Radiación del cuerpo negro

El primer paso para el estudio de la naturaleza cuantica fue el analisis de la radiación emitida por cuerpos opacos. Cuando radiación llega a un cuerpo negro, parte es reflectada y lo demás absorvido. La parte absorvida aumenta la energía cinetica(K) de los atomos constituyentes lo cual determina la temperatura del cuerpo, causando que la energía absorvida causa un aumento de la temperatura. Entonces, veremos una ecuación que relaciona la potencia irradiada por un cuerpo negro ideal y su temperatura:

$$R = \sigma \cdot T^4$$ Ley Stefan-Boltzmann

T = Temperatura [K]
R = Potencia irradiada por unidad de area
σ = Constante

La ~~radiación~~ potencia irradiada por unidad de area (R) producida por la variación de temperatura, realiza variaciones en los picos? de las longitudes de onda (λ) de la radiación emitida:

Ley de Wien → Mientras la temperatura del cuerpo negro ideal aumenta, el pico de la radiación emitida tiende a longitudes de onda más cortas (azules)

$$\lambda \propto \frac{1}{T}$$ ($\propto$ proporcionales)

Escaneado con CamScanner

Ley de Rayleigh-Jeans → Mientras que la temperatura del cuerpo negro ideal disminuye, la longitud de onda aumenta, llegando a la "catastrofe del ultravioleta" cuando la temperatura tiende a cero, problema que más tarde resolverá Planck.

(Poder por unidad de longitud de onda) $I(\lambda, T) = \frac{8\pi KT}{\lambda^4}$

El problema de la catastrofe ultravioleta viene de tomar una definición incorrecta de la energía:

$f(E) = A \cdot e^{-\frac{E}{KT}}$

$$\bar{E} = \int_0^\infty E \cdot f(E) \cdot dE = \int_0^\infty E \cdot A \cdot e^{-\frac{E}{KT}} dE = \boxed{KT}$$

Hipotesis de Planck

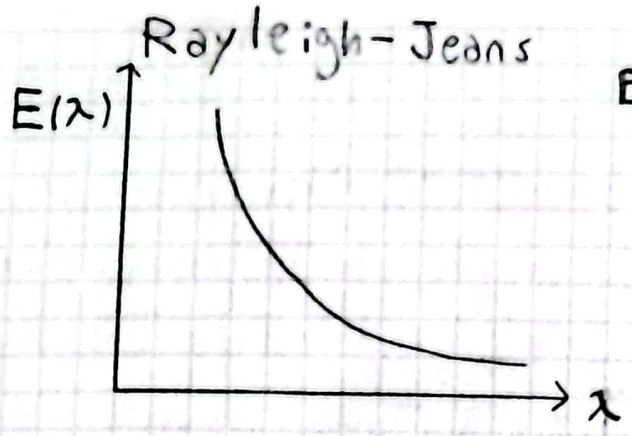
Con sus dos postulados, mejora y resuelve la radiación del cuerpo negro:

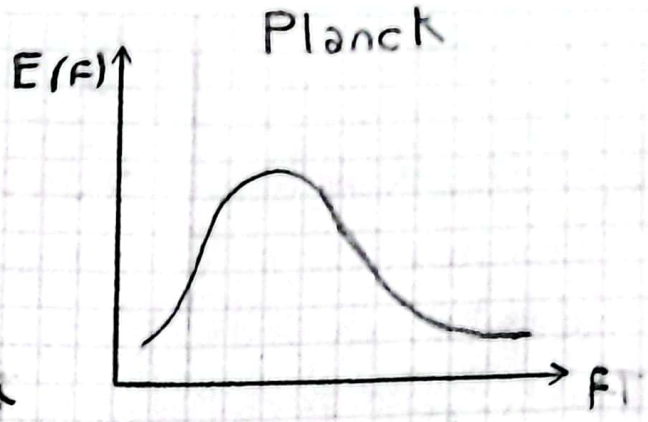
- Los elementos constituyentes de la materia tienen que actuar como pequeños osciladores, los atomos vibran. Cada oscilador puede absorver o emitir energía, la cual dependerá de la Frecuencia y una constante h, llamada constante de Planck.
- La energía de los osciladores está cuantizada.

Energía de un atomo → $E = h \cdot f$

Energía de n atomos → $E_n = n \cdot h \cdot f$

Escaneado con CamScanner



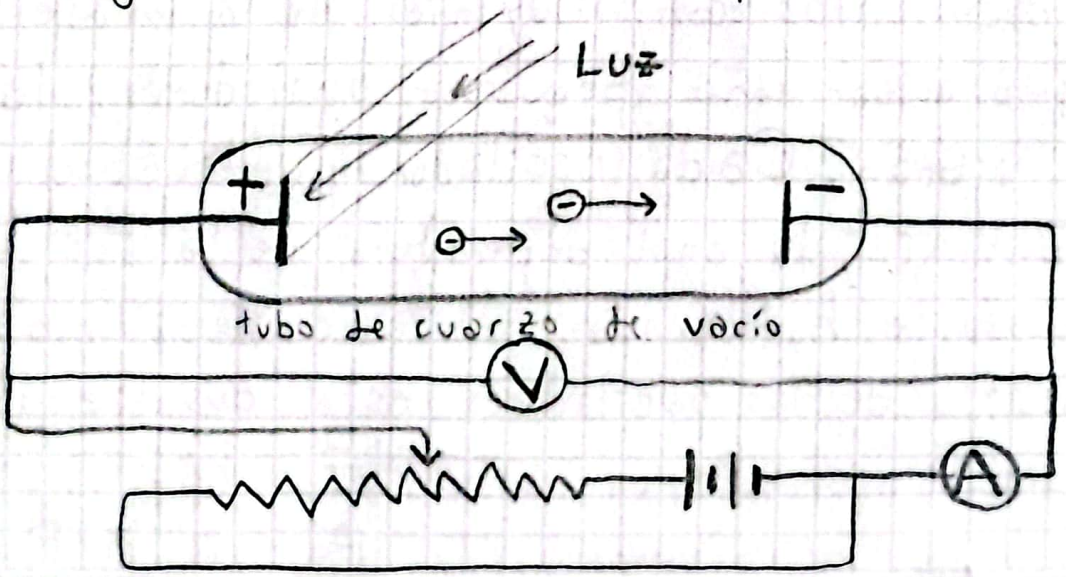


$$E(\lambda) = \frac{8\pi kT}{\lambda^4}$$

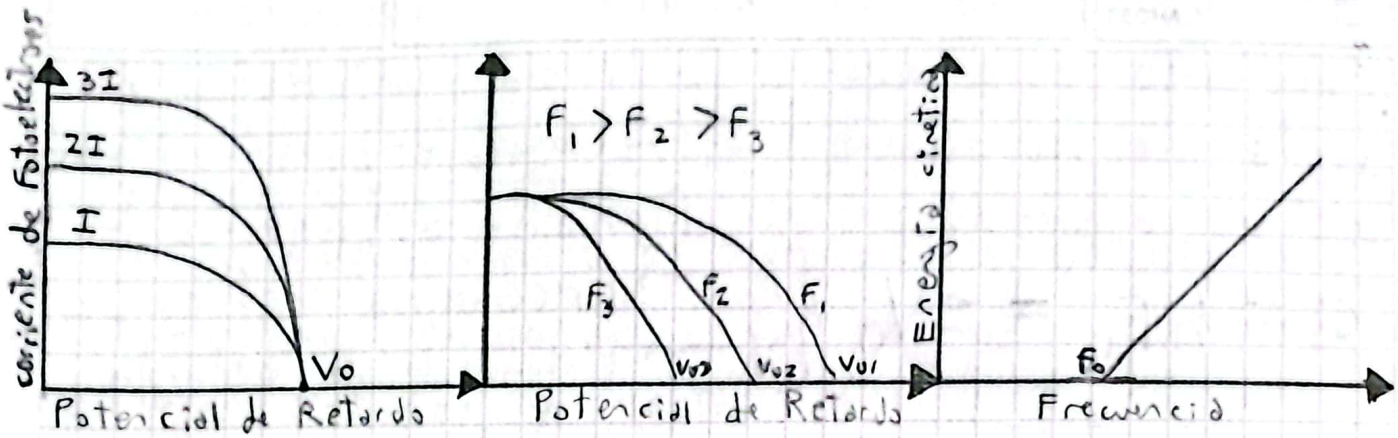
$$E(F) = \frac{8\pi hF^3}{c^3} \cdot \frac{1}{e^{hF/KT} - 1}$$

Efecto Fotoelectrico

En uno de los experimentos de Hertz donde comprobaba la teoría de Maxwell, este descubrio el efecto fotoelectrico. Esta teoría explica como la luz está conformada por particulas llamadas fotones, donde cada fotón lleva con el una cantidad discreta de energía. Cuando un fotón incide sobre la superficie de un material, puede transferir su energia a un electrón, permitiendole escapar de la superficie, para que esto ocurra la energía del fotón debe superar la función trabajo.



Escaneado con CamScanner



De estos graficos podemos sacar multiples conclusiones:

- La corriente de Fotoelectrones es proporcional a la intensidad luminica, pero el voltaje de extinción es el mismo para todas las intensidades luminicas (F=cte).
- El voltaje de extinción Vo depende de la Frecuencia de la luz.
- Dependiendo el material, el efecto fotoelectrico no se producirá si la luz no supera una cierta Frecuencia.

El potencial de Frenado es la cantidad de energía que se necesita para detener por completo la corriente de electrones fotoeléctricos.

Propuesta de Einstein: La luz no solamente se emite en Forma de cuantos, tambien se propaga como cuantos individuales. Ver

Cuanto Energetico = energía cinetica maxima + Función trabajo

$$hf = K_{max} + \phi$$

Quedando como resultado $\boxed{K_{max} = hf - \phi}$

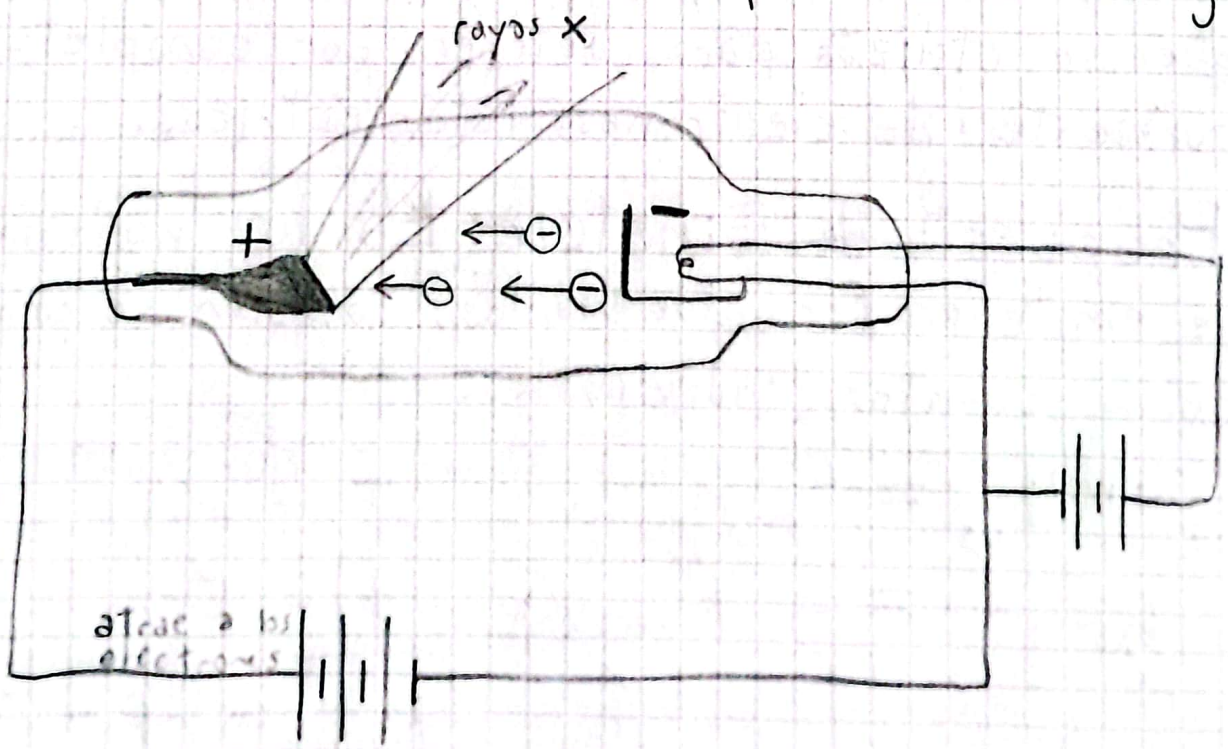
Escaneado con CamScanner

Siendo ϕ la Función trabajo, la energía necesaria para arrancar o liberar un electrón, si la luz no supera una frecuencia especifica, no se va a producir el Fenomeno. (depende del material)

$$\phi = hF_0 = eV_0 \begin{cases} F_0 \longrightarrow \text{Frecuencia crítica} \\ V_0 \longrightarrow \text{Potencial de Retardo} \end{cases}$$

Rayos X

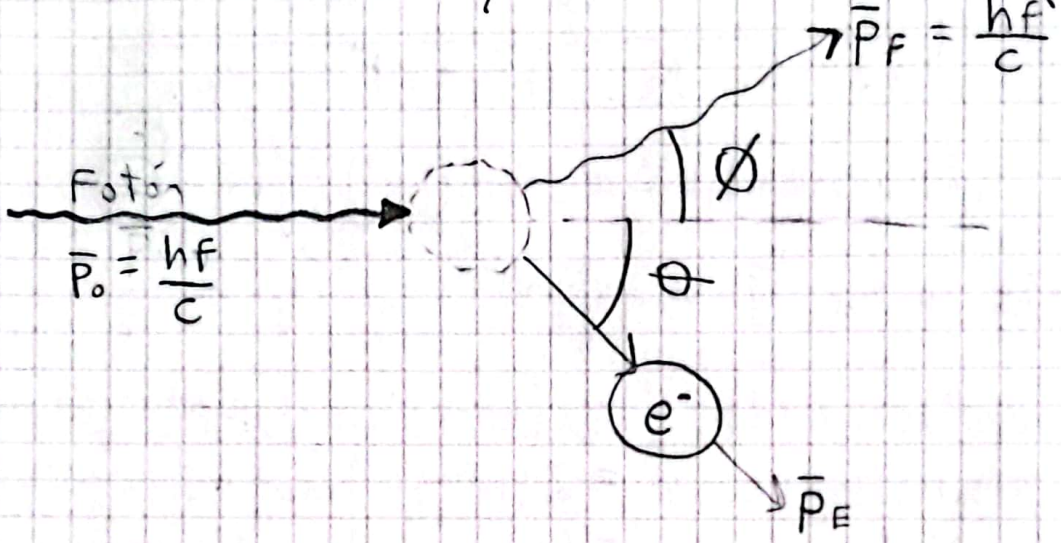
Es el proceso inverso del efecto Foto electrico (también se descubrio antes) en donde se transforma parte de la energía cinetica de un electrón en movimiento, en un Fotón. Los rayos X son ondas electromagneticas producidas por la aceleración de electrones cuando chocan con los atomos objetivo. Entonces, se descubrio que para estos rayos, todos los materiales son transparentes en cierto grado.



Escaneado con CamScanner

Efecto Compton

Es un experimento de comprobación del efecto fotoelectrico, en donde estudiaremos el choque entre fotones y electrones.



Recordemos:
- $E = p \cdot c \longrightarrow p = \frac{E}{c} \longrightarrow p = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$
- $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$
- $K = hf - hf_0$

Hacemos la suma vectorial $\bar{P}_0 = \bar{P}_E + \bar{P}_F$ y descomponemos

$$\begin{cases} P_0 = P_F \cdot \cos\phi + P_E \cos\theta & \boxed{\text{en } x} \\ 0 = P_F \cdot \operatorname{sen}\phi - P_E \operatorname{sen}\theta & \boxed{\text{en } y} \end{cases}$$

Multiplicamos ambas ecuaciones por c, despejamos $\bar{P}_E$

$$\begin{cases} \bar{P}_E \cdot c \cos\theta = hf - hf' \cos\phi \\ \bar{P}_E \cdot c \operatorname{sen}\theta = hf' \operatorname{sen}\phi \end{cases}$$

$pc = \frac{hf}{c} \cdot c = \boxed{hf}$

Elevamos al cuadrado y los sumamos

① $p^2c^2 = (hf)^2 - 2(hf)(hf')\cos\phi + (hf')^2$

Escaneado con CamScanner

Igualamos las dos expresiones de energía de una partícula:

- $E = K + mc^2$
- $E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$

$$(K + mc^2)^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$$

$$(K^2 + 2Kmc^2 + (mc^2)^2) - (mc)^2 = (pc)^2$$

$$K^2 + 2Kmc^2 = (pc)^2$$

Ahora reemplazamos $K = hf - hf'$

$$(pc)^2 = 2(hf - hf')mc^2 + (hf)^2 - 2(hf)(hf') + (hf')^2 \quad (2)$$

Sustituimos a (1) en (2)

$$\cancel{(hf)^2} - 2(hf)(hf')\cos\phi + \cancel{(hf')^2} = 2(hf - hf')mc^2 + \cancel{(hf)^2} - 2(hf)(hf') + \cancel{(hf')^2}$$

$$-2(hf)(hf')\cos\phi = 2(hf - hf')mc^2 - 2(hf)(hf')$$

$$\frac{1}{h^2c^2} \cdot (hf)(hf')(1 - \cos\phi) = (hf - hf')mc^2 \cdot \frac{1}{h^2c^2}$$

$$\frac{f}{c} \cdot \frac{f'}{c}(1 - \cos\phi) = \left(\frac{f}{c} - \frac{f'}{c}\right)\frac{mc}{h}$$

Como sabemos, $\frac{f}{c} = \frac{1}{\lambda}$; $\frac{f'}{c} = \frac{1}{\lambda'}$ Reemplazamos

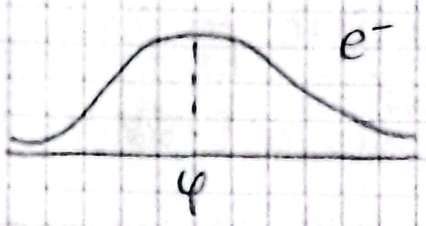
$$\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{\lambda'}(1 - \cos\phi) = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)\frac{mc}{h}$$

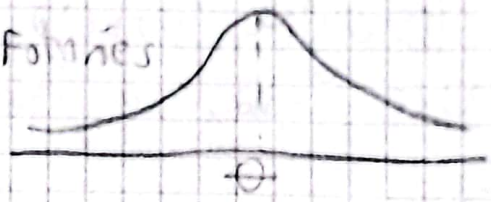
$$\frac{h}{mc}\frac{(1 - \cos\phi)}{\lambda\lambda'} = \left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda'}\right)$$

$$\boxed{\frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) = \lambda' - \lambda}$$

Escaneado con CamScanner

Para efecto Compton: hay un ángulo donde la cantidad de fotones y electrones es máxima





$$\bar{p}_E = \bar{p}_i - \bar{p}_s$$

$$\bar{p}_E \cdot \bar{p}_E = (\bar{p}_i - \bar{p}_s)\cdot(\bar{p}_i - \bar{p}_s)$$

$$\bar{p}_E^2 = \bar{p}_i^2 + \bar{p}_s^2 - 2\bar{p}_i\bar{p}_s\cos\theta$$

Ver Tipler - Mosca

Energía entrante = Energía saliente

$$E_{incidente} + E_{reposo\,e^-} = E_{saliente} + E_{e^-}$$

$$p_i c + mc^2 = p_s \cdot c + \sqrt{(p_e c)^2 + (mc^2)^2}$$

$$(p_i c + mc^2 - p_s c)^2 = (p_e \cdot c)^2 + (mc^2)^2$$

$$(p_i c + mc^2 - p_s c)^2 = p_i^2 c^2 + p_s^2 c^2 - 2 p_i p_s c^2 \cos\theta + (mc^2)^2$$

$$(p_i c + mc^2 - p_s c)^2 \frac{1}{(p_s p_i)^2} = \frac{1}{(p_s p_i)^2}\left(p_i^2 c^2 + p_s^2 c^2 - 2 p_i p_s c^2 \cos\theta\right) + \frac{(mc^2)^2}{(p_s p_i)^2}$$

$$\frac{1}{c^2}\cdot\left(\frac{c}{p_s} + \frac{mc^2}{(p_i p_s)^2} - \frac{c}{p_i}\right)^2 = \left(\frac{c^2}{p_s^2} + \frac{c^2}{p_i^2} - \frac{2c^2}{p_s p_i}\cos\theta\right)\cdot\frac{1}{c^2}$$

$$\left(\frac{1}{p_s} + \frac{mc}{(p_i p_s)^2} - \frac{1}{p_i}\right)^2 = \left(\frac{1}{p_s^2} + \frac{1}{p_i^2} - \frac{2}{p_s p_i}\cos\theta\right)$$

$$\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_i}\right)^2 + 2\frac{mc}{(p_i p_s)^2} + \frac{m^2c^2}{(p_i p_s)^2} = \frac{1}{p_s^2} + \frac{1}{p_i^2} - \frac{2}{p_i p_s}\cos\theta + \frac{m^2c^2}{(p_i p_s)^2}$$

$$\cancel{\frac{1}{p_s^2}} - \frac{2}{p_s p_i} + \cancel{\frac{1}{p_i^2}} + 2\frac{mc}{(p_i p_s)^2}\cdot\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_i}\right) = \cancel{\frac{1}{p_s^2}} + \cancel{\frac{1}{p_i^2}} - \frac{2}{p_i p_s}\cos\theta$$

$$2\frac{mc}{(p_i p_s)^2}\cdot\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{2}{p_s p_i}(1 - \cos\theta)$$

$$\left(\frac{1}{p_s} - \frac{1}{p_i}\right) = \frac{p_i p_s}{mc}(1 - \cos\theta)$$

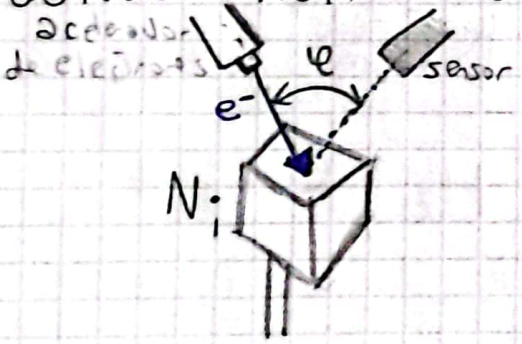
$p_i p_s$ → no debería estar

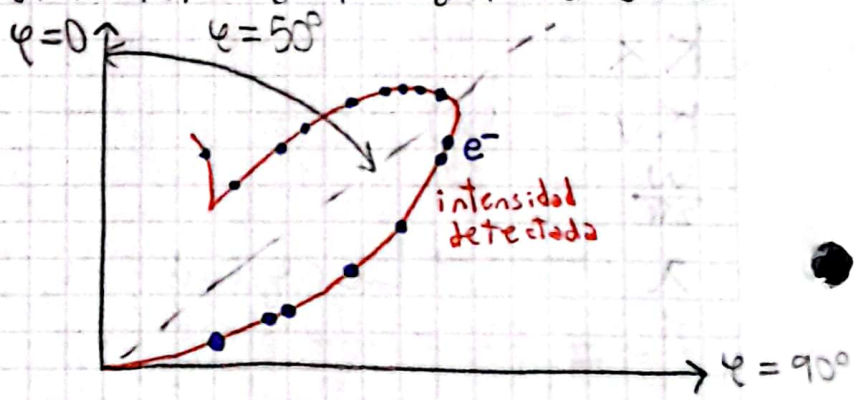
Escaneado con CamScanner

El experimento Davisson-Germer

Water Elsasser propuso que los efectos ondulatorios de electrones que van a baja velocidad se pueden detectar al modificar cristales (Ej: cristal de niquel).

Este experimento comprueba esta teoria, disparamos electrones en una valvula de vacio y hacemos que se refleje en un cristal de niquel, un sensor mide, en cada angulo, cuantos e^- inciden en el (mide intensidad de e^-). Como resultado se comprobará que se cumple la Ley de Snell, esperamos un angulo donde halla una preferencia de incidencia de e^-





d = distancia interatomica de los atomos

$$n\lambda = 2\, d\, \mathrm{sen}(\varphi)$$

indice de refracción (conocemos)

conocemos

conocemos

Encontraremos una longitud de onda propia de los electrones, lo que nos lleva a pensar que nos lleva a pensar que hay un efecto ondulatorio.

Escaneado con CamScanner

① Calcularemos la longitud de onda de un electron con los siguientes caracteristicas:

$n = 1$ $\lambda = 0{,}165\,nm$ $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg$

$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,C$ $h = 6{,}636 \cdot 10^{-34}\,J \cdot s$ $\varphi = 65°$

$d = 0{,}91\,A°$

$E = 54\,eV$

Snell
$$\begin{cases} n\lambda = 2\,d\,sen(\varphi) \\ 1 \cdot \lambda = 2 \cdot 0{,}91\,A° \cdot sen(65°) \\ \lambda = \underline{1{,}65\,A°} \end{cases}$$

De Broglie
$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{\sqrt{2mE}} = \frac{6{,}636 \cdot 10^{-34}}{\sqrt{2 \cdot 9{,}1 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 54\,eV}} = \underline{1{,}67\,A°}$$

Comparando estos dos resultados, se comprueba la teoria de De Broglie, donde se encuentra una longitud de onda asociada a electrones lentos. Hay una funcion de onda asociada a estos electrones.

De Broglie (Va antes de Davisson - Germer)

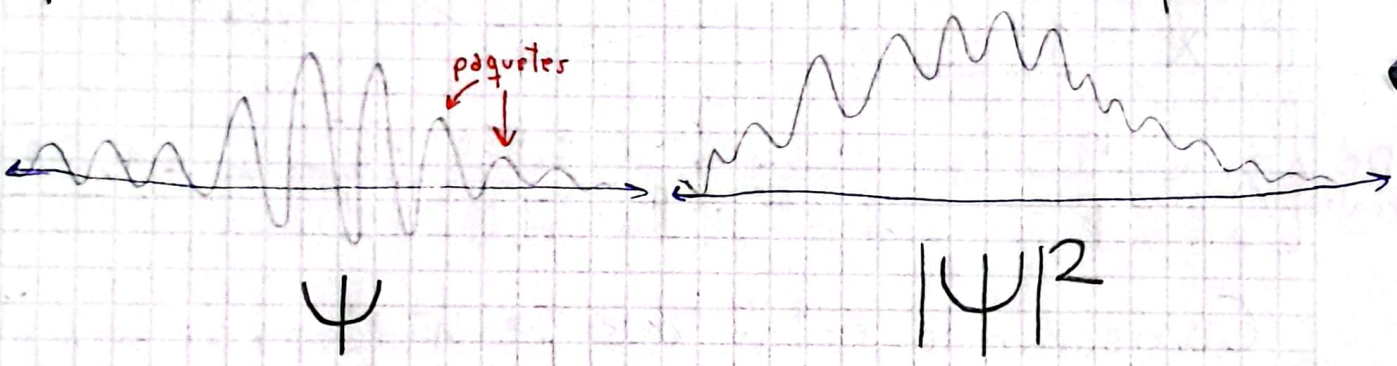
Si las ondas tienen caracteristicas corpusculares, las particulas tienen caracteristicas de onda. Si tiene frecuencia y longitud de onda, debe haber una funcion de onda que describa el movimiento de una particula.

$$f = \frac{E}{h} \qquad \lambda = \frac{h}{p}$$

Escaneado con CamScanner

Habiendo comprobado la hipotesis de De Broglie a través de diversos experimentos, como el de Davisson-Germer, nos hacemos la siguiente pregunta: ¿Si no son ondas electromagneticas, de que son las ondas?

Planteamos una funcion de onda compleja Ψ, al cuadrado de la función de onda es la probabilidad de encontrar el efecto de partícula



Y para una función de onda compleja:

Probabilidad $\approx |\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^*$

La función de onda asociada a una partícula describe la probabilidad de que actue como una partícula, este efecto se ve en la difracción e interferencia al acelerar e^- y hacerlos chocar con elementos.

No es una onda plana, tenemos paquetes irregulares que forman picos

Velocidad de Onda de Broglie (en Beiser)

② Plantearemos una onda donde:

velocidad $\longrightarrow \omega = f\lambda \left[\frac{1}{s}\right][m] = \left[\frac{m}{s}\right]$

También tenemos $\longrightarrow E = hf \; ; \; \lambda = \frac{h}{mv}$

Reemplazando: $\omega = f\lambda$

$$\omega = \frac{E}{h} \cdot \frac{h}{mv}$$

$$\omega = \frac{E}{mv}$$

$$\omega = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c}{v} \cdot c$$

Donde $\frac{c}{v} > 1$, entonces $\frac{c}{v} \cdot c > c$

$$\boxed{\omega > c}$$ velocidad de Fase

Lo cual es absurdo que la velocidad de fase supere la luz. Concluimos que la velocidad de fase no tiene ningún sentido físico.

③ Planteamos una onda unidireccional que depende de x y del tiempo

$$y = A \cdot \cos\left(2\pi f\left[t - \frac{x}{\omega}\right]\right)$$

$$y = A \cdot \cos\left(2\pi f t - 2\pi f \frac{x}{\omega}\right)$$

$$y = A \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

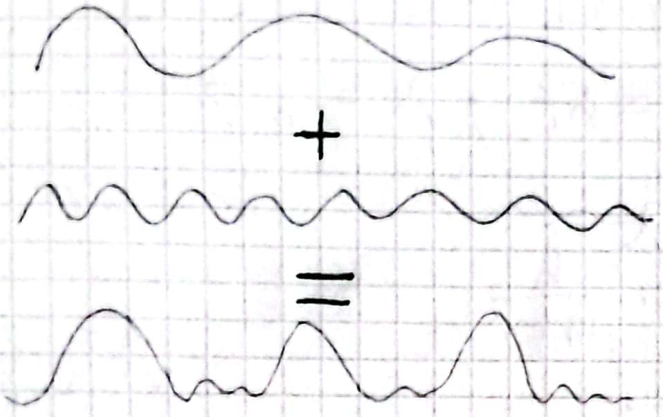
$$y = A \cdot \cos(\omega t - Kx)$$

$2\pi f = \omega$ $\qquad \frac{f}{\omega} = \frac{1}{\lambda}$ Frecuencia espacial $\qquad \frac{2\pi}{\lambda} = K$ Frecuencia angular espacial

cte. de Fase

Escaneado con CamScanner

La unica Funcion de onda es aquella irregular, ya que la probabilidad no puede ser consistente, entonces vamos a tener grupos de ondas.



Para ver esto Fisicamente, podemos poner un audio a una cierta Frecuencia de ciertos Hz, lo ponemos al mismo tiempo que otro a distinta Frecuencia y sentiremos las pulsaciones.

lo veremos como pulsaciones.

$$y_1 = A\cos(\omega t - kx)$$
$$y_2 = A\cos([\omega + d\omega]t - [k + dk]x)$$

+

Usaremos dos relaciones:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}[\alpha+\beta]\right)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}[\alpha-\beta]\right)$$
$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$y_1 + y_2 = 2A\cos\left(\tfrac{1}{2}\left[(2\omega + d\omega)t - (2k + dk)x\right]\right)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\left[d\omega t - dkx\right]\right)$$

$$y_1 + y_2 = 2A\cos(\underbrace{\omega t}_{\text{Frecuencia alta}} - kx)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\underbrace{d\omega t}_{\text{Frecuencia baja}} - dkx\right)$$

El $d\omega$ y dk del primer coseno se van ya que hacemos una aproximación muy pequeña.

Como resultado obtenemos una frecuencia baja que modula a una frecuencia alta.

Escaneado con CamScanner

$$Y_1 + Y_2 = 2A\cos\left(\omega\left[t - \frac{x}{\omega/k}\right]\right)\cdot\cos\left(\frac{d\omega}{2}\left[t - \frac{x}{d\omega/dk}\right]\right)$$

$$Y_1 + Y_2 = 2A\cos\left(\omega\left[t - \frac{x}{\omega}\right]\right)\cdot\cos\left(\frac{d\omega}{2}\left[t - \frac{x}{U}\right]\right)$$

$\omega \longrightarrow$ Velocidad de Fase $= \lambda F$

$U \longrightarrow$ Velocidad de Grupo $= \frac{\omega}{k}$

Analizaremos ahora la velocidad de Grupo

$$U = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{dk}\cdot\frac{dv}{dv} = \frac{d\omega/dv}{dk/dv}$$

$\frac{d\omega}{dv}$

Primero analizaremos el numerador

$$\omega = 2\pi F = 2\pi\frac{E}{h} = 2\pi\frac{mc^2}{h} = 2\pi\frac{m_0c^2}{h}\cdot\gamma$$

Derivamos con respecto a V

$$\frac{d\omega}{dv} = \frac{2\pi m_0c^2}{h\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\frac{2v}{c^2} = \frac{2\pi m_0 v}{h(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

$\frac{dk}{dv}$

Ahora analizaremos el denominador

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h/p} = \frac{2\pi}{h}\cdot p = \frac{2\pi}{h}\cdot\frac{m_0v}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

Derivamos con respecto a V

$$\frac{dk}{dv} = \frac{2\pi m_0}{h\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\cdot\frac{2v}{c^2} = \frac{2\pi m_0}{h(1-v^2/c^2)^{3/2}}$$

Hacemos $\frac{d\omega/dv}{dk/dv} = V \longmapsto \boxed{U = V}$

Escaneado con CamScanner

Concluimos con $U=V$, la velocidad de la partícula es la velocidad del grupo. El grupo de ondas describe la probabilidad de que se comporte como partícula. La probabilidad de encontrar partículas se puede saber con el cuadrado de la función del grupo de ondas.

Imposible $\longrightarrow$ ω
Posible $\longrightarrow$ $V = U$

No tenemos leyes deterministicas que definan el comportamiento de las partículas, se explican mejor con probabilidades. No podemos expresar su posición y su velocidad al mismo tiempo...

$\Delta k \rightarrow$ posición angular, impresión de la frecuencia de la onda
$\Delta x \rightarrow$ Impresión de la posición

No podemos determinar la posición y el momento (velocidad) al mismo tiempo

El principio de Incertidumbre es el límite que nos indica la precisión al poder medir la posición y el momento (velocidad). Notamos que $h/2\pi$ es muy chico, para cuerpos muy pequeños (partículas) es notorio y nos sirven para explicar semiconductores, pero en cuerpos grandes no se nota la impresición

Ver hasta Ecuación de Schrodinger

Escaneado con CamScanner

El Principio de Incertidumbre

El hecho de que un cuerpo en movimiento se considere como un grupo de ondas de De Broglie (Esto viene de $u=v$) y no como una entidad localizada, sugiere que existe un límite fundamental para la presición con la que podemos medir sus propiedades corpusculares, posición y momento.

Consideraremos dos ondas que superpondremos:

$$\Psi_1 = A\cos(\omega t - kx)$$

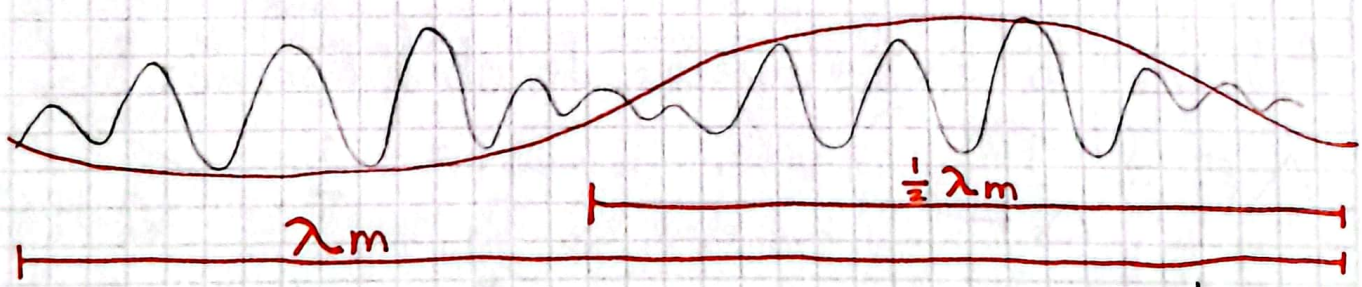
$$\Psi_2 = A\cos[(\omega+\Delta\omega)t - (k+\Delta k)x]$$

Usaremos dos relaciones:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\tfrac{1}{2}[\alpha+\beta]\right)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}[\alpha-\beta]\right)$$

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta)$$

$$\Psi_1 + \Psi_2 \simeq 2A\cos(\omega t - kx)\cdot\cos\left(\tfrac{1}{2}\Delta\omega t - \overbrace{\tfrac{1}{2}\Delta k}^{k_m} x\right)$$



De la ondas superpuestas sacamos $\Delta x \simeq \frac{1}{2}\lambda_m$

$$\lambda_m \simeq \frac{2\pi}{k_m}$$

$$\lambda_m \simeq \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta k} \rightarrow \frac{1}{2}\lambda_m \simeq \frac{2\pi}{\Delta k}$$

$$\Delta x \simeq \frac{2\pi}{\Delta k} \rightarrow \Delta x\,\Delta k \simeq 2\pi$$

Escaneado con CamScanner

La constante de propagación, de una onda:

$$K = \frac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow \text{siendo } \lambda = \frac{h}{p} \longrightarrow K = \frac{2\pi p}{h}$$

Tomamos la variación $\Delta K = \frac{2\pi \Delta p}{h}$

Tomamos la siguiente variación $\Delta x \Delta K \approx 1$ (Viene de Fourier)

$$\Delta x \frac{2\pi \Delta p}{h} \approx 1 \longrightarrow \boxed{\Delta x \Delta p \geqslant \frac{h}{2\pi}}$$

El Principio de Incertidumbre es el límite que nos indica la presición al no poder medir la posición y el momento (velocidad) al mismo instante. Notamos que $h/2\pi$ es muy chico, para cuerpos asociados a muy bajas frecuencias, como las partículas es notorio y nos sirve para explicar los semiconductores, pero en cuerpos más grandes no se nota esta impresición.

Ahora lo expresaremos de otra forma:

$$\Delta f = \frac{1}{\Delta t} \quad \text{viene de} \longrightarrow f = \frac{1}{T}$$

Por Einstein $\longrightarrow \Delta E = h \Delta f$

$$\frac{\Delta E}{h} = \frac{1}{\Delta t} \longrightarrow \boxed{\Delta E \Delta t \geqslant \frac{h}{2\pi}}$$

(c/o modelo)

El 2π se agrega para "hacer el calculo realista"

Escaneado con CamScanner

Principio de Incertidumbre en Función del Tiempo

Modulada $\longrightarrow$ resultado de sumar dos ondas

$$\Delta t \simeq \frac{1}{2} T_m \qquad T_m = \frac{2\pi}{\omega_m} = \frac{2\pi}{1/2\,\Delta\omega}$$

$$\Delta t \simeq \frac{1}{2}\,\frac{2\pi}{1/2\,\Delta\omega} \qquad \omega_m = 1/2\,\Delta\omega$$

$$\boxed{2\pi \simeq \Delta t\,\Delta\omega}$$

(Dibujar la onda modulada)

Los componentes de frecuencia $\Delta\omega$ o Δk nos sirven para describir una partícula como una onda, para poder relacionarla con una probabilidad.

Al hacer un analisis por Fourier, obtenemos la siguiente expresión: $\Delta t\,\Delta\omega \simeq 1$

$$T = \frac{1}{F} = \frac{1}{E/h} = \frac{h}{E}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi E}{h} \longrightarrow \Delta\omega = \frac{2\pi\,\Delta E}{h}$$

$$\boxed{\Delta t\,\Delta E \geqslant \frac{h}{2\pi}}$$

Pasamos de $\simeq \longrightarrow \geqslant$ ya que estamos imponiendo un límite minimo, si vemos el orden de $\hbar$, nos daremos cuenta que en objetos de relativo gran tamaño con respecto a las partículas, por ejemplo una pelota, no se verá afectada por esta ecuación.

En cambio, en el orden de las partículas, estas ecuaciones nos describe la impresición de medir la posición y el momento al mismo tiempo.

Escaneado con CamScanner

Ecuación de Onda

La Mecanica Cuantica trata las relaciones entre magnitudes observables, como la mecanica Newtoniana, pero con la diferencia de que el principio de incertidumbre modifica la definición de magnitud observable. Las cantidades cuyas relaciones busca la mecanica cuantica son probabilidades.

Como ya vimos, cada cuerpo tiene asociado una función de onda Ψ, la ecuación que relaciona las propiedades de una onda es la ecuación de SChrödinger:

Supondremos que Ψ esta en x por la ecuación

$$\Psi = A e^{-jw(t - x/v)} \qquad \bullet\, w = 2\pi f \qquad \bullet\, V = \lambda f$$

$$= A e^{-j2\pi f(t - x/\lambda f)}$$

$$= A e^{-j2\pi(ft - x/\lambda)} \qquad \bullet\, E = hf \qquad \bullet\, \lambda = \frac{h}{p}$$

$$= A e^{-j2\pi\left(\frac{E}{h}t - \frac{x}{\frac{h}{p}}\right)}$$

$$= A e^{-j\frac{2\pi}{h}(Et - xp)}$$

$$= A e^{\left(-\frac{j}{h}\right)(Et - xp)}$$

Viene de que una onda es:
$e^{-jw} = \cos w - j\operatorname{sen} w$

Falta poner que:
$\int_{-\infty}^{\infty} \text{Prob}\, dV = 1$

Ahora buscaremos la ED que describa fenomenos

Escaneado con CamScanner

Diferenciamos $\longrightarrow$ $\dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} = -\dfrac{p^2}{\hbar^2}\Psi \longrightarrow p^2\Psi = -\hbar^2 \dfrac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x}$

$\dfrac{\partial \Psi}{\partial t} = -j\dfrac{E}{\hbar}\Psi \longrightarrow E\Psi = j\hbar\dfrac{\partial \Psi}{\partial t}$

Planteamos conservación de la Energía

Energía Total = Energía cinética + Energía Potencial

$$E = K + U$$

$$E = \frac{p^2}{2m} + U$$

$$E\Psi = \frac{p^2}{2m}\Psi + U\Psi$$

$$\boxed{j\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + U\Psi}$$

Ecuación Schödinger en una dirección

$$\boxed{j\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 z}\right) + U\Psi}$$

Tres Dimensiones

Estas dos ecuaciones dependen del tiempo

¿Hay que desarrollar la estacionaria? Si

Forma Estacionaria (Ver Beiser en inglés)

$$\Psi = Ae^{\left(-\frac{j}{\hbar}\right)(Et - xp)}$$

$$\Psi = Ae^{-\left(\frac{jEt}{\hbar}\right)}e^{\left(\frac{jxp}{\hbar}\right)}$$

$$\Psi = \psi e^{-\left(\frac{jE}{\hbar}\right)t}$$

$$E\psi e^{-\left(\frac{jE}{\hbar}\right)t} = -\frac{\hbar^2}{2m}e^{-\left(\frac{jE}{\hbar}\right)t}\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x^2} + U\psi e^{-\left(\frac{jE}{\hbar}\right)t}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 \psi}{\partial^2 x} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - U)\psi = 0}$$

Escaneado con CamScanner

Ecuación de Onda de Schrödinger (Schrödinger)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 \, dV = 1 \longmapsto \int_{-\infty}^{\infty} Prob \, dV = 1$$

Si integramos en todo el volumen del universo, la probabilidad de encontrar una función de onda va a ser 1 y esto se vuelve una condición.

- $\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \left(-\frac{j}{\hbar}\right)(-p)\Psi$; • $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x} = \left(\frac{jp}{\hbar}\right)\left(\frac{-jp}{\hbar}\right)\Psi = -\frac{p^2}{\hbar^2}\Psi$
- $\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{j}{\hbar} E \Psi \longrightarrow \boxed{E\Psi = j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}}$ $\boxed{p^2 \Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x}}$

Modelos Atomicos

- **Dalton**, sugiere que los atomos constituyen toda la materia, son bolas solidas que pueden unirse entre sí químicamente.
- **Thomson**, pensaba que los atomos son esferas de materia neutras. Con el descubrimiento del electrón y su masa, observaron la siguiente relación: masa proton >> masa electrón, lo que lo llevo a pensar que el atomo se veía como un budín de pasas. Con el pasar del tiempo se comprobó que el atomo tenía una parte de vacío, por lo cual se descartó el modelo. Además el modelo no era capaz de hacer analisis de espectro.

Escaneado con CamScanner

- **Rutherford**, a través de un experimento en el cual dispara protones hacia el átomo y algunos son desviados y otros lo atraviezan, concluye que el átomo está mayoritariamente compuesto de vacío. En el átomo existe un núcleo con carga positiva y está rodeado por electrones con carga negativa que neutralizan el átomo

Experimento: Dispersión Partículas Alfa.

Con el modelo de Rutherford salen a la luz dos nuevas características sobre el átomo, sus dimensiones y las orbitas donde están los electrones.

Dimensiones Nucleares

Nos permite, a través de la formula de dispersión de Rutherford calcular el radio del núcleo de un elemento, el cual al compararlo con el radio del átomo descubrimos que es extremadamente menor, con lo que se concluye que el átomo está conformado mayoritariamente por vacío.

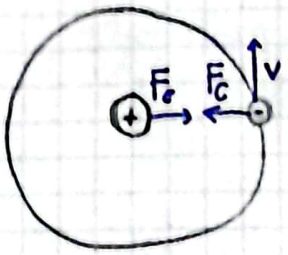
$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r_0} \longrightarrow \boxed{r_0 = \frac{2Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 K}}$$

Orbitas Electronicas

Sabiendo que el átomo en su totalidad es neutro, Rutherford supuso que los electrones tienen que moverse alrededor del nucleo con dos Fuerzas para no caer en el. La mecanica clasica ya no funciona.

Escaneado con CamScanner

Equilibrio de Fuerzas Atomo de Hidrogeno



Planteamos 3ra Ley Newton

$$\sum F = 0$$

$$F_c = F_e$$

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r^2}$$

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m}}$$

Planteamos conservación de la Energía:

$$E_T = K + V$$

$$E_T = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ (el - es por la dirección)

$$E_T = \frac{1}{2}\cancel{m}\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r \cancel{m}} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\boxed{E_T = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}}$$

Concluimos que la energía total de un electrón es negativa, lo cual es necesario para que se mantenga orbitando el núcleo, si tuviera una energía positiva, el electrón tendría la capacidad de salirse de su orbita y alejarse del núcleo.

Debido a la pequeñez de la constante de Planck, la dualidad onda-partícula no es perceptible en el mundo macroscopico. La validez de la Fisica clasica disminuye cuando disminuye la escala del fenomeno, es por eso que para estudiar el atomo se necesita entender el comportamiento corpuscular de las ondas y el movimiento ondulatorio de las partículas.

Escaneado con CamScanner

- **Bohr**, al ver que la física clásica no fue suficiente para describir al átomo, introdujo en su modelo conceptos como el efecto fotoelectrico y la difracción de electrones, conceptos que surgen de la cuántica.

Comportamiento ondulatorio de un e^- en Hidrogeno

Según De Broglie $\lambda = \frac{h}{mv}$

Como vimos antes, $v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m}}$

$$\lambda = \frac{h}{m}\frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m}}{e} = \boxed{\frac{h}{e}\sqrt{\frac{4\pi\varepsilon_0 r}{m}} = \lambda}$$

La orbita de un electrón corresponde así a una onda completa cerrada sobre sí misma. Se concluye que un electrón puede girar indefinidamente alrededor de un núcleo sin irradiar energía con tal que su orbita contenga un número entero de longitudes de la onda de De Broglie.

Discretización de las orbitas

Describimos la estabilidad orbital como:

$$n\lambda = 2\pi r_n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$n \cdot \frac{h}{m}\frac{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 r m}}{e} = 2\pi r_n$$

$$\frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} = r_n \longrightarrow \boxed{r_n = n^2 a_0}$$

Donde $a_0 = r_1$

$n = 1, 2, 3, \ldots$

Escaneado con CamScanner

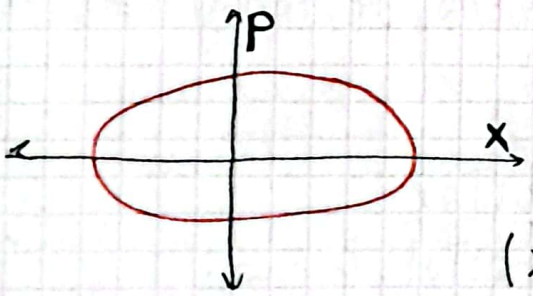
Mecanica Estadistica

La Distribución probabilistica de Maxwell-Boltzman sirve para modelar, tratando a los electrones como si fueran gases ideales. Si se mueven las partículas, cambia la configuración del gas. — gases ideales

Bose Hace una nueva distribución, que al aplicarla a los Fotones, sirve para describir la radiación del cuerpo negro Distribución Bose-Einstein, donde los Fotones son distintos y se les asigna el spin. — Fotones

Enrico Fermi encuentra que ninguna de las distribuciones anteriores pueden describir a los electrones, ya que tienen un spin fraccionario. Distribución Fermi-Dirac. — electrones

Espacio de Fase: Para cualquier partícula, necesitamos saber la posición y su cantidad de movimiento. Es una función.



$$x = X\cos(\omega t)$$
$$x' = -X\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$
$$(x, p) = (x, m x')$$

En tres dimensiones (x, y, z, p_x, p_y, p_z) describen una partícula o un sistema de partículas.

$\tau = dx\,dy\,dz\,dp_x\,dp_y\,dp_z$ donde

$$\left.\begin{array}{l} dx\,dp_x \geq \hbar \\ dy\,dp_y \geq \hbar \\ dz\,dp_z \geq \hbar \end{array}\right\} \boxed{\tau \geq \hbar^3}$$

Escaneado con CamScanner

Un punto en el espacio de fase es una celda cuyo volumen mínimo $\tau \geq h^3$

Microestado: El microestado de un sistema en un instante t queda definido por n puntos fasicos, al estar en seis dimensiones (x, y, z, p_x, p_y, p_z) tendriamos que tener datos de $6n$ numeros reales.

Macroestado: Es el numero de puntos fasicos por celdas del sistema, dividimos el volumen en celdas.

Grado de degeneración del sistema: Numero de microestados correspondientes a un nivel de energía. También llamado peso estadistico, $\Omega(E)$, siendo $g(E) = \frac{d\Omega}{dE}$

<u>Tenemos tres distribuciones</u>

1. $n(E) = \frac{dN}{dE} \rightarrow$ Numero medio (dN) de partículas por rango de energía (dE)

2. $g(E) = \frac{d\Omega}{dE} \rightarrow$ Numero de microestados para cada nivel de energía (densidad de estado)

3. $F(E) = \frac{dN}{d\Omega} \rightarrow$ Numero medio de partículas por numero de microestados (indice de ocupación)

$N \longrightarrow$ Partículas
$\Omega \longrightarrow$ Microestados
$E \longrightarrow$ Energía

Escaneado con CamScanner

Podemos obtener nuevas expresiones

- $h(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{dN}{d\Omega} \cdot \frac{d\Omega}{dE} = F(E) \cdot g(E)$
- $dN = F(E)\, g(E)\, dE$

Nos interesa encontrar distribuciones y modelar de a grupos de partículas ya que nos sería imposible contar a todas las partículas. Nos es muy útil para por ejemplo poder modelar el comportamiento de electrones.

Distintas Distribuciones

$$MB = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{E/kT}} \qquad BE = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{E/kT} - 1} \qquad FD = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{E/kT} + 1}$$

partículas distinguibles con una separación mucho mayor a la longitud de onda (no cumplen principio exclusión de Pauli) Cualquier partícula.

partículas indistinguibles con spin entero (no cumplen principio exclusión de Pauli) Fotón, bosón

partículas indistinguibles con spin fraccional (exclusión Pauli) e^-, Fermion

Distribución Maxwell-Boltzmann

Tenemos una cantidad N de partículas con unos niveles energéticos ε_1, ε_2, ε_3, etc. Buscamos la energía promedio del conjunto, esta energía la podemos traducir en temperatura, volumen o una presión. Tenemos W formas de maneras de distribuir las partículas.

Escaneado con CamScanner

$W \propto g_{(1)}^{(n_1)} \cdot g_{(2)}^{(n_2)} \cdot g_{(3)}^{(n_3)}$ donde $\sum n = n_1 + n_2 + \cdots = N$

$$W \propto \prod g_i^{n_i} \propto N! \propto \frac{1}{\prod n_i!}$$

Donde g_i celdas tienen una energía ε_i con una cantidad de partículas n_i.

Ponemos $N!$ ya que en cada celda, no nos es importante el orden de las partículas, no nos interesa el orden, por lo que tendríamos que quitar los que se repiten. $\frac{1}{\prod n_i!}$

$\{ abc \longrightarrow abc, acb, bac, bca, cba, cab$

Donde $a = b = c$, no nos interesa el orden

$$\boxed{W = N! \prod \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}}$$

Diferentes manera de acomodar las partículas en el espacio de Fase

Nos interesa saber el W_{max} ya que será la distribución más probable.

$$\frac{\partial W}{\partial n_i} = 0 \longrightarrow \text{Para encontrar } W_{max}$$

Vamos a hacer una aproximación, para ello usaremos el logaritmo como herramienta.

$$\ln(W_{max}) = \ln(W_i)_{max}$$

Propiedades

$n! = \prod_{i=1}^{n} i \longrightarrow$ logaritmo $\longrightarrow \ln(n!) = \ln\left(\prod_{i=1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n} \ln(i)$

El logaritmo de un producto es la suma de logaritmos

Escaneado con CamScanner

Continuación Propiedades Formula de Stirling

$$\sum_{x=1}^{n} \ln(x) \cong \int_1^n \ln(x)\,dx = [x \ln x]_1^n - \int_1^n x \frac{dx}{x}$$

$$\cong n \ln(n) - 1 \ln(1) - (x)_1^n$$

$$\boxed{\ln n! \cong n \ln(n) - n}$$

$$\ln(W) = \ln\left(N! \prod \frac{g_i^{n_i}}{n_i!}\right)$$

$$\ln(W) = \ln(N!) + \ln\left(\prod g_i^{n_i}\right) - \ln\left(\prod n_i!\right)$$

$$\ln(W) = N\ln(N) - N + \sum \ln(g_i^{n_i}) - \sum \ln(n_i!)$$

$$\ln(W) = N\ln(N) - N + \sum n_i \ln(g_i) - \sum (n_i \ln(n_i) - n_i)$$

$$\ln(W) = N\ln(N) \cancel{- N} + \sum n_i \ln(g_i) - \sum n_i \ln(n_i) + \cancel{\sum n_i}$$

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial n_i} = 0 + \sum \ln(g_i)\,dn_i - \sum 1 \cdot \ln(n_i) \cdot dn_i - \sum \cancel{n_i} \frac{1}{\cancel{n_i}}\,dn_i$$

$$\frac{\partial \ln(W)}{\partial n_i} = \sum \ln(g_i)\,dn_i - \sum \ln(n_i)\,dn_i - \sum dn_i$$

$$0 = \sum \underbrace{\left(\ln(g_i) - \ln(n_i) - \alpha - \beta\varepsilon_i\right)}_{=0} dn_i$$

$$0 = \ln g_i - \ln n_i - \alpha - \beta\varepsilon_i$$

$$e^0 = e^{(\ln g_i - \ln n_i - \alpha - \beta\varepsilon_i)}$$

$$1 = \frac{g_i}{n_i} \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta\varepsilon_i}$$

$$\beta = \frac{1}{KT} \qquad \boxed{n_i = g_i \cdot e^{-\alpha} \cdot e^{-\beta\varepsilon_i}}$$

Distribución Maxwell-Boltzmann

Escaneado con CamScanner

Distribución Bose-Einstein

Las partículas son indistinguibles, lo que hace más simple esta distribución ya que hay que tener menos restricciones.

$$\omega = \prod \frac{(n_i + g_i - 1)!}{n_i!\,(g_i - 1)!} \longrightarrow n_i = g_i\left(e^{-\alpha} \cdot e^{-\varepsilon_i/kT} - 1\right)$$

Distribución Fermi-Dirac

$$\omega = \prod \frac{g_i!}{n_i!\,(g_i - n_i)!} \longrightarrow n_i = g_i\left(e^{-\alpha} \cdot e^{-\varepsilon_i/kT} + 1\right)$$

Distribución Maxwell-Boltzmann

$$\omega = N! \prod \frac{g_i^{n_i}}{n_i} \longrightarrow n_i = g_i\left(e^{-\alpha} \cdot e^{-\varepsilon_i/kT}\right)$$

Cada electron tiene que tener cierta energía para que se encuentre en una orbita (ε_F)

$$\boxed{F(\varepsilon_i) = \frac{n_i}{g_i}}$$

Indice de Ocupación

$$F(\varepsilon) = \begin{cases} 0 & \varepsilon < \varepsilon_F \\ 1 & \varepsilon > \varepsilon_F \end{cases}$$

Siendo ε_F la energía de Fermi

Ver tabla de los tipos de Solidos Cristalinos En Beiser en Ingles

- Ion → Atomos cargados, conductores en los liquidos
- Covalente → Comparte electrones, están fijos (Silicio)
- Moleculares → Disolubles en el Agua
- Metalicos → Electrones como gas

Escaneado con CamScanner