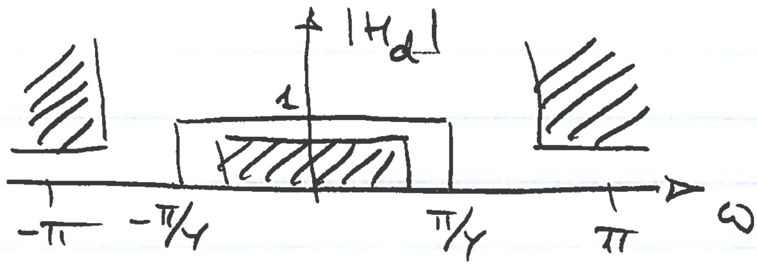
PK

LØSNINGSFORSLAG, 8. FORELÆSNING

- $\omega_c = \pi/4$
- Linear fase
- Type I FIR



$\Downarrow$

ØNSKET FREKVENS-RESPONS:

$$H_d(e^{j\omega}) = \begin{cases} e^{-j\omega M/2} & |\omega| \leq \pi/4 \\ 0 & \pi/4 < |\omega| \leq \pi \end{cases}$$

VI KAN NU BEREGNE DEN IDEELLE IMPULSRESPONS:

$$h_d[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{-j\omega M/2} \cdot e^{j\omega n} \cdot d\omega$$

$\Downarrow$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{j(n-M/2)\omega} \, d\omega$$

$\Downarrow$

ulige funktion.

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\{(n-M/2)\omega\} + \cancel{j\sin\{(n-M/2)\omega\}} \, d\omega$$

$\Downarrow$

$$= \frac{1}{2\pi} \Big[\sin\{(n-M/2)\omega\} \Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} \cdot \frac{1}{n-M/2}$$

$\Downarrow$

$$= \frac{1}{2\pi(n-M/2)} \cdot \left\{ \sin\left(\frac{\pi}{4}(n-M/2)\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{4}(n-M/2)\right) \right\}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{h_d[n] = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}(n-M/2)\right)}{\pi(n-M/2)} \qquad -\infty < n < \infty}$$

PK

DENNE IMPULSRESPONS, SOM ER SYMMETRISK OMKRING $M/2$, ER UENDELIG OG NON-KAUSAL

Vi MÅ TRUNKERE MED EN VINDUES-FUNKTION

$$h[n] = h_d[n] \cdot w[n], \quad w[n] \neq 0 \quad 0 \leq n \leq M$$

VED TYPE I FIR-FILTRE ER DEN RESULTERENDE FREKVENSRESPONS, JVF LIGN 140a p. 343;

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega M/2} \left(\sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cos(\omega k) \right)$$

HVOR
$$\begin{cases} a[0] = h[M/2] \\ a[k] = 2 \cdot h[M/2 - k] \text{ for } k = 1, 2, \ldots, M/2 \end{cases}$$

Vi ER GARANTERET LINEÆR FASE GRUNDET SYMMETRIEN i $h[n]$. Vi BEHØVER DERFOR KUN AT BEKYMRE OS OM AMPLITUDE-RESPONSEN

$$|H(e^{j\omega})| = \sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cdot \cos(\omega k)$$

PK

FOR AT OPFYLDE KRAVET OM 0dB DC-FORSTÆRKNING, MÅ VI FINDE G, GIVET VED;

$$G \cdot |H(e^{j\omega})| = 1 \Big|_{\omega=0}$$

$$\Downarrow$$

$$G \cdot \sum_{k=0}^{M/2} a[k] = 1$$

$$\Downarrow$$

$$G = \frac{1}{\sum_{k=0}^{M/2} a[k]}$$

DEN ENDELIGE AMPLITUDE-RESPONS BLIVER DERFOR;

$$\boxed{|H(e^{j\omega})| = \frac{\sum_{k=0}^{M/2} a[k] \cdot \cos(\omega k)}{\sum_{k=0}^{M/2} a[k]}}$$

VORES OPGAVE ER NU, FOR VALGT VINDUES-FUNKTION, AT FINDE DEN MINDSTE VÆRDI FOR M FOR HVILKE SPECIFICATIONERNE ER OPFYLDT

— DER EKSPERIMENTERES BÅDE MED DET REKTANGULÆRE VINDUE OG HAMMING-VINDUET.

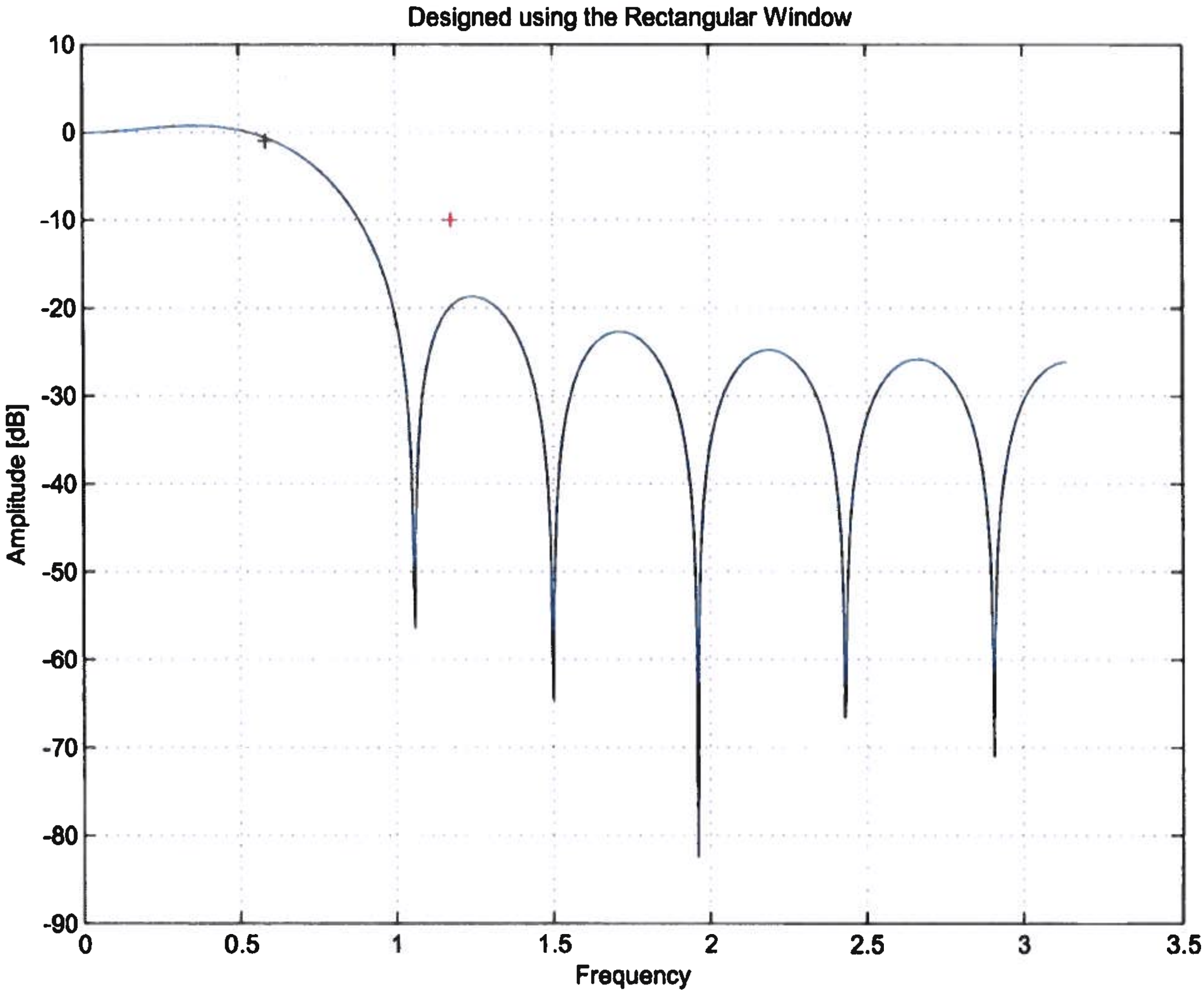
SKRIV PROGRAM

```
% Dette MATLAB-program beregner amplituderesponsen
% for et M'te ordens TYPE I FIR-filter med den
% ønskede impulsrespons h_d[n].
% Den anvendes det Rektangulære vindue.

clear

% Her defineres ordenen M (M er lige)
M = 12;

% Først laver vi lige et frekvenssweep fra 0 til PI
for i=0:999,
 omega(i+1) = pi*i/999;
end;

% Amplituderesponsen beregnes for de 1000 diskrete frekvensværdier.

for i=0:999,
 % Tælleren beregnes vha summationsvariablen sum_t
 sum_t = 0;
 % Nævneren beregnes vha summationsvariablen sum_n
 sum_n=0;
 % Summerne har hver ialt M/2+1 led
 for k=1:(M/2),
   % Først beregnes den ideelle impulsrespons-sample
   h(k) = (sin((pi/4)*k)/(pi*k));
   a = 2*h(k);
   % Herefter summeres
   sum_t = sum_t + (a * cos(k * omega(i+1)));
   sum_n = sum_n + a;
 end,

 % Endelig adderes bidraget fra k=0 ~~~~ sinc(0)
 sum_t = sum_t + 0.25;
 sum_n = sum_n + 0.25;

 % Og til slut beregnes den aktuelle amplitude-værdi
 amp(i+1) = sum_t/sum_n;
end,

% Amplitudekarakteristikken plottes sammen med "specifikationerne"
plot(omega,20*log10(abs(amp)),omega(187),-1,'+',omega(375),-10,'+')
grid;
xlabel('Frequency')
ylabel('Amplitude [dB]')
title('Designed using the Rectangular Window')
```

OBS! Her er svaret for så vidt pas- og stopbånds-kravene angår.

: $h_d[n] = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}(n-\frac{M}{2}))}{\pi(n-\frac{M}{2})}$

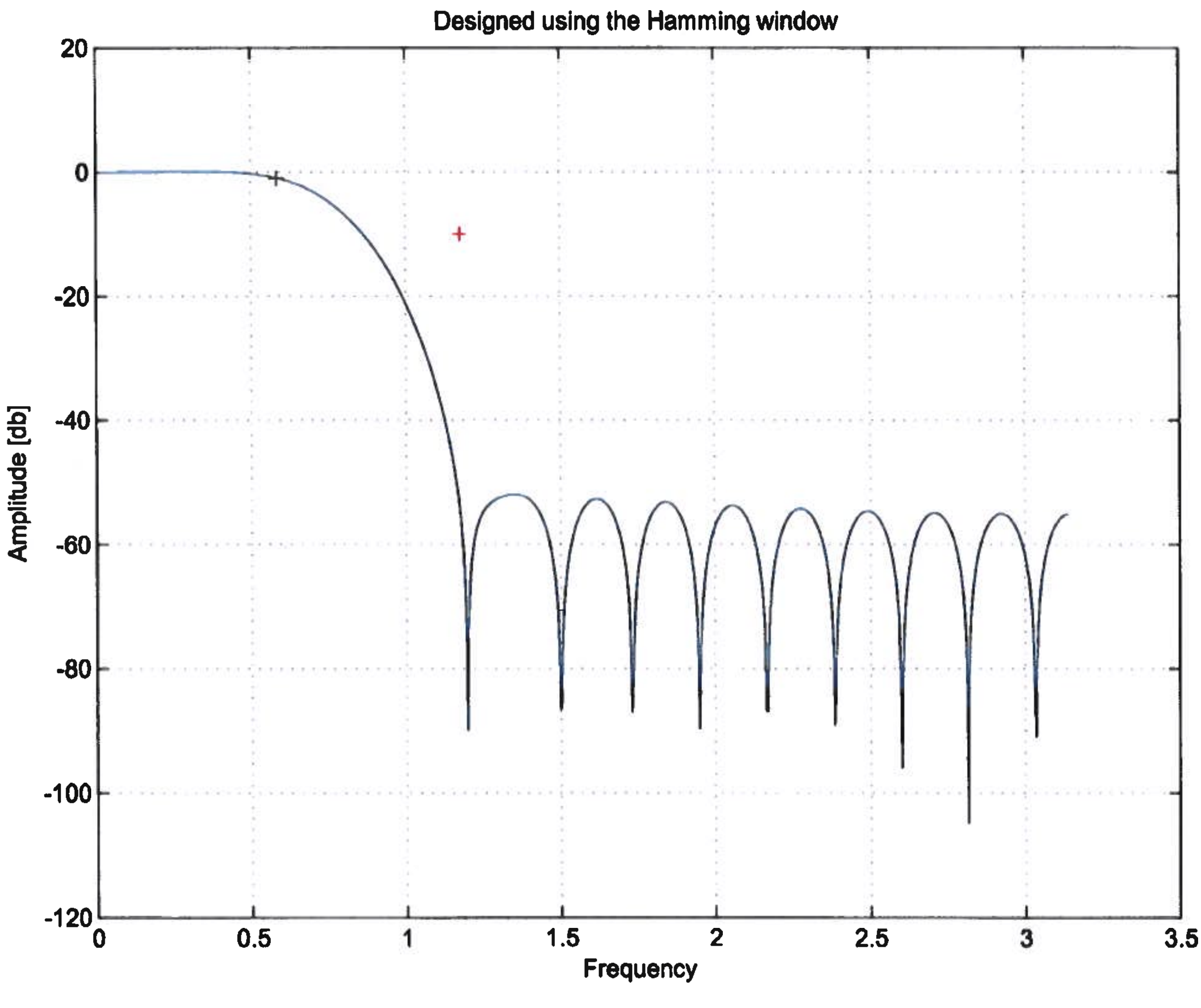
: $\dfrac{\sin(\frac{\pi}{4}(n-\frac{M}{2}))}{\pi(n-\frac{M}{2})} \rightarrow \frac{1}{4}\Big|_{n \to M/2}$


Designed using the Rectangular Window
Amplitude [dB]
Frequency
10
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
-90
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5

```
% Dette MATLAB-program beregner amplituderesponsen
% for et M'te ordens TYPE I FIR-filter med den
% ønskede impulsrespons h_d[n].
% Den anvendes Hamming-vindue.

clear

% Her defineres ordenen M (M er lige)
M = 28;
```

OBS! Her er svaret for så vidt pas- og stopbånds-kravene angår.

```
% Først laver vi lige et frekvenssweep fra 0 til PI
for i=0:999,
 omega(i+1) = pi*i/999;
end;

% Amplituderesponsen beregnes for de 1000 diskrete frekvensværdier.

for i=0:999,
 % Tælleren beregnes vha summationsvariablen sum_t
 sum_t = 0;
 % Nævneren beregnes vha summationsvariablen sum_n
 sum_n = 0;
 % Summerne har hver ialt M/2+1 led
 for k=1:(M/2),
   % Først beregnes den ideelle impulsrespons-sample
   a = 2*(sin((pi/4)*k)/(pi*k));
   % som nu skal Hamming-vægtes
   a = a * (0.54 - 0.46*cos((2*pi)*(k + M/2)/M));
   % Herefter summeres
   sum_t = sum_t + (a * cos(k * omega(i+1)));
   sum_n = sum_n + a;
 end,

 % Endelig adderes bidraget fra k=0 ~~~~ sinc(0)
 sum_t = sum_t + 0.25;
 sum_n = sum_n + 0.25;

 % Og til slut beregnes den aktuelle amplitude-værdi
 amp(i+1) = sum_t/sum_n;
end,

% Amplitudekarakteristikken plottes sammen med "specifikationerne"
plot(omega,20*log10(abs(amp)),omega(187),-1,'+',omega(375),-10,'+')
grid;
xlabel('Frequency')
ylabel('Amplitude [db]')
title('Designed using the Hamming window')
```


Designed using the Hamming window
Amplitude [db]
20
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
Frequency