Ecuaciones de Maxwell

Teorema de la Divergencia $\longrightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{a} = \int (\bar{\nabla} \cdot \bar{E})\, d\bar{v}$

Teorema del Rotor $\longrightarrow \oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = \int (\bar{\nabla} \times \bar{E})\, d\bar{a}$

$d\bar{l} \longrightarrow$ Diferencial de linea $\quad \lambda \longrightarrow$ Densidad Lineal

$d\bar{a} \longrightarrow$ Diferencial de area $\quad \sigma \longrightarrow$ Densidad Superficial

$d\bar{v} \longrightarrow$ Diferencial de volumen $\quad \rho \longrightarrow$ Densidad Volumétrica

① $\Phi_E = \oint \bar{E} \cdot d\bar{a} = \dfrac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}$

$$\int (\bar{\nabla} \cdot \bar{E})\, dv = \int \frac{Q_{enc}}{\varepsilon_0}\, dv$$

$$\boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}} \quad \mathrm{I}$$

② $\Phi_B = \oint \bar{B} \cdot d\bar{a} = 0$

$$\int (\bar{\nabla} \cdot \bar{B})\, dv = 0$$

$$\boxed{\bar{\nabla} \cdot \bar{B} = 0} \quad \mathrm{II}$$

③ $FEM = \oint \bar{E}\, d\bar{l} = -\dfrac{d\Phi_B}{dt}$

$$\int (\bar{\nabla} \times \bar{E})\, d\bar{a} = -\frac{d}{dt} \int \bar{B} \cdot d\bar{a}$$

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{E} = -\frac{dB}{dt}} \quad \mathrm{III}$$

Escaneado con CamScanner

④ $\Phi_B = \int \bar{B}\, dl = I_\mu$ $\quad \cdot \mu = \mu_0 \quad \cdot I = \int \bar{j}\, d\bar{a}$

$$\int B\, dl = \mu_0 \int \bar{j}\, d\bar{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} \quad \left(\text{corrección Maxwell}\right)$$

$$\int (\nabla \times \bar{B})\, d\bar{a} = \int \mu_0 \bar{j}\, d\bar{a} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{d}{dt} \int \bar{E}\, d\bar{a}$$

$$\int (\bar{\nabla} \times \bar{B})\, d\bar{a} = \int \left(\mu_0 \bar{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}\right) d\bar{a}$$

$$\boxed{\bar{\nabla} \times \bar{B} = \mu_0 \bar{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}} \quad \text{IV}$$

Llegamos a la conclusión de que no se puede tener una perturbación electrica sin una magnetica y viceversa, toda onda magnetica tiene una porción electrica y magnetica.

¿En que medio se propaga la luz?

En la epoca de Maxwell se creía que se movía por el "eter", ya que, al igual que las ondas electromagneticas, se propagaba de **forma** transversal, lo que no sabían es que la luz visible forma parte del espectro electro-magnetico.

¿Son $\bar{E}$ y $\bar{B}$ una onda?

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \longrightarrow \nabla \times \nabla \cdot E = 0$$

$$\nabla \cdot B = 0 \longrightarrow \nabla \times \nabla \cdot B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{dB}{dt} \longrightarrow \nabla \times \nabla \times E = \nabla \times \left(-\frac{d\bar{B}}{dt}\right)$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt} \longrightarrow \nabla \times \nabla \times B = \nabla \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{d\bar{E}}{dt}\right)$$

Escaneado con CamScanner

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Usaremos el Laplaciano}\\ \nabla\times\nabla\times E = \nabla\cdot\nabla\cdot E - \nabla\times\nabla\times E\\ \nabla^2 E = -\nabla\times\nabla\times E\end{array}}$$

- $-\nabla^2 E = -\frac{d}{dt}(\nabla\times\bar{B})$

  $-\nabla^2 E = -\frac{d}{dt}\left(\mu_0\varepsilon_0\frac{dE}{dt}\right)$

  $\nabla^2 E = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2E}{d^2t}$

- $-\nabla^2 B = \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}(\nabla\times E)$

  $-\nabla^2 B = -\mu_0\varepsilon_0\frac{d^2B}{d^2t}$

  $\nabla^2 B = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2B}{d^2t}$

Esta es la ecuación de onda, la cual usaremos como condición para verificar si una función es una onda o no.

$$\nabla^2 E_x\hat{i} + \nabla^2 E_y\hat{j} + \nabla^2 E_z\hat{k} = \mu_0\varepsilon_0\frac{d^2}{d^2t}(E_x\hat{i} + E_y\hat{j} + E_z\hat{k})$$

Plantearé una onda plana que se mueve en x y veremos si verifica la condición.

$$\left.\begin{array}{l} E_x = 0 \quad E_y = f(x,y) \quad E_z = 0\\ \frac{\partial^2 E}{\partial^2 y} = 0 \quad \frac{\partial^2 E}{\partial^2 z} = 0\end{array}\right\} \boxed{\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x}\hat{j} = \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t}\hat{j}}$$

Condición

Nuestra Función de Onda es $\underline{E_y = A\cos(kx - wt)}$

- $\frac{\partial E_y}{\partial x} = -Ak\,\text{sen}(kx - wt) \longmapsto \frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 x} = -Ak^2\cos(kx - wt)$
- $\frac{\partial E_y}{\partial t} = +Aw\,\text{sen}(kx - wt) \longmapsto \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 E_y}{\partial^2 t} = -A\frac{w^2}{v^2}\cos(kx - wt)$

Queda demostrar $k^2 = \frac{w^2}{v^2}$

$$k^2 = \frac{k^2 v^2}{v^2}$$

$$k^2 = k^2$$

$$\boxed{k = k}$$

Escaneado con CamScanner

Relación campo Electrico y Magnetico

- $\nabla \times B_y \hat{j} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \hat{j}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial B_z}{\partial y}\hat{i}}_{0} + \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial x}\hat{k}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial z}\hat{j}}_{0} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{j} - \underbrace{\frac{\partial B_y}{\partial z}\hat{i}}_{0} - \underbrace{\frac{\partial B_x}{\partial y}\hat{k}}_{0}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x}\hat{j} = \mu_0 \varepsilon_0 A w \operatorname{sen}(kx - wt)\hat{j}$$

$$-B_z \int \frac{\partial}{\partial x} dx = \mu_0 \varepsilon_0 A w \int \operatorname{sen}(kx - wt)\, dx \qquad \begin{aligned} u &= kx - wt \\ du &= k\, dx \end{aligned}$$

$$-B_z = -\mu_0 \varepsilon_0 A \frac{w}{k} \cos(kx - wt)$$

$$\boxed{B_z = \mu_0 \varepsilon_0 A \frac{w}{k} \cos(kx - wt)} \qquad \frac{w}{k} = \frac{kv}{k} = v$$

- $\nabla \times E_y \hat{j} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{k}$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial y}\hat{i}}_{=0} + \boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{k}} + \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial z}\hat{j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_z}{\partial x}\hat{j}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_y}{\partial z}\hat{i}}_{=0} - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}\hat{k}}_{=0}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial t}\hat{k} = \frac{\partial E_y}{\partial x}\hat{k}$$

$$-B_z \int \frac{\partial}{\partial t} dt = -Ak \int \operatorname{sen}(kx - wt)\, dt \qquad \begin{aligned} u &= kx - wt \\ du &= -w\, dt \end{aligned}$$

$$\boxed{B_z = A \frac{k}{w} \cos(kt - wt)} \qquad \frac{k}{w} = \frac{k}{kv} = \frac{1}{v}$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 A v \cos(kx - wt) = A \frac{1}{v} \cos(kt - wt)$$

$$\mu_0 \varepsilon_0 v = \frac{1}{v}$$

$$\boxed{v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}} = c$$

Escaneado con CamScanner

Ambos campos, electrico y magnetico se mueven a la velocidad de la luz, con una energia entre ellos $B = \frac{E}{c}$, lo que nos dice que $\bar{E}$ lleva mucha más energia que $\bar{B}$ aunque el ultimo tiene más alcance.

Vector de Poyting

- $W_e = \frac{1}{2}\int \varepsilon_0 E E \, dv$
- $W_B = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\mu_0} B B \, dv$

$$W = W_e + W_B$$

$$W = \frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 E E + \frac{1}{\mu_0} B B\right) dv$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 \frac{d}{dt} E E + \frac{1}{\mu_0}\frac{d}{dt} B B\right) dv$$ Derivada multiplicación

$$\int P \, da = -\frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 [E'E + EE'] + \frac{1}{\mu_0}[B'B + BB']\right) dv$$

$$\int P \, da = -\frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 2E'E + \frac{1}{\mu_0} 2B'B\right) dv$$

$$\int P \, da = -\int \left(\varepsilon_0 \frac{dE}{dt} E + \frac{1}{\mu_0}\frac{dB}{dt} B\right) dv$$

$$\int P \, da = -\int \left(\varepsilon_0 \frac{\nabla \times B}{\varepsilon_0 \mu_0} E - \frac{1}{\mu_0}(\nabla \times E) B\right) dv$$

$$\int P \, da = -\frac{1}{\mu_0}\int \left(\nabla \times B \cdot E - \nabla \times E \cdot B\right) dv$$ Derivada multiplicación

$$\int P \, da = +\frac{1}{\mu_0}\int \nabla \cdot (E \times B) \, dv$$

$$\int P \, da = +\frac{1}{\mu_0}\int E \times B \, da$$

$$P = E \times \frac{B}{\mu_0}$$

$$P = E \times H$$

Gracias a los desarrollos de Maxwell se empezó a creer en la existencia del eter, una sustancia que cubre todo el espacio y por la cual se propaga la luz. El experimento Michelson Morley quiso comprobar su existencia, pero probó lo contrario y los

Escaneado con CamScanner

pie a Einstein para la relatividad Especial.

La ausencia del eter implica que no existe un sistema universal de referencia ya que la luz (y todo el espectro electromagnetico) son el medio por el cual se puede propagar información en el vacío. También las leyes de la optica de Newton y Galileo tenían incongruencias con la relatividad del movimiento, todo esto dio pie a Einstein para realizar su teoría.

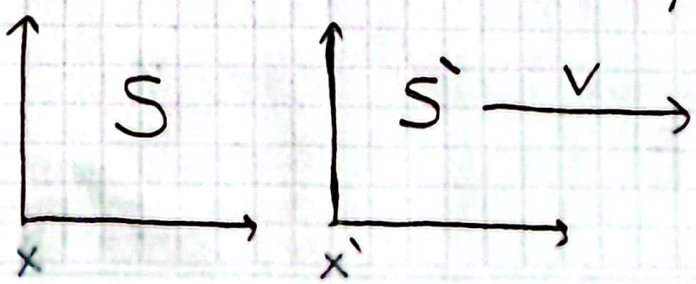
Relatividad Especial, Postulados de Einstein

① Las leyes de la Física son las mismas para todos los marcos de Referencia, no existe un marco de referencia preferencial.

② La rapidez de la luz en el vacío tiene una cantidad fija y es la misma en todos los marcos de referencia. Nada con masa puede ir o superar la velocidad de la luz ya que se necesitaría energía infinita.

Factor de Corrección de Lorentz

Planteamos dos marcos de referencia, uno que consideramos en reposo y otro que se mueve "v" en dirección de las x, coinciden solo en $t=t'=0$



De esta experiencia nos interesa el movimiento relativo, es decir el movimiento descrito desde otro marco de referencia. Al no cumplirse uno de los postulados de Einstein al analizar el movimiento de un rayo de luz por medio de la mecanica clásica, ya que sería $V_T = c + v$, añadimos un factor de corrección γ.

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + vt') \\ x' = \gamma(x - vt) \end{cases}$$

Realizamos un pulso de luz que comienza en S, descrito por $x = ct$

$$\begin{cases} ct = \gamma(ct' + vt') = \gamma(c+v)t' \\ \underline{ct'} = \gamma(ct - vt) = \underline{\gamma(c-v)t} \end{cases}$$

Multiplicamos

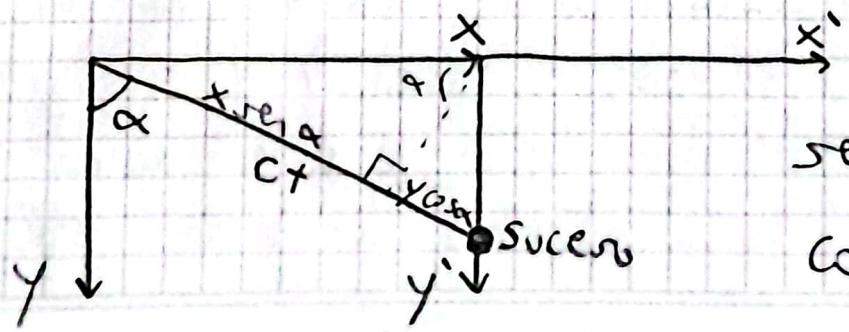
$$c^2 t t' = \gamma^2 (c+v)(c-v)\, t' t$$

$$c^2 = \gamma^2 (c^2 - v^2)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}}$$

Transformaciones de Lorentz

Nos indican como relacionar las coordenadas del espacio tiempo de un suceso en un marco de referencia respecto a otro.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{v}{c}$$

$$\cos\alpha = \gamma$$

Tenemos $ct = x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha$

$$y = \frac{ct - x \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \qquad y = ct'$$

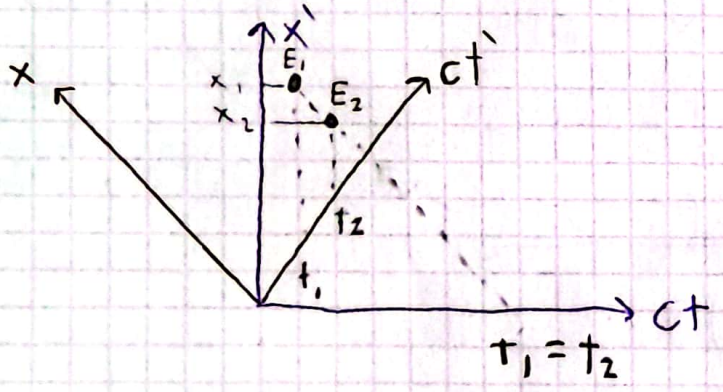
$$\boxed{ct' = \frac{ct - x \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}}$$

Transformaciones $\longmapsto t' = \dfrac{t - \frac{x}{c}\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$; $x' = \dfrac{x - ct \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

Inversas $\longmapsto t = \dfrac{t' + \frac{x}{c}\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$; $x = \dfrac{x' + ct' \operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

¿Cuando dos eventos son simultaneos?

Dos eventos serán simultaneos para cualquier marco de referencia si ocurren en un mismo espacio y entre ellos no exista un intervalo finito de tiempo.



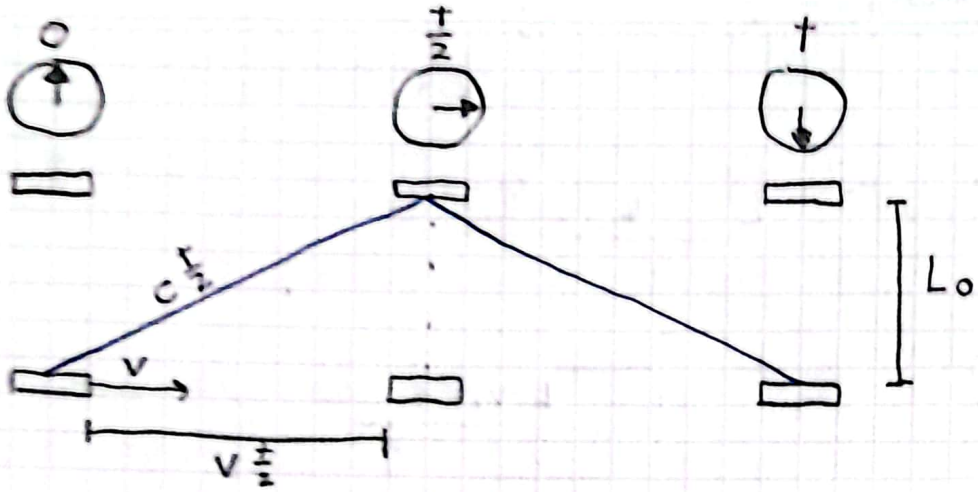
E_1 y E_2 son simultaneos en S, pero no en S', para ser simultaneos en todos los marcos de referencia tendrían que ocurrir en el mismo x

Dilatación del Tiempo

El tiempo pasa más lento según la velocidad a la que se vaya, el efecto se aprecia desde otro marco de referencia.

Hacemos una configuración de dos espejos enfrentados que viajan a una velocidad v y que reflejan un pulso de luz, viajan perpendicular a la tierra y se considera a la misma como en reposo.

Escaneado con CamScanner



Por Pitagoras $\left(c\frac{t}{2}\right)^2 = L_0^2 + \left(v\frac{t}{2}\right)^2$

$$L_0^2 = c^2\frac{t^2}{4} - v^2\frac{t^2}{4}$$

$$L_0^2 = (c^2 - v^2)\frac{t^2}{4}$$

$$t^2 = \frac{(2L_0)^2}{(c^2 - v^2)}$$

$$t^2 = \frac{(2L_0)^2}{c^2}\frac{1}{(1 - v^2/c^2)}$$

Donde $t_0 = \frac{2L_0}{c}$ es un "tic"

$$t = \frac{2L_0}{c}\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

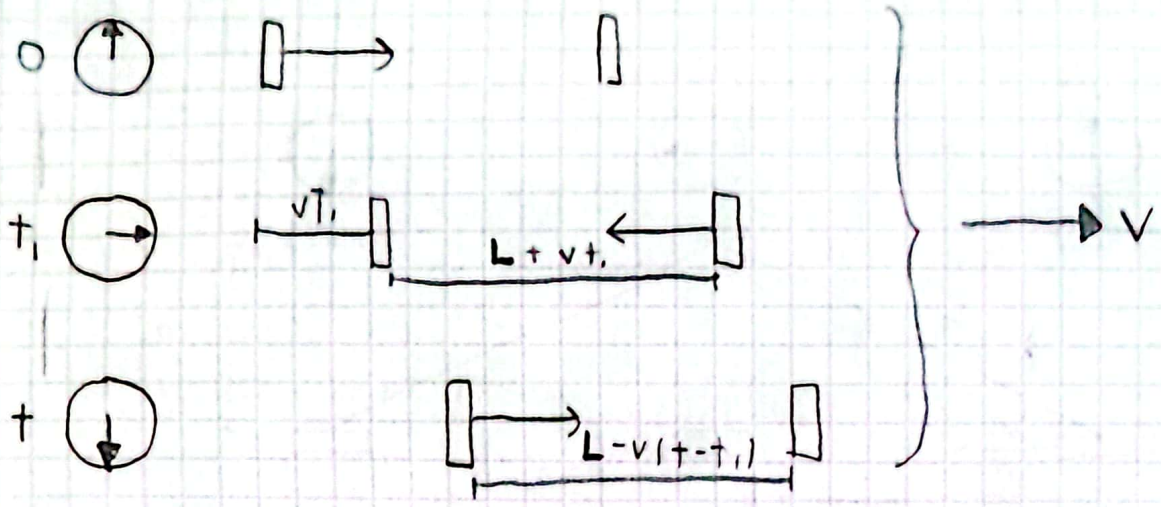
$$\boxed{t = t_0\,\gamma}$$

Contracción de la longitud

Es otro de los efectos de la relatividad en donde la longitud de un cuerpo en movimiento tiende a contraerse con respecto a un observador en reposo, según la velocidad que tenga.

Tenemos dos espejos en una nave, que reflejan un pulso de luz paralelo al movimiento. La nave recorre en total $v(t-t_1)$ y el pulso $c(t-t_1)$

Escaneado con CamScanner



En t_1 el pulso se movio $ct_1 = L + vt_1$

$$L = (c - v)t_1$$

$$t_1 = \frac{L}{c - v}$$

En t el pulso se movio $c(t - t_1) = L - v(t - t_1)$

$$L = (c + v)(t - t_1)$$

$$\frac{L}{c + v} = t - t_1$$

$$\frac{L}{c + v} + t_1 = t$$

Reemplazamos $t = \frac{L}{c + v} + \frac{L}{c - v} = \frac{L(c + v) + L(c - v)}{(c + v)(c - v)}$

$$t = \frac{Lc + Lv + Lc - Lv}{c^2 - cv + cv - v^2} = \frac{2Lc}{c^2 - v^2}$$

$$t = \frac{2Lc}{c^2} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)} = \frac{2L}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}$$

$$\frac{2L_0}{c} \frac{1}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}} = \frac{2L}{c} \frac{1}{(1 - v^2/c^2)}$$

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{2}$$

$$L = L_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}}$$

Escaneado con CamScanner

Suma de Velocidades

Es una demostración de que la velocidad de la luz es fija y nada puede superarla.

Consideramos un cuerpo en movimiento para S y S', un observador de S lo observa:

Observador en S $\longrightarrow V_x = \frac{dx}{dt}$ $\quad V_y = \frac{dy}{dt}$ $\quad V_z = \frac{dz}{dt}$

Observador en S' $\longrightarrow V_{x'} = \frac{dx'}{dt'}$ $\quad V_{y'} = \frac{dy'}{dt'}$ $\quad V_{z'} = \frac{dz'}{dt'}$

- $x' = \gamma(x' + vt') \longrightarrow$ Diferenciamos $\longrightarrow dx = \gamma(dx' + v\,dt')$
- $t = \gamma\left(t' + v\frac{x'}{c^2}\right) \longrightarrow$ Diferenciamos $\longrightarrow dt = \gamma\left(dt' + v\frac{dx'}{c^2}\right)$

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\gamma\left(\frac{dx'}{dt'} + v\right)}{\gamma\left(1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}\right)} = \frac{V_{x'} + V}{1 + V_{x'}\frac{v}{c^2}}$$

Se emite un rayo de luz $\therefore V_{x'} = c$

$$V_x = \frac{c + V}{1 + \frac{v}{c}} = \frac{c(c+v)}{c\left(1 + \frac{v}{c}\right)} = \frac{c(c+v)}{(c+v)} = \boxed{c}$$

Entonces comprobamos que por más de que sean distintas las marcas de referencia, siempre vamos a medir la misma velocidad a la luz en el vacío.

Escaneado con CamScanner

Relatividad masa y momento

Planteamos un choque elástico entre dos partículas A y B en el cual se conserva la energía cinética, vistas desde marcos de referencia S y S'

Sus velocidades son $V_B = \frac{d}{T}$; $V_A = \frac{d}{T_0}$

Planteamos dilatación del tiempo $T = T_0 \gamma$

$$\frac{d}{V_B} = T_0 \gamma$$

$$V_B = \frac{d}{T_0 \gamma}$$

Planteamos conservación del momento.

$$m_A V_A = m_b V_B$$

$$m_A \frac{d}{T_0} = m_b \cdot \frac{d\,(1-v^2/c^2)^{1/2}}{T_0}$$

$$m_A = m_b \cdot (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

$$m_0 = m \cdot (1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

$$\boxed{m = \frac{m_0}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}}$$ masa relativista

$$\boxed{m V = \frac{m_0 V}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}}$$ momento relativista

Relación masa y Energía

$$K = \int_0^{l} F \, dl \qquad \text{siendo } F = \frac{d(mv)}{dt}$$

$$K = \int_0^{l} d(mv)\frac{dl}{dt} = \int_0^{mv} d(mv)\, V = \int_0^{v} v \, d\left(\frac{m_0 v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right)$$

Escaneado con CamScanner

Integramos por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

$u = v$

$du = dv$

$$dv = \frac{m_0 v}{(1-v^2/c^2)^{3/2}} \longrightarrow v = \frac{m_0 v}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}$$

$$\int_0^v v\,d\left(\frac{mv}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}\right) = \left[\underbrace{\frac{m_0 v^2}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}}_{m}\right]_0^c - \int_0^c \frac{m_0 v}{\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}}\,dv$$

$$K = mc^2 - m_0 c^2 \left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2}\Big|_0^c$$

$$K = mc^2 - m_0 c^2$$

$$\boxed{E = K + m_0 c^2}$$

Escaneado con CamScanner