Logistička modifikacija Lotka-Voltera modela

Seminarski u okviru kursa
Osnove matematičkog modeliranja
Matematički fakultet

Marina Brkić, Nikola Vlahović
marinabrkic91@gmail.com
nikola.vlahovic2401@gmail.com

27. maj 2018.

Sažetak

Lotka-Voltera nelinearne diferencijalne jednačine prvog reda se koriste za modeliranje bioloških, hemijskih i ekonomskih sistema. Kroz primer interakcije lisica i zečeva, predstavljamo standardne jednačine i modifikaciju koja uzima u obzir ograničen kapacitet staništa.

Ključne reči: Lotka-Voltera jednačine, modeliranje populacija, predator-plen

Sadržaj

1 Uvod

Alfred J. Lotka je u svom radu "Doprinos teoriji periodičnih reakcija" objavljenom 1910. godine predstavio inicijalnu formulaciju Lotka-Voltera jednačina za modeliranje ponašanja određenih hemijskih reakcija, koju 1920. koristi za modeliranje sistema u kom interaguju biljka i biljojed. Pet godina kasnije objavljuje knjgu gde pomoću ovih jednačina modelira populacije plena i grabljivice. Te jednačine objavljuje i Vito Voltera u radu gde analizira populacije riba u Jadranskom moru, nakon što je kroz razgovor sa svojim budućim zetom, morskim biologom Umbertom D'Ankonom, saznao da je nakon rata porastao procenat ulovljenih grabljivih riba.

Ilustrovaćemo kroz primer lisica i zečeva primenu Lotka-Voltera jednačina na modeliranje populacija sa plen-grabljivica interakcijama.

2 Standardni Lotka-Voltera model

Stanište dele populacije lisica i zečeva. Lisice se hrane isključivo zečevima, dok za zečeve uvek ima hrane u izobilju. Populacija zečeva bi u nedostatku lisica neprestano rasla. Obratno, populacija lisica bi u slučaju nedostatka zečeva (hrane) ubrzo izumrla. Označimo broj zečeva sa $x(t)$, a broj lisica sa $y(t)$ za vreme t. Jednačine:

$$\begin{aligned} x' &= ax \\ y' &= -my \end{aligned} \tag{1}$$

gde su a i m parametri koji predstavljaju stope rasta i odumiranja odgovarajućih populacija, ilustruju njihovo ponašanje u nedostatku interakcije. Da bismo dobili realističniji model, neophodno je da inkorporiramo u jednačine činjenicu da lisice love zečeve. Broj njihovih susreta je direktno proporcionalan brojnosti lisica i zečeva, što možemo modelirati proizvodom xy. Lov izaziva opadanje populacije zečeva, dok omogućava porast populacije lisica. Neka su b i c koeficijenti smrtnosti zečeva tj. nataliteta lisica pri omogućenim interakcijama, i pretpostavimo da su lisice uvek gladne, tj. da će svakom ukazanom prilikom pojesti zeca. Promene populacija možemo modelirati **Lotka-Voltera sistemom diferencijalnih jednačina**:

$$\begin{aligned} x' &= ax - bxy, x(0) = x_0 \\ y' &= -my + cxy, y(0) = y_0 \end{aligned} \tag{2}$$

koje drugačije možemo napisati kao

$$\begin{aligned} x' &= x(a - by) = 0 \\ y' &= y(cx - m) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

Vidimo da priraštaj lisica neposredno zavisi od pristupa hrani, tj. zečevima. Kada je $cx - m > 0$ (podrazumeva se da su x i y pozitivni realni brojevi), tada raste populacija lisica, dok u suporotnom stagnira ili opada. Slično važi i za populaciju zečeva. Za pozitivne parametre a, b, c i m, važi da će porast populacije zečeva omogućiti porast populacije lisica ali kako ona bude rasla, usled povećanog lova priraštaj zečeva (usled $a - by$) opada. Eventualno će postati negativan i biće ih sve manje, što će početi da obara priraštaj lisica, koji će takođe u nekom trenutku postati negativan. Ukoliko u padu ni jedna ni druga ne dođu do istrebljenja, ciklus će nastaviti da se odvija.

2.1 Stacionarna rešenja sistema

Stacionarno rešenje definišemo kao stanje u kom ne dolazi do promena vrednosti, tj. gde važi $x' = 0$ i $y' = 0$. Iz (3) vidimo da je jedno od rešenja $x = y = 0$, a da drugo rešenje odgovara sistemu

$$\begin{aligned} a - by &= 0 \\ cx - m &= 0 \end{aligned}$$

odakle jednostavnim transformacijama dobijamo

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{c} \equiv x_s \\ y &= \frac{a}{b} \equiv y_s. \end{aligned} \tag{4}$$

2.2 Primer u Matlabu

Da bi rešili ovaj sistem jednačina koristićemo Matlab funkciju ode45, i pomoćne fajlove *params.m* i *plot_figures.m*.

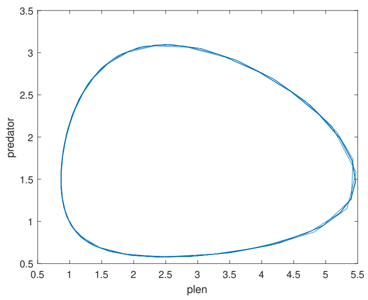
```
a = 3;
b = 2;
c = 1;
m = 2.5;
p_init = 1;
g_init = 1;
u = 5;
```

Slika 1: *params.m* - Parametri modela

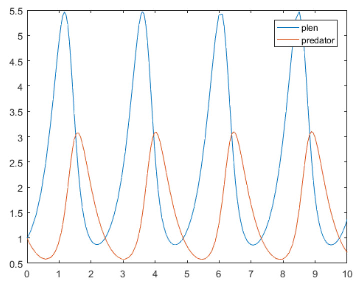
```
function [] = plot_figures(ts, ys)
    plot(ts, ys)
    legend('plen', 'predator')
    figure();
    plot(ys(:,1),ys(:,2));
    hold on
    xlabel('plen'); ylabel('predator')
    hold off
```

Slika 2: *plot_figures.m* - Funkcija za crtanje grafika i faznog dijagrama

```
params;

lv_standard = @(t, state) [
    a * state(1) - b * state(1) * state(2);
    c * state(1) * state(2) - m * state(2)
];

[ts, ys] = ode45( ...
    lv_standard, [0, 10], [p_init;g_init] ...
);

plot_figures(ts, ys);
```



Slika 3: Fazni dijagram standardnog modela



Slika 4: Grafik promene populacija kroz vreme za standardni model

3 Logistička modifikacija Lotka-Voltera modela

Može se videti da je prethodni model realističan dokle god je koeficijent priraštaja zečeva konstantan.
Znamo da na realnom, konačnom staništu populacija ne može neograničeno rasti zbog ograničenih raspoloživih resursa. Dakle, stanište može da podrži određen maksimalan broj jedinki neke vrste. Označimo taj broj sa U. Iskoristivši pretpostavku da priraštaj linearno zavisi od veličine populacija, belgijski matemaričar Verhulst je predložio model:

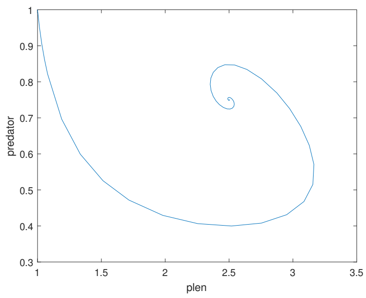
$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)(1 - \frac{N(t)}{U}) \tag{5}$$

Ako primenimo logističku formulu u računanju priraštaja populacije zečeva, uračunavamo i zavisnost od odnosa veličine populacije i kapaciteta staništa. Time se dobijaju jednačine:

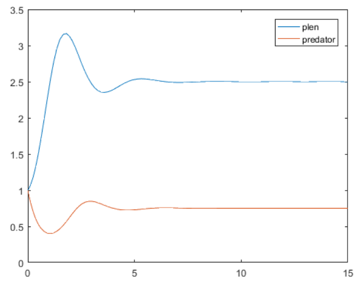
$$\begin{aligned} x' &= ax(1 - \frac{x}{U}) - bxy \\ y' &= -my + cxy \end{aligned} \tag{6}$$

3.1 Primer u Matlabu

```
params;

lv_logistic = @ (t, state) [
    a * state(1) * ( 1 - (state(1))/u) - ...
    b * state(1) * state(2);
    (c * state(1) * state(2) - ...
    m * state(2))
];

[ts, ys] = ode45( ...
    lv_logistic, [0, 15], [p_init;g_init] ...
);

plot_figures(ts, ys);
```



Slika 5: Fazni dijagram za U=5



Slika 6: Promena populacija za U=5

3.2 Stacionarna rešenja za model sa logističkom modifikacijom

Izjednačavamo jednačine (6) sa 0

$$\begin{aligned} ax(1 - \frac{x}{U}) - bxy &= 0 \\ -my + cxy &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Jedno od rešenja je kao u standardnom modelu $x = 0$ i $y = 0$. Ako su $x \neq 0$ i $y = 0$, važi

$$ax(1 - \frac{x}{U}) = 0,$$

odakle sledi da je jedno od stacionarnih rešenja sistema

$$\begin{aligned} x &= U \\ y &= 0. \end{aligned}$$

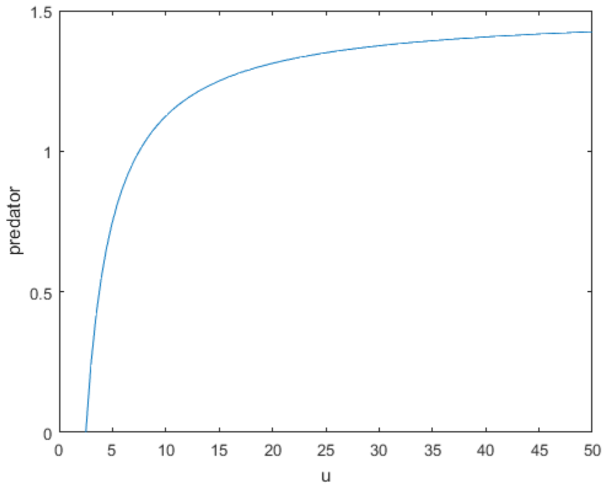
Za slučaj da su $x \neq 0$ i $y \neq 0$, iz (7) dobijamo jednačine

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{c} \\ y &= \frac{a}{b}(1 - \frac{x}{U}), \end{aligned}$$

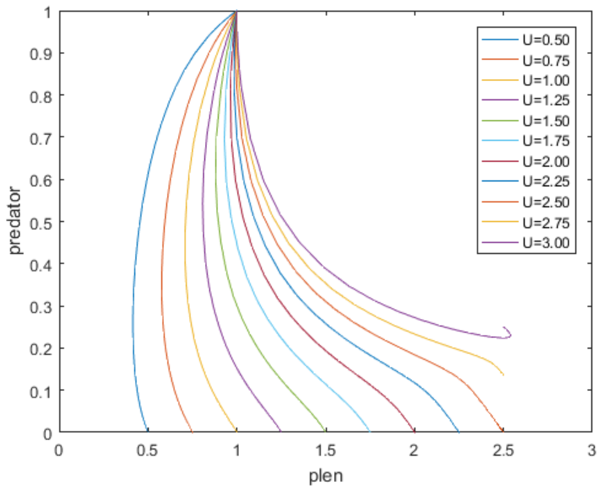
iz koje kada zamenimo prvu jednačinu u drugu, dobijamo stacionarno rešenje

$$\begin{aligned} x &= \frac{m}{c} \\ y &= \frac{a}{b}(1 - \frac{m}{cU}). \end{aligned} \tag{8}$$

Jasno je da se za fiksne a, b, c i m, stacionarna tačka kreće samo po y osi u zavisnosti od U. Šta se dešava sa populacijama za različite vrednosti U?



Slika 7: Zavisnost y (predatorske populacije) u stacionarnom rešenju od U

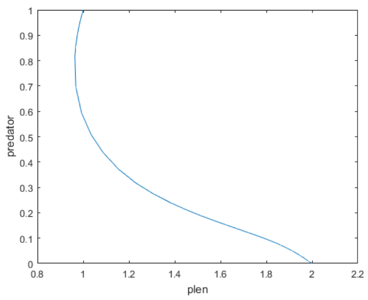


Slika 8: Fazni dijagrami populacija za različite vrednosti U

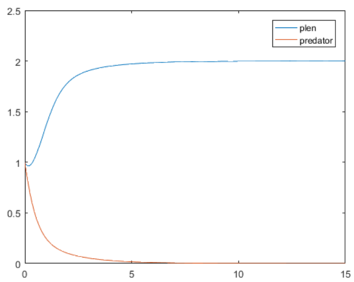
Sa slike 8 vidimo da će za $U \leq \frac{m}{c}$ (u našem konkretnom slučaju 2,5), lisice težiti istrebljenju.

3.3 Stanište sa vrlo ograničenim kapacitetom

Koristimo isti model sa parametrima $a = 3, b = 2, c = 1, m = 2.5, U = 2$ i početnom konfiguracijom $x(0) = 1, y(0) = 1$. Sa grafikona vidimo da populacija plena ne raste dovoljno brzo da omogući održanje lisica na staništu.



Slika 9: Fazni dijagram za U=2



Slika 10: Promena populacija za U=2

4 Zaključak

Osnovni Lotka-Voltera model je dobar za modeliranje vrlo jednostavnih sistema, ali kod kompleksnijih sistema, sa više interakcija i složenijim parametrima ne uspeva da realistično predstavi situaciju. Sa druge strane, usled svoje elegancije i jednostavnosti, izuzetno ga je lako modifikovati ili inkorporirati u druge modele, što ga čini relevantnim i danas.