Práctica 3: Resolución de ecuaciones no lineales

Métodos Numéricos 2021

Brian Luporini

23 de Septiembre de 2021

Ejercicio 8

Se quiere calcular la solución de la ecuación $e^x = 3x$, usando iteración simple con diferentes funciones de iteración:

i) $g_1(x) = \dfrac{e^x}{3}$

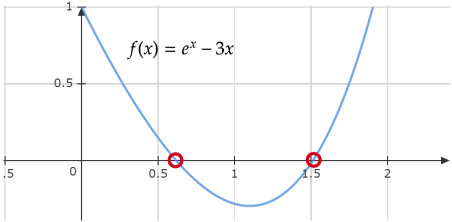
ii) $g_2(x) = \dfrac{e^x - x}{2}$

iii) $g_3(x) = \log(3x)$

iv) $g_4(x) = e^x - 2x$

Cuáles son útiles?

Primero, vamos a analizar las soluciones de $e^x = 3x$ gráficamente.



Denotamos con α_1 y α_2 a las soluciones de $e^x = 3x$ de modo que $\alpha_1 < \alpha_2$.

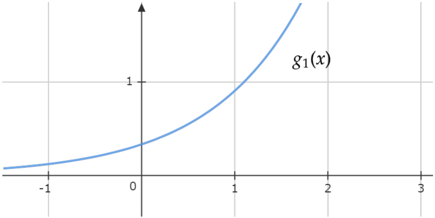
i) Consideremos $g_1(x) = \dfrac{e^x}{3}$. Se tiene

$$e^x = 3x \Leftrightarrow \frac{e^x}{3} = x \Leftrightarrow g_1(x) = x.$$

Por lo tanto, resolver $e^x = 3x$ es equivalente a encontrar un punto fijo de de $g_1(x)$.

Para analizar si la función $g_1(x) = e^x/3$ es útil para resolver la ecuación $e^x = x$, podemos ver si la sucesión de punto fijo converge a alguna solución. Para esto podemos utilizar el Teorema 2 (Condición suficiente de convergencia). Por lo tanto, para aproximar esta solución tenemos que buscar un intervalo $[a, b]$ tal que $g_1([a, b]) \subset [a, b]$ y se verifique la condición del supremo de la derivada.

La gráfica de $g_1(x)$ es



Se puede ver que el intervalo $[0,1]$ verifica que $g_1([0,1]) \subset [0,1]$. Vamos a probarlo. Sea $x \in [0,1]$, como $g_1(x)$ es una función creciente,

$$g_1(0) \leq g_1(x) \leq g_1(1) \Rightarrow 1/3 \leq g_1(x) \leq e/3 \Rightarrow 0 \leq g_1(x) \leq 1.$$

Luego, $g_1(x) \in [0,1]$. De donde tenemos que $g_1([0,1]) \subset [0,1]$.

Derivamos g_1,

$$g_1'(x) = \frac{e^x}{3}.$$

Luego,

$$\sup_{x\in[0,1]} \left|g_1'(x)\right| = \sup_{x\in[0,1]} e^x/3 = e/3 < 1.$$

Entonces, $g_1(x)$ verifica las hipótesis del Teorema 2 en el intervalo $[0,1]$ y la sucesión

$$x_{n+1} = g_1(x_n)$$

converge a α_1. Esto nos dice que la función $g_1(x)$ es útil para obtener una solución de $e^x = 3x$.

Podemos calcular algunos valores de la sucesión utilizando Scilab tomando $x_0 = 1/2$:

n	x_n
1	0.5495738
2	0.5775048
3	0.5938625
10	0.6182105
20	0.6190543

En el último caso,

$$g_1(0{,}6190543) - 0{,}6190543 = 0{,}0000027$$

en Scilab.

Ejercicio 11

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in \mathcal{C}^2$, una función definida en el dominio bidimensional. Las siguientes condiciones son suficientes para un mínimo local estricto de f:

(i) $\dfrac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dfrac{\partial f}{\partial x_2}\right] = 0$ (gradiente nulo)

(ii) matriz hessiana $\dfrac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$ definida positiva.

Se desea hallar los valores de x_1 y x_2 que minimizan la función

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2^2 + e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

a) Partiendo del punto inicial $x^{(0)} = [1, 1]^T$, hallar mediante el método de Newton un punto que satisfaga la condición (i). Utilizar como criterio de finalización $\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|_2 \leq 10^{-12}$.

b) Corroborar que el punto hallado en el item a) es un mínimo (local) de f verificando el cumplimiento de la condición (ii).

Calculemos el gradiente de f. Sus derivadas parciales son

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 + 4x_1 e^{2x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 6x_2 + 2x_2 e^{2x_1^2 + x_2^2}.$$

Luego,

$$\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}} = \left[2 + 4x_1 e^{2x_1^2 + x_2^2},\ 6x_2 + 2x_2 e^{2x_1^2 + x_2^2} \right].$$

Su matriz hessiana es

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}^2} = \begin{bmatrix} 16x_1^2 e^{2x_1^2 + x_2^2} + 4e^{2x_1^2 + x_2^2} & 8x_1 x_2 e^{2x_1^2 + x_2^2} \\ 8x_1 x_2 e^{2x_1^2 + x_2^2} & 4x_2^2 e^{2x_1^1 + x_2^2} + 2e^{2x_1^2 + x_2^2} + 6 \end{bmatrix}.$$

Para ejercicio 11 de la práctica 3

Clase Brian
23/09/21

- $\|(x,y)\|_2 = \sqrt{x^2+y^2} \leftarrow |(x,y)|$
- Def: Una matriz A simétrica $(A^t = A)$ es definida positiva si sus autovalores son todos positivos. (>0).