Nielsen Maximiliano
Hoja 2 de 2

5) a) Observemos que:

$$\forall n \in, \; 2n^3 - 1 > n^3 \Rightarrow \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1} < \frac{n+\sqrt{n}}{n^3} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^{5/2}} \quad (2)$$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \quad (1)$$

Veamos primero si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Sea $F(x) = \frac{1}{x^2}$, F es positiva para todo x.

$F'(x) = -2x^{-3} < 0$ si $x > 0 \Rightarrow F$ es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$.

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[\frac{-1}{x}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1$$

Entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

Veamos ahora si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}}$ converge.

Sea $F(x) = \frac{1}{x^{5/2}}$, F es positiva para todo x.

$F'(x) = -\frac{5}{2x^{7/2}} < 0$ si $x > 0 \Rightarrow F$ es estrictamente decreciente en $[1, +\infty)$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^{5/2}}\,dx = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{2}{3x^{3/2}}\right]_1^b = \lim_{b\to\infty} \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{3b^{3/2}}\right) = \frac{2}{3}$$

Entonces $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{5/2}}\,dx$ converge y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^{5/2}}$ converge

Como ambas series son convergentes y por (1) $\xRightarrow{\text{criterio linealidad}}$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{n^3}$ es convergente

Ahora como esta serie converge y (2), por criterio de comparacion la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+\sqrt{n}}{2n^3-1}$ converge.

b) observemos que: $\frac{3n^2+2n}{2^n} = \frac{3n^2}{2^n} + 2^{1-n}\cdot n$

Luego

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2^n} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}\cdot n \quad (3)$$

Veamos si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2^n}$ converge:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2}{2^n} = 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n};$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

Ahora como $\frac{n^2}{2^n} > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, por el criterio del cociente, la serie $3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$ converge.

Veamos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}\cdot n$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2^{1-(n+1)}\cdot(n+1)}{2^{1-n}\cdot n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$$

Ahora como $2^{1-n}\cdot n > 0 \;\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$, por el criterio del cociente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{1-n}\cdot n$ converge.

Como ambas series convergen y por (3), por el criterio de linealidad, ~~ambas convergen~~ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+2n}{2^n}$ converge.