Práctica 4: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos directos. Factorización de matrices

Métodos Numéricos 2021

Brian Luporini

30 de Septiembre de 2021

Ejercicio 3

Suponga que queremos resolver los siguientes tres sistemas de ecuaciones:

$$\text{S1}\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 14 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 5 \end{array} \right.$$

$$\text{S2}\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = 9 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = -5 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 19 \end{array} \right.$$

$$\text{S3}\quad \left\{ \begin{array}{rcrcrl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = -2 \\ 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = 2 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & = 12 \end{array} \right.$$

Ejercicio 3 (cont)

Podemos escribir los tres sistemas de ecuaciones como una única ecuación matricial:

$\mathtt{AX} = \mathtt{B}$, donde

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix}, \quad \mathtt{B} = \begin{pmatrix} 14 & 9 & -2 \\ 2 & -5 & 2 \\ 5 & 19 & 12 \end{pmatrix}.$$

(a) Modificar el método de eliminación Gaussiana a fin de resolver múltiples sistemas de ecuaciones lineales. La matriz aumentada para este caso es $\mathtt{A}_{aum} = [\mathtt{A}\ \mathtt{B}]$, donde $\mathtt{A}$ es una matriz de $n \times n$, y $\mathtt{B}$ es una matriz de $n \times m$. La solución es una matriz de $n \times m$.

(b) Utilizar el método programado en el item anterior para resolver los tres sistemas lineales dados.

(c) Utilizar el método programado en el item (a) para calcular la inversa de la matriz A por eliminación Gaussiana.

La idea de este método es la siguiente: dados los sistemas $Ax_i = b_i$ con $i = 1, 2, ..., n$, se define $b = [b_1, ..., b_n]$ matriz de columnas b_i, y $X = [x_1, ..., x_n]$. Luego,

$$
\begin{array}{c|l}
AX & \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \\
\hline
A & \begin{bmatrix} Ax_1 & \cdots & Ax_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{bmatrix} = B
\end{array}
$$

Por lo tanto, resolver $S1$, $S2$ y $S3$ es equivalente a resolver $AX = B$.

Ejercicio 9

Considerar el sistema $\mathtt{A}\mathtt{x} = \mathtt{b}$ donde

$$\mathtt{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 \\ 5 & 25 & -15 & -3 \\ 6 & -12 & -6 & 22 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Resuelva el sistema mediante el método de eliminación de Gauss. En caso de realizar intercambios de ecuaciones, calcule la matriz de permutación $\mathtt{P}$ correspondiente.

(b) A partir de la información obtenida en la eliminación de Gauss, obtenga la factorización $\mathtt{PA} = \mathtt{LU}$, y utilize dicha factorización para resolver el sistema $\mathtt{Ax} = \tilde{\mathtt{b}}$, donde $\tilde{\mathtt{b}} = [\ 2\ 2\ 1\ 0\ ]^T$.

(a). Consideremos la matriz ampliada

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 & | & 2 \\ 5 & 25 & -15 & -3 & | & 0 \\ 6 & -12 & -6 & 22 & | & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el método de Gauss

$$[A|b] = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 4 & 5 & -7 & 6 & | & 2 \\ 5 & 25 & -15 & -3 & | & 0 \\ 6 & -12 & -6 & 22 & | & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 15 & -5 & -8 & | & -5 \\ 0 & -24 & 6 & 16 & | & -5 \end{pmatrix}$$

con $m_{21} = 4$, $m_{31} = 5$ y $m_{41} = 6$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & -15 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 11 \end{pmatrix}.$$

En este caso, $m_{32} = -5$ y $m_{42} = 8$.

Tenemos que el elemento $a_{33} = 0$. Intercambiamos las filas 3 y 4 y consideramos el sistema $PAx = Pb$ con

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

matriz de permutación.

Volviendo a aplicar el método de Gauss a este nuevo sistema se tiene

$$[PA, Pb] \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 & | & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & | & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & | & -15 \end{pmatrix}.$$

con $m_{21} = 4$, $m_{31} = 6$, $m_{41} = 5$, $m_{32} = 8$ y $m_{42} = -5$. Como esta matriz es triangular superior, se tiene que

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 8 & 1 & 0 \\ 5 & -5 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para resolver $Ax = b$, podemos resolver

$$Ux = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix}.$$

Que tiene solución:

$$x = \begin{pmatrix} 59/6 \\ -37/6 \\ -11/2 \\ -15/2 \end{pmatrix}.$$

(b). Consideremos el sistema Ax $=\tilde{\mathrm{b}}$, donde $\tilde{\mathrm{b}}$ = [2 2 1 0 $]^T$. Luego,

$$PAx = P\tilde{b} \Rightarrow LUx = P\tilde{b}.$$

Sea $y = Ux$, entonces

$$Ly = P\tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

es un sistema de ecuaciones en la variable y. Resolviendo por sustitución progresiva:

$$y = \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 36 \\ -39 \end{pmatrix}.$$

Usando el valor de y en el sistema $Ux = y$ en la variable x, se tiene:

$$x = \begin{pmatrix} 39/2 \\ -17 \\ -18 \\ -39/2 \end{pmatrix}.$$