Sprawozdanie Statystyka i Procesy Stochastyczne

Data 14.06.2020

WEAIiIB, AiR, gr. 2B

Kajetan Zyguła

Michał Kocwa

Paweł Kolendo

Bartosz Borek

Opis problemu

W tym sprawodzaniu zawarte są wyniki pracy badania matrycy szumu CCD w telefonie. W tym celu została wykonana seria zdjęć (kilkaset kratek). Następnie zostały estymowane pewne wartości rozkładu i zostały wygenerowane estymowane wykresy funkcji autokorelacji i gęstości widmowej mocy. Całość została wykonana w programie matlab.

Matryca CCD jest detektorem. Dla uproszczenia można przyjąć, że jest ona zbudowana z pikseli, wychwytujących padające na nią fotony. Nastepnie zamieniane są one na napięcie elektryczne, dzięki efektowi fotoelektrycznemu wewnętrznemu, który polega na wybijaniu elektronów przez fotony, co prowadzi do powstania różnicy potencjału, czyli napięcia elektrycznego. Kolejno poprzez elektrody zgromadzone na końcu każdego rzędu pikseli, zgromadzony sygnał trafia do wzmacniacza, po czym opuszcza chip.

W dalszej części przyjęte jest założenie, że rozkład szumu dla każdego piksela jest taki sam i nie zmienia się on w czasie.

Wzory

Estymacja wartości oczekiwanej

$$EX_i = \mu, \mathrm{Cov}(X_i) = \sigma$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n} \qquad (1)$$

$$E\bar{X} = \frac{EX_1 + \ldots + EX_n}{n} = \frac{n\mu}{n} = \mu \qquad (2)$$

$$\mathrm{Var}\left(\bar{X}\right) = \mathrm{Var}\left(\frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}\right) = \frac{1}{n}\sigma^2 \qquad (3)$$

Wobec tego średnia arytmetyczna jest zgodnym nieobciążonym estymatorem wartości oczekiwanej o wariancji dążącej do 0 gdy $n \longrightarrow \infty$.

Estymacja odchylenia standardowego

$$EX_i = \mu, \mathrm{Cov}(X_i) = \sigma$$

$$S^2 = \frac{\left(X_1 - \bar{X}\right)^2 + \ldots + \left(X_n - \bar{X}\right)^2}{n} \quad (4)$$

$$ES^2 = \frac{E\left(X_1 - \bar{X}\right)^2 + \ldots + E\left(X_n - \bar{X}\right)^2}{n} = \frac{(n-1)\sigma^2}{n} \quad (5)$$

$$\mathrm{Var}(S^2) = \frac{2(n-1)}{n^2}\sigma^4 \quad (6)$$

Wobec tego $\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{n}}$ jest zgodnym nieobciążonym estymatorem odchylenia standartowego o wariancji dążącej do 0 gdy $n \longrightarrow \infty$.

Estymata skośności

Obliczono ją ze wzoru:

$$A_d = \frac{\mu - d}{\sigma} \quad (7)$$

Gdzie d to moda rozkładu

Funkcja autokorelacji

$$R_{XX}(k) = \frac{E\left[(X_t - \mu)\overline{(X_{t+k} - \mu)}\right]}{\sigma^2} \quad (8)$$

gdzie: $\sigma^2 = E\left[(X_t - \mu)\overline{(X_t - \mu)}\right]$,

a wartość oczekiwaną można estymować ze wzoru (1).

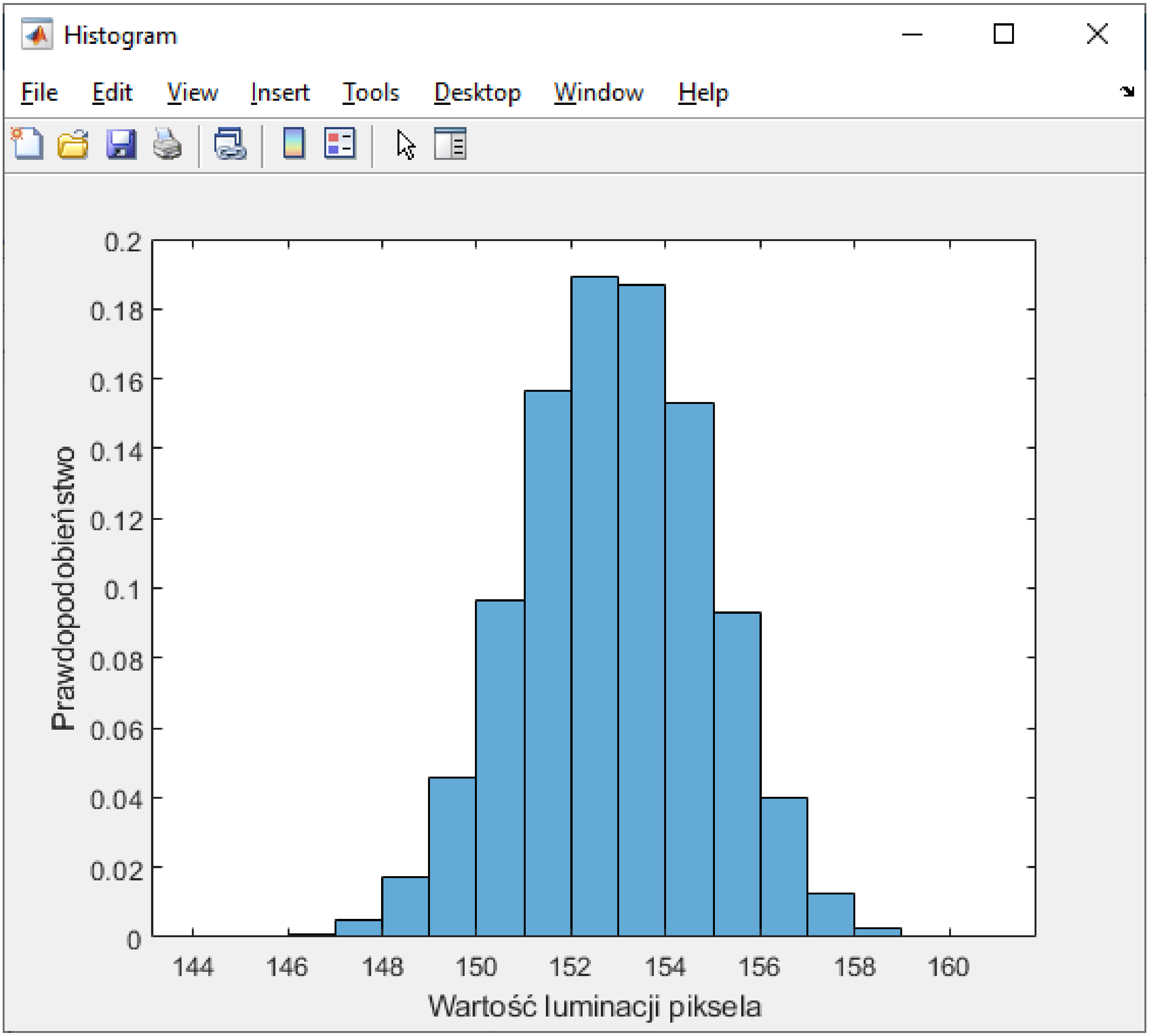
Gęstość widmowa mocy

Jest to transformata Fouriera funkcji autokorelacji, ale z dyskretna funkcja autokorelacji daję okresowe widmo, natomiast izolując jeden okres otrzymuję się widmo ciągłej funkcji autokorelacji. Samą tansformatę Fouriera przybliża się za pomocą wzoru:

$$S_{XX}(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} R_{XX}(n)e^{-\mathrm{j}n\omega T_p} \quad (9)$$

Rozwiązanie zadań

Używając wbudowanej funkcji matlaba otrzymujemy:



Rys. 1 Histogram

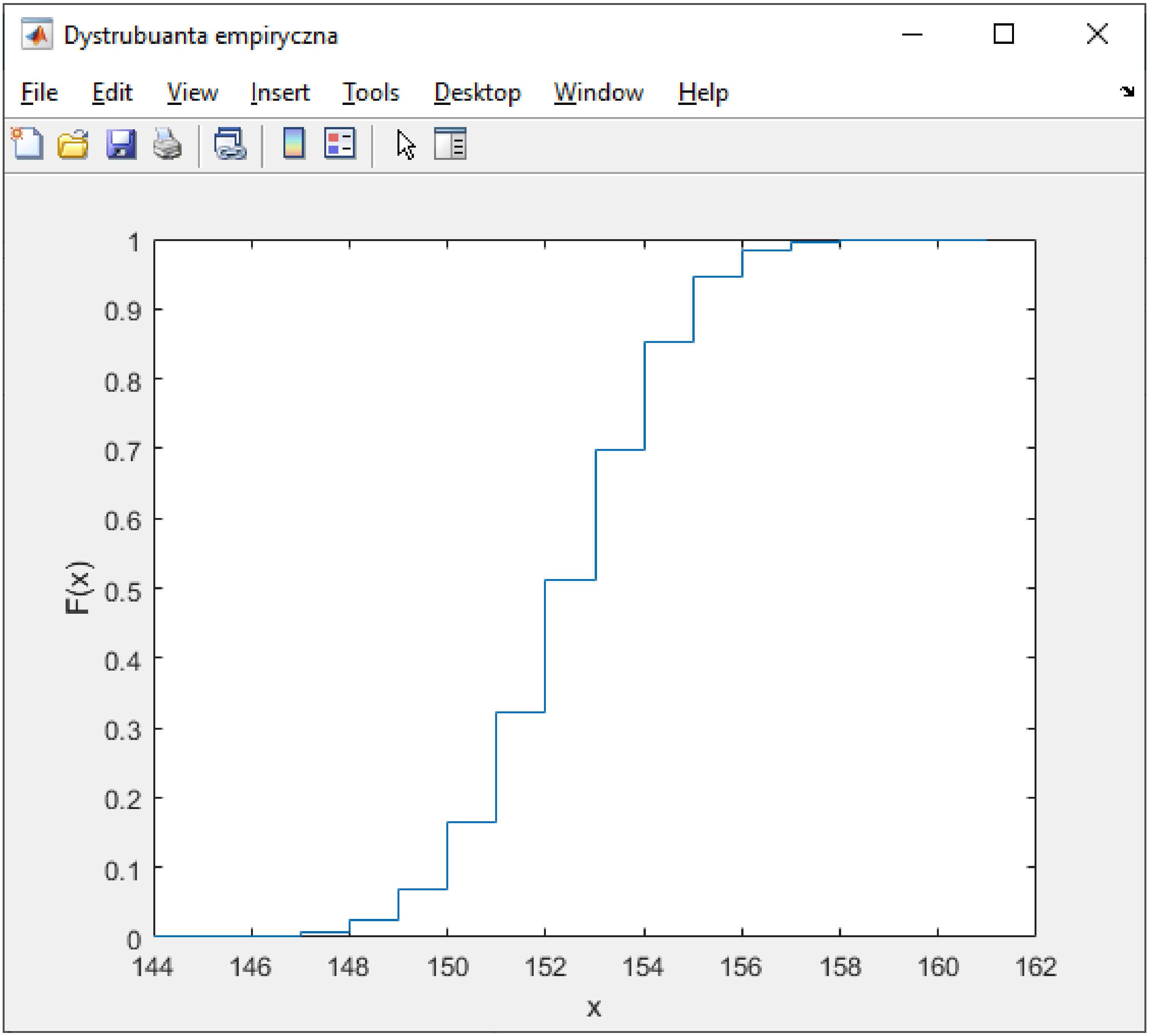
Estymata prawdopodobieństwa może zostać odczytana bezpośrednio z histogramu, gdyż nasza zmnienna losowa jest dyskretna i przyjmuje jedynie wartości całkowite.

	Var1	
1	144	0.000008…
2	145	0.000100…
3	146	0.000933…
4	147	0.005050…
5	148	0.017491…
6	149	0.045691…
7	150	0.096737…
8	151	0.156425…
9	152	0.189220…

	Var1	
1	153	0.186762…
2	154	0.153195…
3	155	0.093075…
4	156	0.039962…
5	157	0.012283…
6	158	0.002675…
7	159	0.000341…
8	160	0.000045…

Rys. 2 Estymata prawdopodobieństwa

Używając wbudowanej funkcji matlaba otrzymujemy:



Rys. 3 Dystrybuanta empiryczna

Estymację wartości oczekiwanej wyznaczono korzystając z estymatora we wzorze (1):

E=152.4239041666667

Estymację odchylenia standardowego wyznaczono korzystając z estymatora we wzorze (4):

v=1.979871820017897

Medianę (m) i modę (d) estymowano za pomocą komend "median" i "mode":

m=152

$$d=152$$

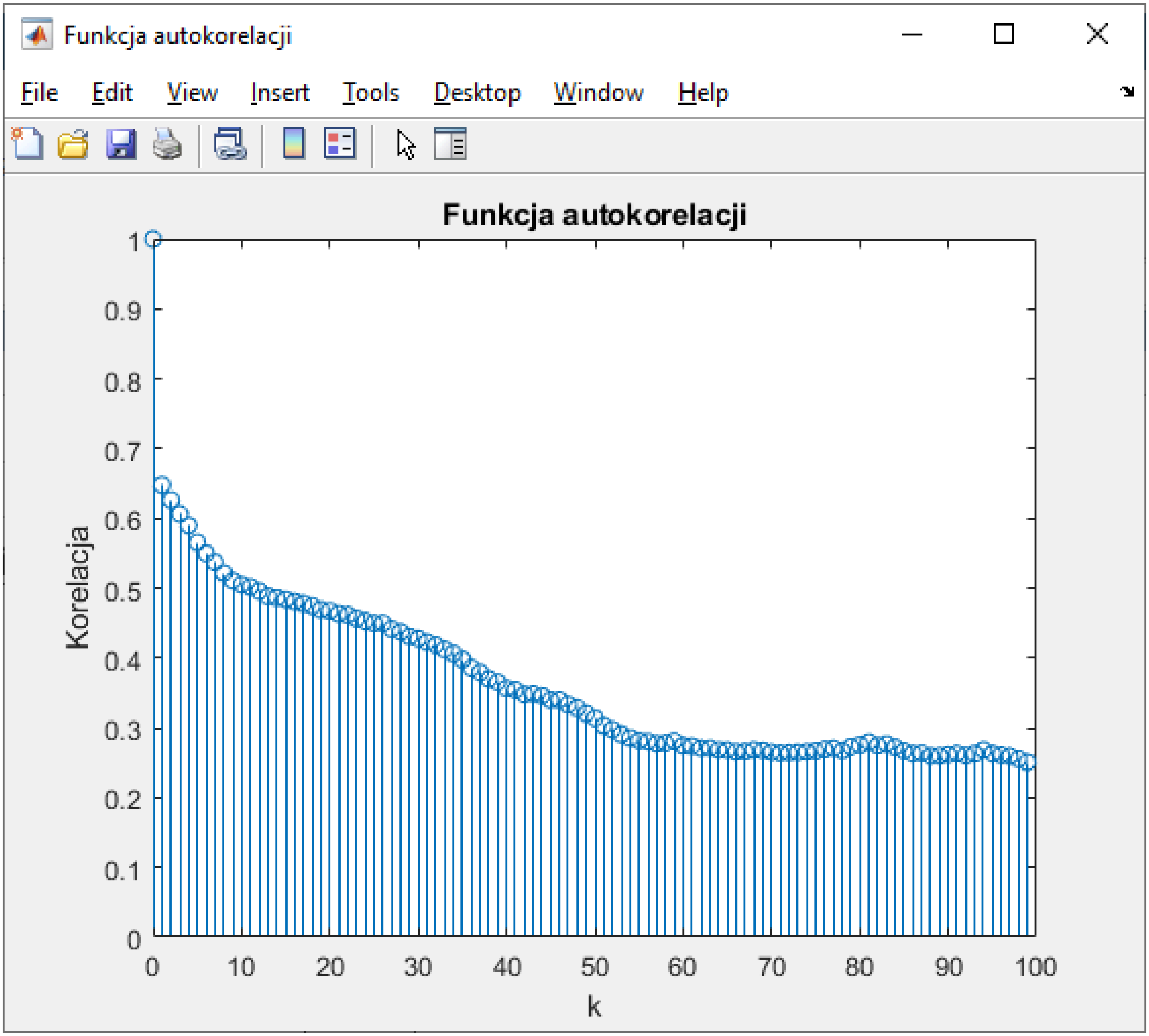
Ponieważ mediana to element środkowy rozkładu, a moda to element najczęściej występujący, to odczytujemy je wprost z otrzymanego na rys. 2 estymowanego rozkładu, czyli za pomocą powyższych komend.

Estymatę skośności wyznaczono korzystając ze wzoru (7):

$$A=0.214106874182808$$

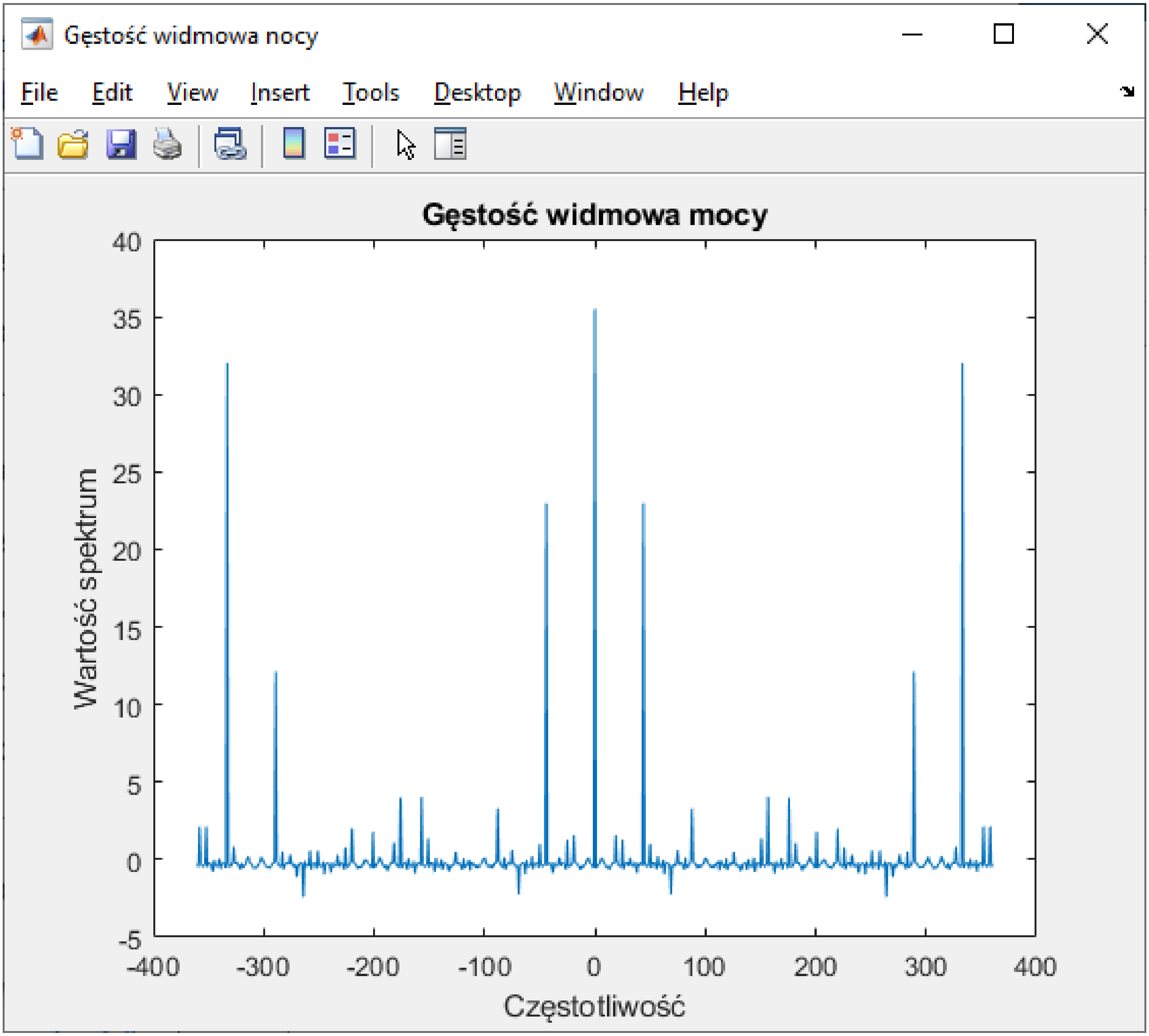
Wartość dodatnia oznacza prawostronną skośność rozkładu.

Dla uproszczenia obliczeń można przyjąć, że wartość oczekiwana procesu nie zmienia się czasie, gdyż na każdym zdjęciu przedstawiony jest ten sam obiekt. Funkcję korelacji wyznaczamy podstawiając tą wartość do wzoru (8):



Rys. 4 Funkcja autokorelacji

Po podstawieniu do wzoru (9) otrzymujemy gęstość widmową nocy:



Rys. 5 Gęstość widmowa nocy

Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty przybliżyły własności rozkładu matrycy szumu CCD. Moda i mediana są równe 152, ale estymowana wartość oczekiwana jest od nich większa, co oznacza prawostronną skośność rozkładu. Oznacza to, że częściej zdarzały się wartości większe niż 152. Poza tym wykresy na rys. 4 i 5 wskazują korelacje z poprzednimi wartościami. Na rys.4 widzimy, że niektóre wartości przekraczają nawet 0.5. Natomiast na rys. 5 niektóre częstotliwości mają dużą wartość spektrum. Na tej podstawie możemy wywnioskować, że nasz rozkład jest prawostronnie skośny i wartości w różnych chwilach czasu są w pewien sposób skorelowane.

Literatura

Wykłady https://upel2.cel.agh.edu.pl/weaiib/course/view.php?id=781

Autocorrelation - Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Autocorrelation

Spectral density - Wikipedia https://en.wikipedia.org/wiki/Spectral_density