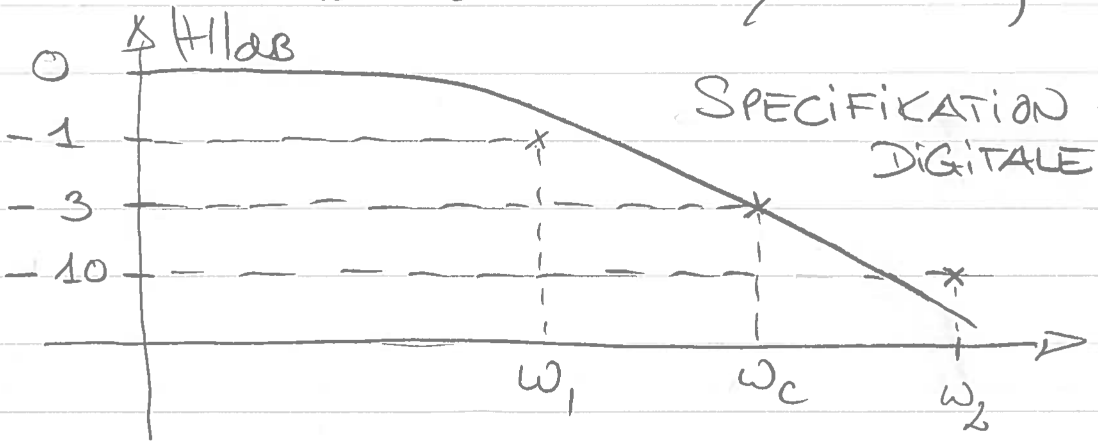
PK

FORSLAG TIL OPGAVELØSNING, 7. FORELÆSNING



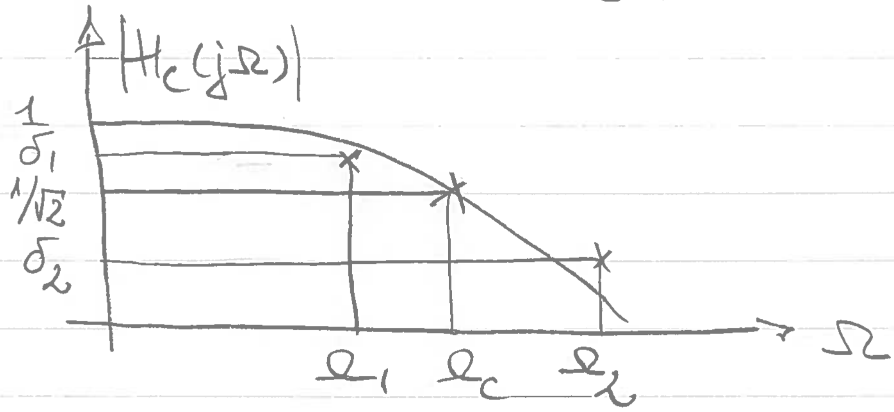
$\omega = T_d \cdot \Omega$

$$\omega_1 = \frac{1}{8000} \cdot 2\pi \cdot 750 = \frac{3\pi}{16}$$

$$\omega_c = \frac{1}{8000} \cdot 2\pi \cdot 1000 = \frac{\pi}{4}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{8000} \cdot 2\pi \cdot 1500 = \frac{3\pi}{8}$$

VI SKAL FØRST BESTEMME ORDEN AF DET ANALOGE PROTOTYPE FILTER $H_c(s)$



VI STARTER MED AT BEREGNE VÆRDIERNE δ_1 OG δ_2

$$-1\,dB = 20 \cdot \log \delta_1 \Rightarrow \delta_1 = 0.89125$$

$$-10\,dB = 20 \cdot \log \delta_2 \Rightarrow \delta_2 = 0.31623$$

PK

DISSE VÆRDIER, SAMT TILHØRENDE FREKVENSVÆRDIER, BENYTTES NU TIL BEREGNING AF ORDEN N.

VI HAR AT DEN KVADREREDE AMPLITUDE-RESPONS FOR ET ANALOGT BUTTERWORTH-FILTER ER GIVET SOM;

$$|H_c(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1+\left(j\Omega/j\Omega_c\right)^{2N}}$$

MED DETTE UDTRYK SOM UDGANGSPUNKT KAN DER OPSTILLES FØLGENDE TO LIGNINGER;

$$\delta_1^2 \leq \frac{1}{1+\left(\Omega_1/\Omega_c\right)^{2N_1}} \wedge \delta_2^2 \geq \frac{1}{1+\left(\Omega_2/\Omega_c\right)^{2N_2}}$$

$$\Downarrow$$

$$N_1 \geq \frac{\log\left(1/\delta_1^2 - 1\right)}{2\cdot\log\left(\Omega_1/\Omega_c\right)} \wedge N_2 \geq \frac{\log\left(1/\delta_2^2 - 1\right)}{2\cdot\log\left(\Omega_2/\Omega_c\right)}$$

NU SKAL VI BENYTTE DEN BILINEÆRE TRANSFORMATION OG DERFOR SKAL <u>ALLE</u> KRITISKE FREKVENSER PREWARPES

$$\Omega_{ny} = \frac{2}{T_d}\cdot\tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

FOR $\omega = \{\omega_1, \omega_c, \omega_2\}$

PK

$$\Omega_{1_{ny}} = \frac{2}{T_d} \cdot \tan\left(\frac{\omega_1}{2}\right) = 4853{,}6 \text{ rad } (\sim 772{,}5 Hz)$$

$$\Omega_{c_{ny}} = \frac{2}{T_d} \cdot \tan\left(\frac{\omega_c}{2}\right) = 6627{,}4 \text{ rad } (\sim 1054{,}8 Hz)$$

$$\Omega_{2_{ny}} = \frac{2}{T_d} \cdot \tan\left(\frac{\omega_2}{2}\right) = 10690{,}9 \text{ rad } (\sim 1701{,}5 Hz)$$

INDSÆTTES ~~SAMH~~ TILHØRENDE VÆRDIER AF δ OG Ω FÅS;

$$N_1 \geq 2.17 \quad \text{OG} \quad N_2 \geq 2.30$$

$\Downarrow$

$$N = 3$$

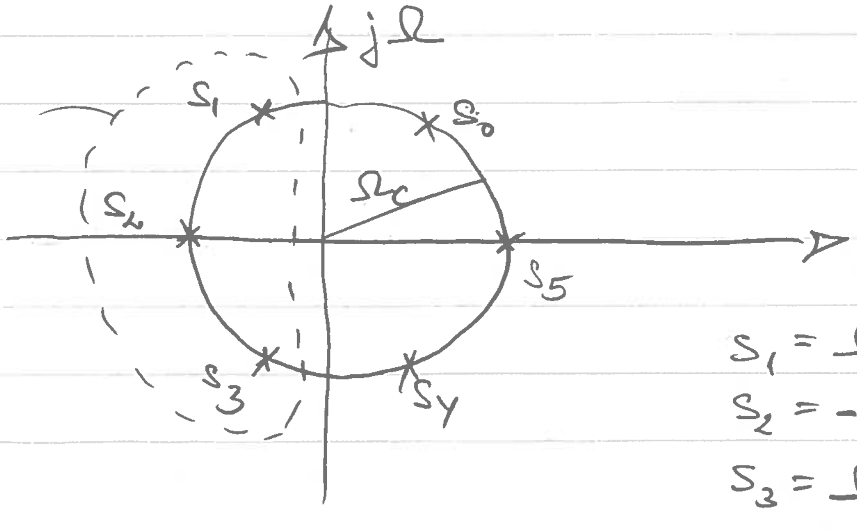
ALTSÅ ET 3. ORDENS BUTTERWORTH FILTER

POL·PLACERING : $s_k = \Omega_c \cdot e^{(j\pi/2N)(2k+N-1)}$ $\begin{cases} N=3 \\ k=0,1,\dots 5 \end{cases}$

$\Downarrow$

$s_0 = \Omega_c \cdot e^{j\pi/3}$, $s_1 = \Omega_c \cdot e^{j2\pi/3}$, $s_2 = \Omega_c \cdot e^{j\pi}$

$s_3 = \Omega_c \cdot e^{j4\pi/3}$, $s_4 = \Omega_c \cdot e^{j5\pi/3}$, $s_5 = \Omega_c \cdot e^{j2\pi}$



DISSE TRE POLER BENYTTES I H(S)

$s_1 = \Omega_c(-\frac{1}{2} + j\frac{1}{2}\sqrt{3})$

$s_2 = -\Omega_c$

$s_3 = \Omega_c(-\frac{1}{2} - j\frac{1}{2}\sqrt{3})$

PK

ERGO, ER H(s);

$$H(s) = \frac{G}{(s-s_1)(s-s_2)(s-s_3)}$$

HVOR (s_1, s_3) ER ET KOMPLEK KONJUGERET POL-PAR;

$$H(s) = \frac{G}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}$$

HVAD ER VÆRDIEN AF G? — 0dB DC-GAIN

$$|H(s)| = 1\Big|_{s=0} \Rightarrow G = \Omega_c^3$$

$$\boxed{H(s) = \frac{\Omega_c^3}{(s+\Omega_c)(s^2+\Omega_c s+\Omega_c^2)}}$$

DET ER DENNE OVERFØRINGSFUNKTION, SOM VI NU VIA DEN BILINEÆRE TRANSFORMATION SKAL TRANSFORMERE TIL EN DIGITAL ÆKVIVALENT, H(z)

BILINEÆR TRANSFORMATION

$$\boxed{s = \frac{2}{T_d} \cdot \frac{z-1}{z+1}} \qquad \boxed{\Omega_c = \frac{2}{T_d} \cdot \tan\left(\omega_c/2\right)}$$

KRAV TIL 3dB FREKVENS

PK

SAMMENHOLDES UDTRYKKENE FOR $H(s)$, s OG Ω_c SES, AT $\frac{2}{T_d}$ KAN FORKORTES UD.

DVS; $s = \frac{z-1}{z+1}$ OG $\Omega_c = \tan\left(\omega_c/2\right)$ INDSÆTTES.

$\Downarrow$

$$H(z) = \frac{\Omega_c^3}{\left(\frac{z-1}{z+1} + \Omega_c\right)\left(\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \left(\frac{z-1}{z+1}\right)\Omega_c + \Omega_c^2\right)}$$

$\Downarrow$ MANGE MELLEM-REGNINGER

$$H(z) = \frac{\Omega_c^3 + 3\Omega_c^3 z^{-1} + 3\Omega_c^3 z^{-2} + \Omega_c^3 z^{-3}}{(1+2\Omega_c+2\Omega_c^2+\Omega_c^3)+(-3-2\Omega_c+2\Omega_c^2+3\Omega_c^3)z^{-1}+(3-2\Omega_c-2\Omega_c^2+3\Omega_c^3)z^{-2}+(-1+2\Omega_c-2\Omega_c^2+\Omega_c^3)z^{-3}}$$

FØRST NU INDSÆTTES $\Omega_c = \tan\left(\frac{\pi/4}{2}\right) = 0.414$!!!

SAMTIDIG NORMALISERES SAMTLIGE KOEFFICIENTER SÅ $a_0 = 1$

— STANDARD-FORM FOR $H(z)$

$$H(z) = \frac{1}{2.24261} \cdot \frac{0.0711 + 0.2132z^{-1} + 0.2132z^{-3} + 0.0711z^{-3}}{1 - 1.4590z^{-1} + 0.9104z^{-2} - 0.1978z^{-3}}$$

$$= 0.03169 \cdot \frac{1 + 3z^{-1} + 3z^{-2} + z^{-3}}{1 - 1.4590z^{-1} + 0.9104z^{-2} - 0.1978z^{-3}}$$