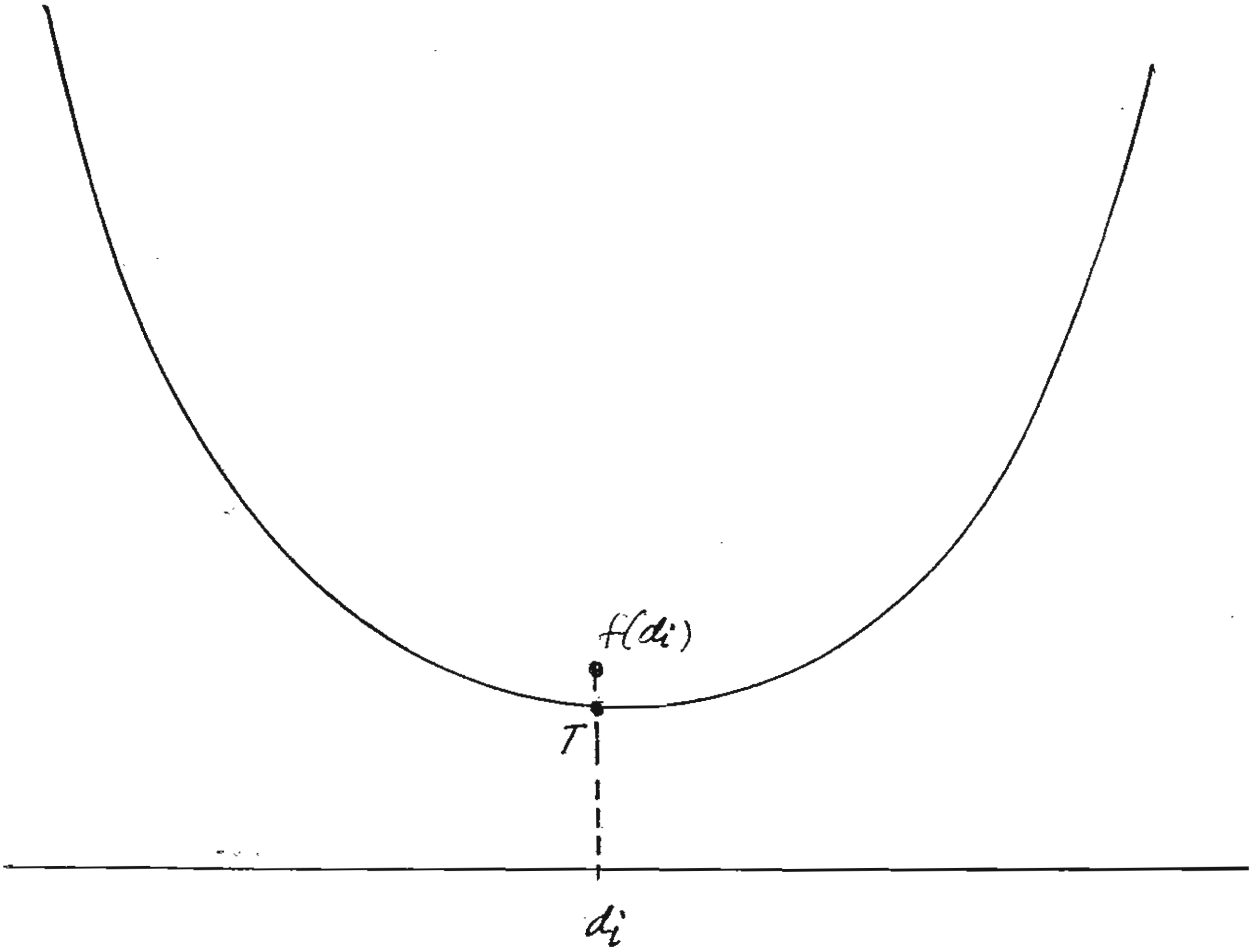
- dane granice unimodalnog intervala $[a, b]$ i jedna unutarnja točka c;
- kroz tri točke:

  $a, f(a)$

  $b, f(b)$

  $c, f(c)$

  provući parabolu
- za točku d odabrati apscisu tjemena parabole



Tjeme T ima apscisu

$$d_i = \frac{1}{2}\,\frac{(c_i^2 - b_i^2)f(a_i) + (a_i^2 - c_i^2)f(b_i) + (b_i^2 - a_i^2)f(c_i)}{(c_i - b_i)f(a_i) + (a_i - c_i)f(b_i) + (b_i - a_i)f(c_i)}$$

Postoje četiri mogućnosti odbacivanja rubnih subintervala

- za $d_i < c_i$

  uz $f(d_i) < f(c_i)$: $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = c_i$, $c_{i+1} = d_i$

  uz $f(d_i) > f(c_i)$: $a_{i+1} = d_i$, $b_{i+1} = b_i$, $c_{i+1} = c_i$

- za $d_i > c_i$

  uz $f(d_i) < f(c_i)$: $a_{i+1} = c_i$, $b_{i+1} = b_i$, $c_{i+1} = d_i$

  uz $f(d_i) > f(c_i)$: $a_{i+1} = a_i$, $b_{i+1} = d_i$, $c_{i+1} = c_i$

Postupak se zaustavlja kada je $b_i - a_i \leq \varepsilon$.

4.4.4. Pronalaženje unimodalnog intervala

Ako unimodalni interval nije poznat, već se polazi od neke točke x_0 , treba najprije ograditi minimum.

Jedan od mogućih postupaka:

- odabrati mali korak h , te izračunati $f(x_0)$ i $f(x_0 + h)$;

- ako je $f(x_0 + h) < f(x_0)$

računati funkciju u točkama

$$x_0 + 2h,\ x_0 + 4h,\ \dots,\ x_0 + 2^i h$$

dok ne postane $f(x_0 + 2^i \cdot h) > f(x_0 + 2^{i-1} h)$

ograda je tada: $a = x_0 + 2^{i-2} h$
$b = x_0 + 2^i h$

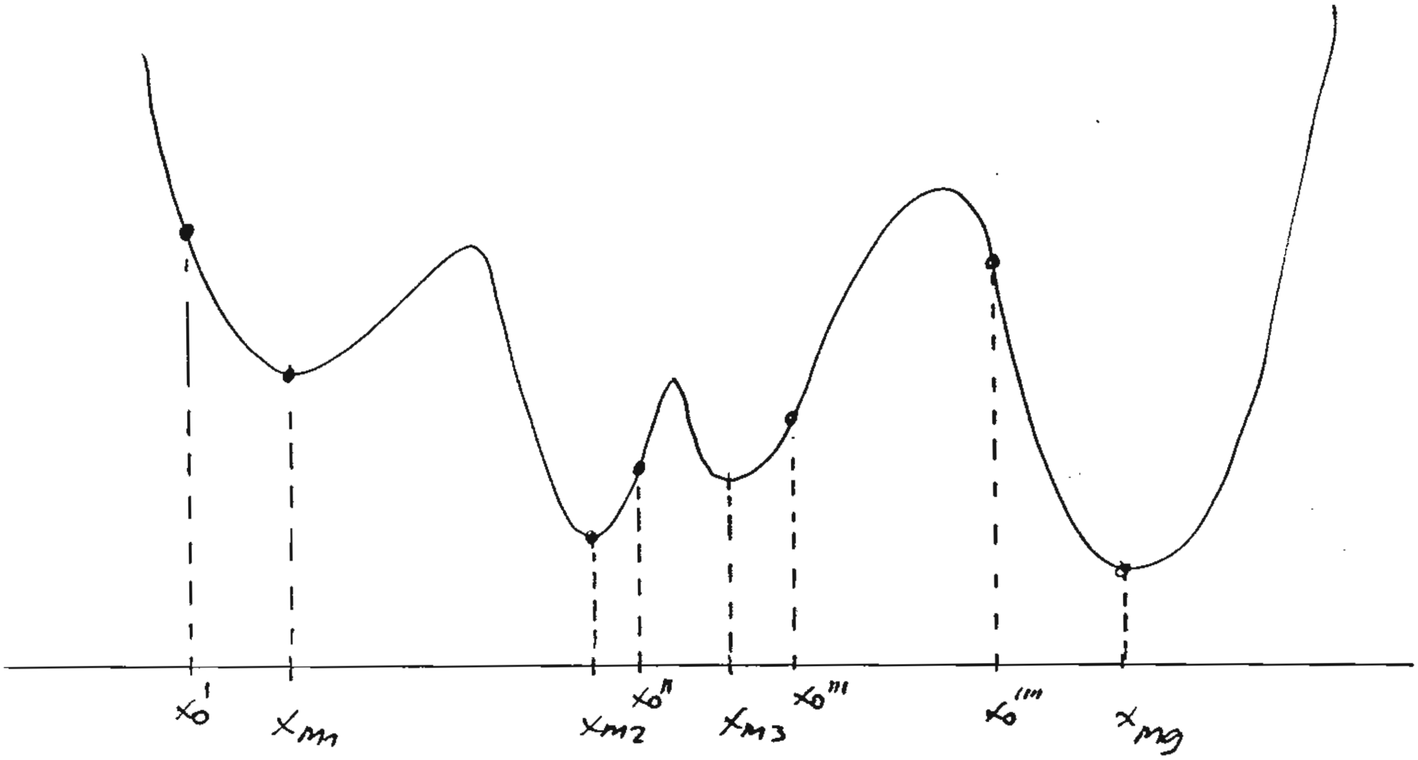
- ako je $f(x_0 + h) > f(x_0)$
  računati funkciju redom u točkama

$$x_0 - h,\ x_0 - 2h,\ x_0 - 4h,\ \dots\ x_0 - 2^i h$$

dok ne postane $f(x_0 - 2^i h) > f(x_0 - 2^{i-1} h)$

ograda je tada: $a = x_0 - 2^i h$
$b = x_0 - 2^{i-2} h$

Što se događa kada funkcija nije unimodalna?



Postupci ći odrediti lokalne minimume ovisno o odabranoj početnoj točki!

Moguće rješenje:

- odabrati više početnih točaka i usporediti dobivene minimume
- upotrebiti na početku veće korake, kako bi se „preskočilo" susjedno brdo

Te zamisli vode na posebne postupke o kojima će biti govora kasnije!

4.4.5. Određivanje minimuma na pravcu u višedimenzionalnom prostoru

Postupci za određivanje minimuma funkcije jedne varijable mogu poslužiti u postupcima minimiranja funkcija više varijabli.

Dana je funkcija $F(\underline{x})$, $\underline{x} = [x_1 x_2 \dots x_n]^t$ i točka $\underline{x}_0$.

Na neki način se odabere smjer pravca $\underline{v}$ u n-dimenzionalnom prostoru i traži minimum vrijednosti funkcije na tom pravcu, tj.

$$F(\underline{x}_0 + \lambda \underline{v})$$

Uz dani $\underline{x}_0$ i $\underline{v}$ jedina varijabla je λ

Jednim od postupaka za traženje minimuma (uz prethodno ograničavanje unimodalnog intervala) može se odrediti λ_m, odnosno točka

$$\underline{x}_m = \underline{x}_0 + \lambda_m \underline{v}$$

5.5. Postupci određivanja minimuma funkcija više varijabli bez upotrebe derivacija

5.5.1. Traženje u smjeru koordinatnih osi

Pretpostavke:

- funkcija je unimodalna
- dana je početna točka $\underline{x}_0$

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \vdots \\ x_{n0} \end{bmatrix}$$

- želi se lokalizirati minimum s pogreškom ε_i u smjeru $\underline{e}_i$ ($\underline{e}_i$ - jedinični vektor u smjeru osi x_i)
- Uvjet zaustavljanja postupka može biti

$$| x_{ij} - x_{i,j-1} | \le \varepsilon_i$$

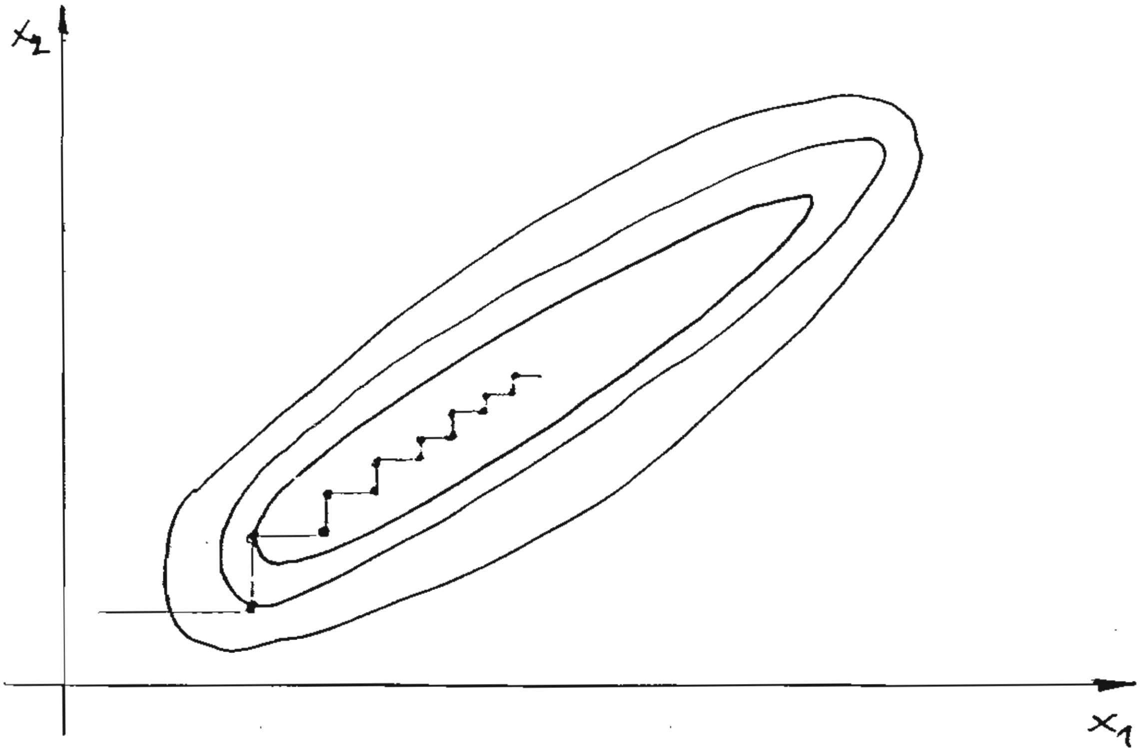
odnosno u vektorskom obliku

$$| \underline{x}_j - \underline{x}_{j-1} | \le \underline{\varepsilon}$$

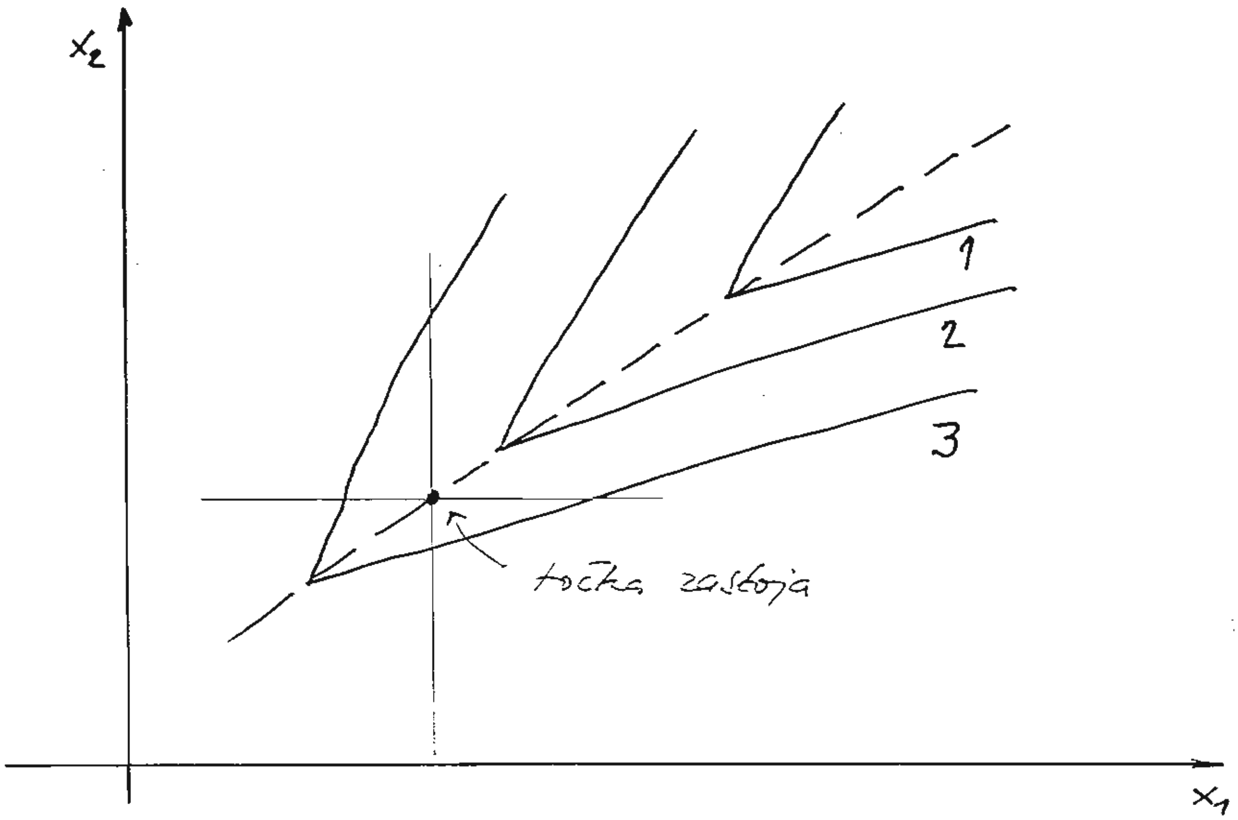
gdje j označava j-tu iteraciju postupka funkcija Koordinatno_traženje ($\underline{x}_0$, ε , $\underline{x}_m$) {

```
    x = x0 ;
    ponavljati {
        xs = x ;
        za ( i = 1, i <= n , i++ ) {
            naći λmin koji minimira F(x + λ ei);
            x = x + λmin ei ;
        } do ( |x - xs| <= ε );
    xm = x ;
}
```

Postupak je neprikladan za funkcije s „izduženim dolinama" koje nisu u smjeru koordinatnih osi.



Postupak može „zastati" na „oštrom rubu" funkcije cilja



5.5.2. Postupak po Hookeu i Jeevesu

Ideja: odrediti smjer najbrže promjene

Postupak ima dva dijela:

- istraživanje,
- kretanje u odabranom smjeru.

Dana je početna točka $\underline{x}_0$,
početni koraci $\underline{\Delta x}$

$$\underline{\Delta x} = \left[\Delta x_1 \; \Delta x_2 \; \cdots \; \Delta x_n \right]^t ,$$

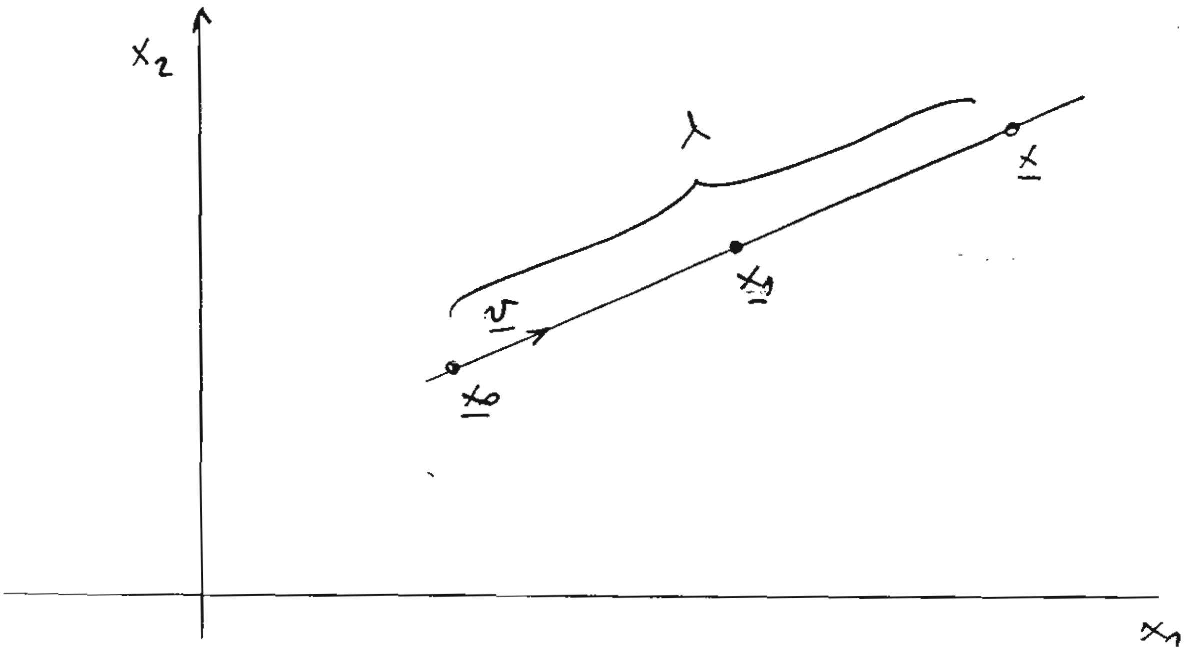
vektor pogrešaka

$$\underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1 \; \varepsilon_2 \; \dots \; \varepsilon_n]^t$$

- Istraživački dio postupka u okolini $\underline{x}_0$ određuje za $\pm \Delta x_i$ vrijednosti funkcije $F(\underline{x})$ i odabire točku s najmanjom vrijednošću. To je bazna točka $\underline{x}_1$.

- Kretanje u odabranom smjeru

$$\underline{x} = 2\underline{x}_1 - \underline{x}_0$$



$$\underline{v} = \frac{\underline{x}_1 - \underline{x}_0}{\| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|}$$

$$\underline{x} = \lambda \underline{v} + \underline{x}_0$$

uz $\lambda = 2 \| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|$

$$\underline{x} = 2 \| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \| \frac{\underline{x}_1 - \underline{x}_0}{\| \underline{x}_1 - \underline{x}_0 \|} + \underline{x}_0$$

$$= 2\underline{x}_1 - \underline{x}_0$$

```
funkcija Hook_Jeeves (x0, Δx, ε, xm) {
    xb = x0;
    ponavljati {
        x = xb;    F: = F(x);
        za (i=1, i<=n, i++) {
            xi = xi + Δxi;
            ako je (F(x) > F){
                xi = xi - 2 * Δxi;
                ako je (F(x) > F){
                    xi = xi + Δxi;
                }
            }
        }
        xr = 2 * x - xb;
        ako je F(xr) < F {
            xb = xr;
        }
        inače {
            Δx = 0.5 * Δx;
    } do (Δx <= 0.5 * ε)
    xm = xr;
}
```

• Oko točke $\underline{x}$ počinje novi istraživački dio ako $F(\underline{x}) < F(\underline{x}_1)$ i dolazi se do nove bazne točke.

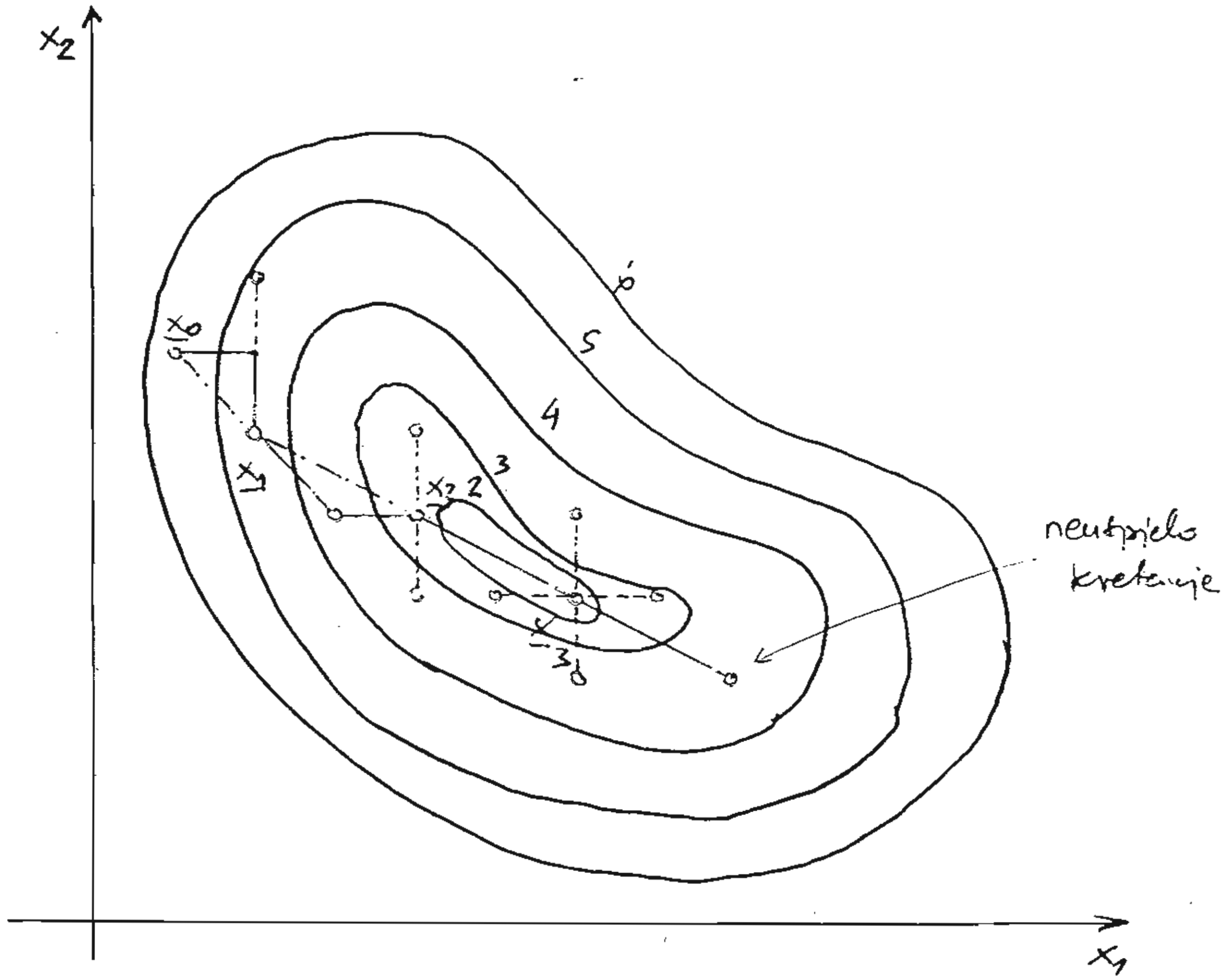
• Ako je $F(\underline{x}) > F(\underline{x}_1)$, vraća se u točku $\underline{x}_0$ i smanjuje $\underline{\Delta x}$, npr. na

$$\underline{\Delta x} := 0.5 * \underline{\Delta x}$$

i počinje postupak ispočetka.

• Postupak se zaustavlja kada je

$$\underline{\Delta x} \leq \underline{\varepsilon}$$



5.5.3. Postupak po Powellu s traženjem u međusobno konjugiranim smjerovima

Postupak se zasniva na dva svojstva kvadratne funkcije

$$F(\underline{x}) = c + \underline{b}^t \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{x}^t \underline{A} \underline{x}$$

- Prvo, minimum se pronalazi traženjem u n konjugiranih smjerova s obzirom na matricu $\underline{A}$
- Drugo, konjugirani smjer dobiva se spajanjem minimuma na dva paralelna pravca danog smjera.

Za simetričnu matricu $\underline{A}$ s n različitih svojstvenih vrijednosti (neka bude i pozitivno definitna) može se odrediti n nezavisnih smjerova koji se poklapaju sa smjerovima svojstvenih vektora. Odgovarajućom linearnom transformacijom moguće je odrediti skup od n linearno nezavisnih smjerova.

Smjerovi su konjugirani ako je

$$\underline{v}_i^t \underline{A} \underline{v}_j = 0 \qquad \text{za } i \neq j$$

$$\underline{v}_i^t \underline{A} \underline{v}_j > 0 \qquad \text{za } i = j$$

odnosno

$$\underline{v}_i^t \underline{A} \underline{v}_i > 0 \qquad \text{(matrica } \underline{A} \text{ je pozitivno definitna)}$$

Prvo svojstvo se preciznije može iskazati na slijedeći način:

- Neka je dana početna točka $\underline{x}_0$ i $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ konjugiranih smjerova
- Traži se minimum $\min_{\lambda} F(\underline{x}_0 + \lambda \underline{v}_1)$ i dobiva λ_1, te dolazi u točku

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \lambda_1 \underline{v}_1$$

- Traži se minimum $\min_{\lambda} F(\underline{x}_1 + \lambda \underline{v}_2)$ i dobiva λ_2, odnosno

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$$
$$= \underline{x}_0 + \lambda_1 \underline{v}_1 + \lambda_2 \underline{v}_2$$

- Nakon n traženja u n smjerova dobiva se točka

$$\underline{x}_n = \underline{x}_{n-1} + \lambda_n \underline{v}_n$$
$$= \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1}$$

Tvrdi se da je točka $\underline{x}_n$ točka minimuma funkcije, tj.

$$\underline{x}_n = -\underline{A}^{-1} \underline{b}$$

Dokaz:

Razvoj bilo koje funkcije $F(\underline{x})$ u Taylorov red u okolini točke $\underline{x}_j$ daje

$$F(\underline{x}_j + \underline{\Delta x}) = F(\underline{x}_j) + \underline{\nabla F(\underline{x}_j)}^t \underline{\Delta x} + \frac{1}{2} \underline{\Delta x}^t \underline{H} \, \underline{\Delta x}$$

Za kvadratnu funkciju

$$\underline{\nabla F(\underline{x}_j)} = \underline{A} \, \underline{x}_j + \underline{b}$$

$$\underline{H} = \underline{A}$$

Uzmemo li da je $\underline{\Delta x}$ promjena na pravcu smjera $\underline{v}_j$:

$$\underline{\Delta x} = \lambda \underline{v}_{j+1}$$

$$F(\underline{x}_j + \lambda \underline{v}_{j+1}) = F(\underline{x}_j) + (\underline{A} \, \underline{x}_j + \underline{b})^t \lambda \underline{v}_{j+1} + \frac{1}{2} \lambda \underline{v}_{j+1}^t \underline{A} \lambda \underline{v}_{j+1}$$

$$F(\underline{x}_j + \lambda \underline{v}_{j+1}) = F(\underline{x}_j) + \left[(\underline{A} \, \underline{x}_j + \underline{b})^t \underline{v}_{j+1}\right] \lambda + \left[\underline{v}_{j+1}^t \underline{A} \, \underline{v}_{j+1}\right] \frac{1}{2} \lambda^2$$

Treba naći λ koji minimizira $F(\underline{x}_j + \lambda \underline{v}_j)$

$$\frac{\partial F(\underline{x}_j + \lambda \underline{v}_{j+1})}{\partial \lambda} = (\underline{A} \, \underline{x}_j + \underline{b})^t \underline{v}_{j+1} + \underline{v}_{j+1}^t \underline{A} \, \underline{v}_{j+1} \lambda = 0$$

$$\lambda_{j+1} = - \frac{(\underline{A} \, \underline{x}_j + \underline{b})^t \underline{v}_{j+1}}{\underline{v}_{j+1}^t \underline{A} \, \underline{v}_{j+1}}$$

Izraz za λ_{j+1} se može pojednostaviti.

Naime (jer je $\underline{y}^t \underline{z} = \underline{z}^t \underline{y}$), brojnik je

$$(\underline{A}\,\underline{x}_j + \underline{b})^t \underline{v}_{j+1} = \underline{v}_{j+1}^t (\underline{A}\,\underline{x}_j + \underline{b})$$

$$= \underline{v}_{j+1}^t \left[\underline{A} \left(\underline{x}_0 + \sum_{i=0}^{j-1} \lambda_{i+1} \underline{v}_{i+1} \right) + \underline{b} \right]$$

$$= \underline{v}_{j+1}^t \underline{A}\,\underline{x}_0 + \underbrace{\sum_{i=0}^{j-1} \lambda_{i+1} \underline{v}_{j+1}^t \underline{A}\,\underline{v}_{i+1}}_{=0 \text{ zbog konjugiranosti}} + \underline{v}_{j+1}^t \underline{b}$$

$$= \underline{v}_{j+1}^t (\underline{A}\,\underline{x}_0 + \underline{b}),$$

pa je

$$\lambda_{j+1} = - \frac{\underline{v}_{j+1}^t (\underline{A}\,\underline{x}_0 + \underline{b})}{\underline{v}_{j+1}^t \underline{A}\,\underline{v}_{j+1}}$$

Točka $\underline{x}_n$ je

$$\underline{x}_n = \underline{x}_0 + \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1}$$

$$\underline{x}_n = \underline{x}_0 - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\underline{v}_{j+1}^t (\underline{A}\,\underline{x}_0 + \underline{b})}{\underline{v}_{j+1}^t \underline{A}\,\underline{v}_{j+1}} \cdot \underline{v}_{j+1}$$

$$\underline{x}_n - \underline{x}_0 = - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\underline{v}_{j+1}^t (\underline{A}\,\underline{x}_0 + \underline{b})}{\underline{v}_{j+1}^t \underline{A}\,\underline{v}_{j+1}} \cdot \underline{v}_{j+1}$$

Ako se lijeva i desna strana transponiraju i pomnože s $\underline{A}\,\underline{v}_i$ za bilo koji $1 \le i \le n$

$$(\underline{x}_n-\underline{x}_0)^t\underline{A}\,\underline{v}_i = -\sum_{\substack{j=0\\ i\neq j+1}}^{n-1}\frac{\underline{v}_{j+1}^t(\underline{A}\,\underline{x}_0+\underline{b})}{\underline{v}_{j+1}^t\underline{A}\,\underline{v}_{j+1}}\underbrace{\underline{v}_{j+1}^t\underline{A}\,\underline{v}_i}_{=0}-\frac{\underline{v}_i^t(\underline{A}\,\underline{x}_0+\underline{b})}{\underline{v}_i^t\underline{A}\,\underline{v}_i}\underline{v}_i^t\underline{A}\,\underline{v}_i$$

$$(\underline{x}_n-\underline{x}_0)^t\underline{A}\,\underline{v}_i = -\underline{v}_i^t(\underline{A}\,\underline{x}_0+\underline{b})$$

odnosno (matrica $\underline{A}$ je simetrična!)

$$\underline{v}_i^t\underline{A}\,(\underline{x}_n-\underline{x}_0) = -\underline{v}_i^t(\underline{A}\,\underline{x}_0+\underline{b})$$

$$\underline{A}\,(\underline{x}_n-\underline{x}_0) = -(\underline{A}\,\underline{x}_0+b)$$

$$\underline{x}_n = -\underline{A}^{-1}\underline{b}$$

Q. E. D.

Drugo svojstvo, tj. da spojnica dva minimuma na dva paralelna pravca određuje konjugirani smjer smjeru tih pravaca, dokazuje se mnogo jednostavnije.

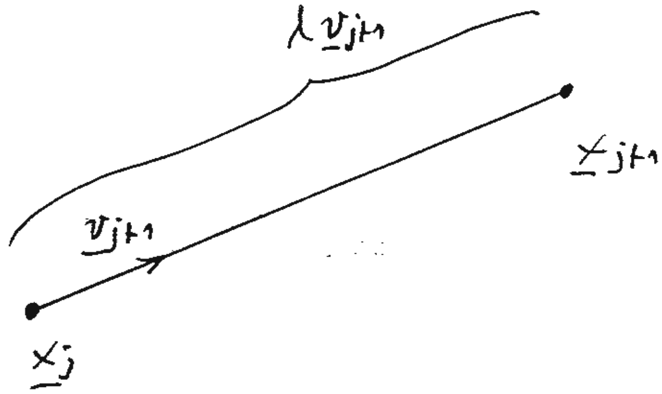
Polazimo od uvjeta za minimum na pravcu $\underline{x}_j+\lambda\,\underline{v}_{j+1}$

$$\frac{\partial F(\underline{x}_j+\lambda\underline{v}_{j+1})}{\partial\lambda} = (\underline{A}\,\underline{x}_j+\underline{b})^t\underline{v}_{j+1}+\underline{v}_{j+1}^t\underline{A}\,\underline{v}_{j+1}\lambda = 0$$

uz $$\lambda_{j+1} = -\frac{(\underline{A}\,\underline{x}_j+\underline{b})^t\underline{v}_{j+1}}{\underline{v}_{j+1}^t\underline{A}\,\underline{v}_{j+1}}$$

odnosno vrijedi:

$$\underline{v}_{j+1}^{t} \left(\underline{A}\,\underline{x}_j + \underline{b} \right) + \underline{v}_{j+1}^{t} \underline{A}\, \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1} = 0$$



$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \lambda \underline{v}_{j+1}$$

$$\lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1} = \underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j$$

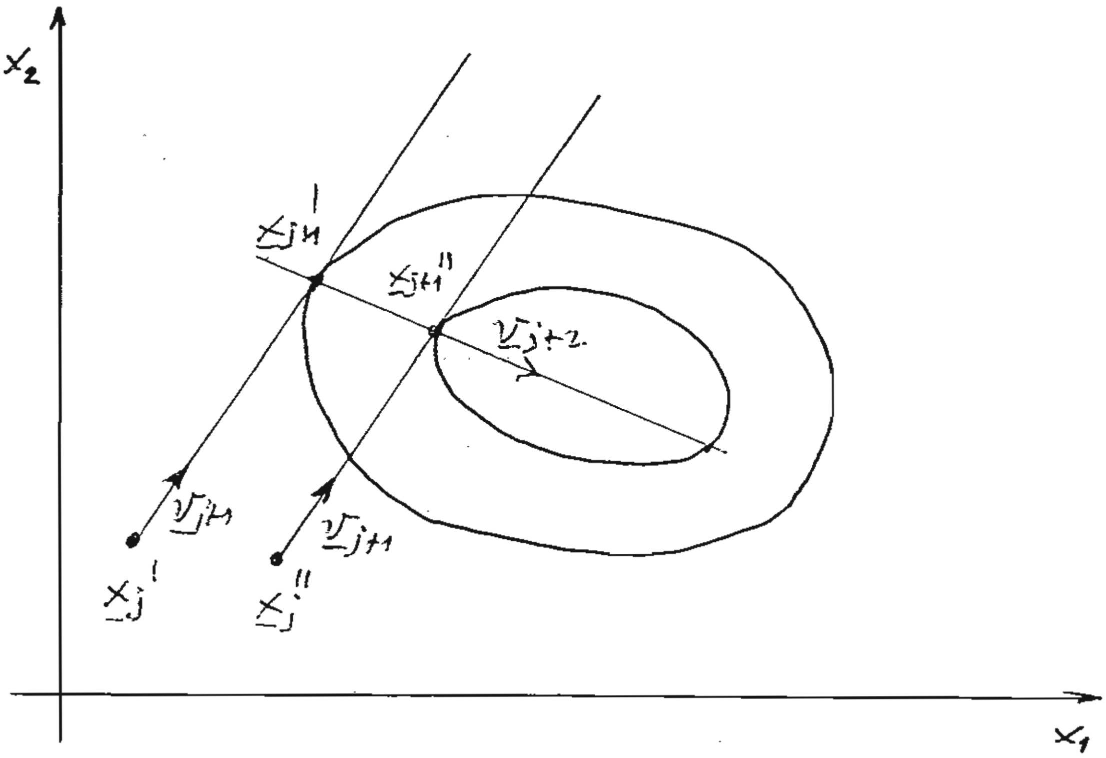
$$\underline{v}_{j+1}^{t} \left(\underline{A}\,\underline{x}_j + \underline{b} \right) + \underline{v}_{j+1}^{t} \underline{A} \left(\underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j \right) = 0$$

$$v_{j+1}^{t} \underbrace{\left(\underline{A}\,\underline{x}_{j+1} + \underline{b} \right)} = 0$$

gradijent u točki $\underline{x}_{j+1}$!

Usputna konstatacija: gradijent u točki $\underline{x}_{j+1}$ okomit je na smjer kojim se do točke došlo.

Kreće se u smjeru $\underline{v}_{j+1}$ iz dvije točke $\underline{x}_j'$ i $\underline{x}_j''$ i dolazi do minimuma $\underline{x}_{j+1}'$ i $\underline{x}_{j+1}''$



Vrijedi :

$$\underline{v}_{j+1}^t \left(\underline{A}\, x_{j+1}' + \underline{b} \right) = 0$$

$$\underline{v}_{j+1}^t \left(\underline{A}\, x_{j+1}'' + \underline{b} \right) = 0$$

odbijanjem

$$\underline{v}_{j+1}^t\, \underline{A} \left(\underline{x}_{j+1}'' - \underline{x}_{j+1}' \right) = 0$$

odnosno : uz $\underline{v}_{j+2} = \dfrac{\underline{x}_{j+1}'' - \underline{x}_{j+1}'}{\| \underline{x}_{j+1}'' - \underline{x}_{j+1}' \|}$

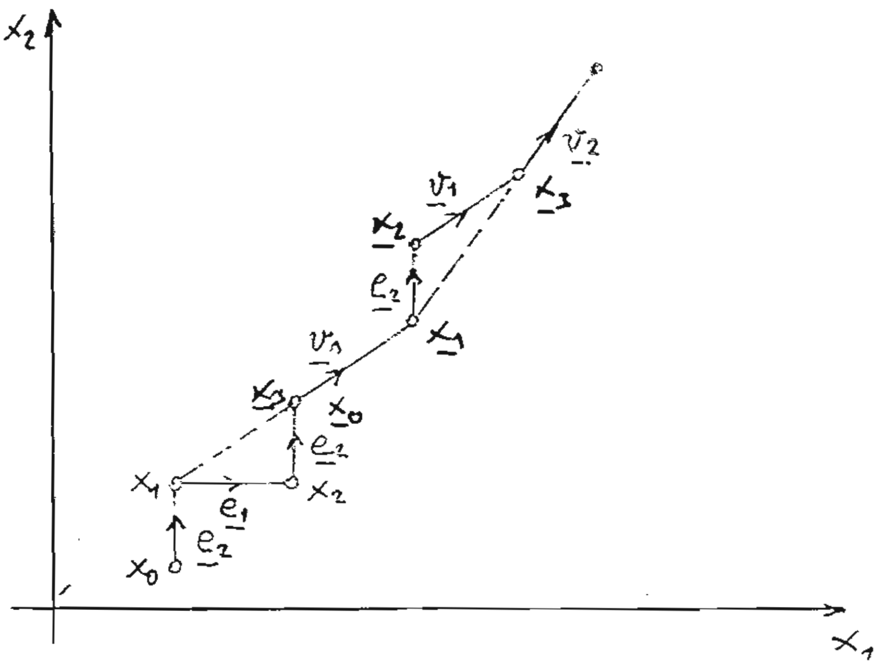
$$\underline{v}_{j+1}^t\, \underline{A}\, \underline{v}_{j+2} = 0$$

Q. E. D.

Opisana svojstva kvadratne funkcije mogu se primjeniti i kada funkcije nisu kvadratne.

Uz pretpostavku da se funkcija ponaša približno kao kvadratna, višekratno minimiranje u smjerovima koji su približno konjugirani trebalo bi voditi prema minimumu.

Za funkciju dvije varijable se zamisao može prikazati slikom



Polazi se od točke $\underline{x}_0$ i minimizira $F(\underline{x}_0 + \lambda \underline{e}_2)$

$$\underline{x}_1 = \underline{x}_0 + \lambda_0 \underline{e}_2$$

Zatim se ide u smjeru $\underline{e}_1$ i ponovno u smjeru $\underline{e}_2$ i dobiva točke $\underline{x}_2$ i $\underline{x}_3$.

Točke $\underline{x}_1$ i $\underline{x}_3$ su minimumi na paralelnim pravcima, te je smjer

$$\underline{v}_1 = \frac{\underline{x}_3 - \underline{x}_1}{\| \underline{x}_3 - \underline{x}_1 \|}$$

„konjugiran" smjeru $\underline{e}_2$

Točka $\underline{x}_3$ je početna točka nove iteracije u kojoj se odbacuje smjer $\underline{e}_1$ i traži minimum redom u smjerovima $\underline{v}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{v}_1$.

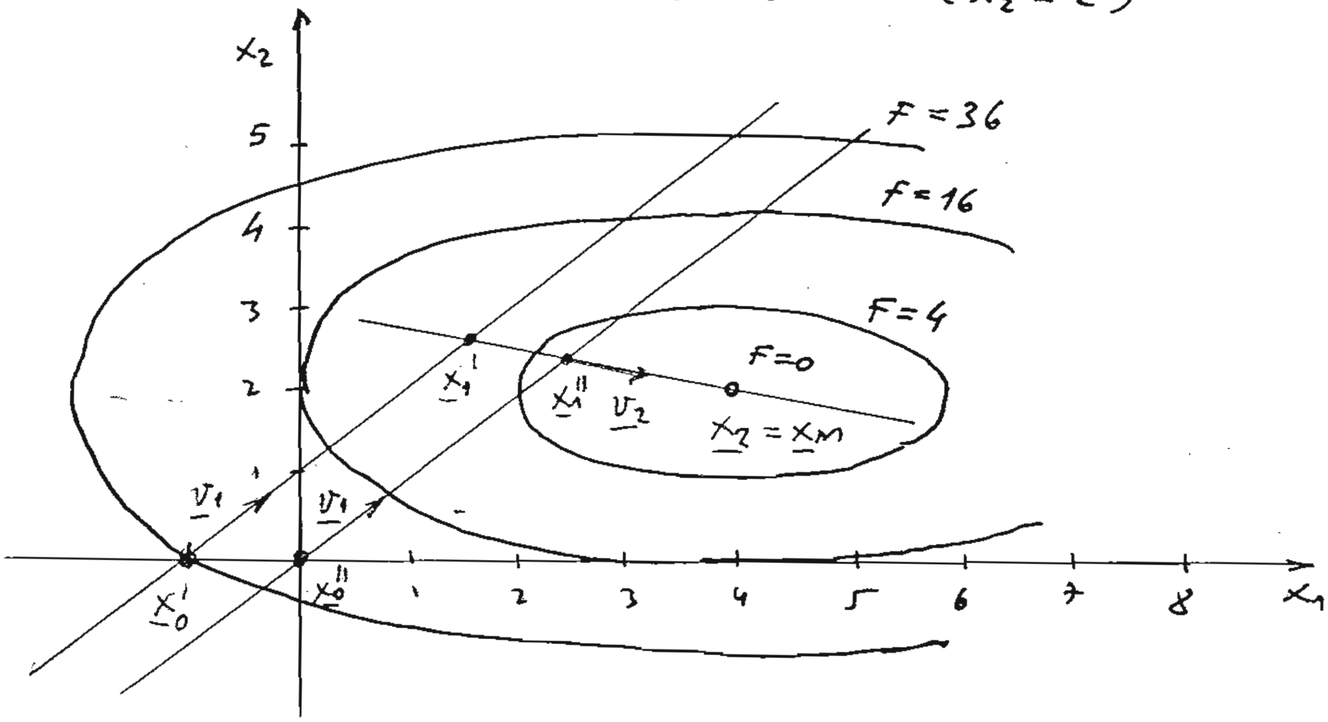
Poopćenje na n varijabli vodi na sljedeću funkciju:

```
funkcija Powell (x0, ε, xm) {
    za (j = 1, j <= n, j++) {
        vj = ej ;
    }
    ponavljati {
        odrediti λ0 koji minimira F(x0 + λ vn);
        x1 = x0 + λ0 vn ;
        za (j = 1, j <= n, j++ ) {
            odrediti λj koji minimira F(xj + λ vj);
            xj+1 = xj + λj vj ;
        }
        norma = || xn+1 - x1 || ;
        ako je (norma > ε) {
            za ( j = 1, j < n, j++) {
                vj = vj+1 ;
            }
            vn = ( xn+1 - x1 ) / norma ;
            x0 = xn+1 ;
        }
    } do ( norma < ε ) ;
    xm = xn+1 ;
}
```

Primjer:

Odrediti minimum funkcije

$$F(\underline{x}) = (x_1-4)^2 + 4(x_2-2)^2$$



$$\underline{x}_0' = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_0'' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$F(\underline{x}) = x_1^2 - 8x_1 + 16 + 4x_2^2 - 16x_2 + 16$$

$$= 16 - 8x_1 - 16x_2 + x_1^2 + 4x_2^2$$

$$F(\underline{x}) = 16 + \begin{bmatrix} -8 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} \qquad \underline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_1' = \underline{x}_0' + \lambda_1' \underline{v}_1$$

$$\underline{x}_1'' = \underline{x}_0'' + \lambda_1'' \underline{v}_1$$

$$\lambda_1' = -\frac{(\underline{A}\underline{x}_0' + \underline{b})^t \underline{v}_1}{\underline{v}_1^t \underline{A}\, \underline{v}_1} \qquad \lambda_1'' = -\frac{(\underline{A}\underline{x}_0'' + \underline{b})\, \underline{v}_1}{\underline{v}_1^t \underline{A}\, \underline{v}_1}$$

$$\underline{v}_1^t \underline{A}\, \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \\ 4\sqrt{2} \end{bmatrix} = 5$$

$$\underline{A}\underline{x}_0' + \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A}\underline{x}_0' + \underline{b})^t \cdot \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} -10 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -5\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -13\sqrt{2}$$

$$\lambda_1' = \frac{13\sqrt{2}}{5}$$

$$\underline{x}_1' = x_0' + \lambda_1' \underline{v}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{13\sqrt{2}}{5} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{13}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix}$$

$$\underline{A}\underline{x}_0'' + b = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix}$$

$$(A\underline{x}_0'' + \underline{b})^t \cdot v_1 = \begin{bmatrix} -8 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= -4\sqrt{2} - 8\sqrt{2} = -12\sqrt{2}$$

$$\lambda_1'' = \frac{12\sqrt{2}}{5}$$

$$\underline{x}_1'' = \underline{x}_0'' + \lambda_1'' \underline{v}_1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{12\sqrt{2}}{5} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_1'' - \underline{x}_1' = \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ \frac{13}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ -\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$$\| \underline{x}_1'' - \underline{x}_1' \| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\sqrt{17}}{5}$$

$$\underline{v}_2 = \frac{\underline{x}_1'' - \underline{x}_1'}{\| \underline{x}_1'' - \underline{x}_1' \|} = \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1'' + \lambda_2 \, \underline{v}_2$$

$$\underline{v}_2^t \, \underline{A} \, \underline{v}_2 = \left[\frac{4}{\sqrt{17}} \quad -\frac{1}{\sqrt{17}} \right] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{4}{17} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\frac{4}{\sqrt{17}} \quad -\frac{1}{\sqrt{17}} \right] \begin{bmatrix} \frac{8}{\sqrt{17}} \\ -\frac{8}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} = \frac{32}{17} + \frac{8}{17} = \frac{40}{17}$$

$$\underline{A} \, \underline{x}_1'' + \underline{b} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{96}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -8 \\ -16 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{16}{5} \\ \frac{16}{5} \end{bmatrix}$$

$$(\underline{A} \, \underline{x}_1'' + \underline{b})^t \cdot \underline{v}_2 = \left[-\frac{16}{5} \quad \frac{16}{5} \right] \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} = -\frac{64}{5\sqrt{17}} - \frac{16}{5\sqrt{17}} =$$

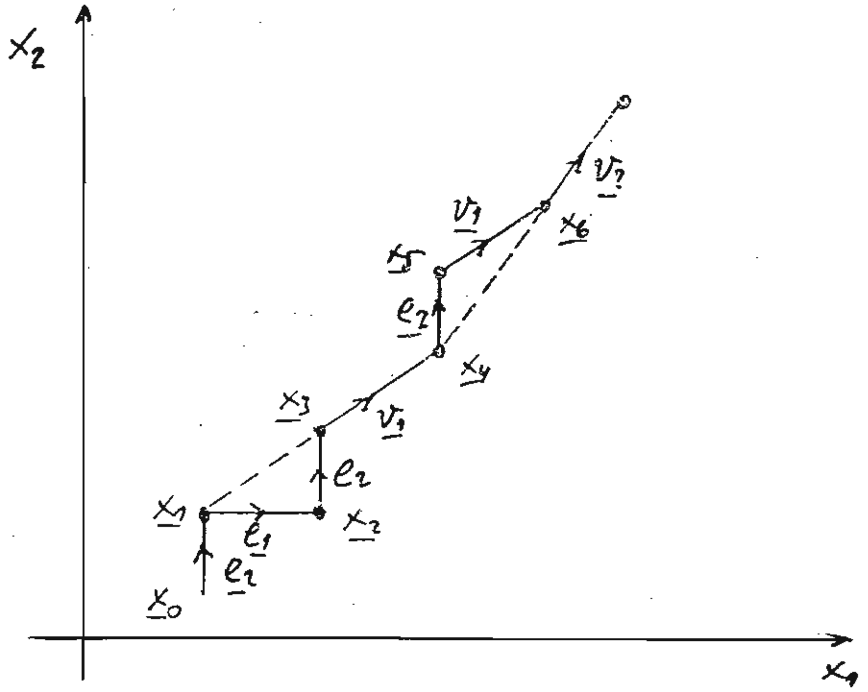
$$= -\frac{80}{5\sqrt{17}}$$

$$\lambda_2 = -\frac{-\frac{80}{5\sqrt{17}}}{\frac{40}{17}} = \frac{34}{5\sqrt{17}} = \frac{2\sqrt{17}}{5}$$

$$\underline{x}_2 = \underline{x}_1'' + \lambda_2 \, \underline{v}_2$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} + \frac{2\sqrt{17}}{5} \begin{bmatrix} \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{12}{5} \\ \frac{12}{5} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{8}{5} \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{20}{5} \\ \frac{10}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$



4.5.4. Simpleks postupak po Nelderu i Meadu

Simpleks je skup od n+1 točke koji u n-dimenzionalnom prostoru određuje n-dimenzionalnu tvorevinu.

Pravilni simpleks je onaj u kojemu su udaljenosti između točaka jednake.

U 2-dimenzionalnom prostoru : pravilni (istostranični) trokut

U 3-dimenzionalnom prostoru : pravilni (istostranični) tetraedar

Konstrukcija pravilnog simpleksa.

$\underline{x}_0$ - početna točka

t - razmak između točaka

$$\underline{x}_j = \underline{x}_0 + \underline{d}_j \qquad j = 1, \dots, n$$

$$\underline{d}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{d}_2 = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{d}_n = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_2 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_1 \end{bmatrix}$$

$$a_1 = \frac{t}{n\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} + n - 1 \right)$$

$$a_2 = \frac{t}{n\sqrt{2}} \left(\sqrt{n+1} - 1 \right)$$

$$\|\underline{x}_j - \underline{x}_0\| = \|\underline{d}_j\| = \sqrt{a_1^2 + (n-1)a_2^2}$$

$$a_1^2 + (n-1)a_2^2 =$$

$$= \frac{t^2}{2n^2}\left(n+1 + 2(n-1)\sqrt{n+1} + n^2 - 2n + 1\right)$$

$$+ (n-1)\frac{t^2}{2n^2}\left(n+1 - 2\sqrt{n+1} + 1\right) =$$

$$= \frac{t^2}{2n^2}\left(n^2 - n + 2 + 2(n-1)\sqrt{n+1}\right)$$

$$+ \frac{t^2}{2n^2}\left(n^2 + n - 2 - 2(n-1)\sqrt{n+1}\right) =$$

$$= t^2$$

$$\|\underline{x}_j - \underline{x}_0\| = t$$

$$\|\underline{x}_j - \underline{x}_i\| = \|d_j - d_i\| = \sqrt{2(a_1 - a_2)^2}$$

$$2(a_1 - a_2)^2 = 2 \cdot \frac{t^2}{2n^2}\left(\sqrt{n+1} + n - 1 - \right.$$

$$\left. - \sqrt{n+1} + 1\right)^2 = t^2$$

$$\|\underline{x}_j - \underline{x}_i\| = t$$

<u>Primjer</u>: $n = 2$ $\qquad a_1 = \frac{t}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} + 1)$

$\underline{x}_0 = \underline{0}$ $\qquad a_2 = \frac{t}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3} - 1)$

$t = 1$

$$\underline{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}_1 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1) \\ \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}+1) \end{bmatrix}$$

Funkcija cilja izračunava se u svim točkama simpleksa

$$F(\underline{x}_j) \qquad j = 0, 1, 2, \dots, n$$

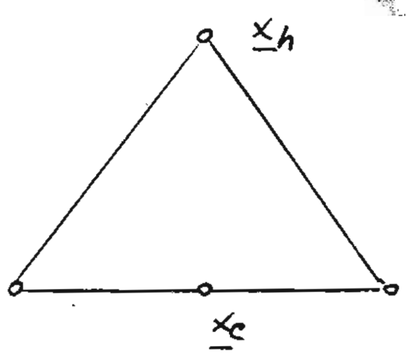
- Zatim se određuje točka $\underline{x}_h$ u kojoj je vrijednost funkcije najveća i najmanja, tj.

$$\forall j, j \neq h \quad F(\underline{x}_h) > F(\underline{x}_j)$$
$$\forall j, j \neq l \quad F(\underline{x}_l) < F(\underline{x}_j)$$

- Nakon toga se izračunava centroid ~~svih~~ točaka osim $\underline{x}_h$:

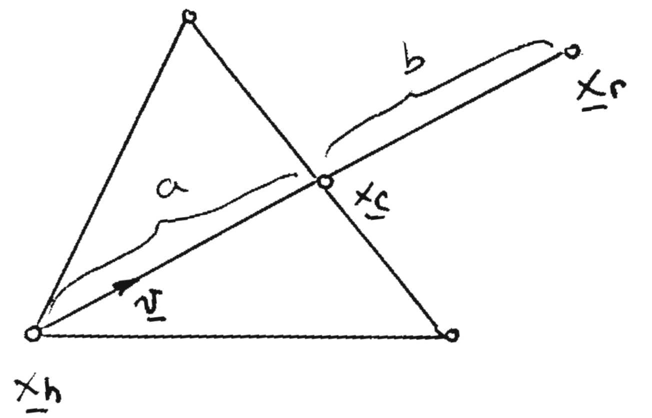
$$\underline{x}_c = \frac{1}{n} \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq h}}^{n} \underline{x}_j$$

U dvodimenzionalnom prostoru centroid je polovište stranice nasuprot vrha trokuta $\underline{x}_h$



- Definiraju se tri operacije :
  - refleksija
  - ekspanzija
  - kontrakcija

Refleksija



$$\underline{x}_c = \underline{x}_h + a \cdot \underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{1}{a}(\underline{x}_c - \underline{x}_h)$$

$$\underline{x}_r = \underline{x}_h + (a+b) \cdot \underline{v}$$

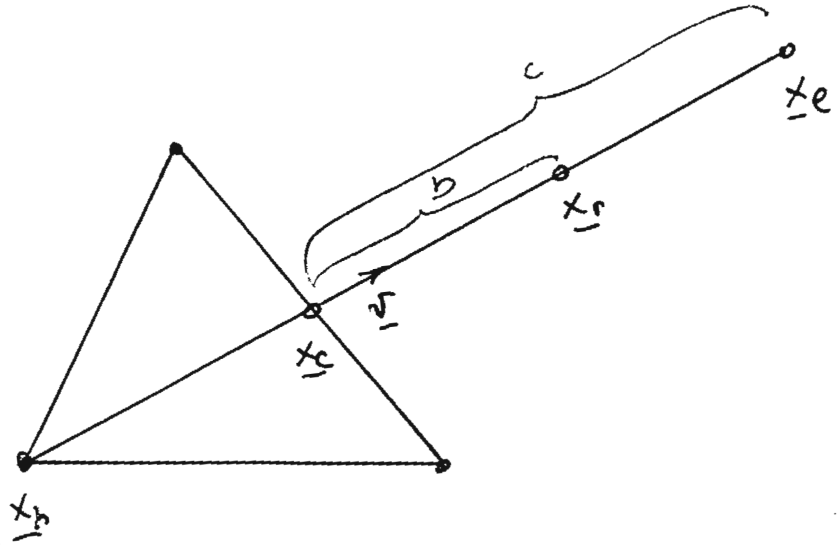
$$\underline{x}_r = \underline{x}_h + \left(1 + \frac{b}{a}\right)(\underline{x}_c - \underline{x}_h)$$

$$\underline{x}_r = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\underline{x}_c - \frac{b}{a}\underline{x}_h$$

koeficijent refleksije $\alpha = \dfrac{b}{a}$

$$\underline{\underline{x}_r = (1+\alpha)\,\underline{x}_c - \alpha\,\underline{x}_h}$$

Ekspanzija



$$\underline{x}_r = \underline{x}_c + b\,\underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{1}{b}(\underline{x}_r - \underline{x}_c)$$

$$\underline{x}_e = \underline{x}_c + c\,\underline{v}$$

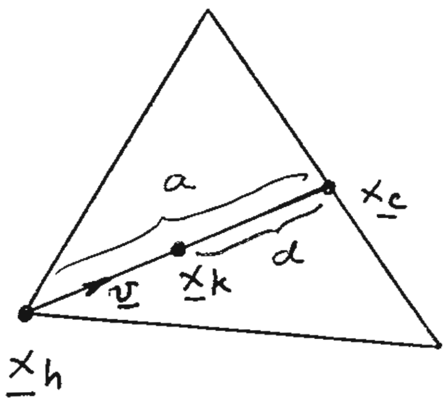
$$\underline{x}_e = \underline{x}_c + \frac{c}{b}(\underline{x}_r - \underline{x}_c)$$

$$\underline{x}_e = \left(1 - \frac{c}{b}\right)\underline{x}_c + \frac{c}{b}\underline{x}_r$$

Koeficijent ekspanzije $\gamma = \frac{c}{b}$

$$\underline{\underline{x}_e = (1-\gamma)\,\underline{x}_c + \gamma\,\underline{x}_r}$$

Kontrakcija



$$\underline{x}_c = \underline{x}_h + a \cdot \underline{v} \quad \Rightarrow \quad \underline{v} = \frac{1}{a}(\underline{x}_c - \underline{x}_h)$$

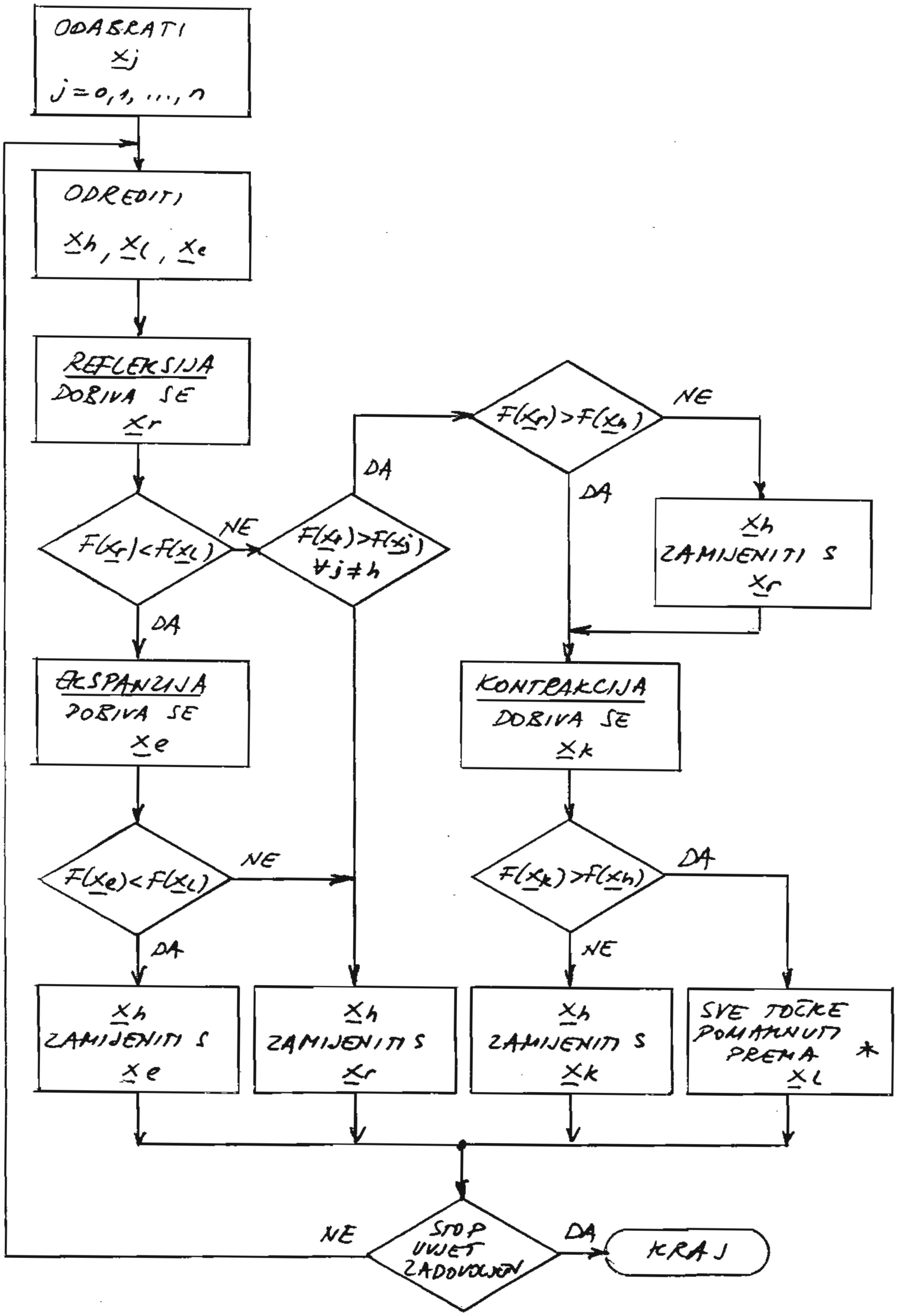
$$\underline{x}_k = \underline{x}_h + (a-d)\,\underline{v}$$

$$\underline{x}_k = \underline{x}_h + \left(1 - \frac{d}{a}\right)(\underline{x}_c - \underline{x}_h)$$

$$\underline{x}_k = \left(1 - \frac{d}{a}\right)\underline{x}_c + \frac{d}{a}\underline{x}_h$$

Koeficijent kontrakcije $\beta = \frac{d}{a}$

$$\underline{\underline{x}_k = (1-\beta)\,\underline{x}_c + \beta\,\underline{x}_h}$$



* npr. $\forall j \neq l$ $\quad \underline{x}_j' = 0.5 * (\underline{x}_l + \underline{x}_j)$

Kriteriji za zaustavljanje

$$\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=0}^{n}\left[F(\underline{x}_j)-F(\underline{x}_c)\right]^2} \leq \varepsilon$$

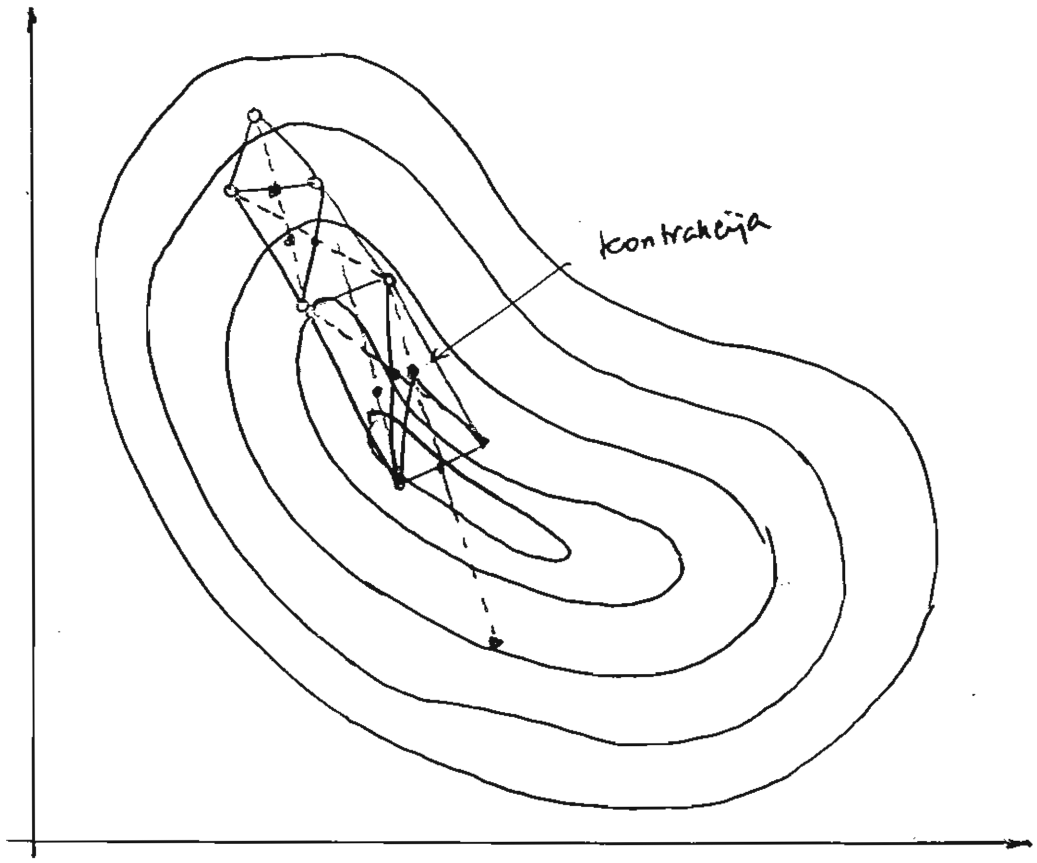
Pokazalo se da su prikladne vrijednosti:

$\alpha = 1$,

$\beta = 0.5$,

$\gamma = 2$.

Primjer:



4.6. Gradijentni postupci

4.6.1. Metoda najbržeg spusta

Lokalno gledano, najbrže smanjenje vrijednosti funkcije može se očekivati u smjeru suprotnom od smjera gradijenta, tj. u smjeru

$$\underline{v} = - \frac{\nabla F(\underline{x}_j)}{\| \nabla F(\underline{x}_j) \|}$$

Traženjem minimuma po λ

$$F(\underline{x}_j + \lambda \underline{v}_{j+1})$$

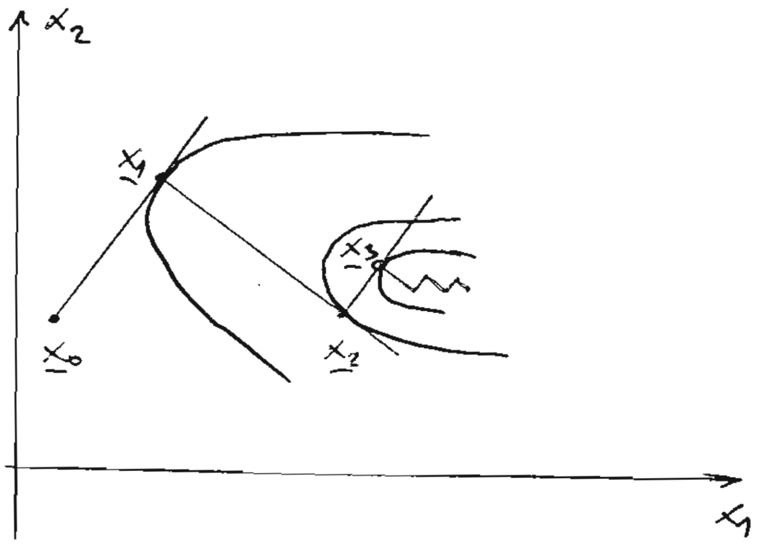
dobiva se λ_{j+1} i

$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \lambda_{j+1} \underline{v}_{j+1}$$

Globalno gledano, metoda najbržeg spusta ima loša svojstva!

Jedan od razloga proizlazi iz činjenice da je za kvadratne funkcije gradijent u novoj točki $\underline{x}_{j+1}$ okomit na smjer $\underline{v}_{j+1}$

(vidi dokaz drugog svojstva za Powellov postupak)



Nastaje slična pojava onoj kod traženja u smjeru koordinatnih osi.

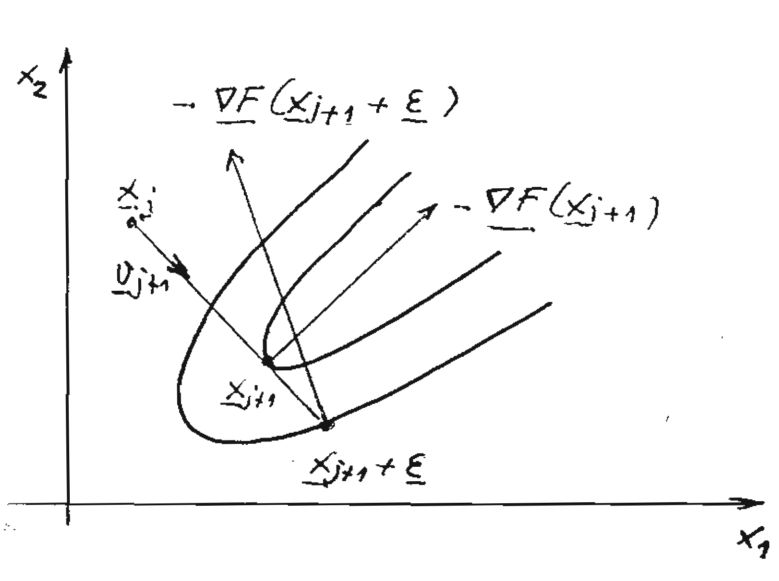
Drugi razlog je osjetljivost na konačnu točnost određivanja minimuma na pravcu.

Naime, točka $\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \lambda_{j+1}\underline{v}_{j+1}$ određuje se točnošću $\underline{\Delta x} \le \underline{\varepsilon}$,

a gradijenti $\underline{\nabla F}(\underline{x}_{j+1})$ i

$\underline{\nabla F}(\underline{x}_{j+1} + \underline{\varepsilon})$

mogu se znatno razlikovati



5.6.2. Newton – Raphsonov postupak

Pri razmatranju osnovnih svojstava kvadratne funkcije razmatran je razvoj u Taylorov red oko točke minimuma $\underline{x}_m$.

Na isti način može se razviti funkcija u red oko točke $\underline{x}_0$ blizu minimuma

$$F(\underbrace{\underline{x}_0 + \underline{\Delta x}}_{\underline{x}}) = F(\underline{x}_0) + (\underline{\nabla F}(\underline{x}_0))^t \underline{\Delta x} + \frac{1}{2} \underline{\Delta x}^t \underline{H}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \underline{\Delta x}$$

gradijent te funkcije je

$$\underline{\nabla F}(\underline{x}) = \underline{\nabla F}(\underline{x}_0) + \underline{H}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot \underline{\Delta x}$$

Uvjet za minimum

$$\underline{\nabla F}(\underline{x}) = \underline{0} = \nabla F(\underline{x}_0) + \underline{H}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot \underline{\Delta x} = 0$$

$$\underline{\Delta x} = - \underline{H}^{-1}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \cdot \underline{\nabla F}(\underline{x}_0)$$

ili

$$\underline{x} = \underline{x}_0 - \underline{H}^{-1}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_0} \underline{\nabla F}(\underline{x}_0)$$

Za funkcije koje nisu kvadratne točka $\underline{x}$ je samo približenje minimuma, tj. ako se kreće od neke točke $\underline{x}_j$, dobiva se

$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j - \underline{H}^{-1}\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_j} \cdot \underline{\nabla F}(\underline{x}_j)$$

Daljnje unapređenje :

$$\underline{H}^{-1}\,\underline{\nabla F} \quad \text{određuje smjer}$$

$$\underline{v}_{j+1} = -\frac{\underline{H}^{-1}\cdot\underline{\nabla F}(\underline{x}_j)}{\|\underline{H}^{-1}\,\underline{\nabla F}(\underline{x}_j)\|}$$

i po λ minimizira funkcija $F(\underline{x}_j + \lambda\,\underline{v}_{j+1})$,

te dobiva $\quad \underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \lambda_{j+1}\,\underline{v}_{j+1}$

Nedostaci :

- Treba „znati" druge parcijalne derivacije u točki $\underline{x}_j$

$$\underline{H} = \left.\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}\right|_{\underline{x}=\underline{x}_j}$$

- U svakoj iteraciji treba invertirati matricu $\underline{H}$.

5.6.3. Postupak po Fletcheru i Powellu

Postupak po Fletcheru i Powellu zasniva se na Newton-Raphsonovu postupku s tim da se matrica drugih parcijalnih derivacija ne mora izračunavati neposredno, već se njezina inverzija aproksimira tijekom postupka, tj. u j-toj iteraciji je

$$\underline{G}_j \approx \underline{H}_j^{-1}$$

$$\text{uz} \quad \underline{H}_j = H\Big|_{\underline{x}=\underline{x}_j}$$

Matrica $\underline{G}_j$ s gradijentom $\nabla \underline{F}(\underline{x}_j)$ određuje smjer $\underline{v}_{j+1}$

$$\underline{v}_{j+1} = - \frac{\underline{G}_j \nabla \underline{F}(\underline{x}_j)}{\| \underline{G}_j \nabla \underline{F}(\underline{x}_j) \|}$$

Kako se izgrađuje $\underline{G}_j$?

Razvoj funkcije $F(\underline{x})$ u okolini točke $\underline{x}_j$ daje

$$F(\underline{x}) = F(\underline{x}_j) + [\nabla \underline{F}(\underline{x}_j)]^t \underline{\Delta x} + \frac{1}{2} \underline{\Delta x}^t \underline{H}_j \underline{\Delta x}$$

gradijent te funkcije je

$$\nabla \underline{F}(\underline{x}) = \nabla \underline{F}(x_j) + \underline{H}_j \underline{\Delta x}$$

Ako je $\underline{x} = \underline{x}_{j+1}$, onda je $\underline{\Delta x}_j = \underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j$ i

$$\nabla \underline{F}(\underline{x}_{j+1}) = \nabla \underline{F}(\underline{x}_j) + \underline{H}_j (\underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j)$$

Uvodimo oznake:

$$\nabla F(\underline{x}_j) = \underline{\nabla F}_j$$

$$\nabla F(\underline{x}_{j+1}) = \underline{\nabla F}_{j+1}$$

$$\underline{\nabla F}_{j+1} - \underline{\nabla F}_j = \underline{\Delta g}_j$$

$$\underline{x}_{j+1} - \underline{x}_j = \underline{\Delta x}_j \,,$$

te je:

$$\underline{\nabla F}_{j+1} - \underline{\nabla F}_j = \underline{H}_j \, \underline{\Delta x}_j$$

ili:

$$\underline{\Delta g}_j = \underline{H}_j \, \underline{\Delta x}_j$$

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{H}_j^{-1} \, \underline{\Delta g}_j$$

Kada bi funkcija bila kvadratna matrica $\underline{H}$ bila bi konstantna. Za funkcije koje se ponašaju približno kvadratno ona se sporo mijenja.

Aproksimacija $\underline{G}_j \approx \underline{H}_j^{-1}$, može se preimenovati u

$$\underline{G}_{j+1} = \underline{H}_j^{-1} \,,$$

odnosno

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{G}_{j+1} \, \underline{\Delta g}_j$$

Uz

$$\underline{G}_{j+1} = \underline{G}_j + \underline{\Delta G}_j$$

$$\underline{\Delta x}_j = \underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j + \underline{\Delta G}_j \, \underline{\Delta g}_j$$

ili:

$$\underline{\Delta G}_j \, \underline{\Delta g}_j = \underline{\Delta x}_j - \underline{G}_j \, \underline{\Delta x}_j$$

To znači:

- polazi se od točke $\underline{x}_j$ uz dani $\underline{G}_j$ i $\underline{DF}_j$.

- traži se minimum po λ na pravcu

$$\min_{\lambda} F\left(\underline{x}_j + \lambda \frac{\underline{G}_j \underline{DF}_j}{\| \underline{G}_j \underline{DF}_j \|}\right)$$

i dolazi u točku

$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \lambda_{j+1} \frac{\underline{G}_j \underline{DF}_j}{\| \underline{G}_j \underline{DF}_j \|}$$

Pritom se može izbjeći normiranje, ako se umjesto jediničnog vektora $\underline{\sigma}_{j+1}$ koristi vektor

$$\underline{u}_{j+1} = - \underline{G}_j \underline{DF}_j ,$$

te je

$$\min_{\varkappa} F(\underline{x}_j + \varkappa \underline{u}_{j+1})$$

$$\underline{x}_{j+1} = \underline{x}_j + \varkappa_{j+1} \underline{u}_{j+1}$$

- u točki $\underline{x}_{j+1}$ izračunava se $\underline{DF}_{j+1}$ i zna se

$$\Delta \underline{x}_j \quad i \quad \Delta \underline{g}_j$$

U jednadžbi je nepoznato $\Delta \underline{G}_j$

$$\underbrace{\Delta \underline{G}_j}_{\text{nepoznato}} \Delta \underline{g}_j = \Delta \underline{x}_j - \underline{G}_j \Delta \underline{g}_j$$

Ova jednadžba ima opće rješenje

$$\Delta \underline{G}_j = \frac{\Delta \underline{x}_j \underline{z}^t}{\underline{z}^t \Delta \underline{g}_j} - \frac{\underline{G}_j \Delta \underline{g}_j \underline{y}^t}{\underline{y}^t \Delta \underline{g}_j}$$

gdje su $\underline{z}$ i $\underline{y}$ proizvoljni vektori.

Izborom vektora $\underline{z}$ i $\underline{y}$ dobivaju se različite varijante pothepaka.

Fletcher i Powell odabrali su

$$\underline{y} = \underline{G}_j \underline{\Delta g}_j$$

$$\underline{z} = \underline{\Delta x}_j$$

na temelju svojstva da se uz $\underline{G}_0 = \underline{U}$ za kvadratnu funkciju rješenje pronalazi u n iteracija.

Tako je

$$\underline{\Delta G}_j = \frac{\underline{\Delta x}_j \, \underline{\Delta x}_j^t}{\underline{\Delta x}_j^t \, \underline{\Delta g}_j} - \frac{\underline{G}_j \underline{\Delta g}_j \, (\underline{G}_j \underline{\Delta g}_j)^t}{(\underline{G}_j \underline{\Delta g}_j)^t \, \underline{\Delta g}_j}$$

Ako je $\underline{G}_j$ simetrična matrica, onda je i $\underline{\Delta G}_j$ simetrična, jer je

$$\underline{a}\,\underline{a}^t = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} [a_1 \, a_2 \dots a_n] = \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_1 a_2 & a_2^2 & & a_2 a_n \\ \vdots & & & \\ a_1 a_n & a_2 a_n & \dots & a_n^2 \end{bmatrix}$$

Stoga je

$$(\underline{G}_j \underline{\Delta g}_j)^t = \underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j^t = \underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j$$

$$\underline{G}_j^t = \underline{G}_j$$

$$\underline{\Delta G}_j = \underbrace{\frac{\underline{\Delta x}_j \, \underline{\Delta x}_j^t}{\underline{\Delta x}_j^t \, \underline{\Delta g}_j}}_{\text{Skalarni produkt}} - \underbrace{\frac{\underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j \, \underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j}{\underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j}}_{\text{kvadratna forma}}$$

$$\underline{G}_{j+1} = \underline{G}_j + \underline{M}_j - \underline{N}_j$$

$$\underline{M}_j = \frac{\underline{\Delta x}_j \, \underline{\Delta x}_j^t}{\underline{\Delta x}_j^t \, \underline{\Delta g}_j}$$

$$\underline{N}_j = \frac{\underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j \, \underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j}{\underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j}$$

Ako je $\underline{G}_0 = \underline{E}$ (jedinična matrica)

$$\underline{G}_j = \underline{E} + \sum_{i=0}^{j} \underline{M}_i - \sum_{i=0}^{j} \underline{N}_i$$

Za kvadratnu funkciju

$$F(\underline{x}) = c + \underline{b}^t \underline{x} + \frac{1}{2} \underline{x}^t \underline{A} \, \underline{x}$$

se može pokazati da su smjerovi $\underline{v}_j$ odnosno $\underline{u}_j$, uz $j = 1, 2, \ldots, n$ konjugirani s obzirom na matricu $\underline{A}$ i da se nakon n iteracija dobiva

$$\underline{G}_n = \underline{E} + \sum_{i=0}^{n-1} \underline{M}_i - \sum_{i=0}^{n-1} \underline{N}_i$$

uz

$$\underline{M}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\underline{\Delta x}_j \, \underline{\Delta x}_j^t}{\underline{\Delta x}_j^t \, \underline{\Delta g}_j} = \underline{A}^{-1}$$

$$\underline{N}_n = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j \, \underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j}{\underline{\Delta g}_j^t \, \underline{G}_j \, \underline{\Delta g}_j} =$$

i

$$\underline{G}_n = \underline{E} + \underline{A}^{-1} - \underline{E} = \underline{A}^{-1}$$

Fletcher i Powell predložili su kriterij za zaustavljanje

$$\frac{F(\underline{x}_{j+1}) - F(\underline{x}_j)}{F(\underline{x}_j)} \leq eps$$

i

$$\forall i \qquad \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j}}{x_{i,j}} \leq \varepsilon_i$$

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

```
funkcija Fletcher_Powell (x0, eps, e, xm ){
    j = 0 ;  xj = x0 ;  Gj = E ;
    ∇Fj = gradijent_F( xj );
    ponavljati {
        minimirati funkciju  F( xj + α Gj ∇Fj );
        xj+1 = xj + αj+1 Gj ∇Fj ;
        ako je((( F(xj+1) - F(xj))/F(xj) > eps) ||
                ( ∃i , (xi,j+1 - xi,j)/xi,j > εi )) {
            Δxj = xj+1 - xj ;
            ∇Fj+1 = gradijent_F( xj+1 );
            Δgj = ∇Fj+1 - ∇Fj ;
            Mj = Δxj Δxj^t / Δxj^t Δgj ;
            Nj = Gj Δgj Δgj^t Gj / Δgj^t Gj Δgj ;
            Gj+1 = Gj + Mj - Nj ;
        }
    } do ((( F(xj+1) - F(xj))/F(xj) < eps ) &&
            ( ∀i , ( xi,j+1 - xi,j)/xi,j < εi )) ;
    xm = xj+1 ;
}
```

4.7. Određivanje minimuma funkcija više varijabli s ograničenjima

4.7.1. Problem optimiranja s ograničenjima

Uz zadanu funkciju cilja $F(\underline{x})$ u problemima optimiranja pojavljuju se i ograničenja.

Ograničenja mogu biti dvojaka:

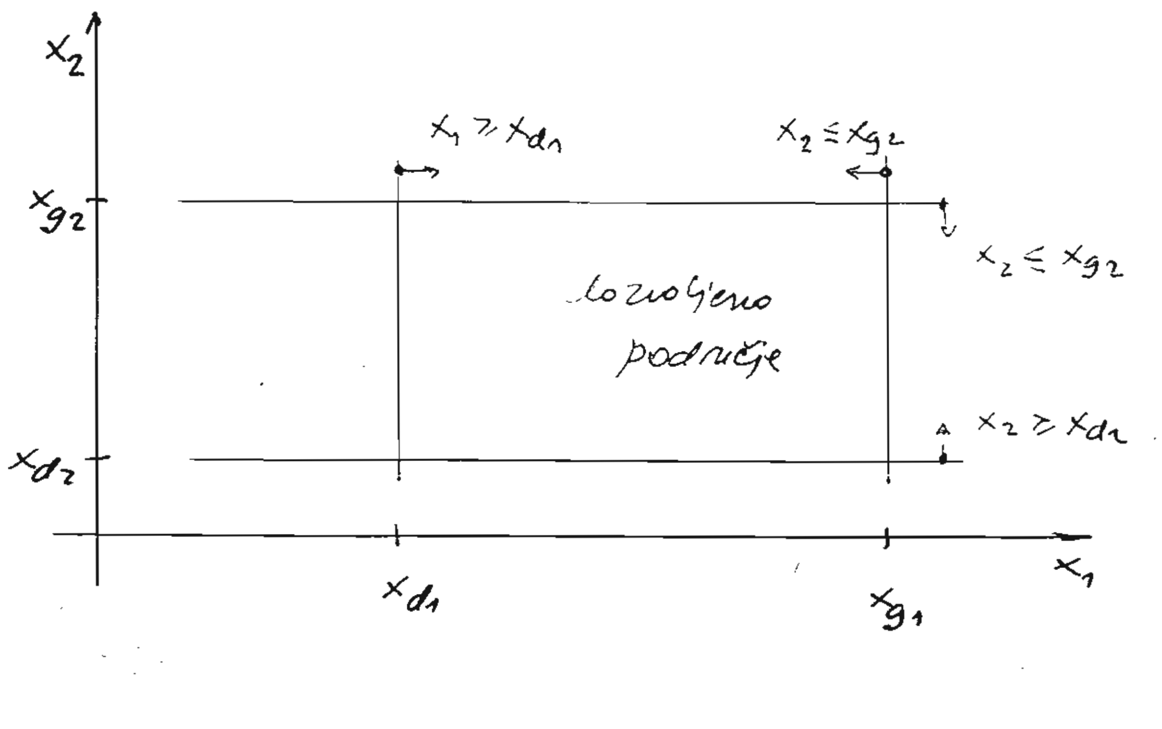
- eksplicitna ograničenja,
- implicitna ograničenja.

Eksplicitna ograničenja izražavaju se donjom i gornjom granicom pojedinog parametra:

$\forall i \qquad x_{di} \leq x_i \leq x_{gi}$

ili

$$\underline{x}_d \leq \underline{x} \leq \underline{x}_g$$

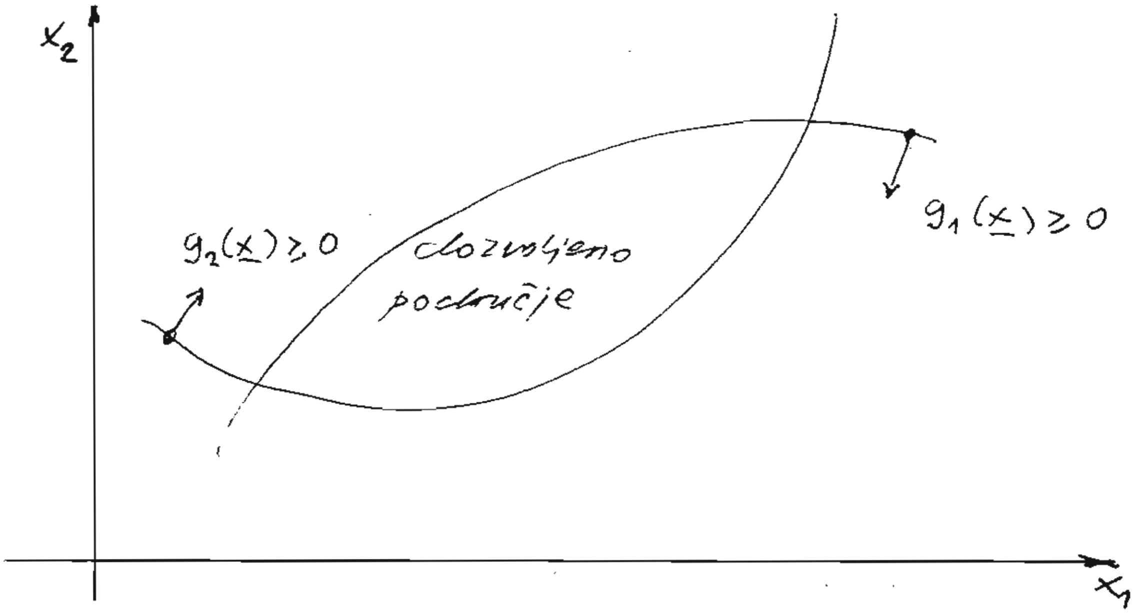


Implicitna ograničenja moguće svesti na dva oblika:

- ograničenja u obliku nejednadžbi,
- ograničenja u obliku jednadžbi.

Ograničenja u obliku nejednadžbi

$$g_i(\underline{x}) \geq 0 \qquad i = 1, 2, \dots, l$$



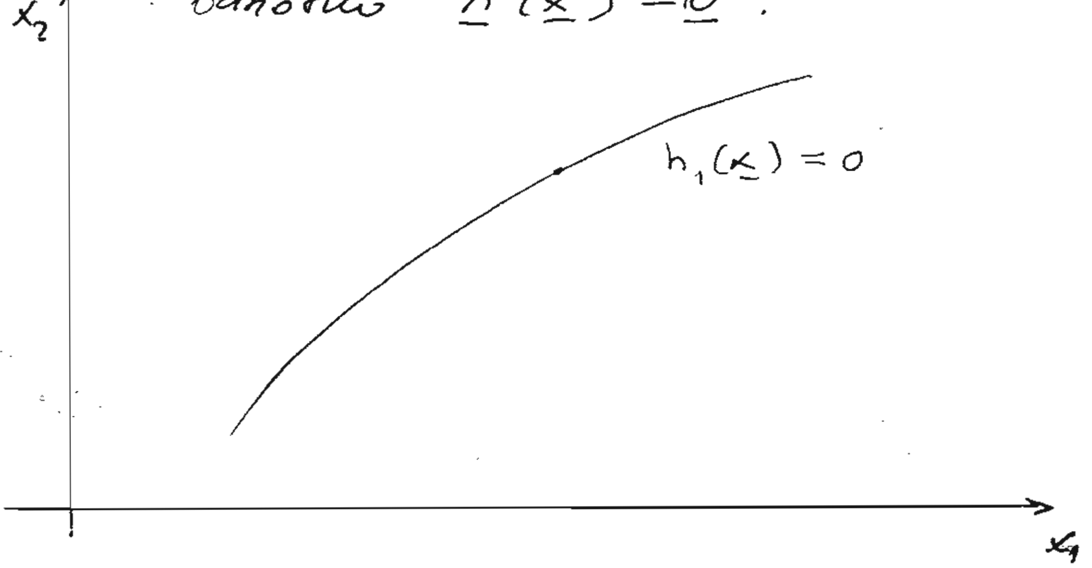
U vektorskom obliku

$$\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$

Ograničenja u obliku jednadžbi

$$h_i(\underline{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, k$$

odnosno $\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$.



Zadaci linearnog programiranja imaju linearne funkcije cilja i ograničenja su im također linearna

$$F(\underline{x}) = \underline{c}^t \underline{x}$$

$$\underline{A}\,\underline{x} \geq \underline{0}$$

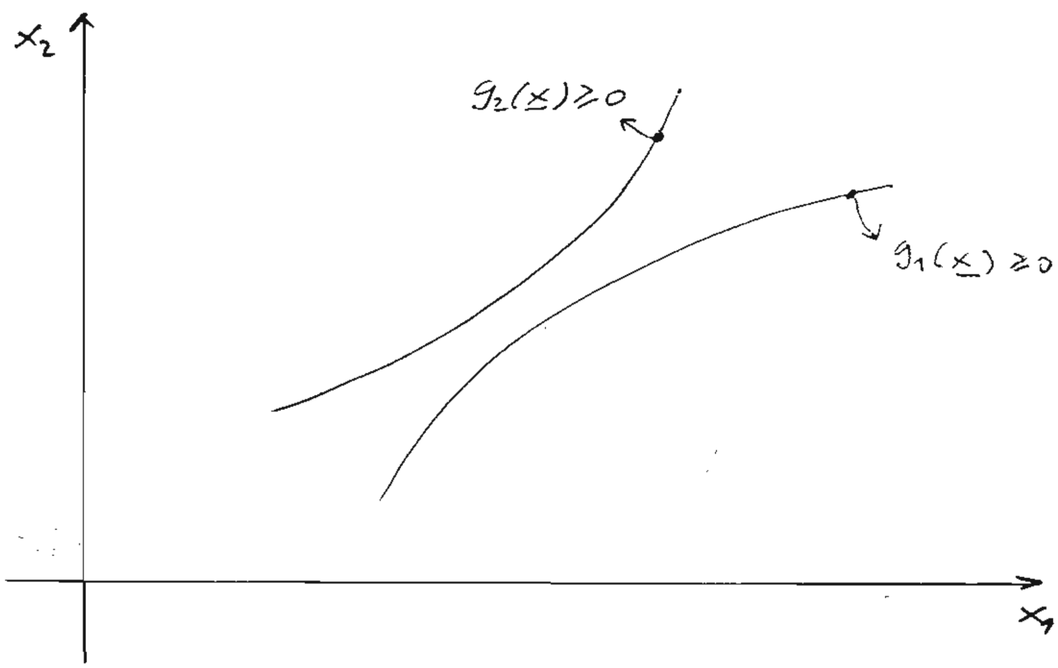
$$\underline{x}_d \leq \underline{x} \leq \underline{x}_g$$

eksplicitna ograničenja moguće uvesti u $\underline{A}\,\underline{x} \geq \underline{0}$

Funkcija cilja je hiperravnina i bez ograničenja nema smisla (minimum leži u beskonačnosti).

Stoga minimum leži uvijek na granici dozvoljenog područja!

Ograničenja mogu biti zadana tako da dozvoljeno područje ne postoji i stoga je potrebna prethodna analiza zadatka.

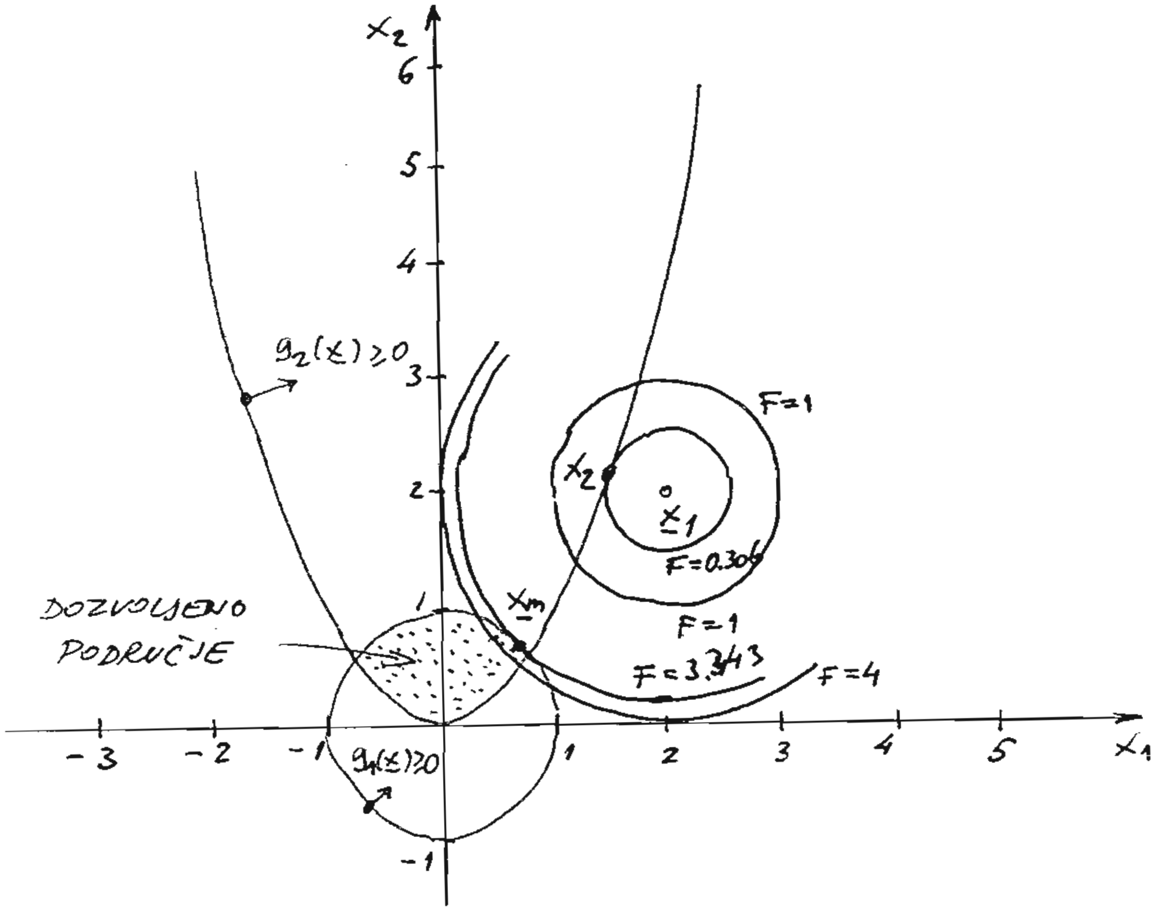


Primjer:

$$F(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$g_1(\underline{x}) = -x_1^2 - x_2^2 + 1 \geq 0$$

$$g_2(\underline{x}) = x_2 - x_1^2 \geq 0$$



Uz zanemarenje ograničenja minimum funkcije cilja $F(\underline{x})$ bio bi:

$$\underline{x}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Kada bi postojalo samo ograničenje $g_2(\underline{x}) \geq 0$ minimum bi bio

$$\underline{x}_2 = \begin{bmatrix} 1.4757 \\ 2.1777 \end{bmatrix}$$

Uz oba ograničenja minimum iznosi

$$\underline{x}_m = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

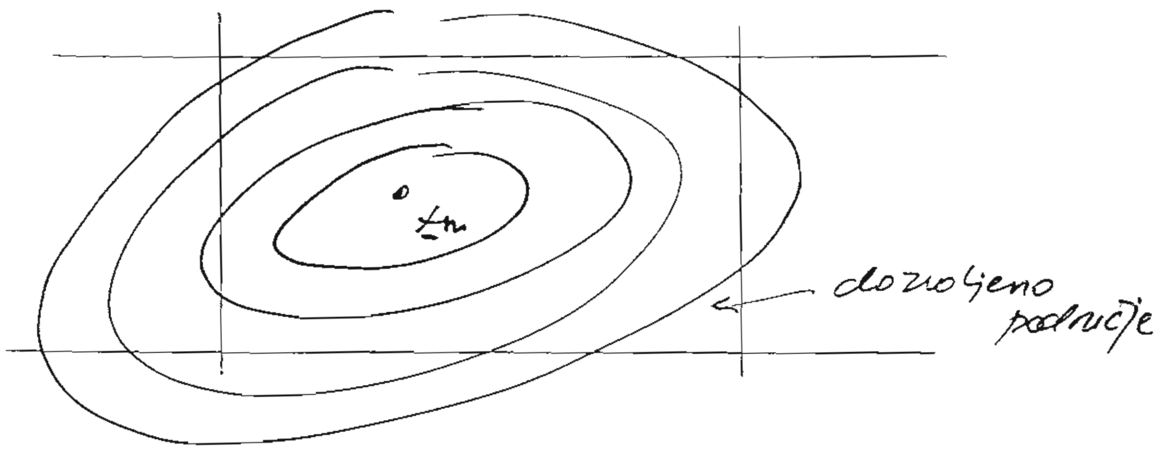
Isti položaj minimuma dobiva se i s odstranjenjem $g_2(\underline{x}) \geq 0$!

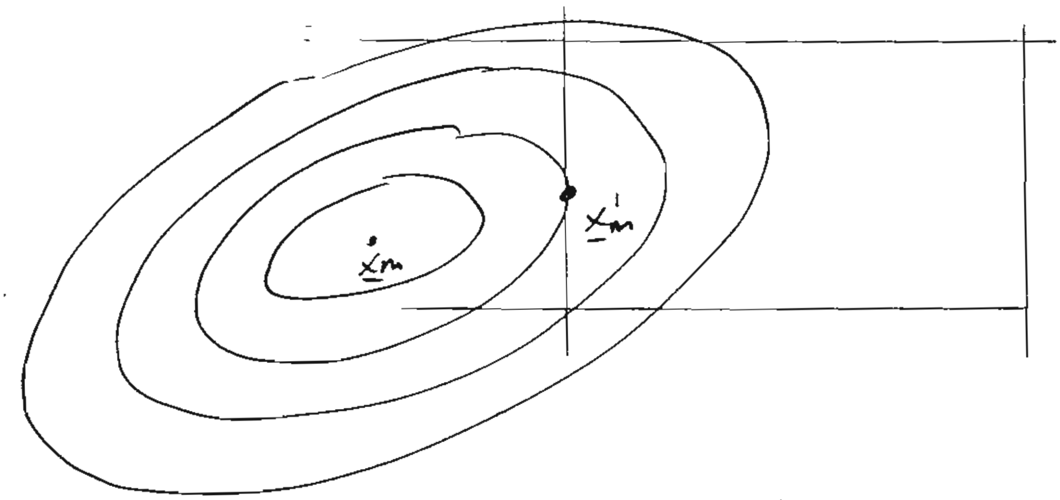
Za unimodalne funkcije položaj minimuma

- ostaje nametanjem ograničenja isti

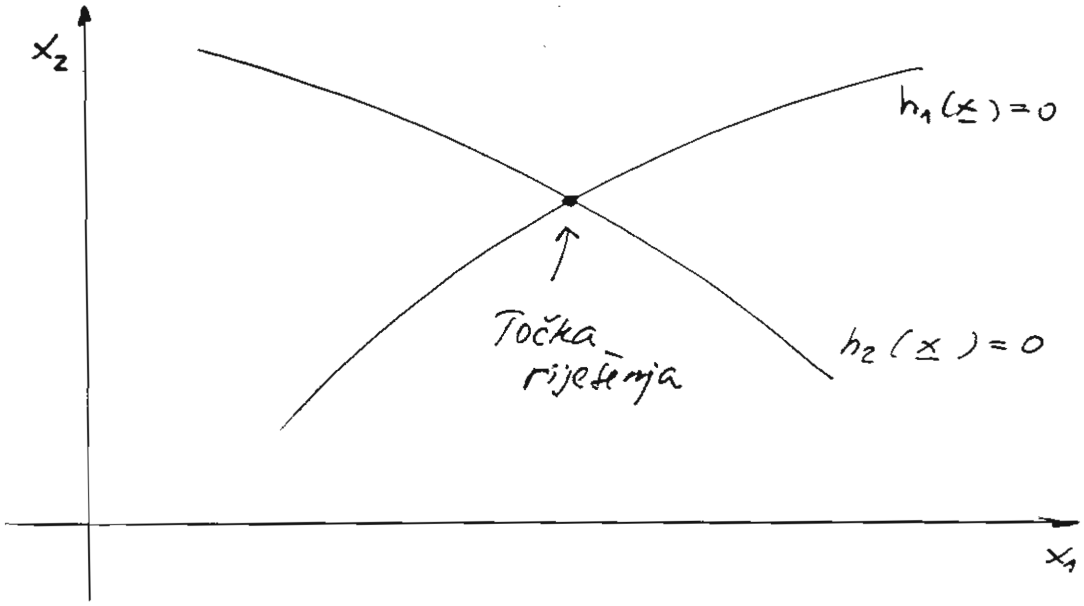
ili

- leži na granici dozvoljenog područja





Svaka jednadžba smanjuje stupanj slobode za jedan. Tako uz $n=2$ i $k=2$ dobivamo jedno rješenje (ako postoji!)



Jednadžba se može aproksimirati s dvije nejednadžbe. Naime, uz

$$|h_i(\underline{x})| \leq \varepsilon$$

vrijedi

$$h_i(\underline{x}) \leq \varepsilon$$
$$h_i(x) \geq -\varepsilon$$

ili

$$-h_i(\underline{x}) + \varepsilon \geq 0$$
$$h_i(\underline{x}) + \varepsilon \geq 0$$

Opći oblik zadatka optimiranja je

$$F(\underline{x})$$
$$\underline{x}_d \leq \underline{x} \leq \underline{x}_g$$
$$\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$
$$\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$$

5.7.2. Uvođenje novih varijabli za odstranjenje eksplicitnih ograničenja

Eksplicitna ograničenja mogu se otkloniti uvođenjem novih varijabli.

$$x_{di} \le x_i \le x_{gi}$$

$$x_i = x_{di} + (x_{gi} - x_{di}) \cdot f(y_i) \qquad y_i \in R$$

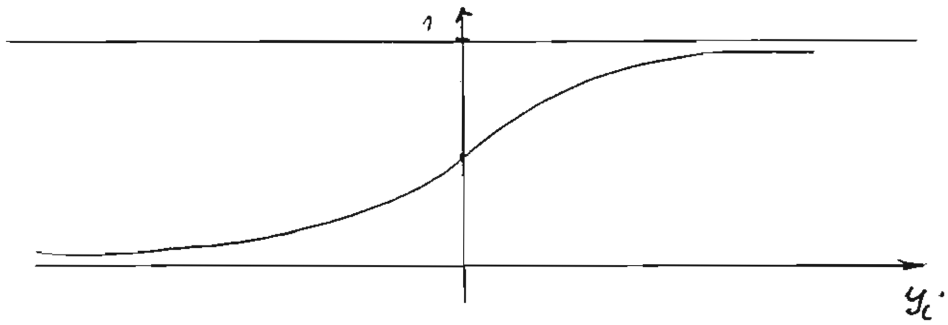
$$f(y_i) \in [0, 1]$$

npr.

$$f(y_i) = \sin^2 y_i$$

$$f(y_i) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} y_i$$

$$f(y_i) = \frac{1}{1 + e^{-\sigma y_i}} \qquad \text{sigmoida}$$



Mogući su i specijalni slučajevi, npr.

$$x_{di} \le x_i < \infty$$

$$x_i = x_{di} + y_i^2$$

$$x_i = x_{di} + \operatorname{abs}(y_i)$$

$$x_i = x_{di} + e^{y_i}$$

Uvođenjem novih varijabli može se riješiti i neke specijalne slučajeve implicitnih ograničenja.

Primjerice, ako se želi da omjer dvaju varijabli bude ograničen

$$d \leq \frac{x_2}{x_1} \leq g$$

$$x_1 > 0$$

$$x_2 > 0$$

$$g > d$$

$d \leq \frac{x_2}{x_1} \leq g$ može se prevesti u dva ograničenja

$$x_2 - d x_1 \geq 0$$

$$g x_1 - x_2 \geq 0$$

No, može se uvesti i nove varijable y_1, y_2

$$\vartheta_d = \operatorname{arctg} d$$

$$\vartheta_g = \operatorname{arctg} g$$

$$x_1 = e^{y_1} \cos\left(\vartheta_d + (\vartheta_g - \vartheta_d)\sin^2 y_2\right)$$

$$x_2 = e^{y_1} \sin\left(\vartheta_d + (\vartheta_g - \vartheta_d)\sin^2 y_2\right)$$

5.7.3. Transformacija u problem bez ograničenja s unutarnjom početnom točkom

Zadatak:

$$F(\underline{x})$$

$$\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$

Pretpostavlja se da $\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$ definira konveksno dozvoljeno područje.

$$R = \{ \underline{x} \mid \underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0} \}$$

Definira se:

- Jednoznačna funkcija $I(\underline{x})$ je za $\underline{x} \in R$ kontinuirana s tim da na rubovima poprima vrijednost $+\infty$.

  Neka je $\underline{x}_G$ točka na granici R, tj. $g_i(\underline{x}) = 0$ barem za jedan i, tada je

  $$\lim_{\underline{x} \to \underline{x}_G} I(\underline{x}) = +\infty .$$

- Jednoznačna funkcija $s(r)$ jedne varijable i to tako da je $r \geq 0$ i $s(r_1) > s(r_2) > 0$ za $r_1 > r_2$ te $\lim_{r \to 0} s(r) = 0$

Formulira se nova funkcija cilja

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) + s(r) \cdot I(\underline{x})$$

Potrebno je poznavati jednu početnu točku $\underline{x}_0$ unutar dozvoljenog područja.

Postupak se provodi na slijedeći način

$dano$ $\underline{x}_0$, r_1;
$j = 0$;
ponavljati {
   uz početnu točku $\underline{x}_j$ odrediti minimum $\underline{x}_m(r_{j+1})$ funkcije $U(\underline{x}, r_{j+1})$;
   $j = j+1$;
   $\underline{x}_j = \underline{x}_m(r_j)$;
   $r_{j+1} = \alpha * r_j$; $// \alpha < 1$
} do ($r_{j+1} <= \varepsilon$);

Uz $r \to 0$

$$\lim_{r \to 0} U(\underline{x}, r) = F(\underline{x})$$

Prikladni izbor $s(r)$ i $I(\underline{x})$

$$s(r) = r$$

$$I(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{l} \ln g_i(\underline{x})$$

Primjer:

$$F(\underline{x}) = x_1 + x_2$$

$$g_1(\underline{x}) = x_2 \geq 0$$

$$g_2(\underline{x}) = x_1 - x_2^2 \geq 0$$

$$U(\underline{x}, r) = x_1 + x_2 - r\ln x_2 - r\ln(x_1 - x_2^2)$$

Primjer se može i analitički rješavati

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 1 - r\frac{1}{x_1 - x_2^2} = 0$$

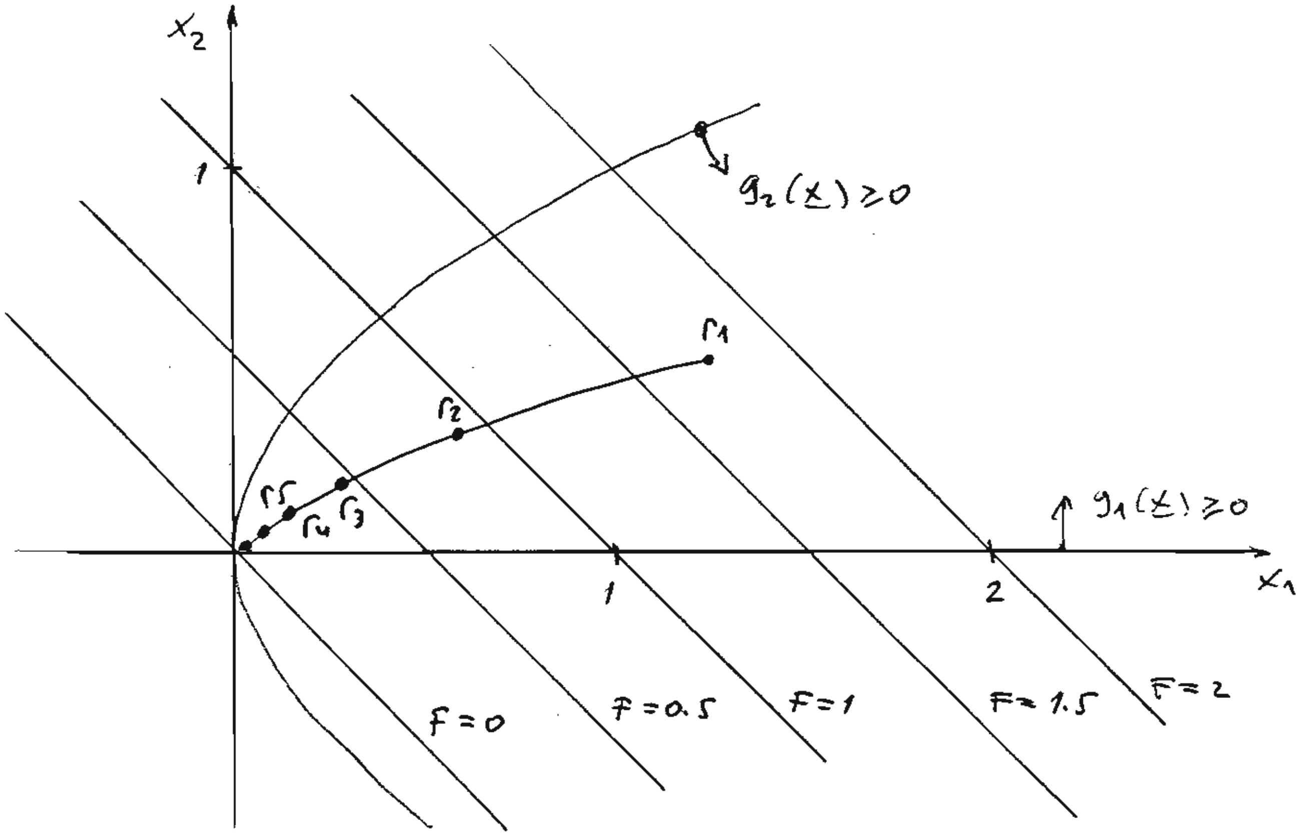
$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 1 - r\frac{1}{x_2} + r\frac{2x_2}{x_1 - x_2^2} = 0$$

Rješenje tih dvaju jednadžbi

$$x_{m1}(r) = \frac{1}{8}\left(1 + 12r - \sqrt{1+8r}\right)$$

$$x_{m2}(r) = \frac{1}{4}\left(\sqrt{1+8r} - 1\right)$$

r	$x_{m1}(r)$	$x_{m2}(r)$
1	1.25	0.5
2^{-1}	0.5955	0.3090
2^{-2}	0.2835	0.1830
2^{-3}	0.1357	0.1035
2^{-4}	0.0656	0.0562
2^{-5}	0.0321	0.0295
2^{-6}	0.0158	0.0152



Pronalaženje unutarnje točke $\underline{x}_0 \in R$ može se eventualno pronaći ako se formulira funkcija cilja

$$G(\underline{x}) = -\sum_{i=1}^{\ell} t_i \, g_i(\underline{x})$$

uz

$$t_i = 0 \quad \text{za} \quad g_i(\underline{x}) \geq 0$$

$$t_i > 0 \quad \text{za} \quad g_i(\underline{x}) < 0$$

Treba pronaći minimum

$$G(\underline{x}_0) = 0 \; .$$

4.7.4. Transformacija u problem bez ograničenja s vanjskom početnom točkom

Zadatak

$$F(\underline{x})$$
$$\underline{g}(\underline{x}) \geq 0$$

Definira se

- Jednoznačna kontinuirana funkcija $O(\underline{x})$ koja je

$$O(\underline{x}) = 0 \quad \text{za} \quad x \in R$$
$$O(\underline{x}) > 0 \quad \text{za} \quad x \notin R$$

- Jednoznačna skalarna funkcija $p(t)$ i to tako da je

$$p(t_2) > p(t_1) > 0 \quad \text{za}$$
$$t_2 > t_1 > 0$$

i

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = +\infty .$$

Formulira se nova funkcija cilja

$$U(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) + p(t)\, O(\underline{x})$$

Postupak započinje s nekom točkom $\underline{x}_0$ koja se može nalaziti bilo gdje i s $t = t_1$

Za rastući t računa se redom

$$\underline{x}_m(t_1),\ \underline{x}_m(t_2),\ \ldots\ \underline{x}_m(t_k)$$

do dovoljno velikog t .

Prikladan izbor

$$p(t) = t$$

$$O(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{g_i(\underline{x}) - |g_i(\underline{x})|}{2} \right)^2$$

odnosno

$$U(\underline{x}, t) = F(\underline{x}) + t \cdot \sum_{i=1}^{l} \left(\frac{g_i(\underline{x}) - |g_i(\underline{x})|}{2} \right)^2$$

U ovaj oblik mogu se uključiti i ograničenja u obliku jednadžbi.

$$h_k(\underline{x}) = 0$$

može se prevesti u dvije nejednadžbe

$$g_1(\underline{x}) = h_k(\underline{x}) \geq 0$$
$$g_2(\underline{x}) = -h_k(\underline{x}) \geq 0$$

$$O(\underline{x}) = \left(\frac{h_k(\underline{x}) - |h_k(\underline{x})|}{2} \right)^2 + \left(\frac{-h(\underline{x}) - |h_k(\underline{x})|}{2} \right)^2 = h_k^2(\underline{x})$$

4.7.5. Transformacija u problem bez ograničenja na mješoni način

$$F(\underline{x}) =$$

$$\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$

$$\underline{h}(\underline{x}) = \underline{0}$$

uzimamo $t = \frac{1}{r}$

$$U(\underline{x}, r) = F(\underline{x}) - r \sum_{i=1}^{\ell} \ln g_i(\underline{x}) + \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{k} h_i^2(\underline{x})$$

$\underline{x}_0$ zadovoljava nejednadžbe

Primjer:

$$F(\underline{x}) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$g_1(\underline{x}) = x_1 - 1 \geq 0$$

$$h_1(\underline{x}) = x_2 - x_1 = 0$$

$$U(\underline{x}, r) = x_1^2 + (x_2 - 1)^2 - r \ln (x_1 - 1) + \frac{1}{r} (x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = 2x_1 - r \frac{1}{x_1 - 1} - \frac{1}{r} 2(x_2 - x_1) = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_2} = 2(x_2 - 1) + \frac{1}{r} 2(x_2 - x_1) = 0$$

$$x_{m1}(r) = \frac{r + 3 + \sqrt{2r^3 + 7r^2 + 6r + 1}}{2(r+2)}$$

$$x_{m2}(r) = \frac{2r^2 + 5r + 3 + \sqrt{2r^3 + 7r^2 + 6r + 1}}{2(r+2)(r+1)}$$

r	$x_{m_1}(r)$	$x_{m_2}(r)$
1	1.333	1.167
2^{-1}	1.189	1.126
2^{-2}	1.105	1.084
2^{-3}	1.056	1.050
$\vdots$		
2^{-6}	1.007	1.007

4.7.6. Postupak po Boxu

Postupak po Boxu zasnovan je na zamisli simpleks postupka.

Zadatak:

$$F(\underline{x})$$

$$\underline{x}_d \leq \underline{x} \leq \underline{x}_g$$

$$\underline{g}(\underline{x}) \geq \underline{0}$$

Mora biti poznata jedna početna točka $\underline{x}_0$ koja zadovoljava ograničenja.

Generira se skup od $k \geq n+1$ točke tako da zadovoljavaju eksplicitna ograničenja

$$\underline{x}_j = \underline{x}_d + \underline{r}_j (\underline{x}_g - \underline{x}_d),$$

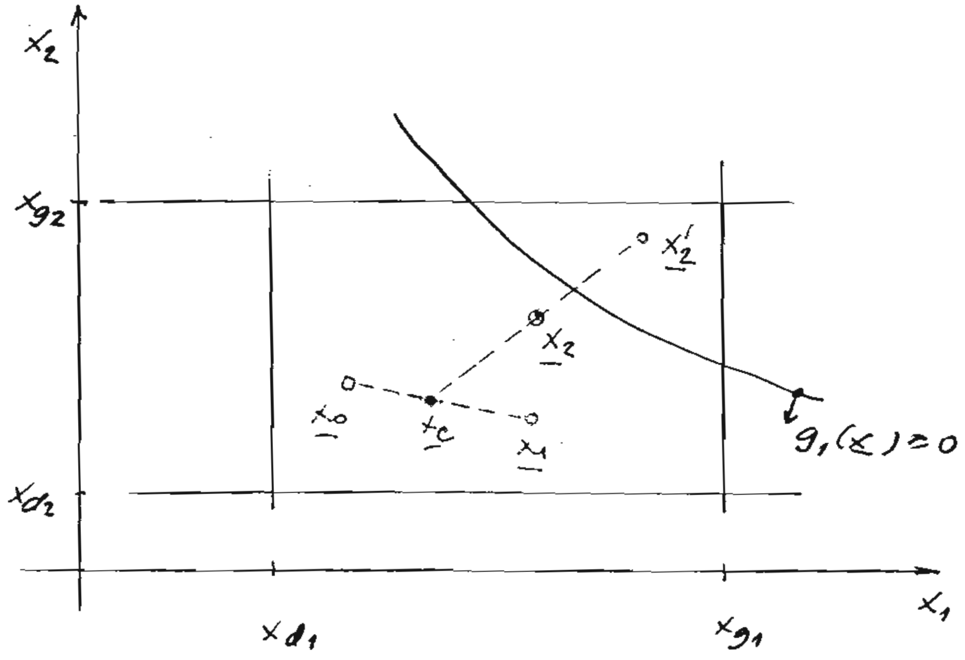
gdje je

$$\underline{r}_j = \begin{bmatrix} r_{j1} \\ r_{j2} \\ \vdots \\ r_{jn} \end{bmatrix}$$

slučajni vektor s $r_{ij} \in [0,1]$.

Ako pojedina točka ne zadovolji implicitna ograničenja ona se pomiče prema centroidu već prihvaćenih točaka

Primjer:



• Nakon generiranja tri točke pronalazi se točka $\underline{x}_h$ i obavlja refleksija

$$\underline{x}_r = (1+\alpha)\,\underline{x}_c - \alpha\,\underline{x}_h \, .$$

Odabire se $\alpha > 1$.

- Najprije se ispituje zadovoljenje ograničenja:
  - ako točka ne zadovoljava neko od eksplicitnih ograničenja ona se postavlja na narušenu granicu (ili vrlo blizu nje).
  - ako točka naruši neko implicitno ograničenje ona se pomiče (ako je potrebno i višekratno) prema centroidu (na polovinu razmaka)

- Za točku koja zadovoljava ograničenja se izračunava vrijednost funkcije. Ako je ona manja od $\underline{x}_h$ ona se prihvaća, inače se pomiče na pola razmaka prema centroidu.

- Postupak se zaustavlja kada simpleks uzastopnim kontrakcijama postane dovoljno malen.

Box preporučuje izbor

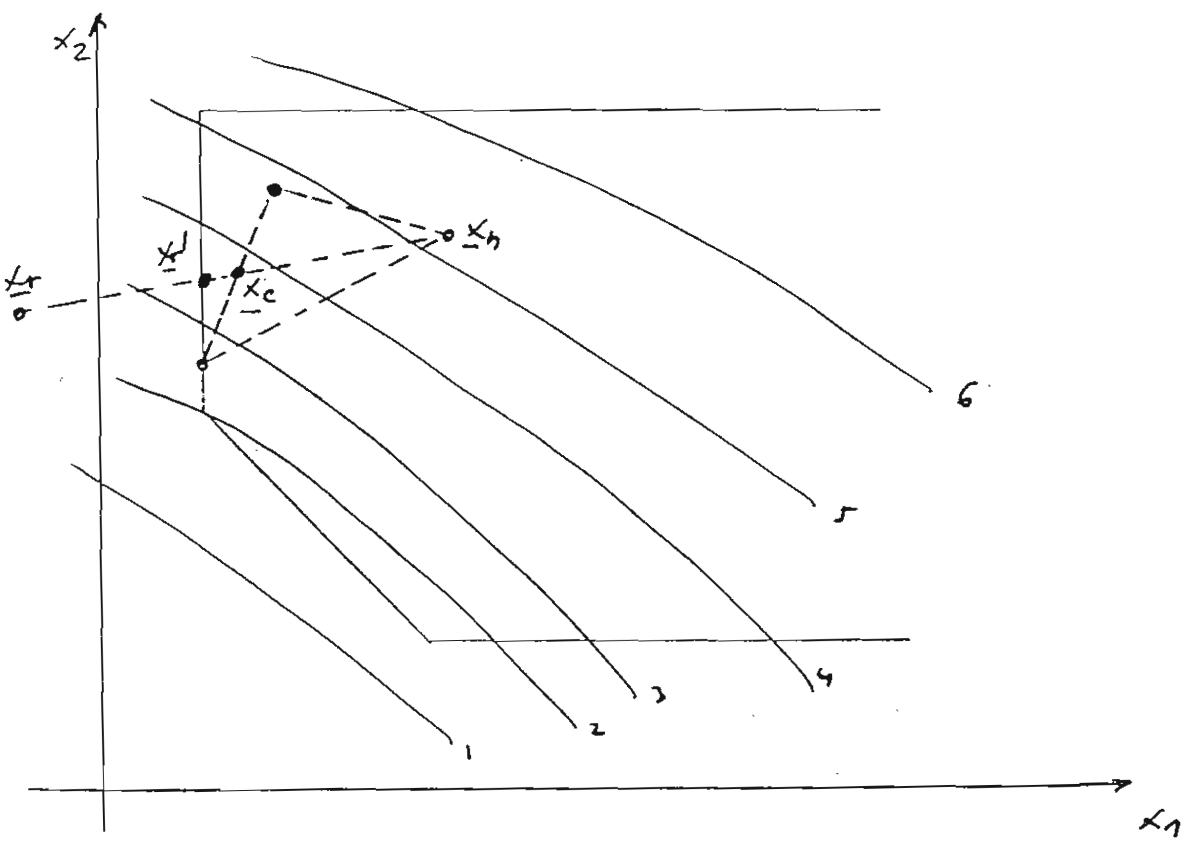
$$\alpha = 1{,}3 \quad i$$

$$k = 2n$$

Zašto $k > n+1$?

Smanjuje se izgledi da postupak degenerira u podprostor!

Primjer:



4.7.7. Postupak s prilagodljivim narušavanjem ograničenja

- Zasnovan na prilagodbi simpleks postupka

Zadatak:

$$F(\underline{x})$$
$$h_i(\underline{x}) = 0 \qquad i = 1, 2, \dots, m$$
$$g_i(\underline{x}) \geq 0 \qquad i = m+1, m+2, \dots, p$$

stupanj slobode $r = n - m$
(svaka jednadžba smanjuje stupanj slobode za jedan!)

Oblikuje se simpleks od $r+1$ točke.

$\underline{x}_i^{(k)}$ označuje i-tu točku u k-toj iteraciji

simpleks je pravilni s duljinom stranice t

$\underline{x}_i^{(k)} \qquad i = 1, 2, \dots, r+1$

$\underline{x}_c^{(k)}$ centroid u k-toj iteraciji

$\| x_i^{(k)} - \underline{x}_c^{(k)} \|$ udaljenost $\underline{x}_i^{(k)}$ od centroida

- Definira se funkcija

$$\Phi^{(k)} = \min \left\{ \Phi^{(k-1)}, \frac{m+1}{r+1} \sum_{i=1}^{r+1} \| \underline{x}_i^{(k)} - \underline{x}_c^{(k)} \| \right\}$$

$$\Phi^{(0)} = 2(m+1)t$$

$\Phi^{(k)}$ je monotono padajuća funkcija

$$\Phi^{(0)} \geq \Phi^{(1)} \geq \dots \geq \Phi^{(k)} \geq 0$$

- Definira se kriterij narušavanja ograničenja

$$T(\underline{x}) = +\left(\sum_{i=1}^{m} h_i^2(\underline{x}) + \sum_{i=m+1}^{p} t_i g_i^2(\underline{x}) \right)^{1/2}$$

uz $\quad t_i = 0 \quad$ za $g_i(\underline{x}) \geq 0$

$\quad\quad t_i = 1 \quad$ za $g_i(\underline{x}) < 0$

Očigledno vrijedi:

$T(\underline{x}) \geq 0 \quad$ za $\forall \underline{x} \in R^n$

$T(\underline{x}) = 0 \quad$ za $\{ \underline{x} \mid h_i(\underline{x}) = 0,\ g_i(\underline{x}) \geq 0,\ i = 1, \dots, p \}$

$T(\underline{x}) > 0 \quad$ za sve nedozvoljene vrijednosti $\underline{x}$

„Velika" vrijednost $T(\underline{x})$ znači da je $\underline{x}$ „daleko" od dozvoljenog područja, a „mala" vrijednost da je $\underline{x}$ „blizu" dozvoljenog područja.

<u>Koncepcija približnog zadovoljenja ograničenja:</u>

Točka $\underline{x}$ je

- dozvoljena ako je $T(\underline{x}) = 0$
- skoro dozvoljena ako je
$$0 \leq T(\underline{x}^{(k)}) \leq \Phi^{(k)}$$
- nedozvoljena ako je
$$T(\underline{x}^{(k)}) > \Phi^{(k)}$$

Prijelaz od $\underline{x}^{(k)}$ u $\underline{x}^{(k+1)}$ je:

- dozvoljen ako je $T(\underline{x}^{(k+1)}) = 0$
- skoro dozvoljen ako je
$$0 \leq T(\underline{x}^{(k+1)}) \leq \Phi^{(k)}$$
- nedozvoljen ako je
$$T(\underline{x}^{(k+1)}) > \Phi^{(k)}$$

Početni problem optimiranja svodi se na

$$F(\underline{x})$$
$$\Phi^{(k)} - T(\underline{x}) \geq 0$$

Simpleks postupak po Nelderu i Meadu se koristi:

a) za minimiranje $T(\underline{x})$ kako bi se zadovoljilo ograničenje

b) za minimiranje $F(\underline{x})$, uz zadovoljeno ograničenje

- Polazi se od točke $\underline{x}_0$ i nekog početnog t.
- Ako $\underline{x}_0$ zadovoljava ograničenje $\Phi^{(k)} - T(\underline{x}) \geq 0$ oblikuje se simpleks i minimira $F(\underline{x})$
- Ako točka ne zadovoljava ograničenje oblikuje se pomoćni simpleks veličine npr.
$$t = 0.05\, \Phi^{(k)}$$
i minimira $T(\underline{x})$.
- Kada točka zadovolji ograničenje minimira se $F(\underline{x})$.

Primjer:

$$F(\underline{x}) = 4x_1 - x_2^2 - 12$$

$$h_1(\underline{x}) = 25 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$g_2(\underline{x}) = 10x_1 - x_1^2 + 10x_2 - x_2^2 - 34 \geq 0$$

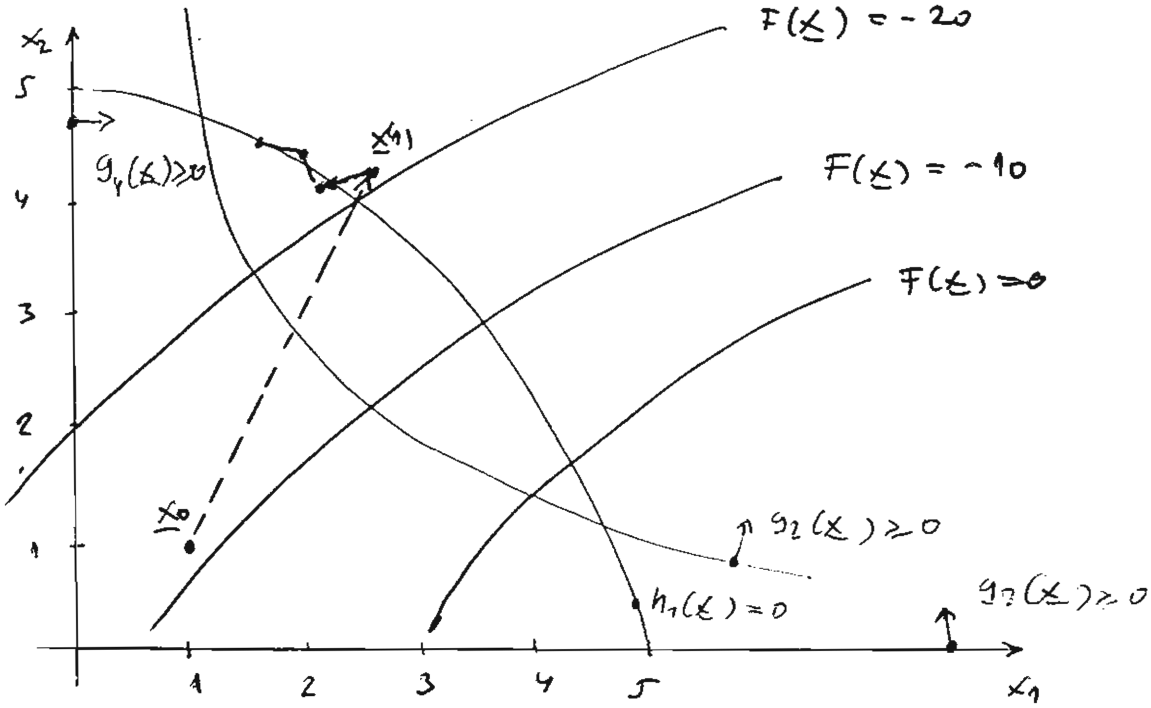
$$g_3(\underline{x}) = x_1 \geq 0$$

$$g_4(\underline{x}) = x_2 \geq 0$$

$$\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$t = 0.30$$

$$\Phi^{(0)} = 2(m+1)\,t = 1.20$$



$$h_1(\underline{x}^{(0)}) = 23 \qquad g_1(\underline{x}^{(0)}) = -16$$

$$T(\underline{x}^{(0)}) = 28.02 > \Phi^{(0)}$$

uzimamo $t = 0.05 \cdot \Phi^{(0)} = 0.06$

Konstruira se simpleks i minimizira $T(\underline{x})$

Dobiva se nova točka

$$\underline{x}^{(1)} = [2.584, 4.356]^t$$

$$T(\underline{x}^{(1)}) = 0.684 < \Phi^{(0)}$$

Sada se oblikuje simpleks za minimiranje $F(\underline{x})$ i minimira $F(\underline{x})$

7. ANALIZA PRIJELAZNIH POJAVA NUMERIČKIM POSTUPCIMA

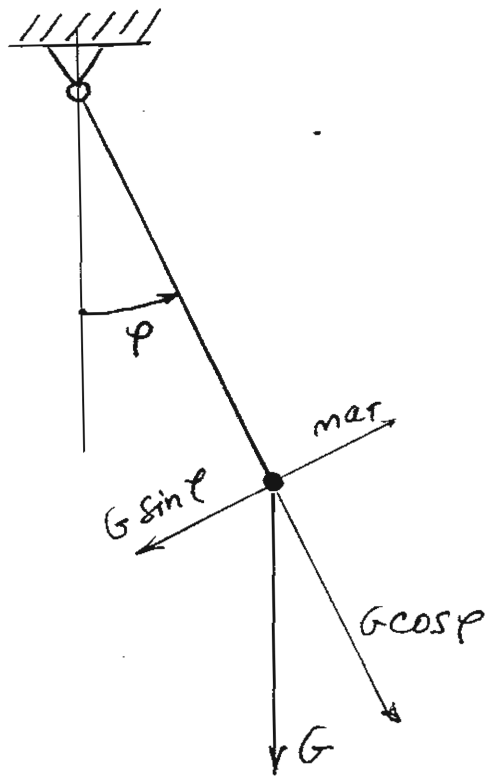
7.1. UVODNA RAZMATRANJA

1XXAPR007

Mnogo pojave u različitim sustavima mogu se opisati diferencijalnim jednadžbama.

Primjer:

Matematičko njihalo



$$a_T = l\ddot{\varphi}$$

$$Gl \sin\varphi = -m\ddot{\varphi}\, l$$

$$mg \sin\varphi = -m\ddot{\varphi}\, l$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

$$x_1 = \varphi$$

$$\dot{x}_1 = \dot{\varphi} = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\varphi}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

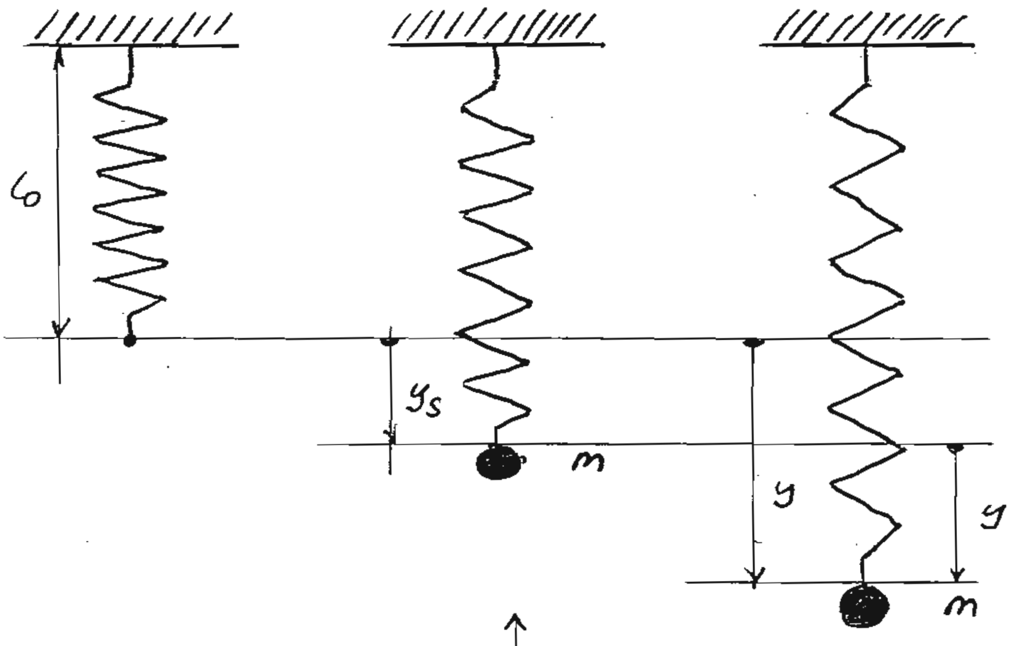
$$\dot{x}_2 = -\frac{g}{l}\sin\varphi = -\frac{g}{l}\sin x_1$$

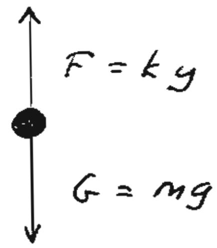
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

$x_1 <<$ $\quad \sin x_1 \approx x_1$

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1 \\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 \\ -\frac{g}{l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix}$$

Primjer: Njihalo s oprugom, opružno njihalo





$$m y'' = G - F$$
$$m y'' = G - ky$$
$$m y'' + ky = G$$

U mirovanju: $G = F$

$$G = ky \Rightarrow y_s = \frac{G}{k}$$

$$x_1 = y$$
$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{y}$$
$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m} x_1 + \frac{G}{m}$$

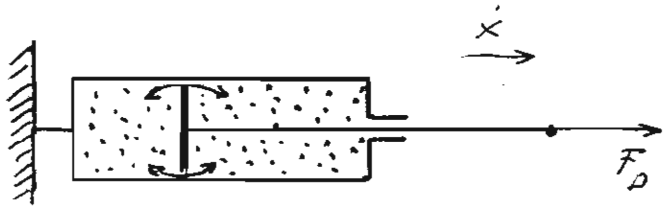
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{G}{m}$$

$$y = x_1$$

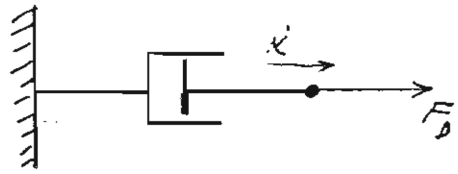
Ako se izvuče iz ravnotežnog položaja y_s, njihalo oscilira

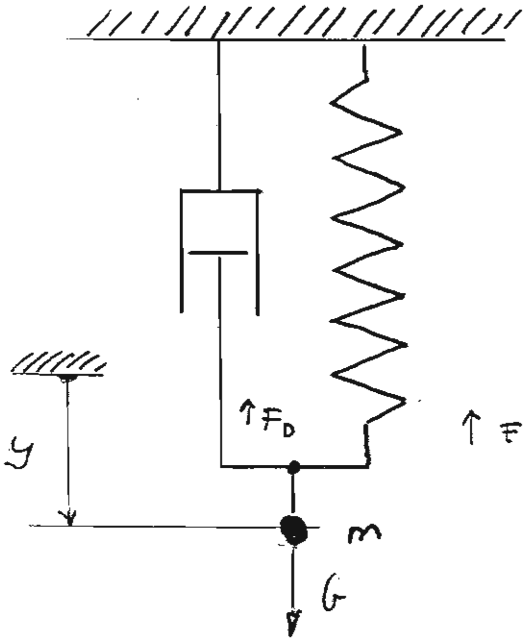
početni uvjeti: $x_1(0) = y_0$
$x_2(0) = \dot{y}_0 = v_0$

Primjer: Opružno njihalo s prigušivačem



$$F_p = b\dot{x}$$





$$m\ddot{y} = G - F_D - F$$

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + ky = G$$

$$x_1 = y$$

$$\dot{x}_1 = x_2 = \dot{y}$$

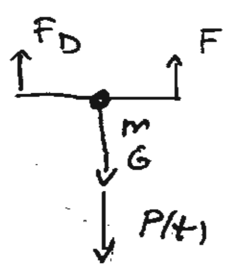
$$\dot{x}_2 = \ddot{y}$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{b}{m}x_2 + \frac{G}{m}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{G}{m}$$

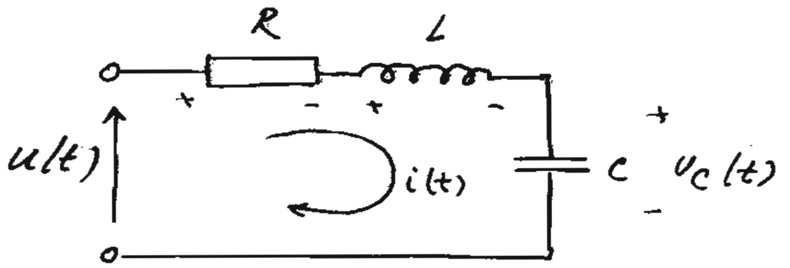
$$y = x_1$$



$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{(G + P(t))}{m}$$

$$y = x_1$$

Primjer: Električni serijski titrajni krug



$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$u_C(t) = \frac{1}{C}\int i(t)\,dt$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{1}{C}\, i(t)$$

$i(t) = x_1$

$u_C(t) = x_2$

$$L\dot{x}_1 + Rx_1 + x_2 = u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

$$\dot{x}_1 = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1$$

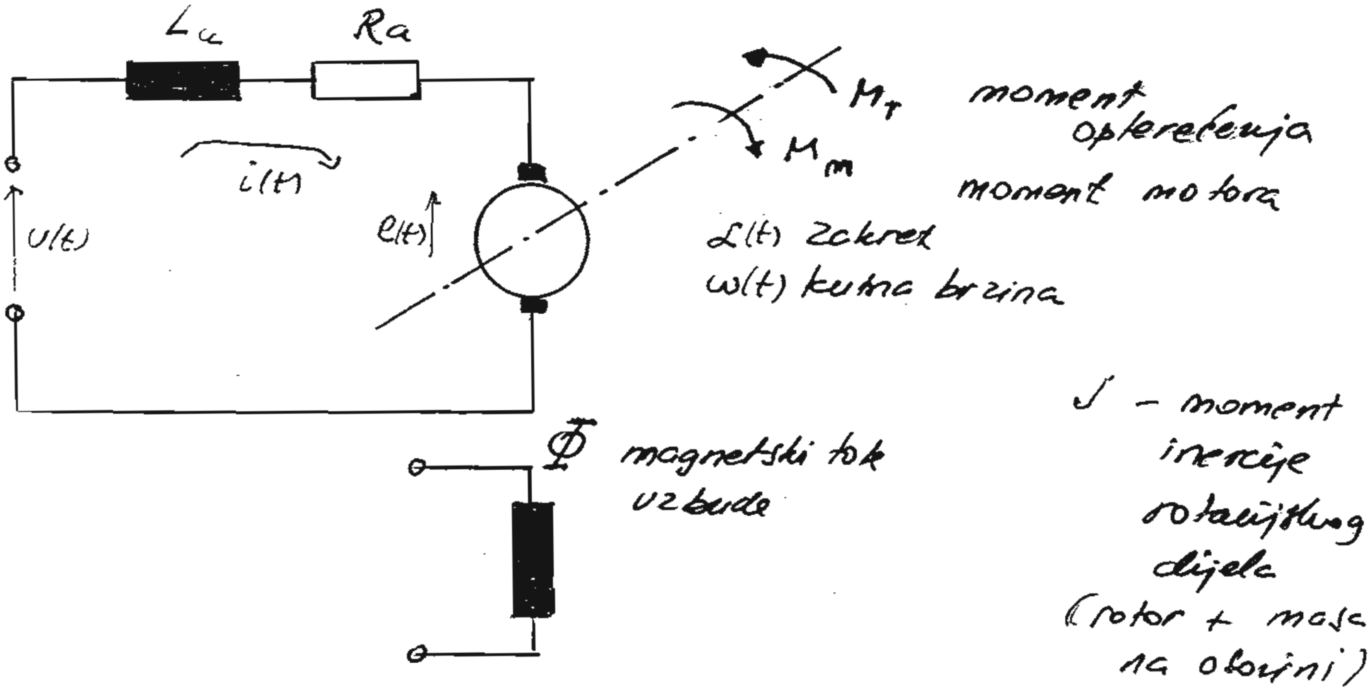
$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{R}{L} & -\frac{1}{L}\\ \frac{1}{C} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\frac{1}{L}\\ 0\end{bmatrix}u(t)$$

$y = x_1$

ili

$y = x_2$ očito o tome što se želi odrediti

Primjer: Istosmjerni elektromotor



$$e(t) = k_1 \Phi\, \omega(t)$$

$$M_m(t) = k_2 \Phi\, i(t) \qquad\qquad M_T = k_3 \omega(t)$$

$$L_a \frac{di(t)}{dt} + R_a i(t) = u(t) - k_1 \Phi\, \omega(t)$$

$$\frac{d\alpha(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = M_m - M_T = k_2 \Phi\, i(t) - k_3 \omega(t)$$

$$\alpha(t) = x_1 \qquad\qquad \dot{x}_1 = x_2$$

$$\omega(t) = x_2 \qquad\qquad \dot{x}_2 = -\frac{k_3}{J} x_2 + \frac{k_2 \Phi}{J} x_3$$

$$i(t) = x_3 \qquad\qquad \dot{x}_3 = -\frac{k_1 \Phi}{L_a} x_2 - \frac{R_a}{L_a} x_3 + \frac{1}{L} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{k_3}{J} & \frac{k_2\Phi}{J} \\ 0 & -\frac{k_1\Phi}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t)$$

Ako se mjeri kutna brzina ω

$$y = x_2 \qquad y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Ako se mjeri zakret α

$$y = x_1 \qquad y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Sustav jednadžbi može se prevesti u različite oblike linearnom transformacijom, npr.

$$\underline{x} = \underline{Q}\,\underline{z}$$

Uvrštenjem u $\dot{\underline{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,r$

$$\underline{Q}\,\dot{\underline{z}} = \underline{A}\,\underline{Q}\,\underline{z} + \underline{B}\,r$$

Množenjem s $\underline{Q}^{-1}$ s lijeva

$$\underline{Q}^{-1}\underline{Q}\,\dot{\underline{z}} = \underline{Q}^{-1}\underline{A}\,\underline{Q}\,\underline{z} + \underline{Q}^{-1}\underline{B}\,r$$

$$\dot{\underline{z}} = \underbrace{\underline{Q}^{-1}\underline{A}\,\underline{Q}}\,\underline{z} + \underbrace{\underline{Q}^{-1}\underline{B}}\,r$$

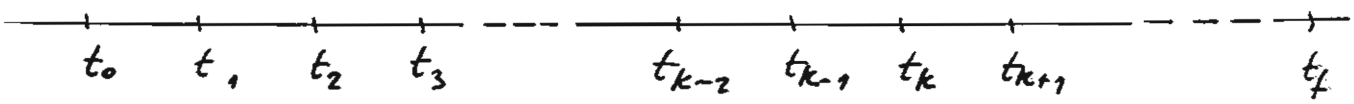
$$\dot{\underline{z}} = \underline{M}\,\underline{z} + \underline{N}\,r$$

Numerički postupci zasnivaju se na aproksimaciji rješenja u uzastopnim diskretnim točkama t_k, kontinuirane varijable vremena t.

Ako se rješenje traži u intervalu $[t_0, t_f]$, tada treba znati

početno stanje $\underline{x}(t_0)$

funkciju $r(t)$ $\quad t_0 \le t \le t_f$



$$t_{k+1} - t_k = T$$

obično je T konstantno

Za interval $[t_0, t_f]$ treba obaviti

$$K = \frac{t_f - t_0}{T} \quad \text{koraka}$$

T ne mora nužno biti stalno, već $t_{k+1} - t_k = T_k$.

Tada je $\quad t_f - t_0 = \sum_{k=0}^{K-1} T_k$

Postupci su najčešće iterativni.

Ako su izračunate vrijednosti u točkama

$$\underbrace{t_{k-p+1},\ t_{k-p+2},\ \ldots,\ t_{k-2},\ t_{k-1},\ t_k}_{p}$$

one se mogu iskoristiti za izračunavanje vrijednosti rješenja u točki t_{k+1}.

To su p - koračni postupci.

Uz $p = 1$ koristi se samo vrijednosti u točki t_k za računanje.

Tada su to jednokoračni postupci.

Pri odabiru postupka vodi se računa o:

- količini računanja;
- točnosti aproksimacije (pogreške postupka);
- numeričkoj stabilnosti.

7.1. EULEROVI POSTUPCI

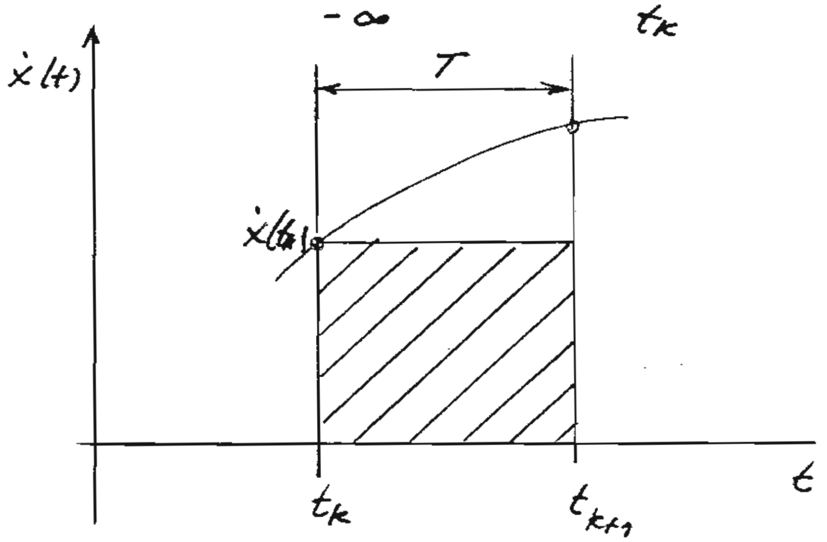
7.1.1. Izravni Eulerov postupak

Razmotrimo jednu diferencijalnu jednadžbu prvog reda

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t_k} \dot{x}(\tau)\, d\tau + \int_{t_k}^{t} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$



$t = t_{k+1}$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau = T \cdot \dot{x}(t_k) - d_k$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T \cdot \dot{x}(t_k) \underbrace{- d_k}_{\text{pogreška}}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$

Kolika je pogreška ??

Procjena d_k

$x(t)$ razvija se u red u okolini t_k

$$x(t_k+\tau) = x(t_k) + \frac{\tau}{1!}\dot{x}(t_k) + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t_k) + \frac{\tau^3}{3!}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

za $\tau = T \Rightarrow t_k + T = t_{k+1}$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T\cdot\dot{x}(t_k) + \underbrace{\frac{T^2}{2}\ddot{x}(t_k) + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots}_{-d_k}$$

$$d_k = -\frac{T^2}{2}\ddot{x}(t_k) - \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) - \dots$$

- za $T \to 0$ T^3 teži k nuli brže od T^2

uz $M \geq |\ddot{x}(t_k)|$ tj. ako je druga derivacija ograđena

$$|d_k| \approx MT^2$$

Kaže se da je lokalna pogreška (unosi se u svakom koraku) proporcionalna s T^2.

Kolika je pogreška za cijeli interval izračunavanja $[t_0, t_f]$?

Pretpostavimo da su $x(t_k)$ i $x(t_{k+1})$ točne vrijednosti rješenja a x_k i x_{k+1} aproksimirane vrijednosti

Globalna pogreška do trenutka t_k je

$$e_k = x_k - x(t_k)$$

i do trenutka t_{k+1}

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x(t_{k+1})$$

Iz:

$$x_{k+1} = x_k + T f(x_k, t_k)$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T f(x(t_k), t_k) - d_k$$

$$e_{k+1} = e_k + T\left[f(x_k, t_k) - f(x(t_k), t_k)\right] + d_k$$

Prema teoremu srednje vrijednosti:

$$f(x_k, t_k) - f(x(t_k), t_k) = L_k\,(x_k - x(t_k)) = L_k e_k$$

$$L_k = \frac{\partial}{\partial x} f\left(x(t_k) + \vartheta\left[x_k - x(t_k)\right]\right)$$

$$0 \leq \vartheta \leq 1$$

pa je

$$e_{k+1} = (1 + T \cdot L_k)\, e_k + d_k$$

Nadalje uz $L \geq |L_k|$

$$|e_{k+1}| \leq (1 + TL)\,|e_k| + M \cdot T^2$$

Rješenje za

$$|e_{k+1}| = (1 + TL)\,|e_k| + MT^2$$

je

$$|e_k| = (1 + TL)^k |e_0| + \frac{(1 + TL)^k - 1}{TL}\, MT^2$$

Dokaz:

$k = 1$

$$|e_1| = (1+TL)\,|e_0| + \frac{1+TL-1}{TL} MT^2$$
$$= (1+TL)\,|e_0| + MT^2$$

$$|e_{k+1}| = (1+TL)\,|e_k| + MT^2$$
$$= (1+TL)\left\{ (1+TL)^k |e_0| + \frac{(1+TL)^k - 1}{TL} MT^2 \right\} + MT^2$$
$$= (1+TL)^{k+1} |e_0| + \frac{(1+TL)^{k+1} - 1 - TL}{TL} MT^2 + MT^2$$
$$= (1+TL)^{k+1} |e_0| + \frac{(1+TL)^{k+1} - 1}{TL} MT^2$$

Q. E. D.

uz

$x(t_0) = x_0 \qquad |e_0| = 0$

$$|e_k| = \frac{(1+TL)^k - 1}{TL} MT^2$$

ovo je procjena lokalne pogreške

$$1 + TL \le e^{TL}$$
$$(1+TL)^k \le e^{kTL}$$

za $k = K \qquad KT = t_f - t_0$

$$(1+TL)^K \le e^{(t_f - t_0)L}$$

$$|e_K| = \frac{M}{L}\left(e^{(t_f - t_0)L} - 1\right) T = O(T)$$

To je globalna pogreška

Općenito – ako $d_k \approx MT^{q+1}$

$$|e_K| = O(T^q)$$

i postupak je reda q

Stabilnost postupka

S obzirom da se u svakom koraku unosi pogreška δ_k, ona utječe na rezultat u slijedećim koracima δ_{k+1}, δ_{k+2}.

Opasno ako je $|\delta_{k+1}| > |\delta_k|$

Ispitivanje stabilnosti s pomoću jednadžbe

$$\dot{x} = \lambda x$$

└ kompleksna konstanta

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k$$

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \lambda x_k$$

(A) $$x_{k+1} = (1 + \lambda T) x_k$$

uz perturbaciju

$$x_k + \delta_k$$

(B) $$x_{k+1} + \delta_{k+1} = (1 + \lambda T)(x_k + \delta_k)$$

(B) - (A) $$\delta_{k+1} = (1 + \lambda T)\delta_k$$

odnosno za apsolutne vrijednosti

$$|\delta_{k+1}| \quad |1 + \lambda T| |\delta_k|$$

Iz uvjeta $|\delta_{k+1}| \leq |\delta_k|$ slijedi:

$$|1 + \lambda T| \leq 1$$

Uz $\lambda = \sigma + j\omega$

$$|1 + \sigma T + j\omega T| \leq 1$$

$$(1 + \sigma T)^2 + (\omega T)^2 \leq 1$$

Korak T ~~treba~~ smije se odabrati tako da uvjet stabilnosti bude zadovoljen za sve svojstvene vrijednosti matrice $\underline{A}$

Za linearne sustave se korak T može tako i odabrati.

Međutim, ako se rješava sustave nelinearnih diferencijalnih jednadžbi ima još više problema

Zamislimo da ji rješenje $\underline{x}$ perturbiramo

$$\underline{x} + \delta \underline{x}$$

$$\frac{d}{dt} (\underline{x} + \delta \underline{x}) = \underline{f}(\underline{x} + \delta \underline{x} , t)$$

razvojem u red se može linearizirati

$$\dot{\underline{x}} + \delta \dot{\underline{x}} \simeq \underline{f}(\underline{x} , t) + \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} \delta \underline{x}(t)$$

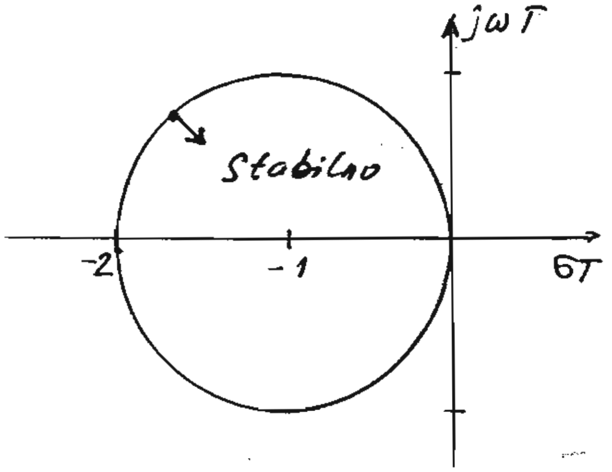
Nakon oduzimanja

$$\dot{\underline{x}} = f(\underline{x}, t)$$

$$\delta \dot{\underline{x}} = \underbrace{\frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}}_{\text{Jacobijeva matrica}} \cdot \delta \underline{x}(t)$$

$$
\underline{J} = \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}
$$

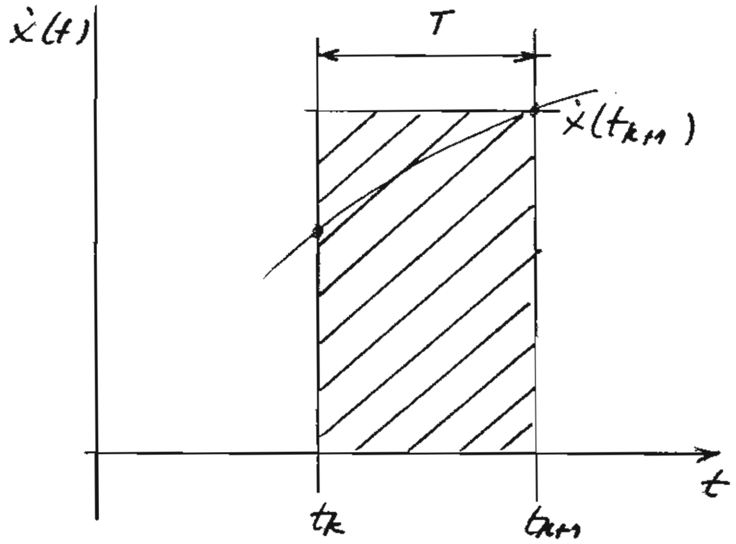
Stabilnost ovisi o svojstvenim vrijednostima Jacobijeve matrice, a one se tijekom rješavanja mijenjaju!



T se mora odabrati tako da bude $|1+\lambda T| \leq 1$

7.2.1. Obrnuti Eulerov postupak

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$



$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau = T\dot{x}(t_{k+1}) - d_k$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T\cdot\dot{x}(t_{k+1}) - d_k$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + T\cdot\dot{x}_{k+1}}$$

$$x_{k+1} = x_k + T\cdot f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

ako je funkcija f nelinearna x_{k+1} se ne može eksplicitno izraziti

- Postupak je implicitan

  $d_k \approx MT^2$

- Postupak je prvog reda.

Ispitivanje stabilnosti

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \lambda x_{k+1}$$

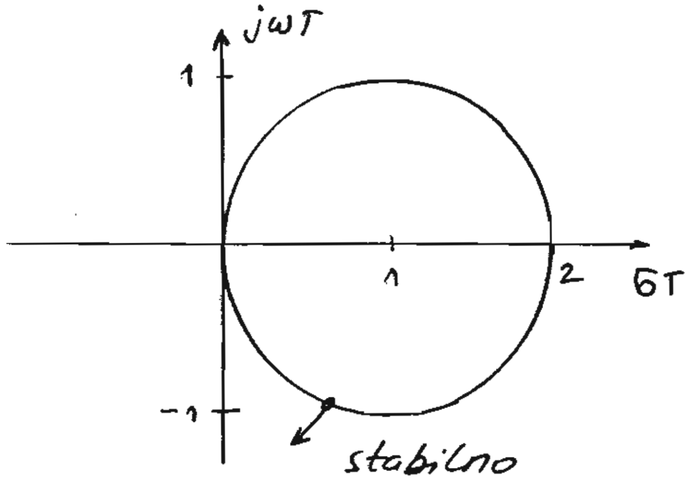
$$x_{k+1} = \frac{1}{1-\lambda T} x_k$$

$$\delta_{k+1} = \frac{1}{1-\lambda T} \delta_k$$

$$\left| \frac{1}{1-\lambda T} \right| \leq 1$$

$$|1-\lambda T| \geq 1$$

$$(1-\sigma T)^2 + (\omega T)^2 \geq 1$$

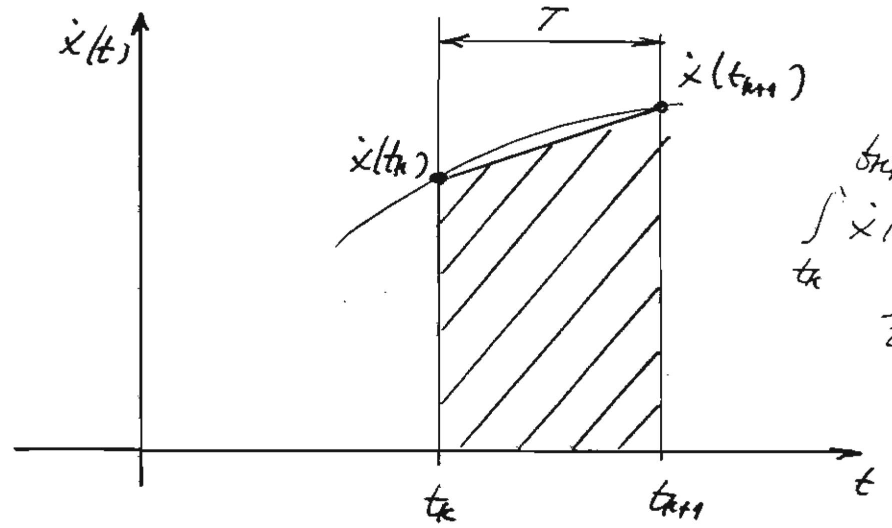


7.3. Trapezni postupak

Polazi se od

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\,d\tau$$

Integral se aproksimira trapezom



$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\,d\tau = \frac{T}{2}\left[\dot{x}(t_k) + \dot{x}(t_{k+1})\right] - d_k$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \frac{T}{2}\left[\dot{x}(t_k) + \dot{x}(t_{k+1})\right] - d_k$$

Koliki je d_k ?

Do gornjeg izraza može se doći i na slijedeći način:

- Razvija se $x(t)$ u Taylorov red u okolini t_k

$$x(t_k+\tau) = x(t_k) + \frac{\tau}{1!}\dot{x}(t_k) + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t_k) + \frac{\tau^3}{3!}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

za $\tau = T$:

(A) $$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T\cdot\dot{x}(t_k) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}(t_k) + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

- Razvija se $\dot{x}(t)$ u Taylorov red u okolini t_k

$$\dot{x}(t_k+\tau) = \dot{x}(t_k) + \frac{\tau}{1!}\ddot{x}(t_k) + \frac{\tau^2}{2}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

za $\tau = T$: $$\dot{x}(t_{k+1}) = \dot{x}(t_k) + T\ddot{x}(t_k) + \frac{T^2}{2}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

$$\ddot{x}(t_k) = \frac{1}{T}\left[\dot{x}(t_{k+1}) - \dot{x}(t_k)\right] - \frac{T}{2}\dddot{x}(t_k) - \dots$$

Uvrštenjem u (4)

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T\dot{x}(t_k) + \frac{T}{2}\left[\dot{x}(t_{k+1}) - \dot{x}(t_k)\right] -$$

$$- \frac{T^3}{4}\dddot{x}(t_k) - \dots + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \frac{T}{2}\left[\dot{x}(t_k) + \dot{x}(t_{k+1})\right] - \underbrace{\frac{T^3}{12}\dddot{x}(t_k) - \dots}_{d_k}$$

$$|d_k| \approx M T^3$$

globalna pogreška

$$|e_k| = O(T^2)$$

postupak je drugog reda!

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1}\right)}$$

Ispitivanje stabilnosti

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left(\lambda x_k + \lambda x_{k+1}\right)$$

$$x_{k+1} = \frac{1 + \frac{T}{2}\lambda}{1 - \frac{T}{2}\lambda}\, x_k$$

Eksplicitni postupci:

- izravni Eulerov postupak

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_k$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)}$$

Implicitni postupci:

- obrnuti Eulerov postupak

$$x_{k+1} = x_k + T \dot{x}_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_k + T f(x_{k+1}, t_{k+1})$$

U svakoj iteraciji treba rješavati ovu jednadžbu.

Može biti nelinearna!

- trapezni postupak

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})$$

$$\dot{x} = f(x, t)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[f(x_k, t_k) + f(x_{k+1}, t_{k+1})\right]$$

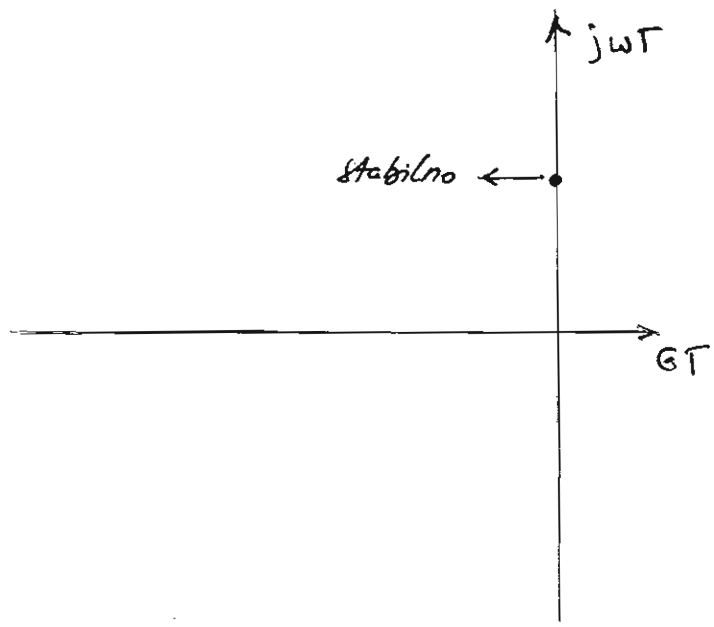
Uvjet stabilnosti

$$\left|\frac{1+\frac{T}{2}\lambda}{1-\frac{T}{2}\lambda}\right| \le 1$$

$\lambda = \sigma + j\omega$

$$\frac{\left(1+\frac{T}{2}\sigma\right)^2 + \left(\frac{T\omega}{2}\right)^2}{\left(1-\frac{T}{2}\sigma\right)^2+\left(\frac{T\omega}{2}\right)^2} \le 1$$

Ispunjeno za $\sigma \le 0$



7.4. Eksplicitni i implicitni postupci

Postupci kod kojih je vrijednost x_{k+1} može izračunati u eksplicitnom obliku su eksplicitni

Kod postupaka gdje se x_{k+1} nalazi s desne strane formule su implicitni

Modifikacija postupka

Heunov postupak

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[f(x_k, t_k) + f(\hat{x}_{k+1}, t_{k+1})\right]$$

Što je sa stabilnošću?

$$\dot{x} = \lambda x$$

$$\hat{x}_{k+1} = x_k + T\lambda x_k$$

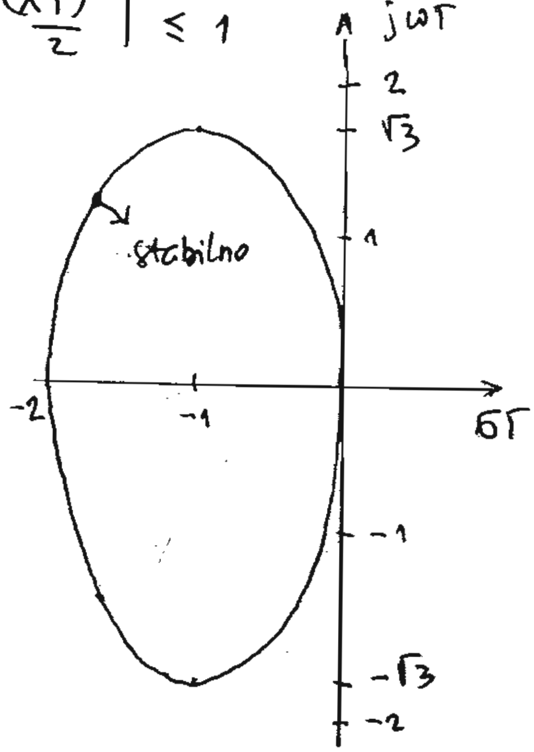
$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left[\lambda x_k + \lambda(x_k + T\lambda x_k)\right]$$

$$= \left(1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}\right) x_k$$

Uvjet stabilnosti

$$\left|1 + \lambda T + \frac{(\lambda T)^2}{2}\right| \leq 1$$

za $\lambda = \sigma + j\omega$ dobiva se uz znak jednakosti elipsa



7.5. Rješavanje sustava diferencijalnih jednodžbi

sustav jednodžbi

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$
$$\vdots$$
$$\dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$$

kraće vektorsko zapisivanje

$$\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$$

Eulerov izravni postupak

$$x_{1,k+1} = x_{1k} + T f_1(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, t_k)$$
$$x_{2,k+1} = x_{2k} + T f_2(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, t_k)$$
$$\vdots$$
$$x_{n,k+1} = x_{nk} + T f_n(x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{nk}, t_k)$$

kraće zapisivanje

$$\boxed{\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T \cdot \underline{f}(\underline{x}_k, t_k)}$$

Obrnuti Eulerov postupak

$$\boxed{\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\,\underline{f}(\underline{x}_{k+1}, t_k)}$$

Trapezni postupak

$$\boxed{\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{T}{2}\left[\underline{f}(\underline{x}_k, t_k) + \underline{f}(\underline{x}_{k+1}, t_{k+1})\right]}$$

Korištenje implicitnih postupaka zahtijeva rješavanje vektorskih jednadžbi u svakom koraku.

Za linearni sustav diferencijalnih jednadžbi može se implicitni oblik prevesti u eksplicitni!

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{r}}$$

$$\underline{f}(\underline{x}, t) = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{r}(t)$$

↑ može se zanemariti t posebno istaknuti

izravni Eulerov postupak

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T \cdot \left(\underline{A}\,\underline{x}_k + \underline{B}\,\underline{r}(t_k)\right)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underbrace{(\underline{U} + \underline{A}\,T)}_{\underline{M}}\,\underline{x}_k + \underbrace{T\,\underline{B}}_{\underline{N}}\,\underline{r}(t_k)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{M}\,\underline{x}_k + \underline{N}\,\underline{r}(t_k)$$

Obrnuti Eulerov postupak

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\left(\underline{A}\,\underline{x}_{k+1} + \underline{B}\,\underline{r}(t_{k+1})\right)$$

$$(\underline{U} - \underline{A}T)\,\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + T\underline{B}\,\underline{r}(t_{k+1})$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underbrace{(\underline{U} - \underline{A}T)^{-1}}_{\underline{P}}\underline{x}_k + \underbrace{(\underline{U} - \underline{A}T)^{-1}T\underline{B}}_{\underline{Q}}\,\underline{r}(t_{k+1})$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{P}\,\underline{x}_k + \underline{Q}\,\underline{r}(t_{k+1})$$

Trapezni postupak

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{T}{2}\left[\underline{A}\,\underline{x}_k + \underline{B}\,\underline{r}(t_k) + \underline{A}\,\underline{x}_{k+1} + \underline{B}\,\underline{r}(t_{k+1})\right]$$

$$\left(\underline{U} - \underline{A}\frac{T}{2}\right)\underline{x}_{k+1} = \left[\underline{U} + A\frac{T}{2}\right]\underline{x}_k + \frac{T}{2}\underline{B}\left(\underline{r}(t_k) + \underline{r}(t_{k+1})\right)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underbrace{\left(\underline{U} - \underline{A}\frac{T}{2}\right)^{-1}\left(\underline{U} + \underline{A}\frac{T}{2}\right)}_{\underline{R}}\underline{x}_k + \underbrace{\left(U - \underline{A}\frac{T}{2}\right)^{-1}\frac{T}{2}\underline{B}}_{\underline{S}}\left(\underline{r}(t_k) + \underline{r}(t_{k+1})\right)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{R}\,\underline{x}_k + \underline{S}\left(\underline{r}(t_k) + \underline{r}(t_{k+1})\right)$$

Stabilnost pri rješavanju sustava jednadžbi

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{r}$$

Ako se uvedu nove varijable $\underline{z}$

$$\underline{x} = \underline{X}\,\underline{z}$$

$$\underline{X}\,\underline{\dot{z}} = \underline{A}\,\underline{X}\,\underline{z} + \underline{B}\,\underline{r}$$

$$\underline{\dot{z}} = \underline{X}^{-1}\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{z} + \underline{X}^{-1}\underline{B}\,\underline{r}$$

Pretpostavimo homogeni sustav

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x}$$

$$\underline{\dot{z}} = \underline{X}^{-1}\underline{A}\,\underline{X}\,\underline{z}$$

Ako su svojstvene vrijednosti matrice $\underline{A}$ različite (mogu biti i kompleksne), može se naći matrica $\underline{X}$, sastavljena od svojstvenih vektora, tako da je matrica

$$\underline{\Lambda} = \underline{X}^{-1}\underline{A}\,\underline{X}$$

dijagonalna matrica

$$\underline{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{\underline{z}} = \underline{\Lambda}\, \underline{z}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ & & & \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \\ z_n \end{bmatrix}$$

Dobiva se n nezavisnih jednadžbi:

$$\dot{z}_1 = \lambda_1 z_1$$
$$\dot{z}_2 = \lambda_2 z_2$$
$$\vdots$$
$$\dot{z}_n = \lambda_n z_n$$

Uvjet stabilnosti mora biti ispunjen za svaku od jednadžbi.

Npr. za izravni Eulerov postupak mora biti ispunjeno

$$\forall i \qquad (1+\sigma_i T)^2 + (\omega_i T)^2 \leq 1$$

Iz ovog uvjeta dobiva se

$$1 + 2\sigma_i T + \underbrace{(\sigma_i T)^2 + (\omega_i T)^2}_{|\lambda_i|^2 T^2} \leq 1$$

$$T \leq -\frac{2\sigma_i}{|\lambda_i|^2}$$

$$T_{max} \leq \min_i \left(-\frac{2\sigma_i}{|\lambda_i|^2} \right)$$

7.6. RUNGE – KUTTA POSTUPCI

Runge – Kutta postupci su jednokoračni eksplicitni postupci općeg oblika

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot \underbrace{\Psi(x_k, t_k, T)}$$

$\Psi(x_k, t_k, T)$ se konstruira tako da se aproksimira razvoj rješenja $x(t)$ u Taylorov red do određenog broja članova.

- Promatramo jednu diferencijalnu jednadžbu

$$\dot{x} = f(x, t)$$

ili preciznije:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t), t)$$

- Rješenje je $x(t)$

- Razvoj rješenja u red u okolini t_k

$$x(t_k + \tau) = x(t_k) + \frac{\tau}{1!}\dot{x}(t_k) + \frac{\tau^2}{2!}\ddot{x}(t_k) + \frac{\tau^3}{3!}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

za $\tau = T$

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T \cdot \dot{x}(t_k) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}(t_k) + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

Odrediti $\dot{x}(t_k)$, $\ddot{x}(t_k)$, $\dddot{x}(t_k)$, ..

Odrećujemo najprije redom $\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \dddot{x}(t)$, ..

$\dot{x}(t)$

iz diferencijalne jednadžbe

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = f(x(t),t)$$

$$\underline{\dot{x}(t) = f(x,t)}$$

$\ddot{x}(t)$

$$\ddot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(f(x(t),t)\right)$$

$$= \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}$$

$$\underline{\ddot{x} = \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}}$$

$\dddot{x}(t)$

$$\dddot{x}(t) = \frac{d}{dt}\left(\ddot{x}(t)\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x} f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right)\frac{\partial x}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}\cdot f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} +$$

$$+ \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t\,\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t}\cdot f(x,t) +$$

$$+ \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}$$

$$\underline{\dddot{x}(t) = \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2} f^2(x,t) + \left(\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right)^2 f(x,t)}$$

$$\underline{+ 2\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x\,\partial t} f(x,t) + \frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\cdot\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}}$$

$$\underline{+ \frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial t^2}}$$

Pokrate:

za $t = t_k$ $\quad x(t_k) = x_k$

$$\left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_k\\ t=t_k}} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\left.\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|_{\substack{x=x_k\\ t=t_k}} = \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,t)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_k\\ t=t_k}} = \frac{\partial^2 f}{\partial x}$$

i.t.d.

$$\dot{x}(t_k) = f(x_k, t_k)$$

$$\ddot{x}(t_k) = \frac{\partial f}{\partial x} f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\dddot{x}(t_k) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2(x_k, t_k) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 f(x_k, t_k) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

Uvrštenjem u:

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + T\dot{x}(t_k) + \frac{T^2}{2}\ddot{x}(t_k) + \frac{T^3}{6}\dddot{x}(t_k) + \dots$$

dobiva se:

$$x_{k+1} = x_k + \underbrace{T f(x_k, t_k) + \frac{T^2}{2}\left[\frac{\partial f}{\partial x} f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}\right] + \frac{T^3}{6}\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2(x_k, t_k) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 f(x_k, t_k) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right] +}_{T\Psi(x_k, t_k, T)} + O(T^4)$$

S obzirom da je ostatak $O(T^4)$, ovaj razvoj može se koristiti kao podloga za izgradnju postupaka do trećeg reda.

Postupak prvog reda

Uzmu li se samo prva dva člana razvoja u red, može se pisati

$$x_{k+1} = x_k + T f(x_k, t_k) + O(T^2)$$

što daje izravni Eulerov postupak

$$x_{k+1} = x_k + T \cdot f(x_k, t_k)$$

Postupci drugog reda

Opći oblik za klasu postupaka drugog reda je

$$m_1 = x_k + \alpha T f(x_k, t_k)$$
$$x_{k+1} = x_k + \beta T f(x_k, t_k) + \gamma T f(m_1, t_k + \eta T)$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ su parametri koji određuju varijante postupka

Uvrštenje m_1 u drugi izraz daje:

II $$x_{k+1} = x_k + \beta T f(x_k, t_k) + \gamma T \underbrace{f(x_k + \alpha T f(x_k, t_k), t_k + \eta T)}_{\text{aproksimira se razvojem u red}}$$

Ako se $f(x,t)$ razvije u red oko točke x_k, t_k kao funkcija dviju varijabli (zanemarujući da je $x = x(t)$)

$$f(x_k + \Delta x, t_k + \Delta t) = f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}\Delta t + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot \Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(\Delta t)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\Delta t \Delta x + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\Delta x)^2 + \dots$$

Sve parcijalne derivacije treba uzeti za $x = x_k$, $t = t_k$

$$\Delta x = \alpha T f(x_k, t_k)$$
$$\Delta t = \eta T$$

$$f(x_k + \alpha T f(x_k, t_k), t_k + \eta T) = f(x_k, t_k) + \frac{\partial f}{\partial t}\eta T + \frac{\partial f}{\partial x}\alpha T f(x_k, t_k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\eta^2 T^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}\eta T \alpha T f(x_k, t_k) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\alpha^2 T^2 f^2(x_k, t_k)$$

ili:

$$f(x_k + \alpha T f(x_k, t_k), t_k + \eta T) = f(x_k, t_k) + T\left\{\frac{\partial f}{\partial t}\eta + \frac{\partial f}{\partial x} f(x_k, t_k)\right\} + T^2\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\eta^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f(x_k, t_k)\alpha\eta + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2(x_k, t_k)\alpha^2\right\}$$

Uvrštenjem u II dobiva se:

$$
\begin{aligned}
x_{k+1} = x_k &+ \\
&+ T\left\{ (\beta+\gamma) f(x_k, t_k) \right\} + \\
&+ T^2 \left\{ \gamma\eta \frac{\partial f}{\partial t} + \alpha\gamma \frac{\partial f}{\partial x} \cdot f(x_k, t_k) \right\} + \\
&+ T^3 \left\{ \frac{1}{2}\gamma\eta^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} + \alpha\gamma\eta \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t} f(x_k, t_k) + \right. \\
&\qquad \left. + \frac{1}{2}\alpha^2\gamma \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} f^2(x_k, t_k) \right\} + \\
&+ O(T^4)
\end{aligned}
$$

Usporedbom s I

$\beta + \gamma = 1$ članovi uz T

$\gamma\eta = \alpha\gamma = \frac{1}{2}$ članovi uz T^2

Članovi uz T^3 više nisu jednaki, te je lokalna pogreška $O(T^3)$, tj. dobiva se postupak drugog reda.

$$
\boxed{\begin{aligned} \alpha = \eta &= \frac{1}{2\gamma} \\ \beta &= 1 - \gamma \end{aligned}}
$$

- Uz $\gamma = 1$

$\beta = 0$

$\alpha = \eta = \frac{1}{2}$

$$m_1 = x_k + \frac{1}{2} T f(x_k, t_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + T f(m_1, t_k + \frac{1}{2} T)$$

Modificirani Eulerov ili Euler-Cauchyev postupak.

- Uz $\gamma = \frac{1}{2}$

$$\beta = \frac{1}{2}$$

$$\alpha = \eta = 1$$

$$m_1 = x_k + T f(x_k, t_k)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2} \left(f(x_k, t_k) + f(m_1, t_{k+1}) \right)$$

Modificirani trapezni ili Heunov postupak.

Postupci trećeg reda

pravilo Kutte trećeg reda:

$$m_1 = f(x_k, t_k)$$

$$m_2 = f(x_k + \frac{T}{2} m_1, t_k + \frac{T}{2})$$

$$m_3 = f(x_k - T m_1 + 2 T m_2, t_k + T)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{6} (m_1 + 4 m_2 + m_3)$$

Heunova formula trećeg reda:

$$m_1 = f(x_k, t_k)$$

$$m_2 = f\left(x_k + \frac{T}{3} m_1, t_k + \frac{T}{3}\right)$$

$$m_3 = f\left(x_k + \frac{2T}{3} m_2, t_k + \frac{2T}{3}\right)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{4}(m_1 + 3m_3)$$

Postupci četvrtog reda

Najčešće korišteni Runge-Kutta postupak:

$$m_1 = f(x_k, t_k)$$

$$m_2 = f\left(x_k + \frac{T}{2} m_1, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$m_3 = f\left(x_k + \frac{T}{2} m_2, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$m_4 = f(x_k + T m_3, t_k + T)$$

$$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{6}(m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4)$$

Stabilnost Runge-Kutta postupaka

Ispitna jednadžba

$$\dot{x} = \lambda x$$

ima rješenje

$$x(t) = e^{\lambda(t-t_0)} \cdot x(t_0).$$

za $t_0 = t_k$ i $t = t_{k+1}$

$$x(t_{k+1}) = e^{\lambda T} x(t_k)$$

S obzirom da se Runge-Kutta postupci zasnivaju na razvoju u Taylorov red, to se upotrebom postupka q-tog reda mora dobiti

$$x_{k+1} = \left[1 + \lambda T + \frac{1}{2!}(\lambda T)^2 + \dots + \frac{1}{q!}(\lambda T)^q\right] x_k$$

Prema tome je područje stabilnosti određeno s:

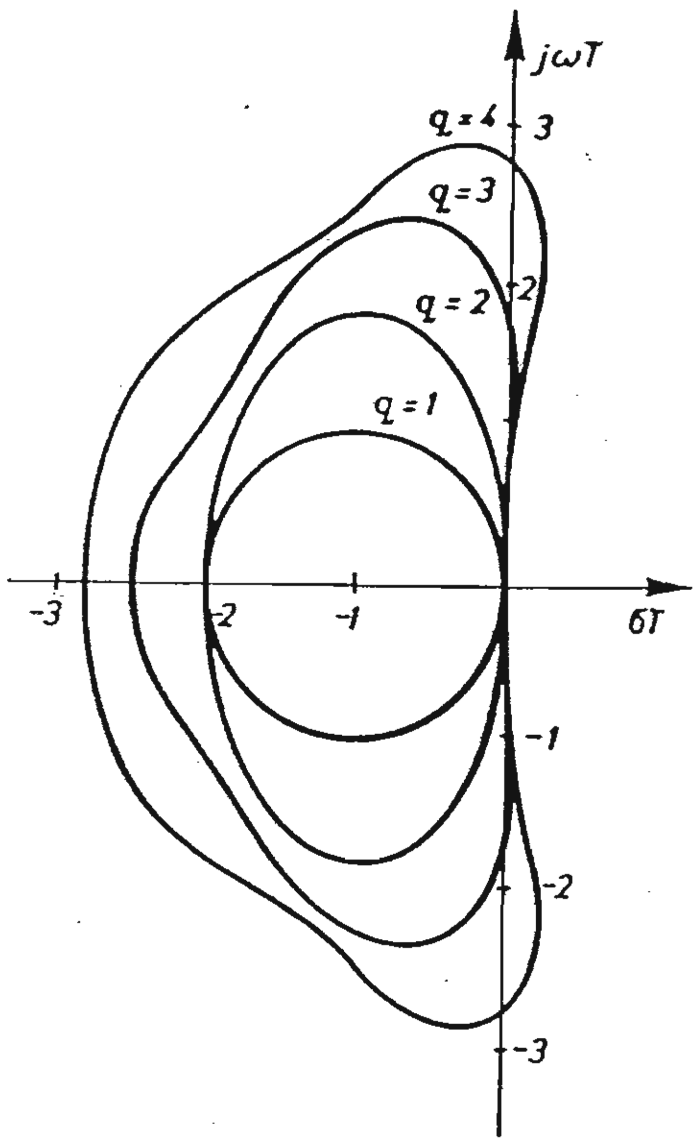
$$\left| 1 + \lambda T + \frac{1}{2!}(\lambda T)^2 + \dots + \frac{1}{q!}(\lambda T)^q \right| \leq 1$$

Uz $q = 1$ $\quad |1 + \lambda T| \leq 1$

Uz $q = 2$ $\quad \left|1 + \lambda T + \frac{1}{2}(\lambda T)^2\right| \leq 1$

Uz $q = 3$ $\quad \left|1 + \lambda T + \frac{1}{2}(\lambda T)^2 + \frac{1}{6}(\lambda T)^3\right| \leq 1$

Uz $q = 4$ $\quad \left|1 + \lambda T + \frac{1}{2}(\lambda T)^2 + \frac{1}{6}(\lambda T)^3 + \frac{1}{24}(\lambda T)^4\right| \leq 1$



$j\omega T$
$q=4$
$q=3$
$q=2$
$q=1$
3
2
-1
-2
-3
-3
-2
-1
σT

Rješavanje sustava jednadžbi

Za sustav jednadžbi

$$\underline{\dot{x}} = \underline{f}(\underline{x}, t)$$

rješenje je:

$$\underline{m}_1 = \underline{f}(\underline{x}_k, t_k)$$

$$\underline{m}_2 = \underline{f}\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2}\underline{m}_1, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$\underline{m}_3 = \underline{f}\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2}\underline{m}_2, t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$\underline{m}_4 = \underline{f}\left(\underline{x}_k + T\underline{m}_3, t_k + T\right)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{T}{6}\left(\underline{m}_1 + 2\underline{m}_2 + 2\underline{m}_3 + \underline{m}_4\right)$$

Posebice, za linearni sustav

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} + \underline{B}\,\underline{r}$$

dobiva se:

$$\underline{m}_1 = \underline{A}\,\underline{x}_k + \underline{B}\,\underline{r}(t_k)$$

$$\underline{m}_2 = \underline{A}\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2}\underline{m}_1\right) + \underline{B}\,\underline{r}\left(t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$\underline{m}_3 = \underline{A}\left(\underline{x}_k + \frac{T}{2}\underline{m}_2\right) + \underline{B}\,\underline{r}\left(t_k + \frac{T}{2}\right)$$

$$\underline{m}_4 = \underline{A}\left(\underline{x}_k + T\underline{m}_3\right) + \underline{B}\,\underline{r}\left(t_k + T\right)$$

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{x}_k + \frac{T}{6}\left(\underline{m}_1 + 2\underline{m}_2 + 2\underline{m}_3 + \underline{m}_4\right)$$

Uzastopnim uvrštavanjem $\underline{m}_1$ u $\underline{m}_2$, $\underline{m}_2$ u $\underline{m}_3$, itd. slijedi:

$$
\begin{aligned}
\underline{x}_{k+1} = & \left[\underline{U} + \underline{A}T + \frac{1}{2}(\underline{A}T)^2 + \frac{1}{6}(\underline{A}T)^3 + \frac{1}{24}(\underline{A}T)^4\right]x_{kt} \\
& + \frac{T}{6}\left[\underline{U} + \underline{A}T + \frac{1}{2}(\underline{A}T)^2 + \frac{1}{4}(\underline{A}T)^3\right]\underline{B}\,\underline{r}(t_k) + \\
& + \frac{T}{6}\left[4\underline{U} + 2\underline{A}T + \frac{1}{2}(\underline{A}T)^2\right]\underline{B}\,\underline{r}\left(t_k + \frac{T}{2}\right) + \\
& + \frac{T}{6}\underline{B}\,\underline{r}(t_k + T)
\end{aligned}
$$

Član uz x_k jednak je prvih pet članova razvoja $e^{\underline{A}T}$ u Taylorov red !

7.7. LINEARNI VIŠEKORAČNI POSTUPCI

7.7.1. Opći oblik linearnih višekoračnih postupaka

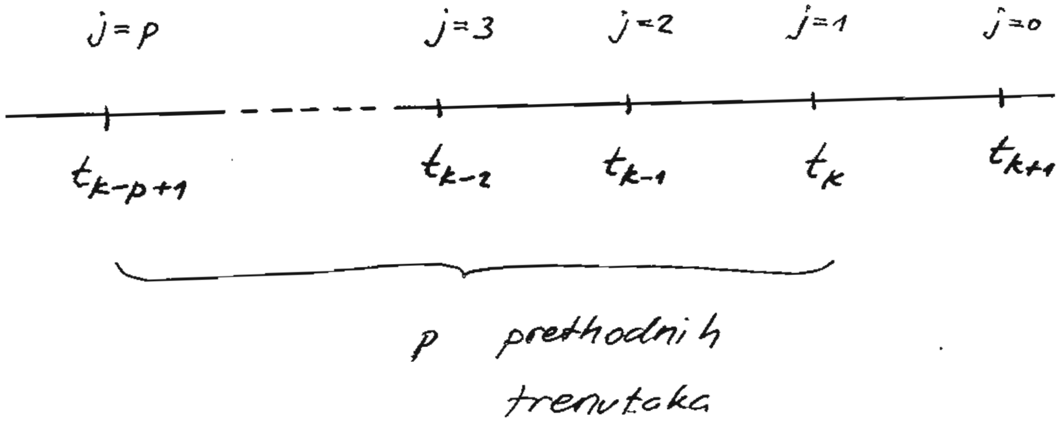
- Kod jednokoračnih postupaka koristi se za računanje x_{k+1} poznavanje rješenja samo iz prethodnog koraka.

- Kod višekoračnih postupaka koriste se izračunate vrijednosti iz p prethodnih koraka:

$$x_{k-j+1}$$

$$\dot{x}_{k-j+1} = f(x_{k-j+1}, t_{k-j+1})$$

$$j = 1, 2, \dots, p$$



Opći oblik postupka:

$$\sum_{j=0}^{p} (\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}) = 0$$

Da bi postupak bio p-koračni barem jedan od koeficijenata α_p ili β_p mora biti različit od nule, te α_0 različit od nule.

Uvijek se može odabrati $\alpha_0 = -1$, te je

$$x_{k+1} = T\beta_0 \dot{x}_{k+1} + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}\right).$$

Uz $\beta_0 = 0$ eksplicitni postupci

$\beta_0 \neq 0$ implicitni postupci

Eksplicitni postupak:

$$x_{k+1} = \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}\right)$$

$$\dot{x}_{k+1} = f(x_{k+1}, t_{k+1})$$ priprema za slijedeći korak

Implicitni postupak:

$$x_{k+1} = T\beta_0 f(x_{k+1}, t_{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}\right)$$

treba izračunati x_{k+1}

Riješavati se može iterativno:

Neka je $x_{k+1}^{(m)}$ riešenje u m-toj iteraciji

$$x_{k+1}^{(m+1)} = T\beta_0 f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}\right)$$

i

$$x_{k+1}^{(m)} = T\beta_0 f(x_{k+1}^{(m-1)}, t_{k+1}) + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1}\right)$$

$$x_{k+1}^{(m+1)} - x_{k+1}^{(m)} = T\beta_0 \left[f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1}) - f(x_{k+1}^{(m-1)}, t_{k+1}) \right]$$

Razvojem $f(x_{k+1}, t_{k+1})$ u red u okolišu $x_{k+1}^{(m-1)}$ dobiva se

$$x_{k+1}^{(m+1)} - x_{k+1}^{(m)} \approx T\beta_0 \left. \frac{\partial f(x, t_{k+1})}{\partial x} \right|_{x = x_{k+1}^{(m-1)}} \cdot \left(x_{k+1}^{(m)} - x_{k+1}^{(m-1)} \right)$$

Uvjet za konvergenciju je da u okolini x_{k+1} bude

$$\left| T\beta_0 \frac{\partial f(x, t_{k+1})}{\partial x} \right| < 1$$

Uz dani β_0 treba odabrati T

Pitanje: Kako odabrati $x_{k+1}^{(0)}$?

<u>Prediktorsko - korektorski postupci</u>

- Procjena $x_{k+1}^{(0)}$ eksplicitnim postupkom - prediktorom
- Implicitna iteracija korektor.
    - Korektor se može pustiti da konvergira do $\left| x_{k+1}^{(m+1)} - x_{k+1}^{(m)} \right| < \varepsilon$

      ili:
    - odabrati unaprijed broj iteracija korektora.

$\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 1$, $\beta_1 = 0$

$x_{k+1} = x_k + T\dot{x}_{k+1}$ obrnuti Eulerov postupak

$\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = \frac{1}{2}$, $\beta_1 = \frac{1}{2}$

$x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + \dot{x}_{k+1})$ trapezni postupak

Iterativni postupak:

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_k + \frac{T}{2}\left(f(x_k, t_k) + f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1})\right)$$

Heunov postupak

PECE

$$x_{k+1}^{(0)} = x_k + T\dot{x}_k$$

$$f_{k+1}^{(0)} = f(x_{k+1}^{(0)}, t_{k+1})$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k + \frac{T}{2}(\dot{x}_k + f_{k+1}^{(0)})$$

$$f_{k+1}^{(1)} = f(x_{k+1}^{(1)}, t_{k+1}) = \dot{x}_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_{k+1}^{(1)}$$

Notacija:

P	uporaba prediktora
C	uporaba korektora
E	izračunavanje $f(x,t)$
s	broj iteracija korektora

Opći oblik prediktorsko-korektorskog postupka je

$$P(EC)^s E$$

↑ priprema za slijedeći korak

P $$x_{k+1}^{(0)} = \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j' x_{k-j+1} + T\beta_j' \dot{x}_{k-j+1} \right)$$

$(EC)^s$ $$\left. \begin{aligned} f_{k+1}^{(m)} &= f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1}) \\ x_{k+1}^{(m+1)} &= T\beta_0 f_{k+1}^{(m)} + \sum_{j=1}^{p} \left(\alpha_j x_{k-j+1} + T\beta_j \dot{x}_{k-j+1} \right) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} m &= \\ 0, 1&, \dots, s-1 \end{aligned}$$

E $$f_{k+1}^{(s)} = f(x_{k+1}^{(s)}, t_{k+1}) = \dot{x}_{k+1}$$

$$x_{k+1} = x_{k+1}^{(s)}$$

Koeficienti

α_j', β_j' različiti su od α_j, β_j

Primjeri:

Jednokoračni postupci: $p = 1$

$$x_{k+1} = T\beta_0 \dot{x}_{k+1} + \alpha_1 x_k + T\beta_1 \dot{x}_k$$

$\alpha_1 = 1$, $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = 1$

$$x_{k+1} = x_k + T\dot{x}_k$$ izravni Eulerov postupak

7.7.2. Lagrangeova interpolacija

Dane su točke (tzv. podupiruće točke)

$$(t_i , f_i) \qquad i = 0, 1, \dots , p$$

t_i podupiruće apscise
f_i podupiruće ordinate

Želimo polinom

$$P(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_p t^p$$

tako da bude :

$$P(t_i) = f_i \qquad i = 0, 1, \dots , p$$

Lagrangeovi polinomi

$$L_i(t) = \frac{(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_p)}{(t_i-t_0)(t_i-t_1)\dots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\dots(t-t_p)}$$

$$L_i(t) = \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq i}}^{p} \frac{t-t_l}{t_i-t_l}$$

imaju svojstvo

$$L_i(t_m) = \begin{cases} 1 & i = m \\ 0 & i \neq m \end{cases}$$

$$i = 0, 1, \dots , p$$
$$m = 0, 1, \dots , p$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{p} f_i L_i(t) = \sum_{i=0}^{p} f_i \prod_{\substack{l=0 \\ l\neq i}}^{p} \frac{t-t_l}{t_i-t_l}$$

7.7.3. Adams - Bashforthovi postupci

$$\alpha_0 = -1$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$\alpha_j = 0 \qquad 2 \le j \le p$$

$$\beta_0 = 0$$

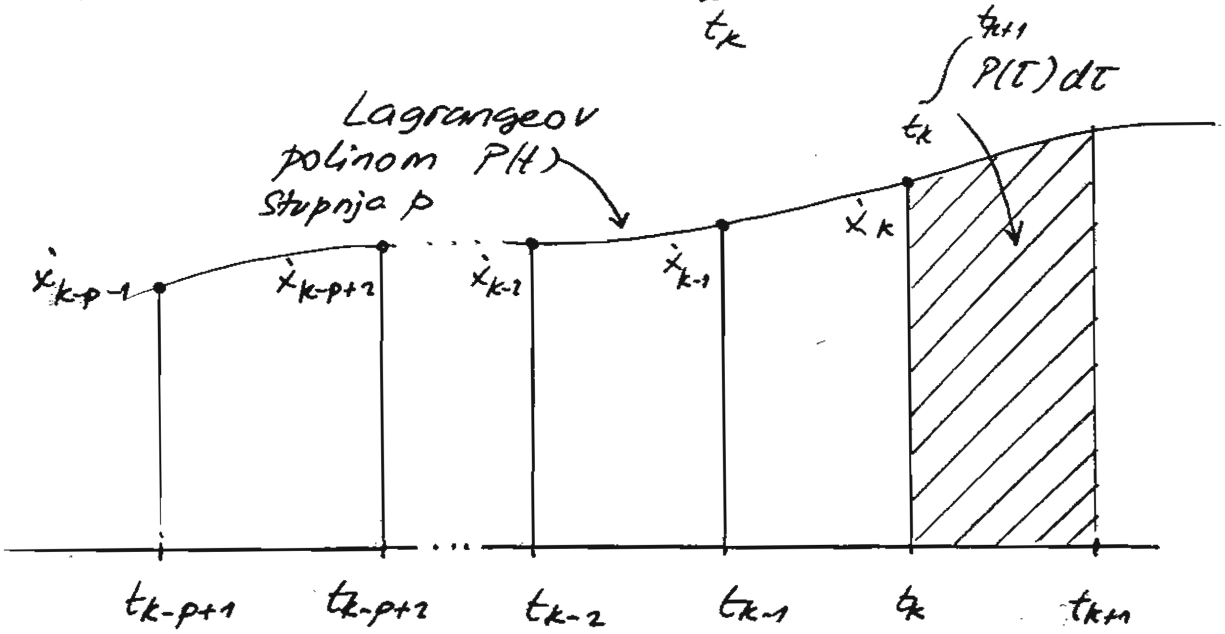
$$\beta_j \neq 0 \quad \text{za} \quad 1 \le j \le p$$

Opći oblik postupka

$$x_{k+1} = x_k + T \sum_{j=1}^{p} \beta_j \dot{x}_{k-j+1}$$

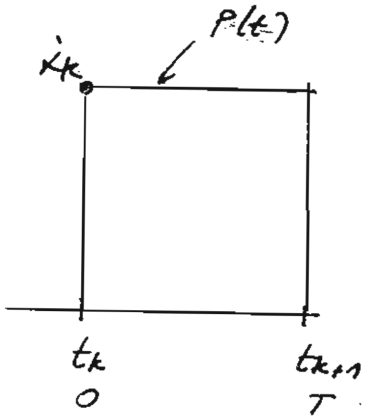
Kako su određeni koeficijenti β_j ?

$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$



$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} P(\tau)\, d\tau$$

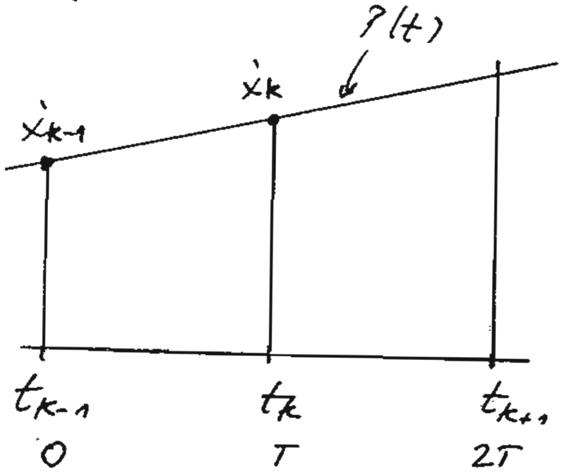
$p = 1$



$$P(t) = \dot{x}_k$$

$$\int_0^T P(\tau)\,d\tau = T \cdot \dot{x}_k$$

$p = 2$



$$P(t) = \dot{x}_{k-1}\,\frac{t-T}{0-T} + \dot{x}_k\,\frac{t-0}{T-0}$$

$$= \dot{x}_k\,\frac{t}{T} - \dot{x}_{k-1}\,\frac{t-T}{T}$$

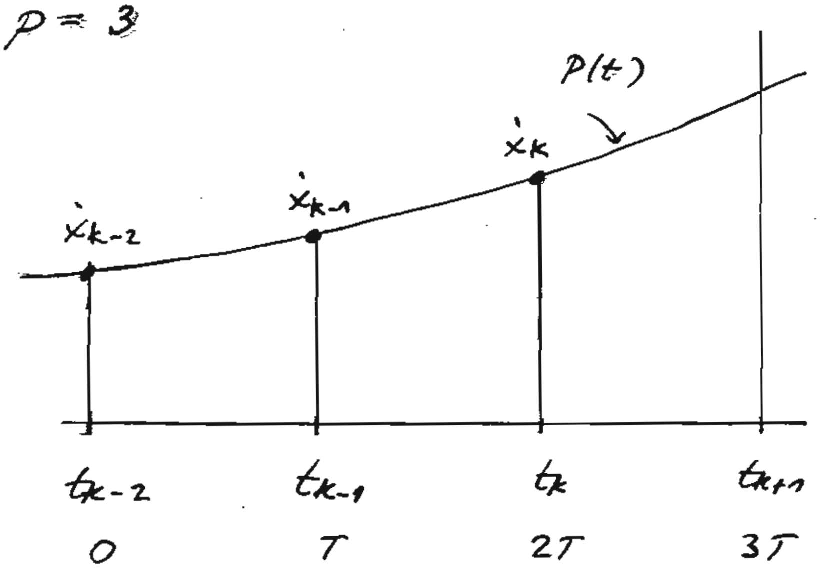
$$\int_T^{2T} P(\tau)\,d\tau = \frac{\dot{x}_k}{T}\int_T^{2T} \tau\,d\tau - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T}\int_T^{2T} (\tau - T)\,d\tau$$

$$= \frac{\dot{x}_k}{T}\,\frac{\tau^2}{2}\Big|_T^{2T} - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T}\left[\frac{\tau^2}{2} - T\tau\right]_T^{2T}$$

$$= T\left\{ \underbrace{\tfrac{3}{2}}_{\beta_{21}}\,\dot{x}_k - \underbrace{\tfrac{1}{2}}_{\beta_{22}}\,\dot{x}_{k-1} \right\}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{T}{2}\left(3\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}\right)}$$

$p = 3$



$$P(t) = \dot{x}_k \frac{(t-0)(t-T)}{(2T-0)(2T-T)} + \dot{x}_{k-1} \frac{(t-0)(t-2T)}{(T-0)(T-2T)} + \dot{x}_{k-2} \frac{(t-T)(t-2T)}{(0-T)(0-2T)}$$

$$= \frac{\dot{x}_k}{2T^2}(t^2 - Tt) - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}(t^2 - 2Tt) + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}(t^2 - 3Tt + 2T^2)$$

$$\int_{2T}^{3T} P(\tau)\, d\tau = \frac{\dot{x}_k}{2T^2} \int_{2T}^{3T} (\tau^2 - T\tau)\, d\tau -$$

$$- \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2} \int_{2T}^{3T} (\tau^2 - T\tau)\, d\tau +$$

$$+ \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2} \int_{2T}^{3T} (\tau^2 - 3T\tau + 2T^2)\, d\tau =$$

$$= T \left\{ \underset{\substack{\uparrow \\ \beta_{31}}}{\frac{23}{12}} \dot{x}_k - \underset{\substack{\uparrow \\ \beta_{32}}}{\frac{16}{12}} \dot{x}_{k-1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \beta_{33}}}{\frac{5}{12}} \dot{x}_{k-2} \right\}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{T}{12}\left(23\dot{x}_k - 16\dot{x}_{k-1} + 5\dot{x}_{k-2}\right)}$$

j	1	2	3	4	5	6
β_{1j}	1					
$2\beta_{2j}$	3	-1				
$12\beta_{3j}$	23	-16	5			
$24\beta_{4j}$	55	-59	37	-9		
$720\beta_{5j}$	1901	-2774	2616	-1274	251	
$1440\beta_{6j}$	4277	-7923	9982	-7798	2877	-475

p-koračni postupak je $O(T^p)$

Ispitivanje stabilnosti svodi se na istraživanje rješenja jednadžbe diferencija.

Za ispitnu jednadžbu

$$\dot{x} = \lambda x$$

se npr. za $p = 2$ dobiva

$$\delta_{k+1} = \delta_k + \frac{3}{2}\lambda T \delta_k - \frac{1}{2}\lambda T \delta_{k-1}$$

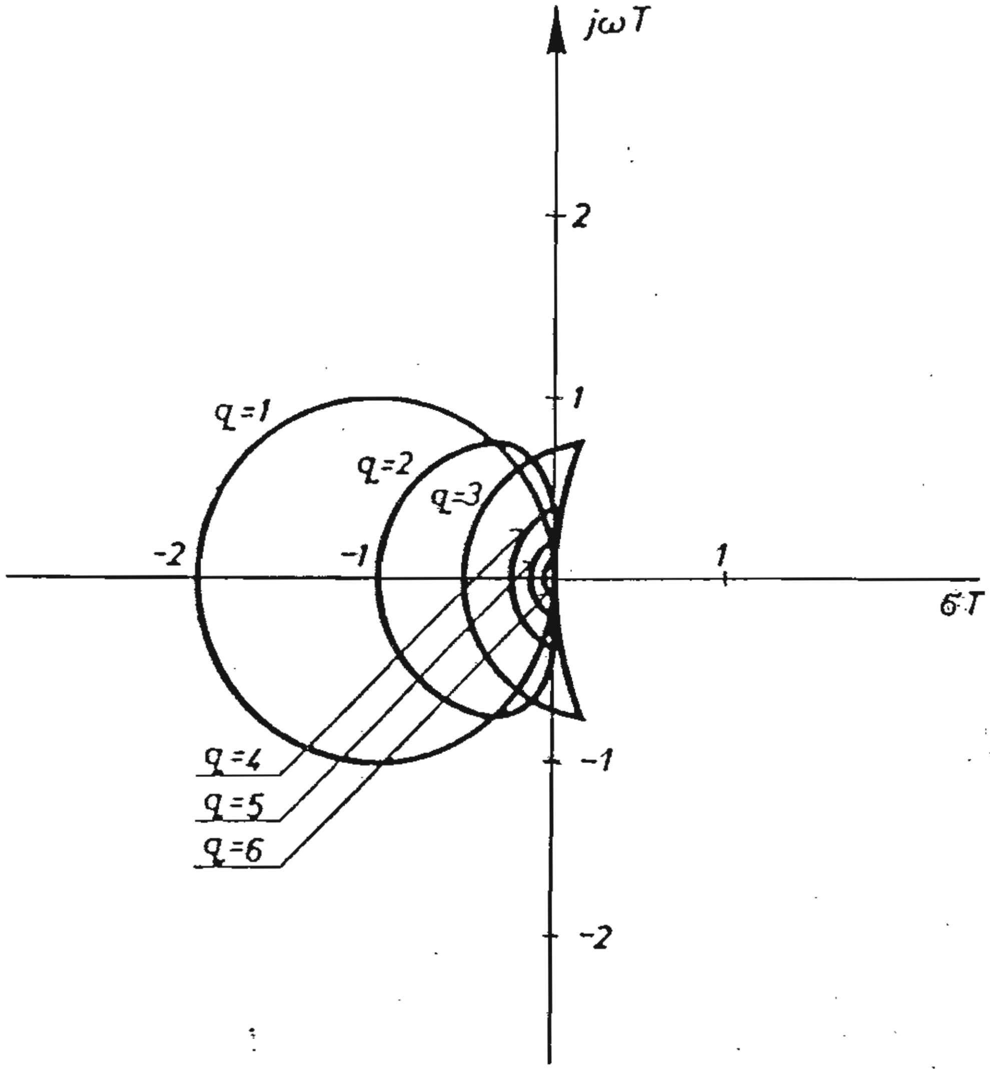
odnosno:

$$\delta_{k+1} - \left(1 + \frac{3}{2}\lambda T\right)\delta_k + \frac{1}{2}\lambda T \delta_{k-1} = 0$$

uz karakteristični polinom

$$z^2 - \left(1 + \frac{3}{2}\lambda T\right) z + \frac{1}{2}\lambda T = 0$$

$$|z_1| \leq 1 \quad , \quad |z_2| \leq 1$$



jωT
2
1
-1
-2
-2
-1
1
σT
q=1
q=2
q=3
q=4
q=5
q=6

7.7.4. Adams - Moultonovi postupci

$$\alpha_0 = -1$$
$$\alpha_1 = 1$$
$$\alpha_j = 0 \qquad 2 \leq j \leq p$$

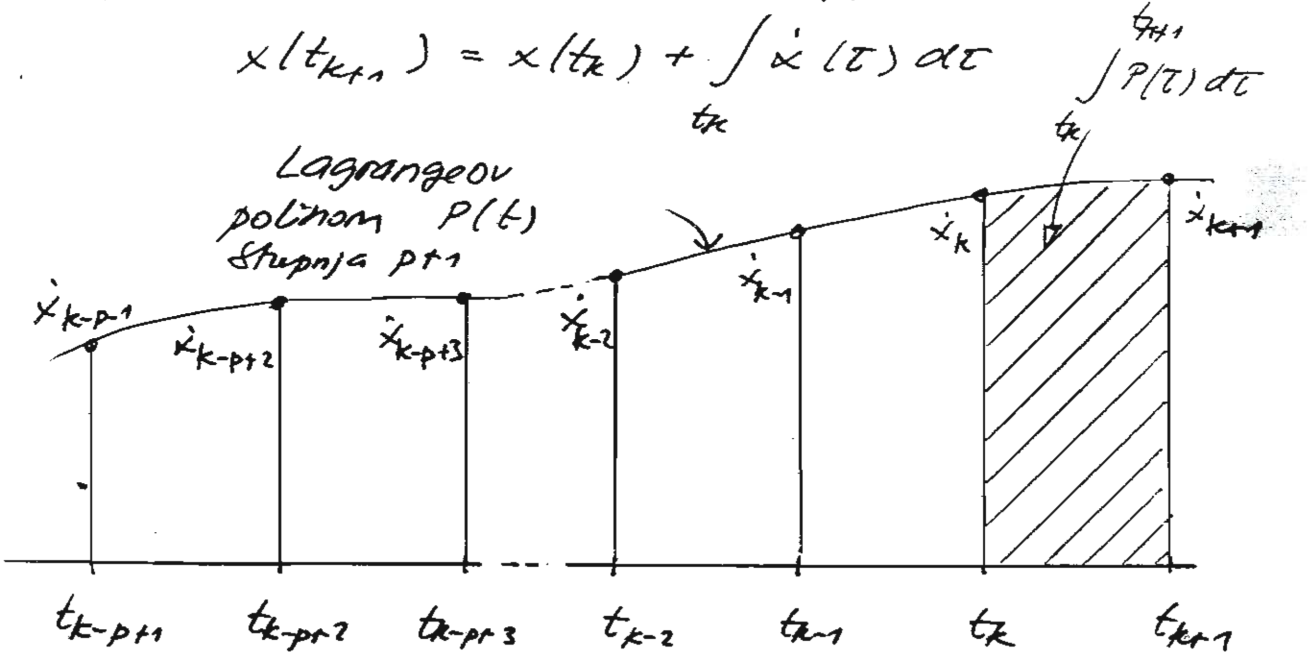
$$\beta_j \neq 0 \qquad 0 \leq j \leq p$$

Opći oblik postupka

$$x_{k+1} = x_k + T \sum_{j=0}^{p} \beta_j \dot{x}_{k-j+1}$$

Postupak je impliciton!

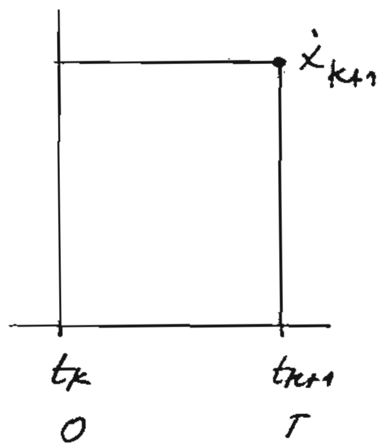
$$x(t_{k+1}) = x(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} \dot{x}(\tau)\, d\tau$$



$$x_{k+1} = x_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} P(\tau)\, d\tau$$

p - koračni postupak je $O(T^{p+1})$

$p = 0$ „nul-koračni" postupak

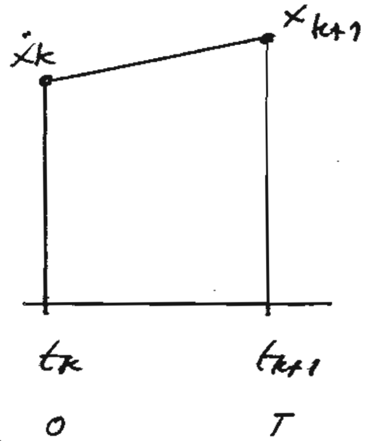


$$P(t) = \dot{x}_{k+1}$$

$$\int_0^T \dot{x}_{k+1}\, d\tau = T \cdot \dot{x}_{k+1}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + T \cdot \dot{x}_{k+1}}$$ obrnuti Euler

$p = 1$



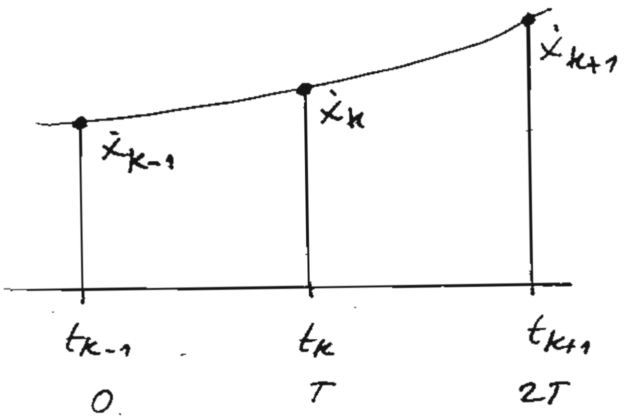
$$P(t) = \dot{x}_{k+1} \frac{t-0}{T-0} + \dot{x}_k \frac{t-T}{0-T}$$
$$= \frac{1}{T} \dot{x}_{k+1}\, t - \frac{1}{T} \dot{x}_k\, (t-T)$$

$$\int_0^T P(\tau)\, d\tau = \frac{\dot{x}_{k+1}}{T} \int_0^T \tau\, d\tau - \frac{\dot{x}_k}{T} \int_0^T (\tau - T)\, d\tau$$
$$= \frac{\dot{x}_{k+1}}{T} \frac{\tau^2}{2} \Big|_0^T - \frac{\dot{x}_k}{T} \left(\frac{\tau^2}{2} - T\tau \right) \Big|_0^T$$
$$= T \left(\frac{1}{2} \dot{x}_{k+1} + \frac{1}{2} \dot{x}_k \right)$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + T \left(\underset{\substack{\uparrow \\ \beta_{10}}}{\frac{1}{2}} \dot{x}_{k+1} + \underset{\substack{\uparrow \\ \beta_{11}}}{\frac{1}{2}} \dot{x}_k \right)}$$

trapezni postupak

$p = 2$



$$P(t) = \dot{x}_{k+1}\frac{(t-0)(t-T)}{(2T-0)(2T-T)} + \dot{x}_k\frac{(t-0)(t-2T)}{(T-0)(T-2T)} + \dot{x}_{k-1}\frac{(t-T)(t-2T)}{(0-T)(0-2T)}$$

$$= \frac{\dot{x}_{k+1}}{2T^2}(t^2 - Tt) - \frac{\dot{x}_k}{T^2}(t^2 - 2Tt) + \frac{\dot{x}_{k-1}}{2T^2}(t^2 - 3Tt + 2T^2)$$

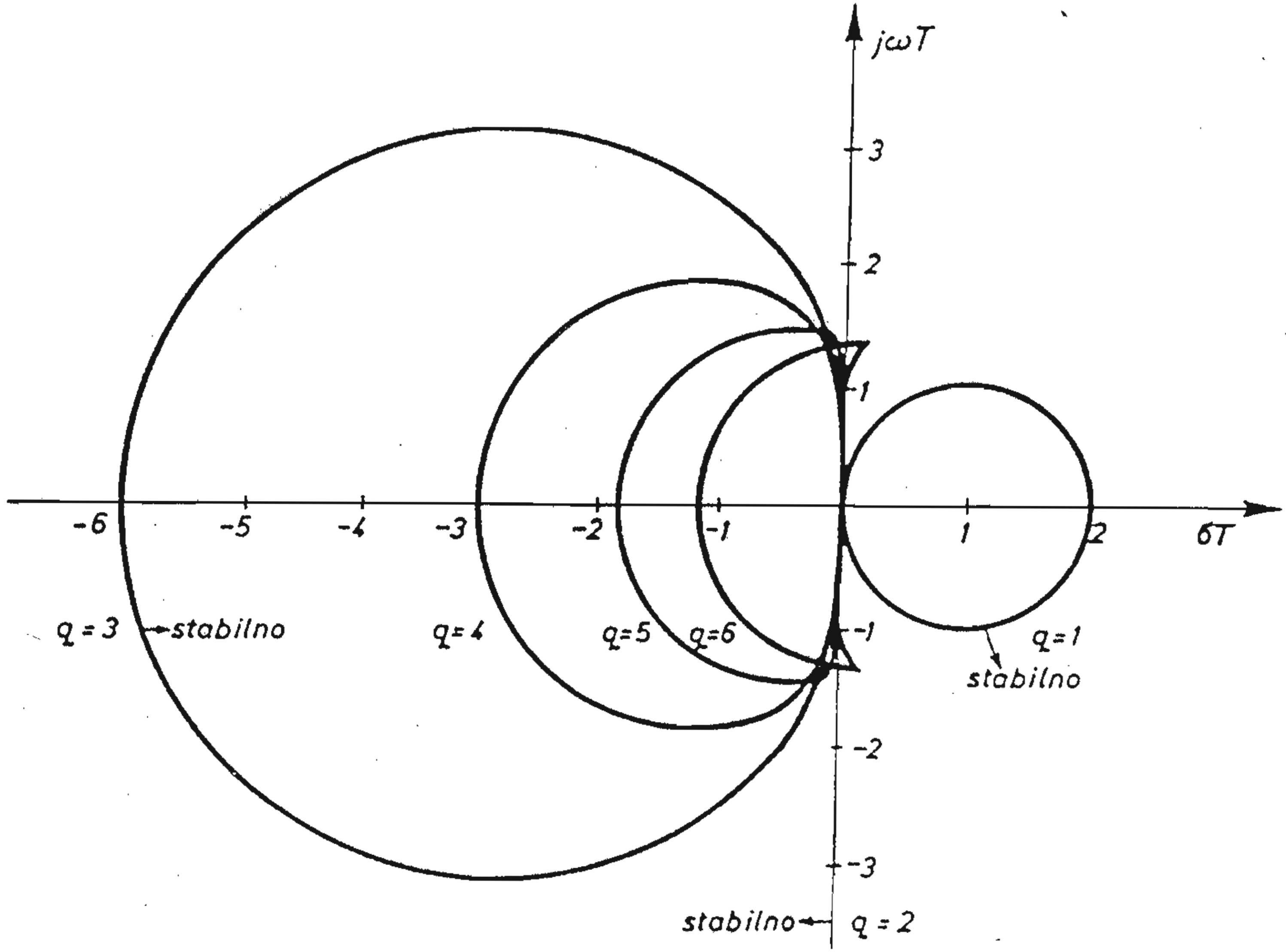
$$\int_t^{2T} P(\tau)\,d\tau = \frac{\dot{x}_{k+1}}{2T^2}\int_T^{2T}(\tau^2 - T\tau)\,d\tau - \frac{\dot{x}_k}{T^2}\int_T^{2T}(\tau^2 - 2T\tau)\,d\tau + \frac{\dot{x}_{k-1}}{2T^2}\int_T^{2T}(\tau^2 - 3T\tau + 2T^2)\,d\tau$$

$$= T\left\{\underbrace{\frac{5}{12}}_{\beta_{20}}\dot{x}_{k+1} + \underbrace{\frac{8}{12}}_{\beta_{21}}\dot{x}_k - \underbrace{\frac{1}{12}}_{\beta_{22}}\dot{x}_{k-1}\right\}$$

$$\boxed{x_{k+1} = x_k + \frac{T}{12}\left(5\dot{x}_{k+1} + 8\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}\right)}$$

j	0	1	2	3	4	5
β_{0j}	1					
$2\beta_{1j}$	1	1				
$12\beta_{2j}$	5	8	-1			
$24\beta_{3j}$	9	19	-5	1		
$720\beta_{4j}$	251	646	-264	106	-19	
$1440\beta_{5j}$	475	1427	-798	482	-173	27

Područje stabilnosti vrijedi samo ako se postupak iterira do konvergencije !!


jωT
3
2
1
-1
-2
-3
-6
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
σT
q = 3
stabilno
q = 4
q = 5
q = 6
q = 1
stabilno
stabilno
q = 2

7-556

7.8. Nordsieckov oblik linearnih višekoračnih postupaka

$$\begin{cases} \text{Adams - Bashforthov prediktor} & 2.\ \text{reda} \\ \text{Adams - Moultonov korektor} & 3.\ \text{reda} \end{cases}$$

(A) $$x_{k+1}^{(0)} = x_k + \frac{3}{2} T\dot{x}_k - \frac{1}{2} T\dot{x}_{k-1}$$

$$f_{k+1}^{(m)} = f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1})$$

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_k + \frac{5}{12} T f_{k+1}^{(m)} + \frac{8}{12} T\dot{x}_k - \frac{1}{12} T\dot{x}_{k-1}$$

za $m = 0$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_k + \frac{5}{12} T f_{k+1}^{(0)} + \frac{8}{12} T\dot{x}_k - \frac{1}{12} T\dot{x}_{k-1}$$

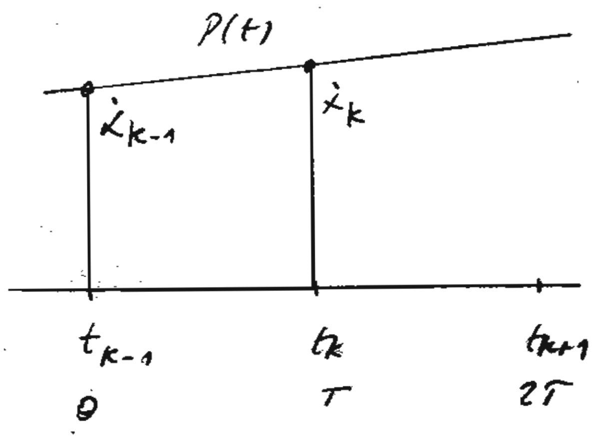
iz (A):

$$x_k = x_{k+1}^{(0)} - \frac{3}{2} T\dot{x}_k + \frac{1}{2} T\dot{x}_{k-1}$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{5}{12} T f_{k+1}^{(0)} + \frac{8}{12} T\dot{x}_k - \frac{3}{2} T\dot{x}_k - \frac{1}{12} T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{2} T\dot{x}_k$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{5}{12} T f_{k+1}^{(0)} - \frac{10}{12} T\dot{x}_k + \frac{5}{12} T\dot{x}_{k-1}$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{5}{12} \left[T f_{k+1}^{(0)} - T(2\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}) \right]$$



Ekstrapolacijom $\dot{x}$ dobivamo

$$p(t) = \dot{x}_k \frac{t}{T} - \dot{x}_{k-1} \frac{t-T}{T}$$

$$\dot{x}_{k+1}^{(0)} \doteq p(2T) =$$

$$= 2\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{5}{12}\left[T f_{k+1}^{(0)} - T\cdot \dot{x}_{k+1}^{(0)}\right]$$

Kada bi bilo $\dot{x}_{k+1}^{(0)} = f_{k+1}^{(0)}$
imali bi konvergenciju!

Razlika $f_{k+1}^{(0)} - \dot{x}_{k+1}^{(0)}$ je
mjera nezadovoljenja konvergencije

za $m \neq 0$

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_{k+1}^{(m)} + \frac{5}{12}\left[T f_{k+1}^{(m)} - T\dot{x}_{k+1}^{(m)}\right]$$

$$f_{k+1}^{(m)} = f(x_{k+1}^{(m)}, t_{k+1})$$

$$\dot{x}_{k+1}^{(m)} = f(x_{k+1}^{(m-1)}, t_{k+1}) = f_{k+1}^{(m-1)}$$

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_{k+1}^{(m)} + \frac{5}{12}\, r(x_{k+1}^{(m)})$$

mjera nezadovoljenja: $r(x_{k+1}^{(m)}) = T f_{k+1}^{(m)} - T f_{k+1}^{(m-1)}$

$$r(x_{k+1}^{(0)}) = T\cdot f_{k+1}^{(0)} - T\dot{x}_{k+1}^{(0)}$$

Vektorski oblik zapisivanja prediktorsko – korektorskog postupka.

Na prijelazu iz koraka k u korak $k+1$

$$x_k,\ T\dot{x}_k,\ T\dot{x}_{k-1} \Rightarrow x_{k+1},\ T\dot{x}_{k+1},\ T\dot{x}_k$$

$$\underline{y}_k = \begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix} \qquad \underline{y}_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{k+1} \\ T\dot{x}_{k+1} \\ T\dot{x}_k \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(0)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(0)} \\ T\dot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(m+1)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(m+1)} \\ T\dot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(m)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(m)} \\ T\dot{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r\left(x_{k+1}^{(m)}\right)$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(0)} = \underline{B}\,\underline{y}_k$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(m+1)} = \underline{y}_{k+1}^{(m)} + \underline{c}\, r\left(x_{k+1}^{(m)}\right)$$

Adams - Bashforthov prediktor 3. reda

Adams - Moultonov korektor 4. reda

(B) $$x_{k+1}^{(0)} = x_k + \frac{23}{12} T\dot{x}_k - \frac{16}{12} T\dot{x}_{k-1} + \frac{5}{12} T\dot{x}_{k-2}$$

$$f_{k+1}^{(m)} = f\left(x_{k+1}^{(m)}, t_k\right)$$

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_k + \frac{9}{24} T f_{k+1}^{(m)} + \frac{19}{24} T\dot{x}_k - \frac{5}{24} T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{24} T\dot{x}_{k-2}$$

uz $m=0$

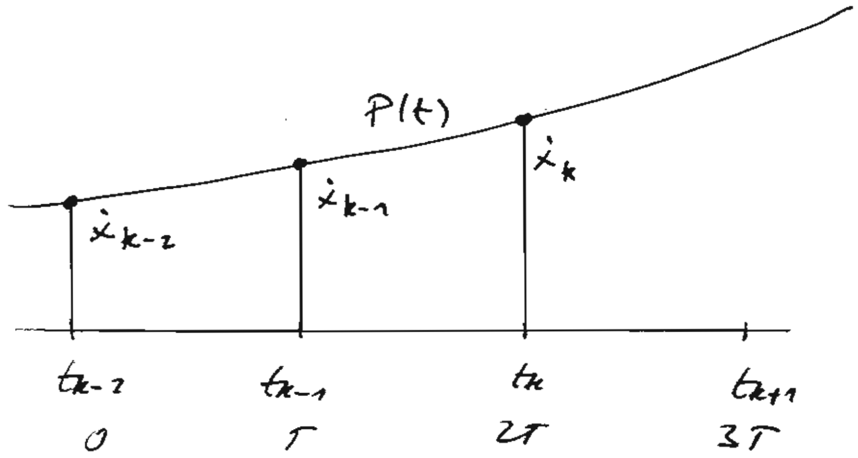
$$x_{k+1}^{(1)} = x_k + \frac{9}{24} T f_{k+1}^{(0)} + \frac{19}{24} T\dot{x}_k - \frac{5}{24} T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{24} T\dot{x}_{k-2}$$

iz (B)

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} - \frac{23}{12} T\dot{x}_k + \frac{16}{12} T\dot{x}_{k-1} - \frac{5}{12}\dot{x}_{k-2} +$$

$$\frac{9}{24} T f_{k+1}^{(0)} + \frac{19}{24} T\dot{x}_k - \frac{5}{24} T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{24}\dot{x}_{k-2}$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{9}{24}\left[T f_{k+1}^{(0)} - T(3\dot{x}_k - 3\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2})\right]$$



što predstavlja izraz $3\dot{x}_k - 3\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2}$?

Ekstrapolacijom $\dot{x}$ se dobiva:

$$P(t) = \frac{\dot{x}_k}{2T^2}(t^2 - Tt) - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}(t^2 - 2Tt) + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}(t^2 - 3Tt + 2T^2)$$

$$\dot{x}_{k+1}^{(0)} = P(3T) =$$

$$= \frac{\dot{x}_k}{2T^2}(9T^2 - 3T^2) - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}(9T^2 - 6T^2) + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}(9T^2 - 9T^2 + 2T^2)$$

$$\dot{x}_{k+1}^{(0)} = 3\dot{x}_k - 3\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2}$$

$$x_{k+1}^{(1)} = x_{k+1}^{(0)} + \frac{9}{24}\left[T f_{k+1}^{(0)} - T\dot{x}_{k+1}^{(0)}\right]$$

za $m \neq 0$

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_{k+1}^{(m)} + \frac{9}{24}\left[T f_{k+1}^{(m)} - T\cdot f_{k+1}^{(m-1)}\right]$$

odnosno:

$$x_{k+1}^{(m+1)} = x_{k+1}^{(m)} + \frac{3}{8}\underbrace{\left[T f_{k+1}^{(m)} - T f_{k+1}^{(m-1)}\right]}_{r(x_{k+1}^{(m)})}$$

Na prijelazu iz koraka k u korak $k+1$ treba iz

$$x_k, T\dot{x}_k, T\dot{x}_{k-1}, T\dot{x}_{k-2}$$

izračunati, odnosno pohranjivati:

$$x_{k+1}, T\dot{x}_{k+1}, T\dot{x}_k, T\dot{x}_{k-1}$$

U matričnom obliku:

$$\underline{y}_{k+1}^{(0)} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(0)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(0)} \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{23}{12} & -\frac{16}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \\ T\dot{x}_{k-2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(m+1)} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(m+1)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(m+1)} \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{k+1}^{(m)} \\ T\dot{x}_{k+1}^{(m)} \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} r(x_{k+1}^{(m)})$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(0)} = \underline{B}\, \underline{y}_k$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(m+1)} = \underline{y}_{k+1}^{(m)} + \underline{c}\, r(x_{k+1}^{(m)})$$

Nordsieck je predložio da se umjesto vrijednosti

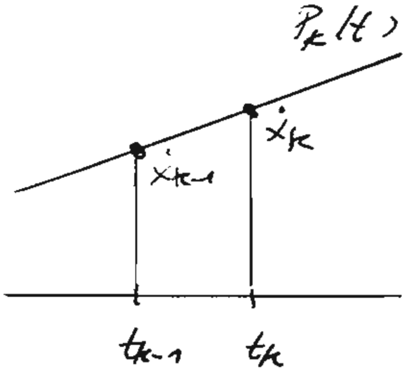
$$x_k,\ T\dot{x}_k,\ T\dot{x}_{k-1},\ T\dot{x}_{k-2}, \dots$$

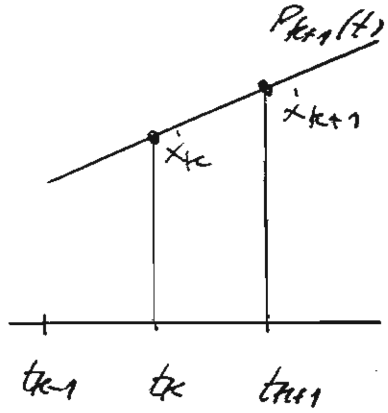
čuvaju vrijednosti

$$x_k,\ T\dot{x}_k,\ \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k,\ \frac{T^3}{6}\dddot{x}_k, \dots$$

s pomoću kojih se može $\dot{x}(t)$ aproksimirati jednakim polinomima $P(t)$ reda p.

Konkretno: za $p = 1$ slijedi:

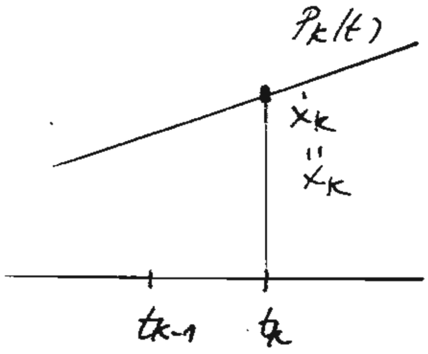


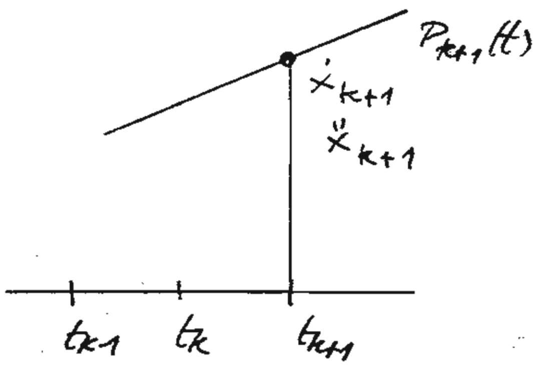


$$x_k, \dot{x}_k, \dot{x}_{k-1} \Rightarrow x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}, \dot{x}_k$$

ili

$$x_k, T\dot{x}_k, T\dot{x}_{k-1} \Rightarrow x_{k+1}, T\dot{x}_{k+1}, T\dot{x}_k$$



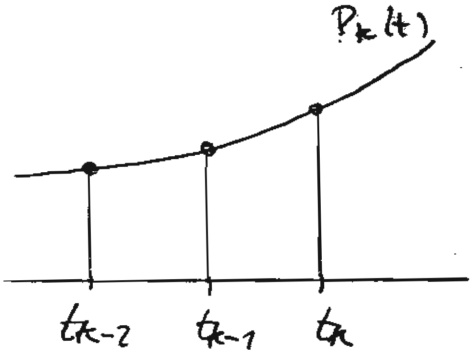


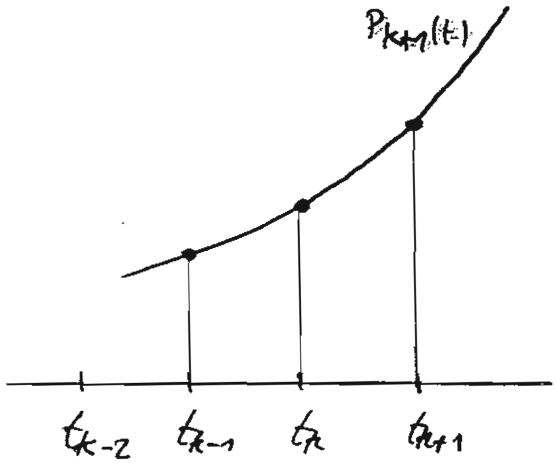
$$x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k \Rightarrow x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}, \ddot{x}_{k+1}$$

ili

$$x_k, T\dot{x}_k, \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k \Rightarrow x_{k+1}, T\dot{x}_{k+1}, \frac{T^2}{2}\ddot{x}_{k+1}$$

za $p = 2$ slijedi:

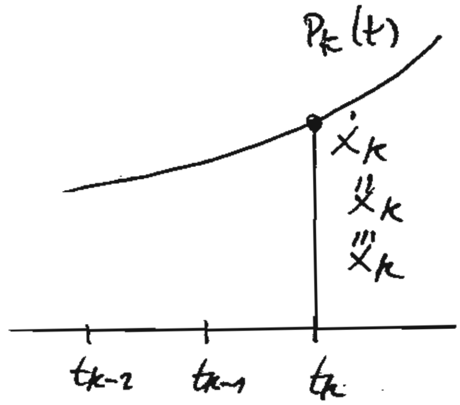


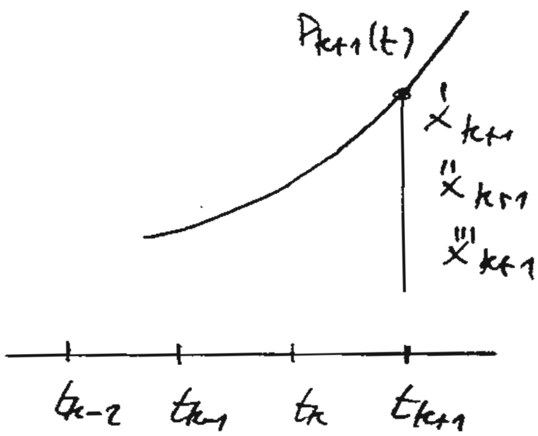


$$x_k, \dot{x}_k, \dot{x}_{k-1}, \dot{x}_{k-2} \Rightarrow x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}, \dot{x}_k, \dot{x}_{k-1}$$

ili

$$x_k, T\dot{x}_k, T\dot{x}_{k-1}, T\dot{x}_{k-2} \Rightarrow x_{k+1}, T\dot{x}_{k+1}, T\dot{x}_k, T\dot{x}_{k-1}$$





$$x_k, \dot{x}_k, \ddot{x}_k, \dddot{x}_k \Rightarrow x_{k+1}, \dot{x}_{k+1}, \ddot{x}_{k+1}, \dddot{x}_{k+1}$$

$$x_k, T\dot{x}_k, \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k, \frac{T^3}{6}\dddot{x}_k \Rightarrow x_{k+1}, T\dot{x}_{k+1}, \frac{T^2}{2}\ddot{x}_{k+1}, \frac{T^3}{6}\dddot{x}_{k+1}$$

uz $t_{k-2} = 0$, $t_{k-1} = T$, $t_k = 2T$

$$\dot{x}(t) \approx P_k(t) = \frac{\dot{x}_k}{2T^2}(t^2 - Tt) - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}(t^2 - 2Tt) + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}(t^2 - 3Tt + 2T^2)$$

za $t = 2T$:

$$\dot{x}_k = \dot{x}_k$$

$$\ddot{x}(t) \approx P_k'(t) = \frac{\dot{x}_k}{2T^2}(2t - T) - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}(2t - 2T) + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}(2t - 3T)$$

za $t = 2T$:

$$\ddot{x}_k = \frac{1}{T}\left(\frac{3}{2}\dot{x}_k - 2\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{2}\dot{x}_{k-2}\right) \quad / \cdot \frac{T^2}{2}$$

$$\frac{T^2}{2}\ddot{x}_k = \frac{3}{4}T\dot{x}_k - T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{4}T\dot{x}_{k-2}$$

uz $t_{k-1} = 0$

$t_k = T$

Langrangeov polinom daje aproksimaciju za $\dot{x}(t)$

$$\dot{x}(t) \approx P_k(t) = \dot{x}_k \frac{t}{T} - \dot{x}_{k-1} \frac{t-T}{T}$$

$$\ddot{x}(t) \approx \dot{P}_k(t) = \frac{\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}}{T}$$

$$\ddot{x}_k = \frac{\dot{x}_k - \dot{x}_{k-1}}{T}$$

veza između čuvanje

$$x_k, \; T\dot{x}_k, \; T\dot{x}_{k-1}$$

odnosno

$$x_k, \; T\dot{x}_k, \; \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k$$

$$x_k = x_k$$

$$T\dot{x}_k = T\dot{x}_k$$

$$\frac{T^2}{2}\ddot{x}_k = \frac{1}{2} T\dot{x}_k - \frac{1}{2} T\dot{x}_{k-1}$$

ili vektorski:

$$\begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_k = \underline{M} \cdot \underline{y}_k$$

$$\dddot{x}(t) \approx \ddot{P}_k(t) = \frac{\dot{x}_k}{2T^2}2 - \frac{\dot{x}_{k-1}}{T^2}2 + \frac{\dot{x}_{k-2}}{2T^2}\cdot 2$$

$$\dddot{x}_k = \frac{1}{T^2}\left(\dot{x}_k - 2\dot{x}_{k-1} + \dot{x}_{k-2}\right) \quad \Big| \cdot \frac{T^3}{6}$$

$$\frac{T^3}{6}\dddot{x}_k = \frac{1}{6}T\dot{x}_k - \frac{1}{3}T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{6}T\dot{x}_{k-2}$$

Prema tome:

$$x_k = x_k$$

$$T\dot{x}_k = T\dot{x}_k$$

$$\frac{T^2}{2}\ddot{x}_k = \frac{3}{4}T\dot{x}_k - T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{4}T\dot{x}_{k-2}$$

$$\frac{T^3}{6}\dddot{x}_k = \frac{1}{6}T\dot{x}_k - \frac{1}{3}T\dot{x}_{k-1} + \frac{1}{6}T\dot{x}_{k-2}$$

$$\begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ \frac{T^2}{2}\ddot{x}_k \\ \frac{T^3}{6}\dddot{x}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ T\dot{x}_k \\ T\dot{x}_{k-1} \\ T\dot{x}_{k-2} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_k = \underline{M} \qquad \underline{y}_k$$

$$\underline{P}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{12} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

uz $p = 3$

$$\underline{P}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \overset{\underline{M}_4}{\begin{bmatrix} 1 & \frac{23}{12} & -\frac{16}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}} \overset{\underline{M}_4^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -4 & 12 \end{bmatrix}} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{8} \\ 1 \\ \frac{3}{4} \\ \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_k = \underline{M}\,\underline{y}_k$$

$$\underline{y}_k = \underline{M}^{-1}\,\underline{v}_k$$

Uvrštenjem u rješenje:

$$\underline{y}_{k+1}^{(0)} = \underline{B}\,\underline{y}_k$$

$$\underline{y}_{k+1}^{(m+1)} = \underline{y}_{k+1}^{(m)} + \underline{c}\, r(x_{k+1}^{(m)})$$

$$\underline{M}^{-1}\,\underline{v}_{k+1}^{(0)} = \underline{B}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{v}_k \qquad \underline{M}\,|$$

$$\underline{M}^{-1}\,\underline{v}_{k+1}^{(m+1)} = \underline{M}^{-1}\,\underline{v}_{k+1}^{(m)} + \underline{c}\, r(x_{k+1}^{(m)}) \qquad \underline{M}\,|$$

$$\underline{v}_{k+1}^{(0)} = \underline{M}\,\underline{B}\,\underline{M}^{-1}\,\underline{v}_k$$

$$\underline{v}_{k+1}^{(m+1)} = \underline{v}_{k+1}^{(m)} + \underline{M}\,\underline{c}\, r(x_{k+1}^{(m)})$$

ili:

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{v}_{k+1}^{(0)} &= \underline{P}\,\underline{v}_k \\ \underline{v}_{k+1}^{(m+1)} &= \underline{v}_k + \underline{a}\, r(x_{k+1}^{(m)}) \end{aligned}}$$

za $p = 2$

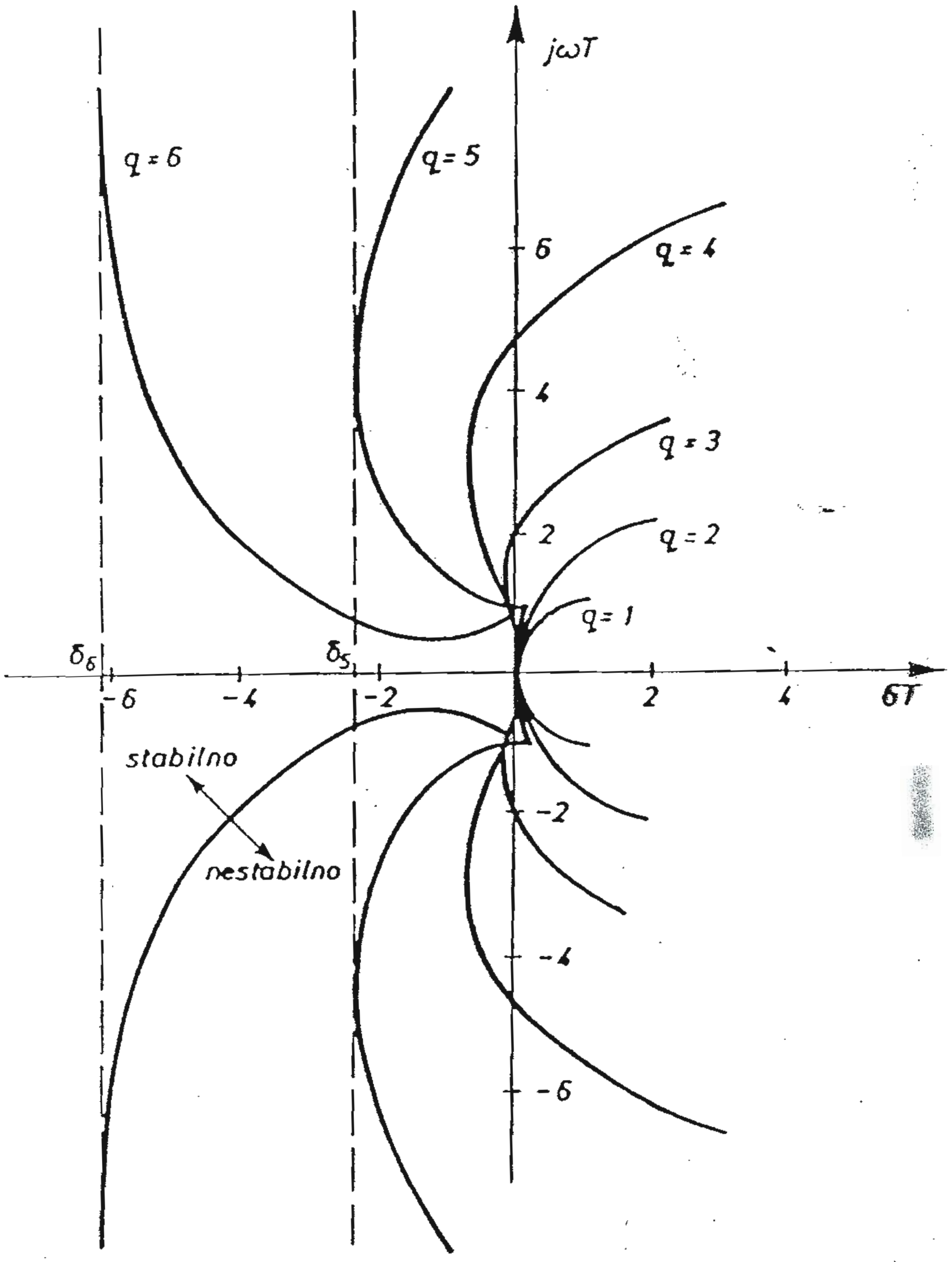
$$\underline{M}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \qquad \underline{M}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

- Matrice $\underline{P}_k$ su trokutne matrice.
- Stupci su jednaki redovima Pascalova trokuta nadopunjenim s nulama.

Oblik je praktičan za promjenu koraka.

Pri promjeni koraka na $T' = \varkappa T$ treba vektor $\underline{v}_k$ pomnožiti s matricom

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \varkappa & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \varkappa^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \varkappa^2 \end{bmatrix}$$


jωT
q = 6
q = 5
q = 4
q = 3
q = 2
q = 1
6
4
2
-2
-4
-6
δ6
δ5
-6
-4
-2
2
4
σT
stabilno
nestabilno

8. DINAMIČKO PONAŠANJE DISKRETNIH SUSTAVA

Jednadžbe diferencija

Linearna jednadžba

$$N_{k+1} = RN_k$$

N_0 – početno stanje

$$N_1 = RN_0$$
$$N_2 = RN_1 = R^2 N_0$$
$$N_3 = RN_2 = R^3 N_0$$
$$\vdots$$
$$N_k = RN_{k-1} = R^k N_0$$

Algebarsko rješenje je

$$N_k = R^k N_0$$

Ponašanje rješenja

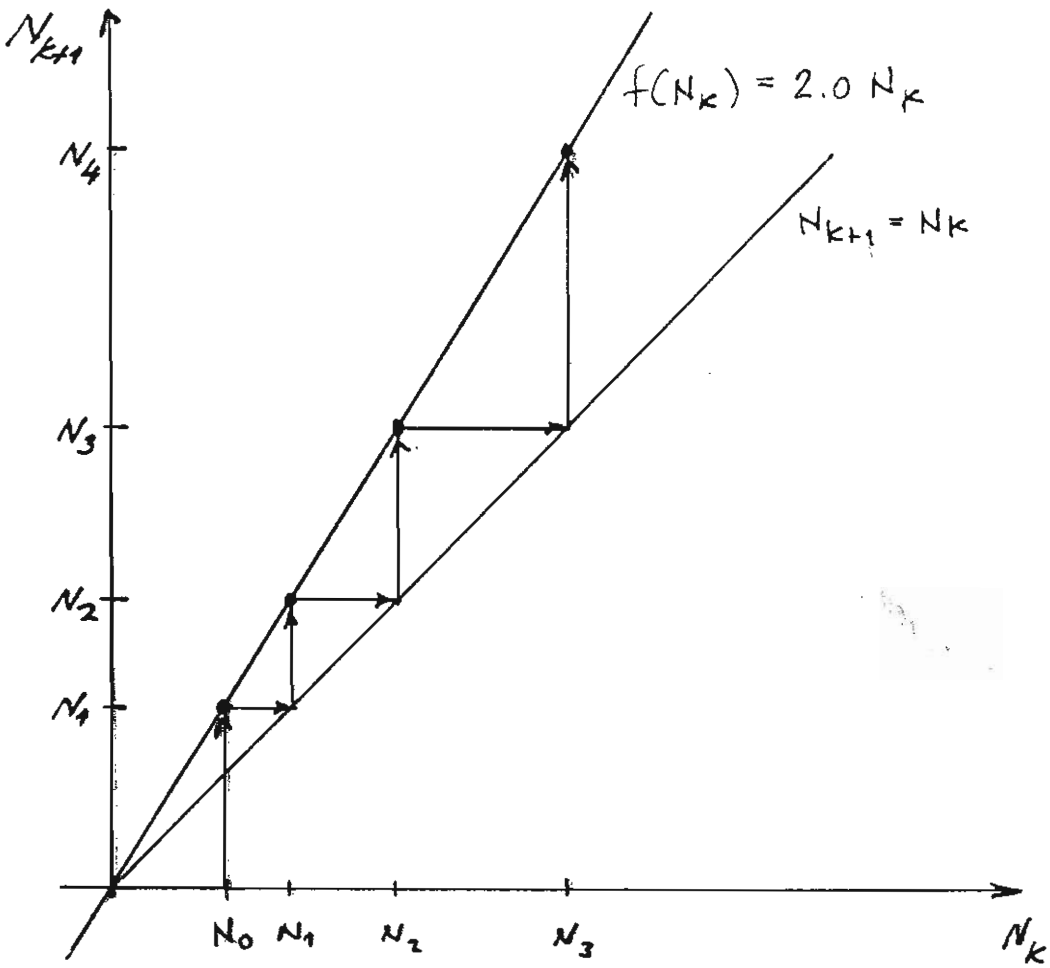
$0 < R < 1$	eksponencijalno opadanje
$R > 1$	eksponencijalni rast
$R = 1$	stacionarno stanje
$-1 < R < 0$	alternirajuće eksponcijalno opadanje
$R < -1$	alternirajući eksponcijalni rast
$R = -1$	periodsko stacionarno stanje,

Na ovom se jednostavnom primjeru može pokazati načela grafičkog i analitičkog (numeričkog) iterativnog postupka (koji su nam potrebni za rješavanje nelinearnih sustava).

Grafički i numerički iterativni postupci mogu se provoditi samo za fiksirane vrijednosti parametara (u našem primjeru je to R).

<u>Grafički postupak</u> (metoda paučine, cobweb method)

- odabrati R i N_0,
- nacrtati funkciju $f(N_k) = RN_k$,
- na osi apscisa odabrati N_0 i povući vertikalnu crtu i tako naći N_1,
- uporabom pravca $N_{k+1} = N_k$ pronaći vrijednost N_2 itd.



Numericki iterativni postupak

$$N_0 = 100$$
$$N_1 = 2 \times N_0 = 200$$
$$N_2 = 2 \times N_1 = 400$$
$$N_3 = 2 \times N_2 = 800$$
$$\vdots$$

Nelinearna jednadžba diferencija

$$N_{k+1} = (R - bN_k)N_k$$
$$= RN_k - bN_k^2$$

$$x_k = \frac{b}{R} N_k$$

$$x_{k+1} = R x_k (1 - x_k)$$

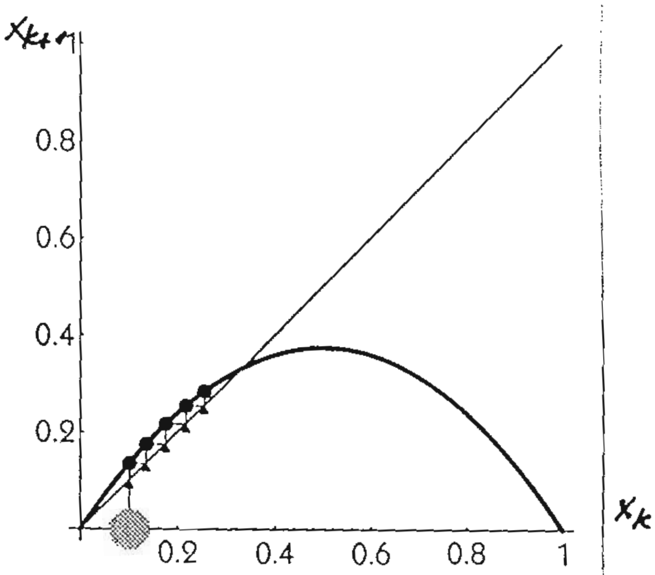
Algeborsko rješenje se ne može naći.

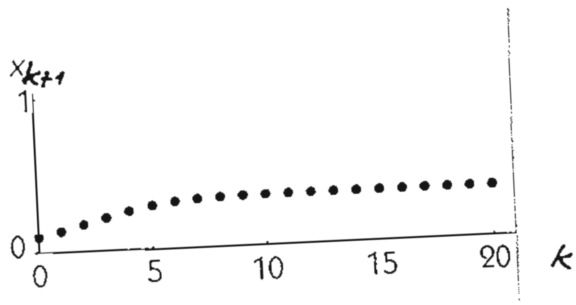
Preostaje nam iterativna rješenja

Funkcija $f(x_k) = R x_k (1 - x_k)$

je parabola koja siječe os x_k u točkama 0 i 1 i ima tjeme s koordinatama $(0.5, \frac{1}{4}R)$

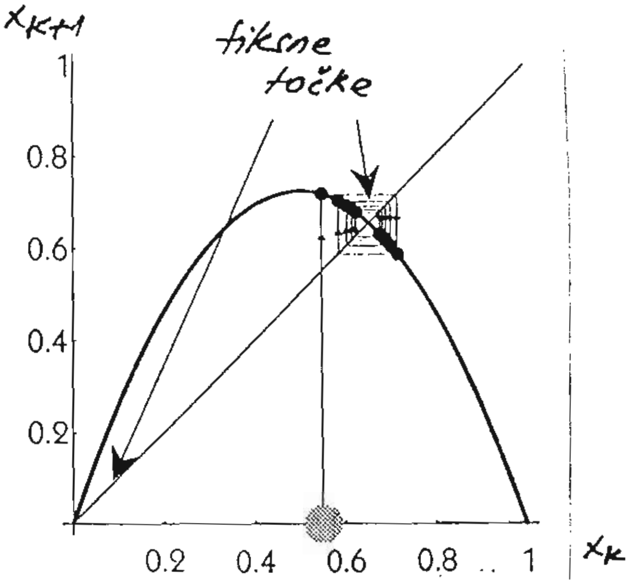
Za različite vrijednosti R dobivaju se različita vrlo zanimljiva rješenja.

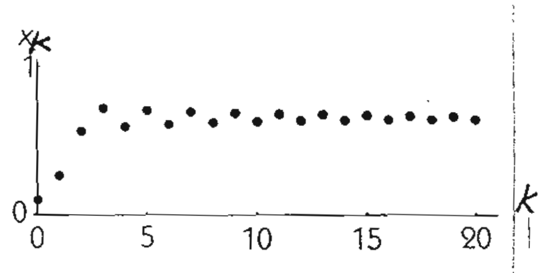




$$x_{k+1} = 1.5\,(1 - x_k)\,x_k$$

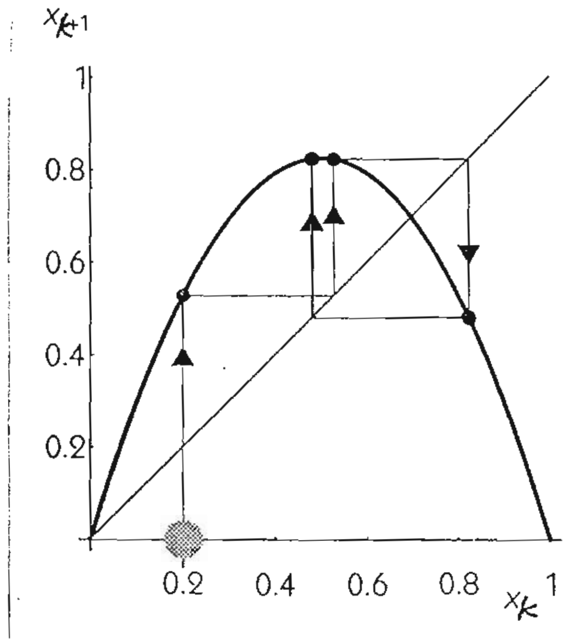
Monotono dosegnuto stacionarno stanje

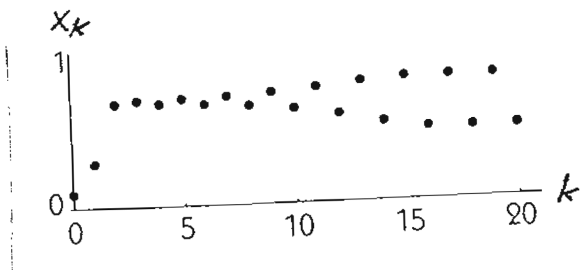




$$x_{k+1} = 2.9\ (1-x_k)\, x_k$$

Alterniranjem dostegnuto stacionarno stanje



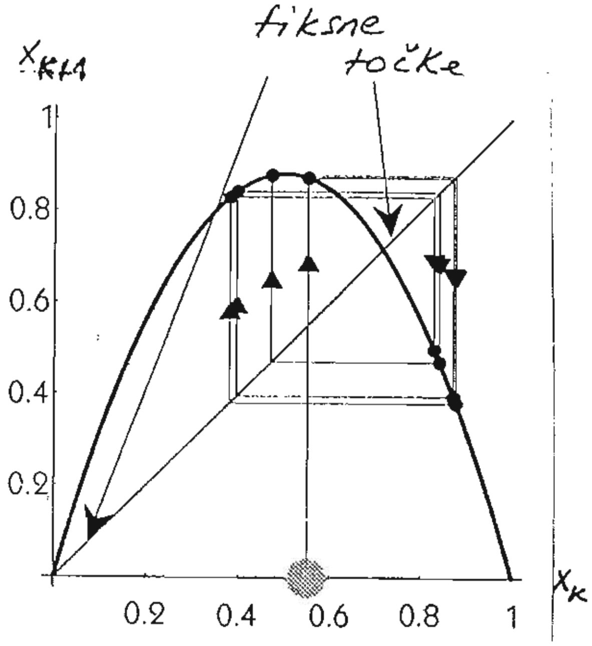


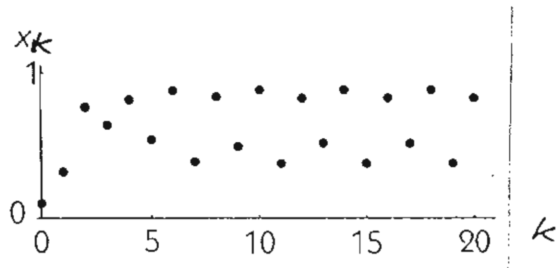
$$x_{k+1} = 3.3(1 - x_k)x_k$$

Periodski odziv, ciklus duljine 2

$x_k = 0.48$, $x_{k+1} = 0.82$

$x_{k+2} = 0.48$, ..



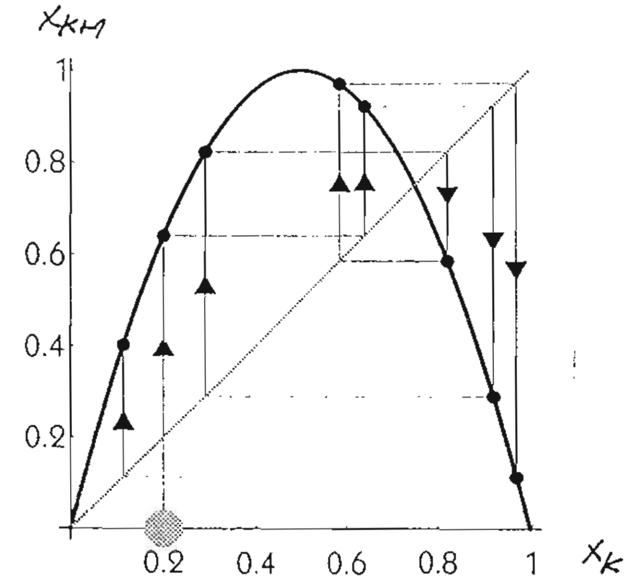


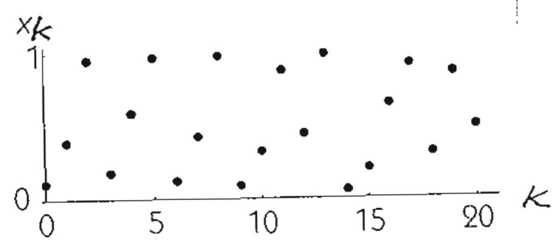
$$x_{k+1} = 3.52\,(1 - x_k)\,x_k$$

Periodski odziv, ciklus duljine 4

$x_k = 0.80$, $x_{k+1} = 0.37$, $x_{k+2} = 0.82$, $x_{k+3} = 0.51$

$x_{k+4} = 0.80$, ...





$$x_{k+1} = 4(1-x_k)\,x_k$$

Aperiodsko, kaotično ponašanje

<u>Stacionarno stanje</u>, <u>fiksne točke</u>

U stacionarnom stanju stanje sustava se ne mijenja, tj.

$$x_{k+1} = x_k$$

Stacionarno je stanje povezano s matematičkim pojmom <u>fiksne točke</u>.

Fiksna točka funkcije $f(x_k)$ je vrijednost x_k^* za koju vrijedi da je

$$x_k^* = f(x_k^*)$$

U vezi s fiksnim točkama može se postaviti tri pitanja:

1. Postoji li koja fiksna točka?

2. Ako je početna vrijednost blizu fiksne točke, hoće li sljedeće iteracije voditi do fiksne točke?
   (lokalna stabilnost)

3. Hoće li sustav za bilo koju početnu vrijednost dosegnuti fiksnu točku?
   (globalna stabilnost)

Za linearnu jednadžbu diferencija

$$x_k^* = R x_k^*$$

postoji jedna fiksna točka $x_k^* = 0$.

Nelinearne jednadžbe mogu imati više fiksnih točaka.

Funkcija $f(x_k) = R x_k (1 - x_k)$ ima fiksne točke:

$$x_k^* = R x_k^* (1 - x_k^*)$$

$$x_k^* = 0 \quad i \quad x_k^* = \frac{R-1}{R}$$

Lokalna stabilnost fiksnih točaka

Za linearnu diferencijsku jednadžbu (jednadžbu diferencija) $x_{k+1} = R x_k$ znamo:

uz $|R| < 1$ $\quad x_k^* = 0$ je stabilna fiksna točka

uz $|R| > 1$ $\quad x_k^* = 0$ je nestabilna fiksna točka

Za nelinearnu diferencijsku jednadžbu

lokalna se stabilnost može utvrditi linearizacijom u okolini fiksne točke.

Označimo

$$m = \frac{df}{dx_k}\Big|_{x_k^*}$$

i uvedemo novu varijablu

$$y_k = x_k - x_k^* .$$

Sada možemo lokalnu stabilnost promatrati kao i kod linearne jednadžbe:

- uz $|m| < 1$ fiksna točka je stabilna
- uz $|m| > 1$ fiksna točka je nestabilna

Nadalje,

- ako je $m > 0$ približavanje ili udaljavanje od fiksne točke je monotono
- ako je $m < 0$ približavanje ili udaljavanje od fiksne točke je alternirajuće

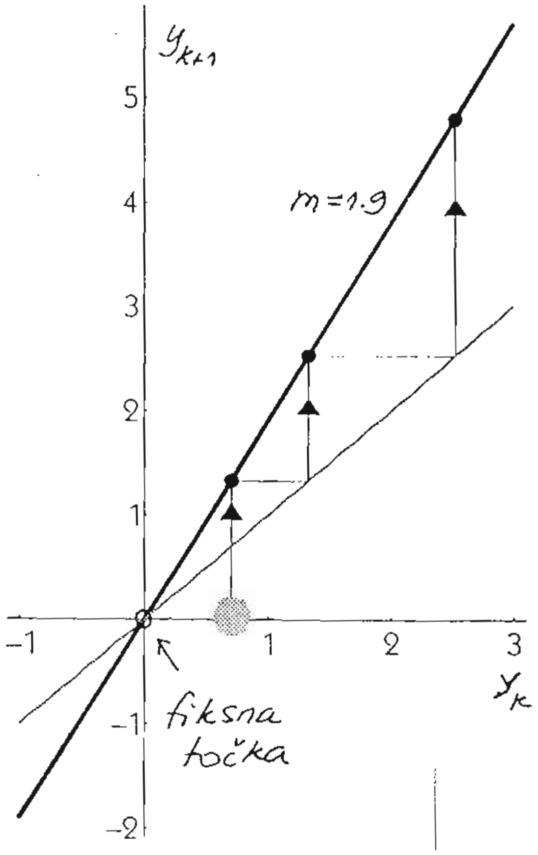
Stabilnost i numerički iterativni postupci

Pronalaženje nestabilnih fiksnih točaka numeričkim postupcima je praktički nemoguće (osim ako se slučajno ne pogodi fiksna točka).

Zbog toga se rješavanje jednadžbe

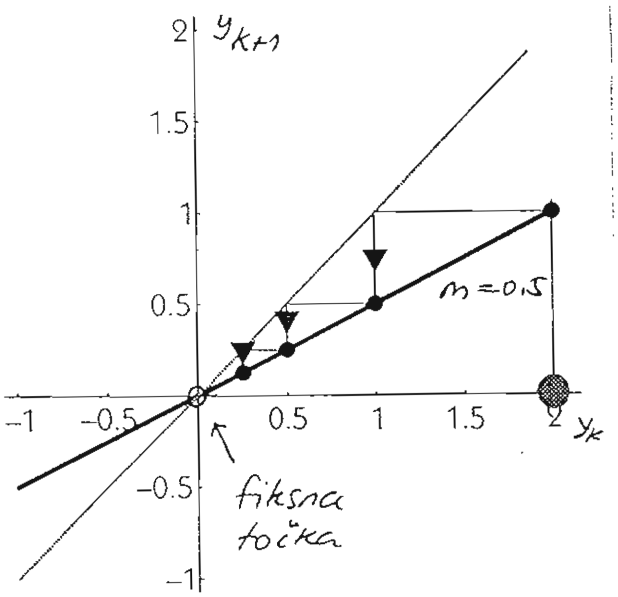
$$x_k = f(x_k)$$

mora provoditi vrlo oprezno i na neke zaobilazne načine!!



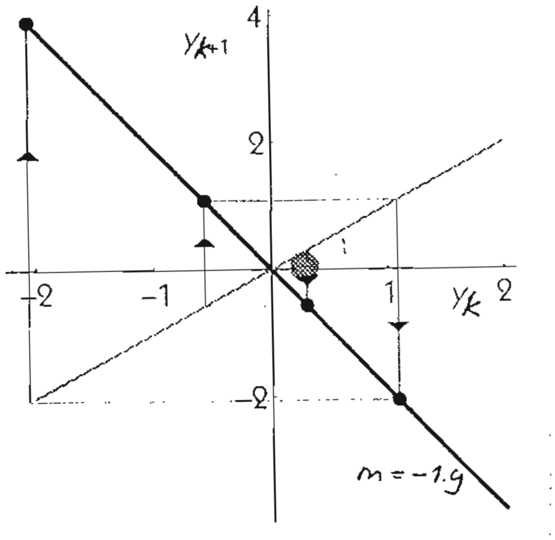
$m > 1$

monotoni rast



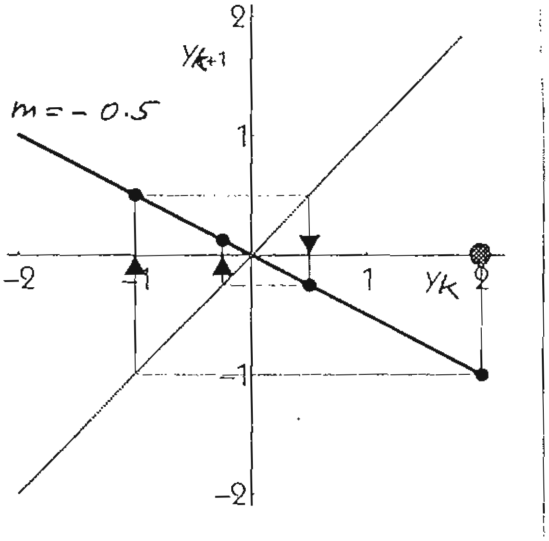
$0 < m < 1$

monotono opadanje



$m < -1$

alternirajući rast



$-1 < m < 0$

alternirajući opadanje

Ciklusi, stabilnost ciklusa

Ciklusi postoje ako je

$$x_{k+n} = x_k, \quad \text{ciklus periode } n$$

$$\text{uz} \quad x_{k+i} \neq x_k$$

$$\text{za} \quad i = 1, 2, \ldots, n-1$$

Postoji veza između fiksnih točaka i ciklusa

Npr. za $n=2$

$$x_{k+2} = x_k \quad , \quad x_{k+1} \neq x_k$$

↳ x_{k+1} dobivamo iz $x_k^* = f(x_k^*)$

$$x_{k+2} = f(x_{k+1})$$

$$x_{k+2} = f(f(x_k))$$

$$\begin{aligned} f(f(x_k)) &= R f(x_k)(1 - f(x_k)) \\ &= R(R x_k(1-x_k))(1 - R x_k(1-x_k)) \\ &= R^2 x_k - (R^2+R^3)x_k^2 + 2R^3 x_k^3 - R^3 x_k^4 \end{aligned}$$

Uz $R = 3.3$ dobivamo iz

$$x_k^* = R^2 x_k^* - (R^2+R^3)x_k^{*2} + 2R^3 x_k^{*3} - R^3 x_k^{*4}$$

četiri fiksne točke:

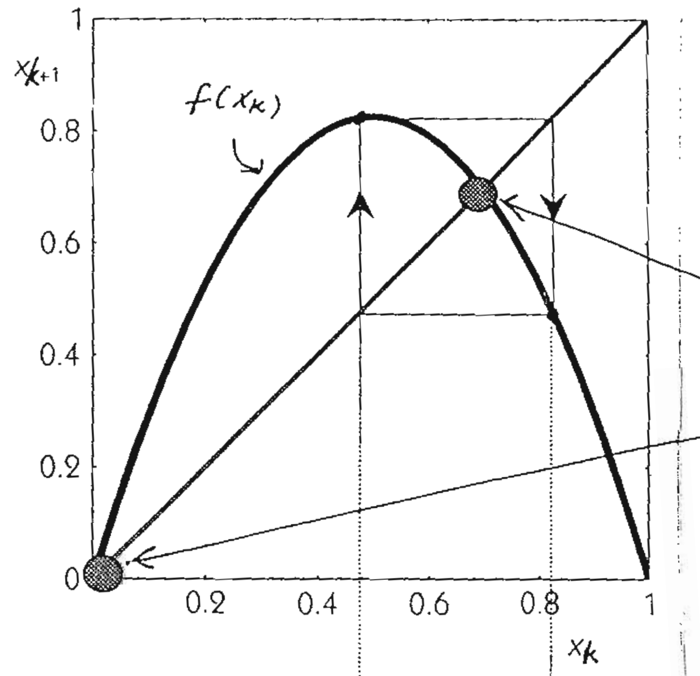
$$x_k^* = 0 \quad , \quad x_k^* = 0.479 \quad x_k^* = 0.697$$

$$x_k^* = 0.823$$

fiksna točka „periode 1"

fiksna točka „periode 1"

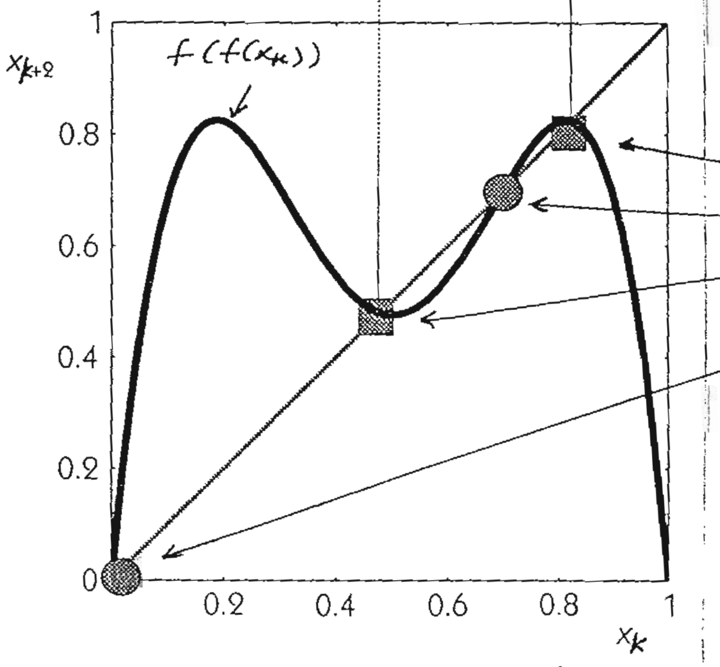
$R = 3.3$



fiksne točke

$x_k^* = 0$

$x_k^* = 0{,}6969$



fiksne točke

$x_k^* = 0$

$x_k^* = 0.479$

$x_k^* = 0.6969$

$x_k^* = 0.823$

Ciklusi su <u>lokalno stabilni</u>, ako za neke početne vrijednosti blize vrijednostima ciklusa, uzastopne iteracije teže prema ciklusu.

Stabilnost ciklusa ovisi o stabilnosti fiksnih točaka od $f(f(x_k))$, tj.

$$\frac{df(f(x_k))}{dx_k} = \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{f(x_k^*)} \cdot \left.\frac{df}{dx_k}\right|_{x_k^*}$$

Prema tome, stabilnost ovisi o stabilnosti obiju točaka x_k^* i $f(x_k^*)$, tj. obje derivacije

$$\left.\frac{df}{dx_k}\right|_{x_k^*}$$

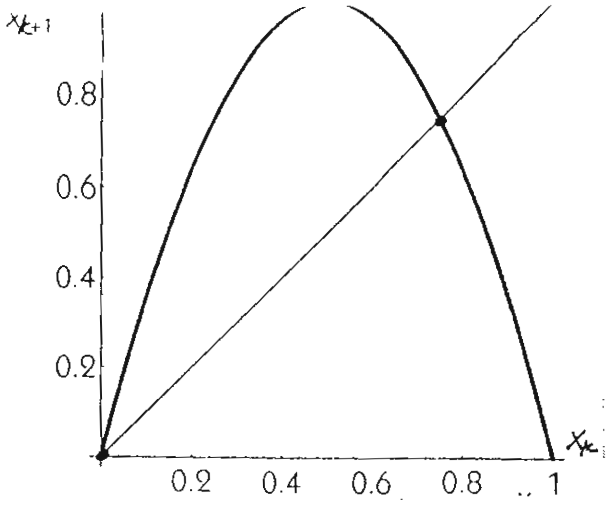
$$\left.\frac{df}{dx_k}\right|_{f(x_k^*)}$$

moraju imati apsolutne vrijednosti < 1.

Stabilne cikluse može se otkriti numeričkim eksperimentiranjem, ali nestabilne cikluse samo ako se slučajno pogodi neka vrijednost ciklusa.

Stabilni ciklus duljine 4 dobiva se uz

$R = 3.52$

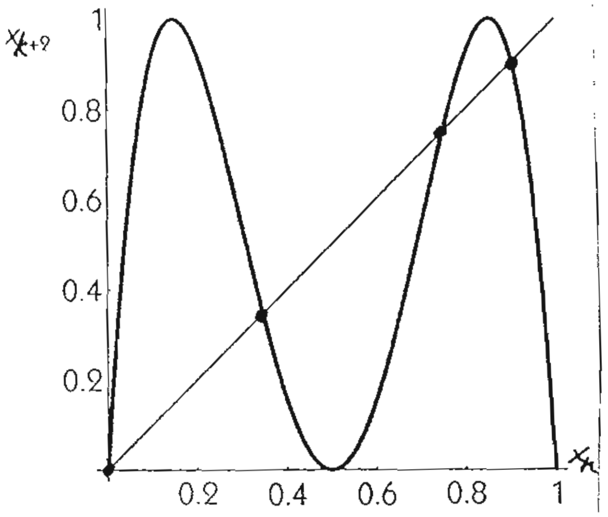


$f(x_k) = 4(1-x_k)x_k$

2 fiksne točke

obje nestabilne

„perioda 1"

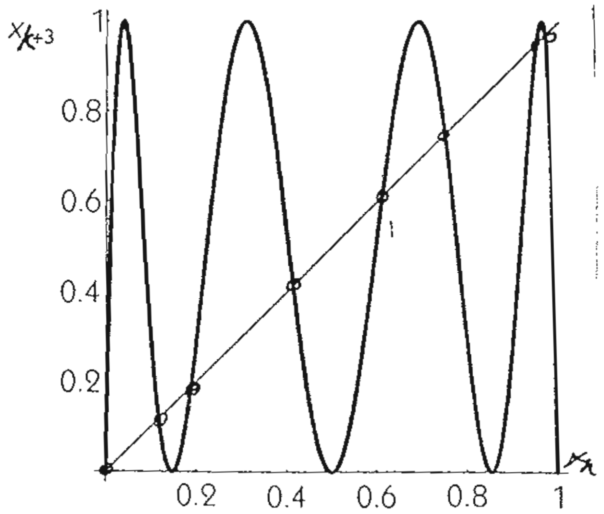


$f(f(x_k))$

4 fiksne točke

(2 iz periode 1)

sve nestabilne

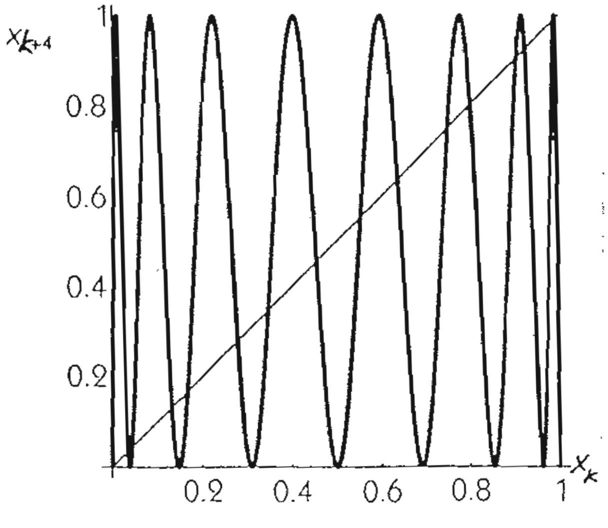


$f(f(f(x_k)))$

8 fiksnih točaka

(2 periode 1)

sve nestabilne



$f(f(f(f(x_k))))$

16 fiksnih točaka

sve nestabilne

Kaotično ponašanje

Primjerice, uz $R = 4$

$$x_{k+1} = 4(1 - x_k)x_k$$

fiksne točke od

$f(x_k)$ nema stabilne fiksne točke

$f(f(x_k))$

$f(f(f(x_k)))$

i za sve više vrijednosti nemaju stabilnih ciklusa

Sustav se ponaša aperiodski.

Može se reći da on ponaša kaotično.

Kaos se odlikuje četirima svojstvima:

- Aperiodičnost

  Stanje sustava se ne ponavlja. To znači da se numeričke vrijednosti neće ponoviti. Kod grafičkog prikaza ili numeričkog izračunavanja može se zbog ograničene preciznosti dogoditi da otkrijemo jednake vrijednosti!

- Ograničenost

  Vrijednosti ostaju u nekim konačnim granicama (U ovom slučaju ako je $0 \leq x_0 \leq 1$, onda sve vrijednosti x_k ostaju u tim granicama)

- Determiniranost

Vrijednosti se izračunavaju definiranim pravilom i dinamika nije uvjetovana nekim slučajnim utjecajem. „Determinističnost" znači da se uz dani x_k uvijek dobiva samo jedna vrijednost

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

- Osjetljivost na početne uvjete

Rješenje jako ovisi o početnim uvjetima. To je bitno svojstvo kaosa. S obzirom da u stvarnim sustavima teško možemo garantirati vrijednost početnih uvjeta sustav se može ponašati drastično različito već uz male promjene početnih vrijednosti.

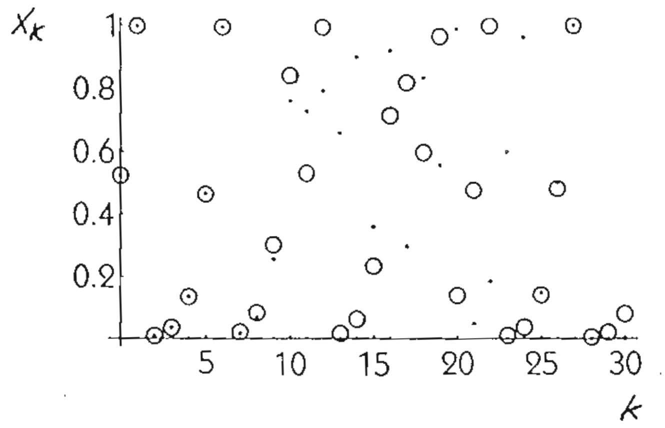
Primjer:

$$x_{k+1} = 4.0(1 - x_k)x_k$$

uz $x_0 = 0.523423$

i $x_0 = 0.523424$

pokazuje vrlo različito ponašanje



$$x_{k+1} = 4.0\,(1-x_k)\,x_k$$

• rješenja uz $x_0 = 0.523423$

o rješenja uz $x_0 = 0.523424$

U prvih sedam stanja dobivaju se iste vrijednosti.

Nakon toga nastaju velika odstupanja.

Udvostručavanjem perioda do kaosa

Fiksne točke

$$x_k^* = \underbrace{f(f(\dots f}_{n-puta}(x_k^*)))$$

povezane su s periodama n.

Ciklusi s n perioda prelaze u cikluse s $2n$ perioda za neke vrijednosti parametra R.

Mitchell Feigenbaum je (uporabom džepnog kalkulatora istražio svojstva sustava

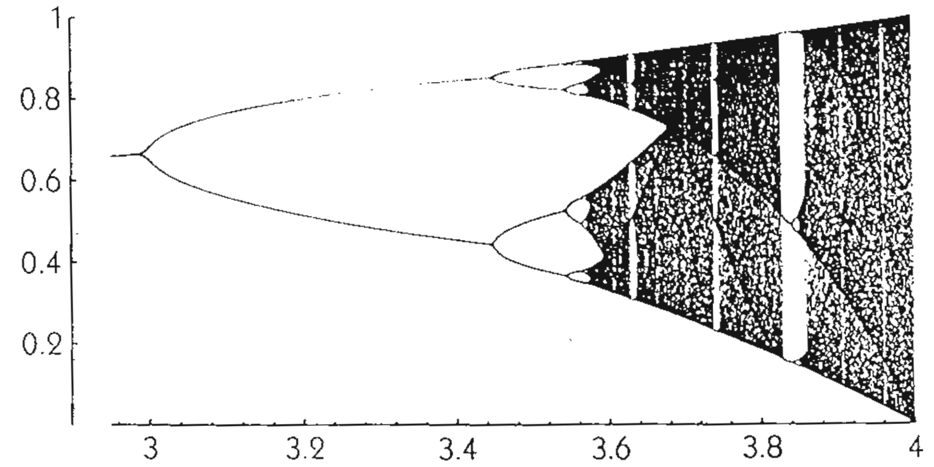
$$x_{k+1} = R(1-x_k)x_k$$

On je ustanovio da se dobiva sljedeće:

- $R < 3.0000$ aperiodično rješenje
- $3.0000 < R < 3.4495$ stabilni ciklusi periode 2
- $3.4495 < R < 3.5441$ stabilni ciklusi periode 4
- $3.5441 < R < 3.5644$ stabilni ciklusi periode 8
- $3.5644 < R < 3.5688$ stabilni ciklusi periode 16

- Kako se R približava vrijednosti 3.570 postoje sve više uskih područja s periodama 2^n
- Za vrijednosti veće od 3.570 postoje uska područja periodičnog i aperiodičnog ponašanja

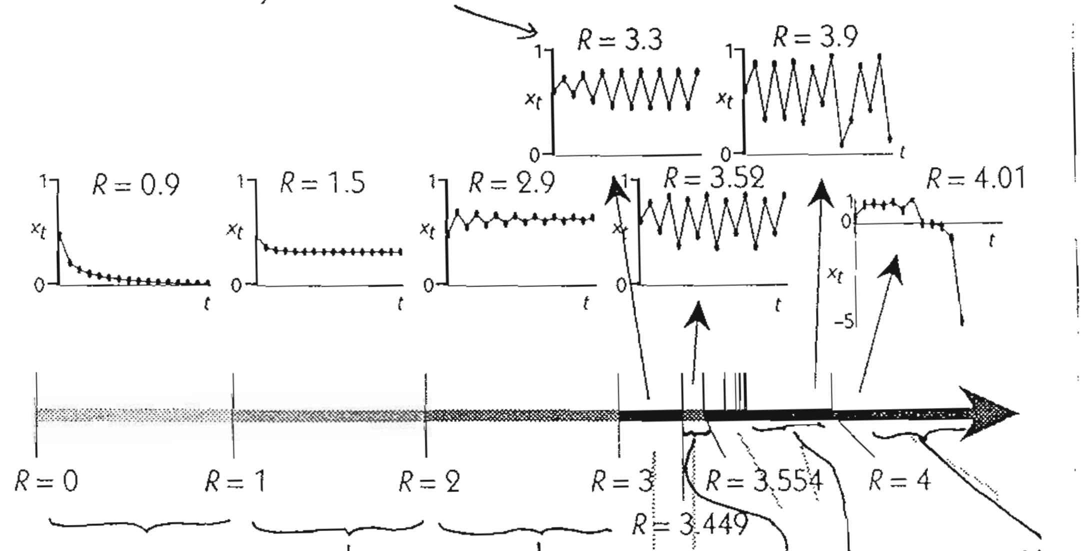
asimptotske vrijednosti x_k



R

Bifurkacijski dijagram

Stabilni ciklus periode 2



Asimptotsko opadanje do nule

Asimptotsko opadanje do vrijednosti veće od 0

Alternirajuće uspostavljanje stacionarnog stanja

Stabilni ciklusi periode 4

Kaos i neki stabilni ciklusi

opadanje do $-\infty$

Intervali ΔR_n stabilnih ciklusa periode n postaju sve manji i manji s porastom n ($n \to 2^i$), tako je:

$$\Delta R_2 = 0.4495$$

$$\Delta R_4 = 0.0946$$

$$\Delta R_8 = 0.0203$$

Feigenbaum je ustanovio da je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\Delta R_n}{\Delta R_{2n}} = 4.6692016\ldots$$

i po njemu se naziva Feigenbaumova konstanta.

Ta se konstanta pojavljuje i u drugim teorijskim modelima te u eksperimentalnim sustavima kod kojih se do kaosa dolazi postupnim udvostručavanjem perioda.

U tim se sustavima može uočiti tzv. bifurkacijski dijagram.

Bifurkacijski se dijagram može nacrtati tako da se za svaki R računa dovoljno dugo tako bi se postiglo stacionarno stanje i nakon toga nacrta odgovarajući broj (n) uzastopnih točaka.

9. DINAMIČKO PONAŠANJE KONTINUIRANIH SUSTAVA

Diferencijalna jednadžba prvog reda

U diferencijalnoj jednadžbi prvog reda mogu se pojaviti: varijabla i prva derivacija varijable

Diferencijalna jednadžba može se tretirati dvojako:

- pronalaziti algebarsko rješenje koje potpuno opisuje ponašanje sustava
- pronalaziti informacije o tome postoje li fiksne točke i jesu li one stabilne

Diferencijalna jednadžba prvog reda može biti :

- homogena $\frac{dx}{dt} = f(x)$
- nehomogena $\frac{dx}{dt} = f(x) + r(t)$

Pogledajmo ponašanje homogene linearne jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

- $a = 0 \quad b = 0$

$$\frac{dx}{dt} = 0 \qquad x(t) = \text{konst}$$

- $a = 0 \quad b \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = b$$

$$\int_0^t dx = \int_0^t b\,dt$$

$$x(t) - x(0) = bt \qquad x(t) = x(0) + bt$$

$b > 0$ konstantni rast

$b < 0$ konstantno opadanje

- $a \neq 0 \quad b = 0$

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

$$\int_0^t \frac{dx}{x} = \int_0^t a\,dt$$

$$\ln x(t) - \ln x(0) = at$$

$$x(t) = x(0)\, e^{at}$$

$a > 0$ eksponencijalni rast

$a < 0$ eksponencijalno opadanje

Eksponencijalni rast se u modelima pojavljuje razmjerno rijetko, dok je eksponencijalno opadanje često u uporabi

Često se razmatra jednadžba

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha x \qquad \alpha > 0$$

znači opadanje

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-\alpha t}$$

„Vrijeme poluraspada" t_{PR}

$$0.5\, x(0) = x(0) \cdot e^{-\alpha t_{PR}}$$

$$-\ln 2 = -\alpha t_{PR}$$

$$t_{PR} = \frac{\ln 2}{\alpha}$$

$\tau = \frac{1}{\alpha}$ – vremenska konstanta

$$x(t) = x(0) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$t_{PR} = \ln 2 \, \tau$$

- $a \neq 0 \quad b \neq 0$

$$\frac{dx}{dt} = ax + b$$

supstitucija

$$y = x + \frac{b}{a} \Rightarrow x = y - \frac{b}{a}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay$$

$$y(t) = y(0) \cdot e^{at}$$

$$x(t) + \frac{b}{a} = \left(x(0) + \frac{b}{a}\right) e^{at}$$

$$x(t) = \left(x(0) + \frac{b}{a}\right)e^{at} - \frac{b}{a}$$

uz $a < 0$

eksponencijalno opadanje do vrijednosti $-\frac{b}{a}$

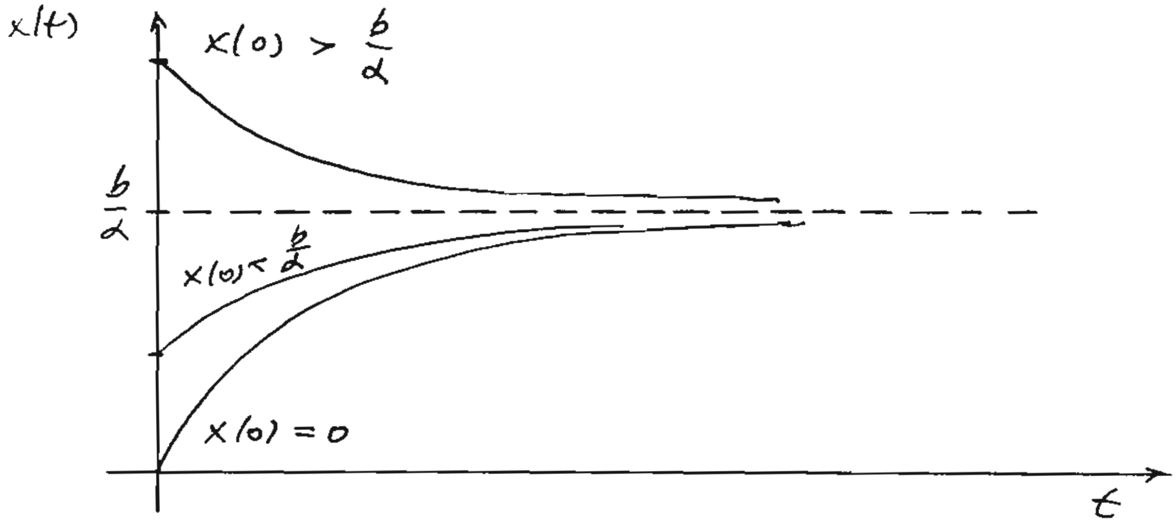
ili:

„eksponencijalni" rast do vrijednosti $-\frac{b}{a}$

Obično se piše

$$a = -\alpha$$

$$x(t) = \left(x(0) - \frac{b}{\alpha}\right)e^{-\alpha t} + \frac{b}{\alpha}$$



Ograničeni eksponencijalni porast

Eksponencijalni porast u modelima stvarnih procesa moguć je samo u nekim ograničenim razdobljima vremena, odnosno do nekih vrijednosti varijabli.

Postoje različiti modeli za ograničeni eksponencijalni rast.

Verhulstov ili logistički rast

$$\frac{dx}{dt} = \beta x - \gamma x^2$$

$$\frac{dx}{\beta x - \gamma x^2} = dt \qquad \frac{1}{x(\beta - \gamma x)} = \frac{1}{\beta} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{\beta} \frac{\gamma}{\beta - \gamma x}$$

$$\frac{dx}{x} + \gamma \frac{dx}{\beta - \gamma x} = \beta dt \qquad \int_0^t$$

$$\ln x(t) - \ln x(0) - \ln(\beta - \gamma x(t)) + \ln(\beta - \gamma x(0)) = \beta t$$

$$\ln \frac{x(0)(\beta - \gamma x(t))}{(\beta - \gamma x(0))\, x(t)} = -\beta t$$

$$\frac{x(0)(\beta - \gamma x(t))}{(\beta - \gamma x(0))\, x(t)} = e^{-\beta t}$$

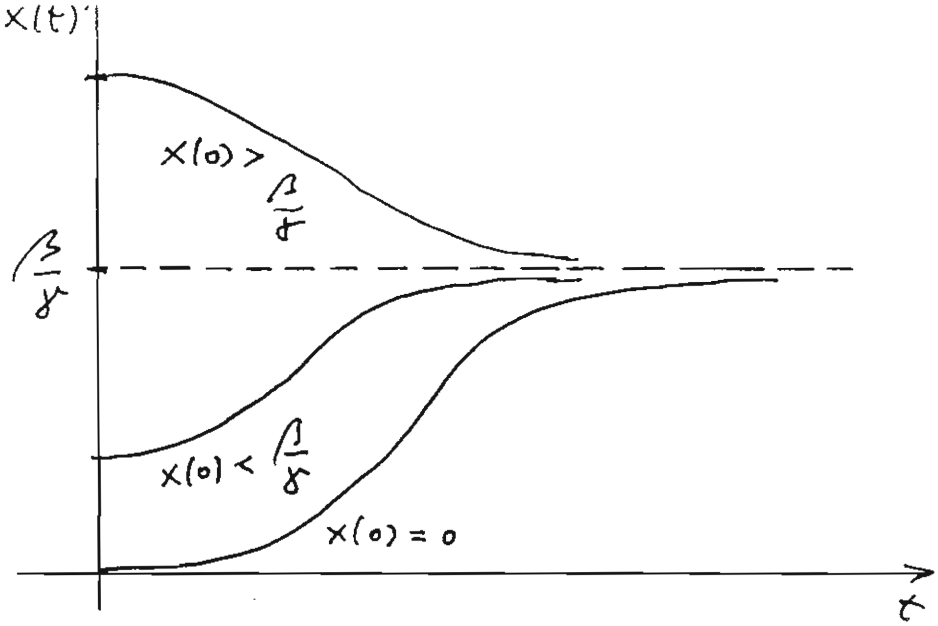
$$\beta x(0) - \gamma x(0)\, x(t) = (\beta - \gamma x(0))\, e^{-\beta t} x(t)$$

$$x(t) = \frac{\beta x(0)}{(\beta - \gamma x(0))\, e^{-\beta t} + \gamma x(0)}$$

logistička krivulja

uz $t = 0 \quad x(t) = x(0)$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = \frac{\beta}{\gamma}$$



Gompertzova jednadžba

$$\frac{dx}{dt} = \gamma e^{-\beta t} x$$

$$x(t) = x(0) \cdot e^{\frac{\gamma}{\beta}(1 - e^{-\beta t})}$$

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = x(0) \cdot e^{\frac{\gamma}{\beta}}$$

uz $\gamma > 0$, $\beta > 0$ to je uvijek veće od $x(0)$

Nelinearna diferencijalna jednadžba prvog reda

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

općenita nelinearna funkcija

Robert May (1977) uveo je pojmanje da asimptotsko stanje za $t \to \infty$ može ovisiti o početnim uvjetima.

Primjer: Krave na pašnjaku

- Ako se jednu kravu smjesti na pašnjak pun raslinja, ona će pasti i trava će dalje rasti.
- Ako se ona smjesti na pašnjak koji je prije toga poharalo stado krava, krava će pobrstiti sve što se pojavi.

Mayov model

H – broj krava na pašnjaku

V – vegetacija

$G(V) = rV\left(1 - \frac{V}{K}\right)$ rast vegetacije

r, K pozitivne konstante

$c(V)$ potrošnja vegetacije po kravi

$$C(V) = \frac{\beta V^2}{V_0^2 + V^2}$$

β, V_0 pozitivne konstante

$$\frac{dV}{dt} = G(V) - HC(V)$$

Sustav je u stacionarnom stanju kada je $\frac{dV}{dt} = 0$

ili

$$G(V) = HC(V)$$

Slika na str. 32 prikazuje stacionarna stanja uz

$H = 10$, $H = 20$ i $H = 30$

- uz $H = 10$

  postoje 2 stabilna stanja

  $V = 0$ nema vegetacije, krave izumiru

  $V = 22$ snažna vegetacija, krave dobro uhranjene

- uz $H = 30$

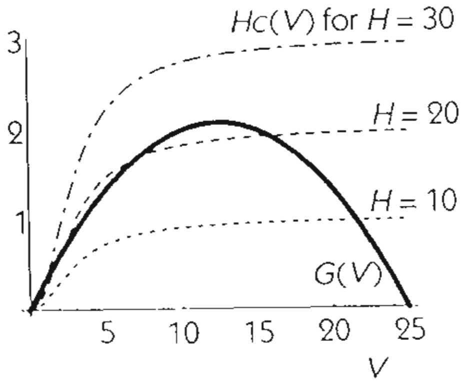
  postoje dva stabilna stanja

  $V = 0$ nema vegetacije, krave izumiru

  $V = 1$ krave gladuju

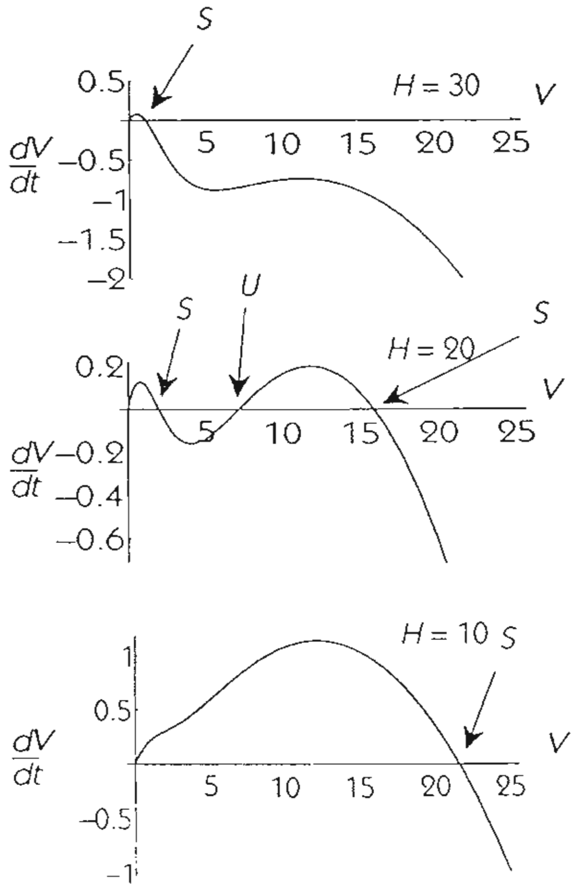
- uz $H = 20$

  postoje 4 fiksne točke



$$r = \frac{1}{3} \qquad K = 25$$

$$\beta = 0.1 \qquad V_0 = 3$$



$$\frac{dV}{dt} = G(V) - HC(V)$$

$V = 0$ nema vegetacije, trave izumiru

$V \approx 2$ trave pothranjene

$V \approx 7.5$ trave dobro uhranjene

$V \approx 16$ trave dobro uhranjene

Što se može dogoditi?

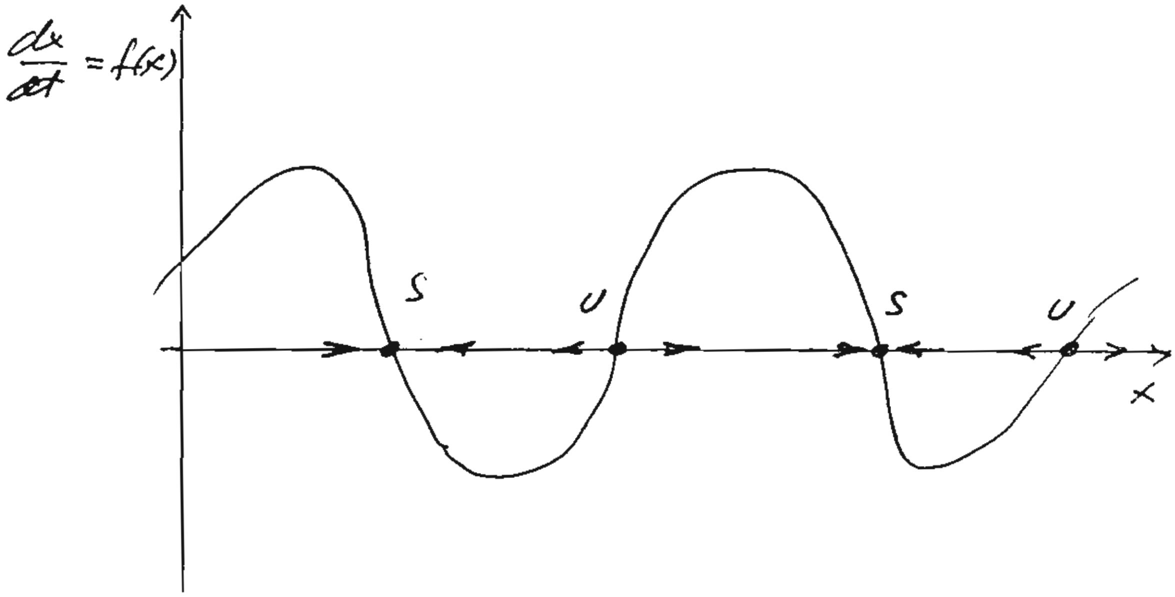
$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

Ako je $f(a) > 0$ vrijednost x raste

$f(a) < 0$ vrijednost x opada

Fiksna točka x_0 postoji za

$$f(x_0) = 0$$



Prema tome:

$$\left.\begin{array}{l} V = 2 \\ V = 16 \end{array}\right\} \text{stabilne točke}$$

$$\left.\begin{array}{l} V = 0 \\ V = 7.5 \end{array}\right\} \text{nestabilne točke}$$

Zanimljivo je (a možda i iznenađujuće) da postoje dva stabilna stanja s vrlo različitim svojstvima

uz $V = 2$ krave gladuju

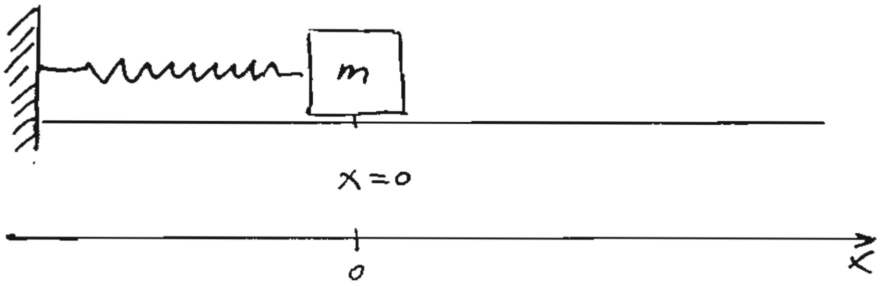
uz $V = 16$ krave su dovoljno dobro uhranjene

Dostizanje jednog od stanja ovisi o stanju vegetacije u trenutku kada se stado dovodi na pašnjak!

Ako je $V \approx 7.5$ onda vrlo mala promjena δV početnog stanja uvjetuje drastično različita konačna stanja.

Diferencijalna jednadžba drugog reda

Jednadžba harmonijskog oscilatora



$F = -kx$ $\qquad$ k Hookeova konstanta

$F = ma$

$m \frac{d^2x}{dt} = -kx$ $\qquad$ diferencijalna jednadžba drugog reda

Ako se u $t=0$ masa pusti iz položaja $x(0)$ brzinom $v(0) = 0$, gibanje se opisuje jednadžbom

$$x(t) = x(0) \cos\omega t \quad , \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

to je rješenje diferencijalne jednadžbe, jer je

$$x'(t) = -\omega\, x(0) \sin\omega t$$

$$x''(t) = -\omega^2 x(0) \cos\omega t$$

iz dif. jedn.

$$x''(t) = -\frac{k}{m}\, x(t) = -\frac{k}{m}\, x(0) \cos\omega t$$

U svakom trenutku znamo položaj mase i njezinu brzinu

$$x(t) = x(0)\cos\omega t$$

$$v(t) = \dot{x}(t) = -\omega\, x(0) \sin\omega t$$

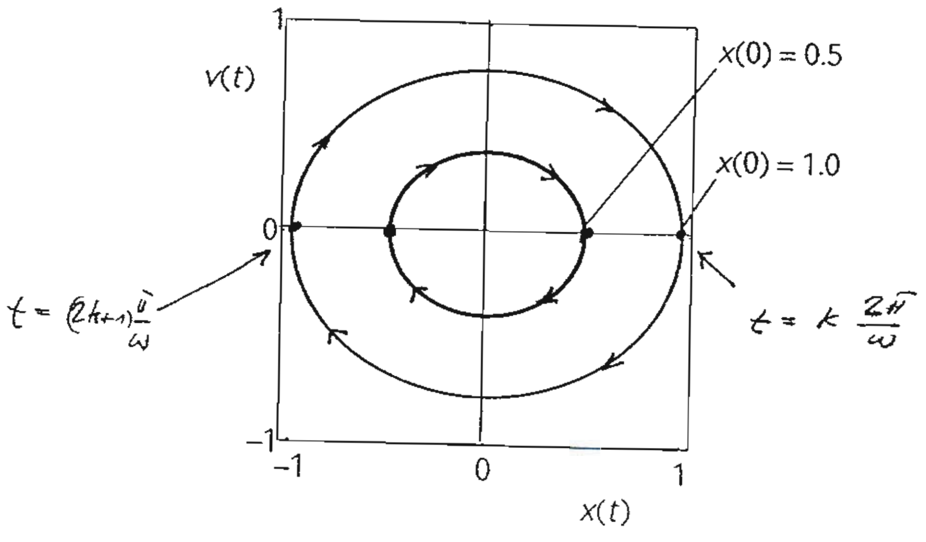
Stanje sustava je u svakom trenutku opisano parom vrijednosti $(x(t), v(t))$.

Grafički se stanja mogu opisati u faznoj ravnini x, v.

Stanje u svakom trenutku je predočeno točkom u faznoj ravnini, a putanja točke $(x(t), v(t))$ naziva se trajektorijom.

Trajektorija harmoničkog oscilatora je elipsa

$$x^2(t) + \frac{v^2(t)}{\omega^2} = x^2(0)$$



Potencijalna energija opruge je

$$\frac{1}{2}kx^2,$$

a kinetička energija mase

$$\frac{1}{2}mv^2.$$

Ukupna energija oscilatora je

$$\frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 =$$

$$= \frac{1}{2}kx^2(0)\cos^2\omega t + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2(0)\sin^2\omega t =$$

$$= \frac{1}{2}kx^2(0)(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t) = \frac{1}{2}kx^2(0)$$

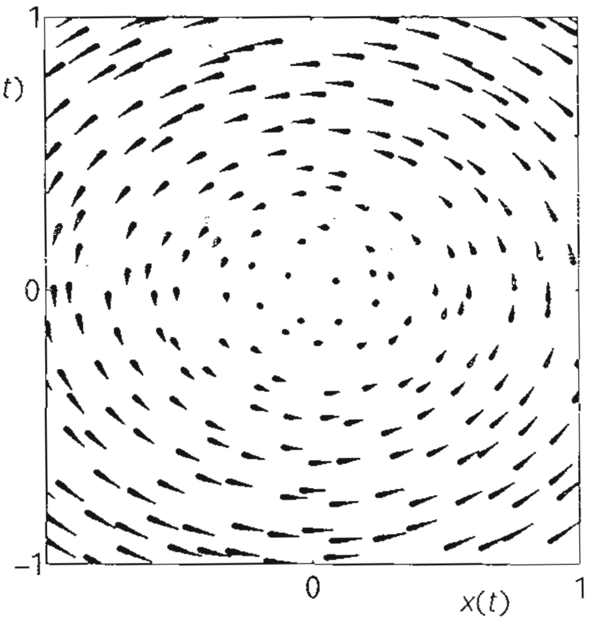
U ovom sustavu nema trenja i energija ostaje konstantna. Ona je određena početnim vrijednostima

Važna zapažanja:

- Trajektorija je određena početnim uvjetima i neće se mijenjati.
- Svaka točka na trajektoriji može biti početni uvjet.
- Ako se načini mali pomak u početnim uvjetima trajektorija se promijeni (to znači da je trajektorija nestabilna – mala perturbacija djeluje tako da se trajektorija ne vraća na ishodnu!).

- Diferencijalna jednadžba govori nam o tome kako trajektorije prolaze faznom ravninom i to za bilo koje početne uvjete.

- Sve trajektorije čine protok diferencijalne jednadžbe. Protok se može prikazati za pojedine točke fazne ravnine slijedećom slikom:



- Ako se u protok postavi jedna čestica, ona će se gibati po jednoj trajektoriji određenoj protokom.

Opći oblik linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda

Homogena linearna dif. jednadžba drugog reda

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Pretpostavka po analogiji s dif. jedn. prvog reda

$$x(t) = Ce^{\lambda t}$$
$$\dot{x}(t) = C\lambda e^{\lambda t}$$
$$\ddot{x}(t) = C\lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$aC\lambda^2 e^{\lambda t} + bC\lambda e^{\lambda t} + cCe^{\lambda t} = 0$$

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$$ karakteristična jedn.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Opći oblik rješenja

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$$

Stvarne vrijednosti C_1 i C_2 određene su početnim uvjetima.

Uz $\quad b^2 < 4ac$

$$\lambda_1 = \alpha + j\beta \qquad \lambda_2 = \alpha - j\beta$$

$$\alpha = -\frac{b}{2c} \qquad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

$$x(t) = C_3 e^{\alpha t} \cos\beta t + C_4 e^{\alpha t} \sin\beta t$$

Prigušeni harmonijski oscilator

Neprigušeni: $\quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

$$\left(\omega^2 = \frac{k}{m} \right)$$

Prigušeni:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -\frac{\mu}{2} \pm \frac{\sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}}{2}$$

- kada je $\mu^2 > 4\omega^2$, $\quad \alpha = \sqrt{\mu^2 - 4\omega^2}$

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-\mu + \alpha}{2} t} + C_2 e^{\frac{-\mu - \alpha}{2} t}$$

- kada je $\mu^2 < 4\omega^2$, $\quad \alpha = \sqrt{4\omega^2 - \mu^2}$

$$x(t) = C_3 e^{-\frac{\mu}{2} t} \cos\frac{\alpha}{2} t + C_4 e^{-\frac{\mu}{2} t} \sin\frac{\alpha}{2} t$$

ili:

$$x(t) = e^{-\frac{\mu}{2} t} \left(C_3 \cos\frac{\alpha}{2} t + C_4 \sin\frac{\alpha}{2} t \right)$$

Konkretno rješenje (trajektoriju) odredit ći početni uvjeti

$$x(0) \quad i \quad \dot{x}(0)$$

- za $\mu^2 > 4\omega^2$

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{\mu+\alpha}{2}t} + C_2 e^{-\frac{\mu-\alpha}{2}t}$$

$$\dot{x}(t) = -\frac{\mu+\alpha}{2} C_1 e^{-\frac{\mu+\alpha}{2}t} + \frac{-\mu-\alpha}{2} C_2 e^{-\frac{\mu-\alpha}{2}t}$$

$$x(0) = C_1 + C_2$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\mu+\alpha}{2} C_1 + \frac{-\mu-\alpha}{2} C_2$$

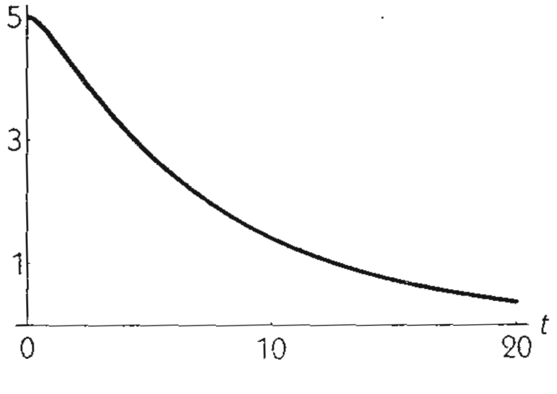
$$C_1 = \frac{\alpha+\mu}{2\alpha} x(0) + \frac{1}{\alpha}\dot{x}(0)$$

$$C_2 = \frac{\alpha-\mu}{2\alpha} x(0) - \frac{1}{\alpha}\dot{x}(0)$$

Primjer: $\mu = 2$, $\omega = 0.5$ $\Rightarrow \alpha = \sqrt{3}$

$x(0) = 5$ $\quad \dot{x}(0) = 0$

$$x(t) = \frac{5}{6}(3+2\sqrt{3}) e^{-\frac{2+\sqrt{3}}{2}t} + \frac{5}{6}(3-2\sqrt{3}) e^{-\frac{2-\sqrt{3}}{2}t}$$



• za $\mu^2 < 4\omega^2$

$$x(t) = C_3 e^{-\frac{\mu}{2}t} \cos\frac{\alpha}{2}t + C_4 e^{-\frac{\mu}{2}t} \sin\frac{\alpha}{2}t$$

$$\dot{x}(t) = C_3\left(-\frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu}{2}t}\cos\frac{\alpha}{2}t - e^{-\frac{\mu}{2}t}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}t\right) +$$
$$+ C_4\left(-\frac{\mu}{2} e^{-\frac{\mu}{2}t}\sin\frac{\alpha}{2}t + e^{-\frac{\mu}{2}t}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}t\right)$$

$$x(0) = C_3$$

$$\dot{x}(0) = -\frac{\mu}{2}C_3 + \frac{\alpha}{2}C_4$$

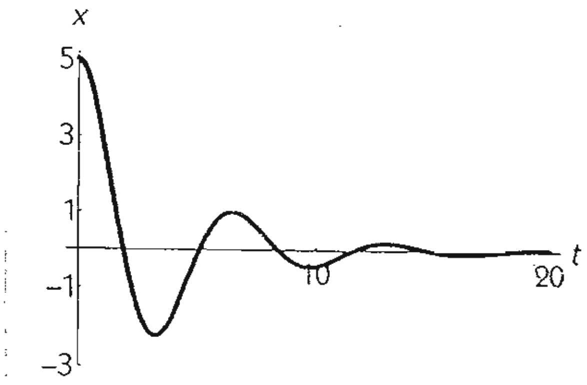
$$C_3 = x(0)$$

$$C_4 = \frac{\mu}{\alpha}x(0) + \frac{2}{\alpha}\dot{x}(0)$$

Primjer: $\mu = 0.5 \qquad \omega = 1 \qquad \alpha = \sqrt{3.75}$

$$x(0) = 5 \qquad \dot{x}(0) = 0$$

$$x(t) = 5 e^{-\frac{1}{4}t}\cos\frac{\sqrt{3.75}}{2}t + \frac{5}{2\sqrt{3.75}} e^{-\frac{1}{4}t}\sin\frac{\sqrt{3.75}}{2}t$$



Sustav dviju diferencijalnih jednadžbi prvog reda

Model nepriguŝenog harmonijskog oscilatora

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

opisali smo u faznoj ravnini dvijema

varijablama: $x(t)$, $v(t)$

Gornja jednadžba drugog reda može se prevesti u sustav jednadžbi prvog reda:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x$$

Za priguŝeni harmonijski oscilator

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

vrijedi:

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega^2 x - \mu v$$

Opći oblik

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

prelazi u

$$\frac{dx}{dt} = y$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{b}{a}y - \frac{c}{a}x$$

Međutim, dvije varijable ne moraju biti povezane (u gornjim se primjerima radi ustvari o jednoj temeljnoj varijabli).

Dvije varijable mogu biti:

- dvije životinjske vrste u ekološkom okruženju,
- dvije kemikalije u kemijskoj reakciji,
- koncentracija lijekova u dva organa i tl.

Opći oblik sustava linearnih jednadžbi

$$\frac{dx}{dt} = Ax + By \qquad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = Cx + Dy \qquad (2)$$

može se, prema tome, rješavati po uzoru na diferencijalnu jednadžbu drugog reda

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt} + B\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt} + BCx + BDy$$

iz (1) $\quad By = \frac{dx}{dt} - Ax$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = A\frac{dx}{dt} + BCx + D\frac{dx}{dt} - ADx$$

ili:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - (A+D)\frac{dx}{dt} + (AD-BC)x = 0$$

Prema tome, uz

$$-(A+D) = \frac{b}{a}$$

$$AD-BC = \frac{c}{a}$$

sustav se ponaša kao dif. jednadžba

$$a\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + cx = 0$$

Rješenje karakteristične jednadžbe

$$\lambda^2 - (A+D)\lambda + (AD-BC) = 0$$

daje:

$$\lambda_1 = \frac{A+D}{2} + \frac{\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A+D}{2} - \frac{\sqrt{(A-D)^2+4BC}}{2}$$

Uz $(A-D)^2 + 4BC > 0$

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 (t)}$$

$$x(0) = C_1 + C_2$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2$$

Uz $(A+D)^2 + 4BC < 0$

$$\alpha = \frac{A+D}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\left|(A-D)^2 + 4BC\right|}$$

$$x(t) = e^{\alpha t}(C_3 \cos\beta t + C_4 \sin\beta t)$$

$$x(0) = C_3$$

$$\frac{dx}{dt}(0) = \beta C_4$$

Sustav nelinearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y)$$

$$\frac{dy}{dt} = g(x,y)$$

U općem slučaju ne može se naći analitičko rješenje sustava

<u>Kvalitativno</u> ponašanje sustava dviju jednadžbi može se obaviti u faznoj ravnini.

Jednostavni primjer su Lotka - Volterra jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x - \beta x y$$

$$\frac{dy}{dt} = \gamma x y - \delta y$$

x populacija lovine

y populacija grabežljivaca

Kada ne bi bilo grabežljivaca ($y=0$) populacija lovine bi eksponencijalno rasla.

Kada ne bi bilo lovine ($x=0$) populacija grabežljivaca bi eksponencijalno opadala.

Jedući lovinu grabežljivci povećavaju svoju populaciju i smanjuju populaciju lovine.

Geometrijski zor dinamike može se započeti promatranjem izoklina (geom. mjesto točaka jednakog nagiba).

- x - izoklina neka bude izoklina s nagibom $\frac{dx}{dt} = 0$
- y - izoklina neka bude izoklina s nagibom $\frac{dy}{dt} = 0$

x - izokline

$$\alpha x - \beta x y = 0$$
$$x(\alpha - \beta y) = 0$$

$x = 0$

$\alpha - \beta y = 0 \qquad y = \frac{\alpha}{\beta}$

y - izokline

$$\gamma x y - \delta y = 0$$
$$y(\gamma x - \delta) = 0$$

$y = 0$

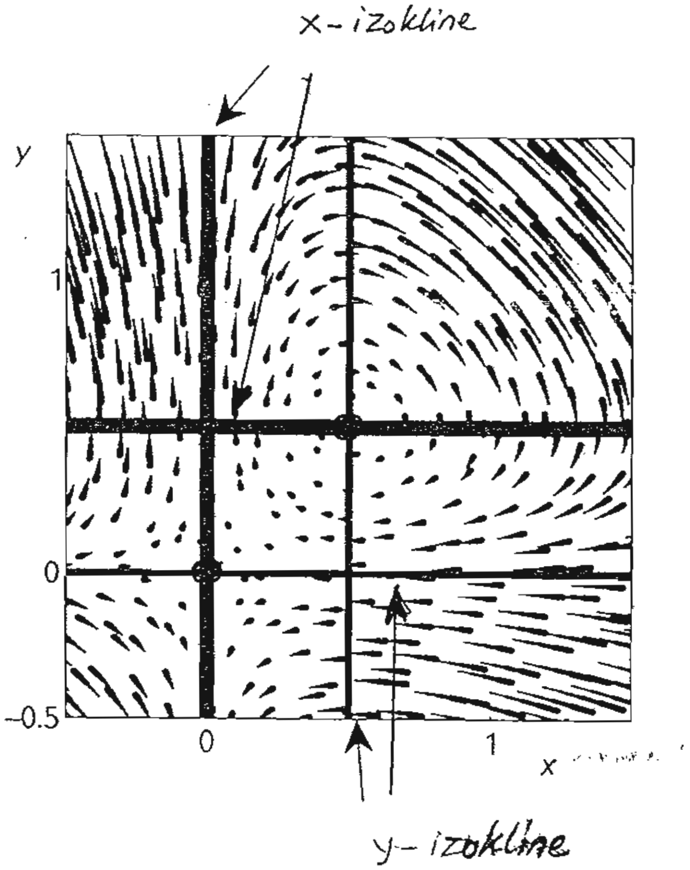
$\gamma x - \delta = 0 \qquad x = \frac{\delta}{\gamma}$

Fiksne točke u kojima je istovremeno $\frac{dx}{dt} = 0$ i $\frac{dy}{dt} = 0$ jesu

$$x = 0 \;, \quad y = 0$$

i

$$x = \frac{\delta}{\gamma} \;, \quad y = \frac{\alpha}{\beta}$$



Protok se može procijeniti tako da se za mali Δt izračuna

$$\Delta x = f(x,y)\,\Delta t$$
$$\Delta y = g(x,y)\,\Delta t$$

kao komponente vektora protoka.

Analiza lokalne stabilnosti

Linearizacijom $f(x,y)$ i $g(x,y)$ u blizini (x^*, y^*) dobivamo:

$$f(x,y) = f(x^*,y^*) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x^*,y^*}(x-x^*) + \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{x^*,y^*}(y-y^*) + \dots$$

$$g(x,y) = g(x^*,y^*) + \frac{\partial g}{\partial x}\bigg|_{x^*,y^*}(x-x^*) + \frac{\partial g}{\partial y}\bigg|_{x^*,y^*}(y-y^*) + \dots$$

U fiksnim točkama (x^*, y^*) je

$$f(x^*, y^*) = 0 \quad , \quad g(x^*, y^*) = 0$$

i uvedemo li nove varijable

$$X = x - x^* \qquad Y = y - y^*$$

dobiva se

$$\frac{dX}{dt} = AX + BY$$

$$\frac{dY}{dt} = CX + DY$$

gdje su A, B, C i D parcijalne derivacije

Znamo da je

$$\lambda_1 = \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2}$$

$$\lambda_2 = \frac{A+D}{2} - \frac{\sqrt{(A-D)^2 + 4BC}}{2}$$

- $(A-D)^2 + 4BC < 0$ svojstvene vrijednosti kompleksne

$\frac{A+D}{2} <$ stabilni fokus

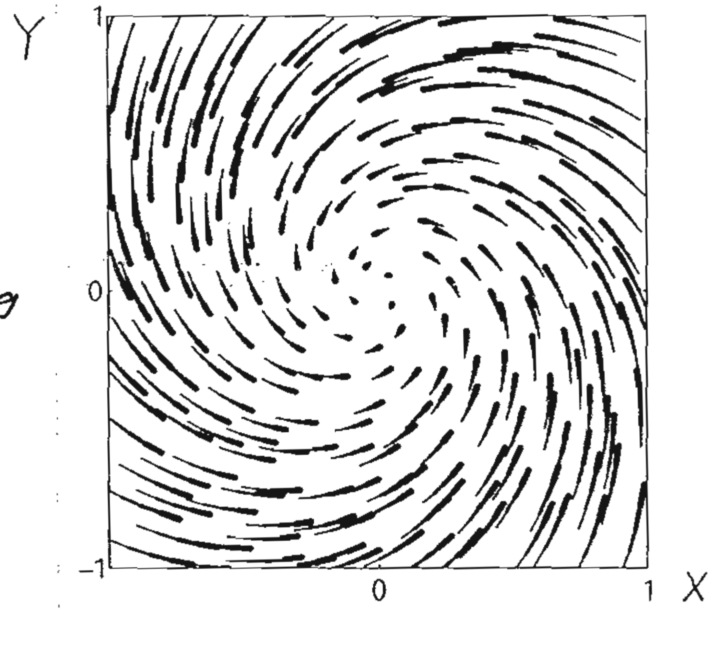
$\frac{A+D}{2} >$ nestabilni fokus

$\frac{A+D}{2} = 0$ centar

stabilni fokus

$A = -1$, $B = -1.9$

$C = 1.9$ $D = -1$



- $(A-D)^2 + 4BC > 0$

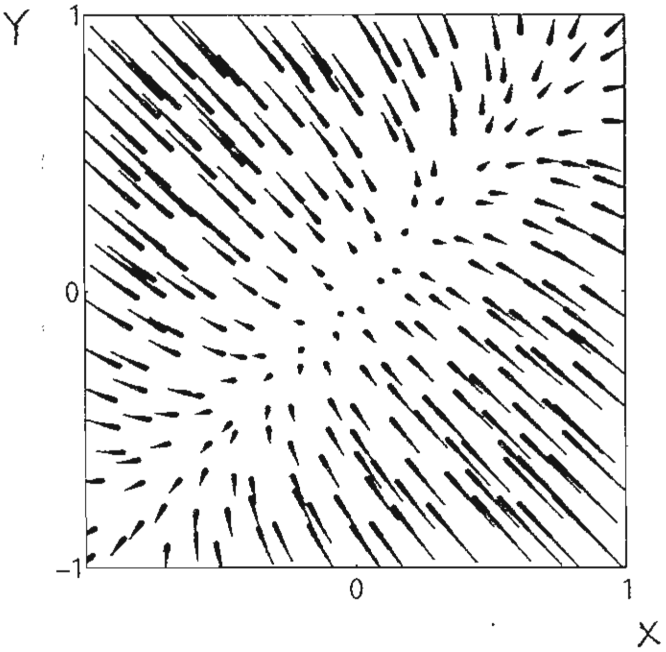
  $$|A+D| > \left|\sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right|$$

  Svojstvene vrijednosti su realne i istog predznaka.

Dobiva se čvorna točka

$\frac{A+D}{2} < 0$ stabilna čvorna točka

$\frac{A+D}{2} > 0$ nestabilna čvorna točka



Stabilna čvorna točka

$A = -1.5$, $B = 1$
$C = 1$, $D = -1.5$

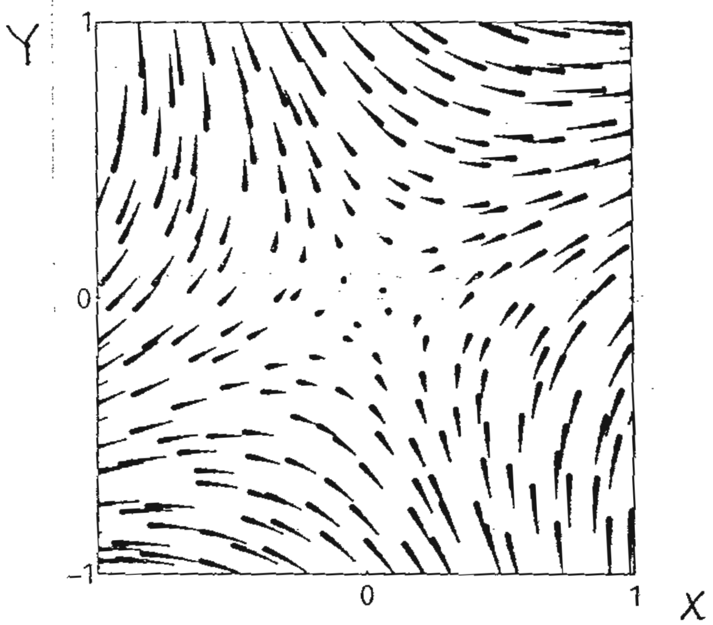
- $(A-D)^2 - 4BC > 0$

  $$|A+D| < \left|\sqrt{(A-D)^2 + 4BC}\right|$$

  Svojstvene vrijednosti su jednake i suprotnog predznaka

Dobiva se sedlo

Trajektorije u blizini sedla podsjećaju na tok kojim bi voda tekla po konjskom sedlu.



Sedlo

$A = 1$, $B = 1$

$C = 1$, $D = -1$

Ponašanje Lotka - Volterra jednadžbi u okolini fiksnih točki.

$$A = \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{x^*, y^*} = \alpha - \beta y^* \qquad B = \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{x^*, y^*} = -\beta x^*$$

$$C = \frac{\partial g}{\partial x}\Big|_{x^*, y^*} = \gamma y^* \qquad D = \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_{x^*, y^*} = \gamma x^* - \delta$$

Za fiksnu točku $x^* = 0$, $y^* = 0$

$A = \alpha \qquad B = 0$

$C = 0 \qquad D = -\delta$

$$\begin{vmatrix} \lambda - \alpha & 0 \\ 0 & \lambda + \delta \end{vmatrix} = 0 \qquad (\lambda - \alpha)(\lambda + \delta) = 0$$

$\lambda_1 = \alpha$

$\lambda_2 = -\delta$

sedlo!

za fiksnu točku $x^* = \frac{\delta}{\gamma}$, $y^* = \frac{\alpha}{\beta}$

$$A = 0 \qquad B = -\beta\frac{\delta}{\gamma}$$

$$C = \gamma\frac{\alpha}{\beta} \qquad D = 0$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & \beta\frac{\delta}{\gamma} \\ -\gamma\frac{\alpha}{\beta} & \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \alpha\delta = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\alpha\delta}$$

imaginarno

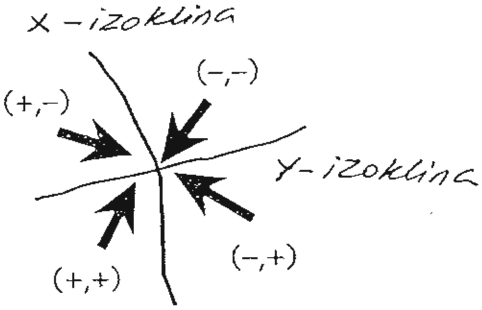
Zatvorene trajektorije oko fiksne točke.

Kvalitativna ocjena ponašanja u blizini fiksne točke

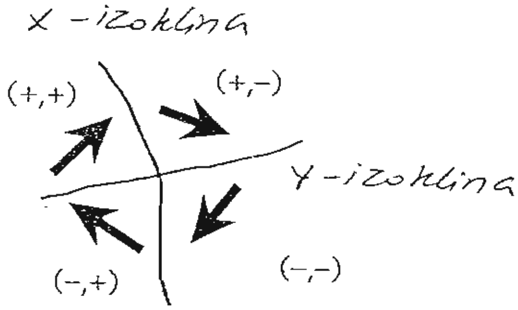
Najprije nacrtati x-izoklinu i y-izoklinu.

Dvije izokline određuju četiri područja.

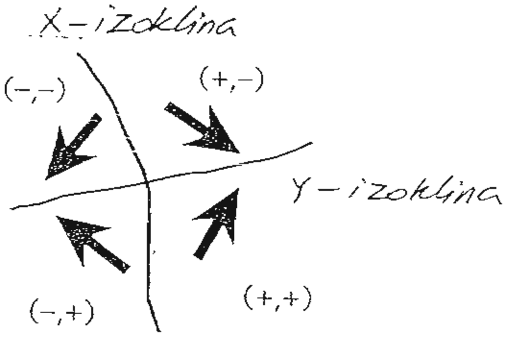
Izračunati $\frac{dx}{dt}$ i $\frac{dy}{dt}$ za točke blizu fiksne točke i na temelju predznaka odrediti približnu geometriju trajektorija.



Stabilna čvorna točka



Fokus



Sedlo