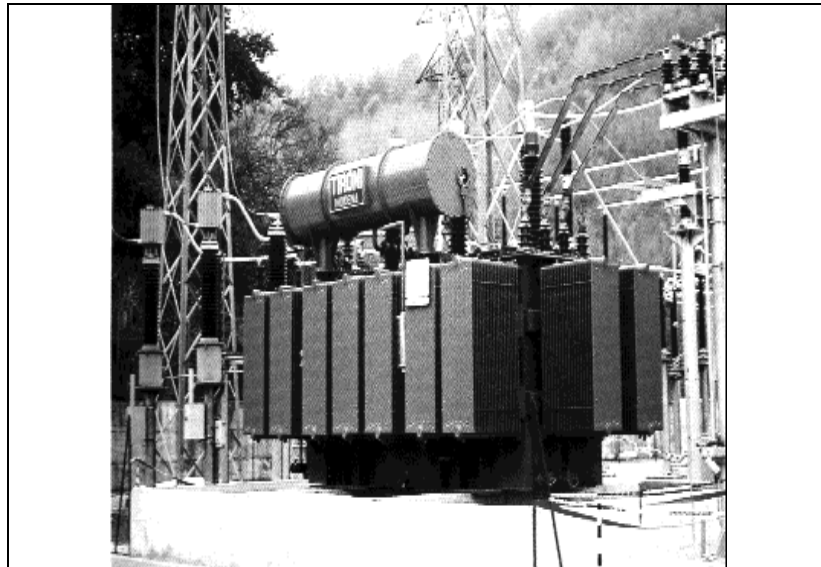


TRANSFORMADORES



Felipe Córcoles López
Joaquim Pedra i Durán
Miquel Salichs i Vivancos
Departamentd'Enginyeria Elèctrica
E.T.S.E.I. Barcelona
Universitat Politècnica de Catalunya

Primera edición: diciembre de 1996

Diseño cubierta: Antoni Gutiérrez

© los autores, 1996

© Edicions UPC, 1996
Edicions de la Universitat Politècnica de Catalunya, SL
Jordi Girona Salgado 31, 08034 Barcelona
Tel. 401 68 83 Fax 401 58 85

Producción: Servei de Publicacions de la UPC i
CPET (Centre de Publicacions del Campus Nord)
La Cup. C. Gran Capità s/n, 08034 Barcelona

Depósito legal: B-23.164-96
ISBN: 84-8301-177-8

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos, así como la exportación e importación de ejemplares para su distribución y venta fuera del ámbito de la Unión Europea.

Presentación

El origen de este libro son unos apuntes sobre transformadores que realizamos para la asignatura de Electrotecnia que actualmente impartimos en la ETSEIB. Por ello, creemos que puede servir de ayuda en cursos básicos de electrotecnia.

Se comienza con una necesaria introducción a los circuitos magnéticos. Después se presentan las expresiones temporales del transformador monofásico con núcleo no lineal, a partir de las que se llega a todos los usuales esquemas de régimen permanente senoidal. Es de señalar que en el capítulo 5 se muestra un procedimiento muy útil y sencillo para obtener el esquema equivalente de un transformador con cualquier número de devanados. Por último, se analiza el transformador trifásico en régimen equilibrado.

En este trabajo no se han tratado temas como la no linealidad del transformador y el estudio del transformador trifásico en régimen desequilibrado. Estos temas corresponderían, en nuestra opinión, a un curso avanzado de máquinas eléctricas.

Al final se han incluido unos anexos que, si bien algunos se salen del contenido general, resulta interesante tener en cuenta.

Por último, debemos agradecer a nuestro compañero Luis Sainz Sopera el haberse molestado en pasar la versión anterior por su rigurosa *tiza*, y a Francesc J. Suelves Joanxich sus siempre didácticos comentarios.

Deseamos que este trabajo resulte todo lo interesante que se ha pretendido y agradecemos las sugerencias y la comunicación de errores que esperamos hagáis llegar.

Barcelona, septiembre de 1996

Índice

1	Introducción	13
2	Análisis de circuitos magnéticos	
2.1	Ley de Ampere	15
2.2	Ley de la conservación del flujo	18
2.3	Propiedades de los materiales magnéticos	19
2.4	Modelo eléctrico de un circuito magnético	23
2.5	Ley de inducción de Faraday	24
2.6	Terminales correspondientes de bobinas acopladas	26
2.7	Definiciones de inductancia para circuitos lineales y no lineales	26
2.8	Relación $u(t)$, $i(t)$, $\phi(t)$ en una bobina con núcleo lineal	29
3	Descripción del transformador	31
4	Expresiones temporales del transformador monofásico	
4.1	Transformador monofásico con núcleo no lineal	34
4.2	Transformador monofásico ideal	37
4.3	Transformador monofásico con núcleo lineal	39
4.4	Incorporación de las pérdidas en el núcleo: transformador monofásico real	43
5	Procedimiento general para obtener el esquema equivalente de un transformador	
5.1	Esquema equivalente de un transformador de varios devanados	45

5.2	Esquema equivalente del transformador monofásico con pérdidas en el circuito magnético	49
-----	--	----

6 Transformador monofásico ideal en régimen permanente senoidal

6.1	Transformador monofásico ideal	51
6.2	Transformador monofásico real	52

7 Valores nominales. Placa de características

7.1	Valores nominales	55
7.2	Placa de características	57

8 Reducción de circuitos con transformadores ideales

8.1	Circuitos con un transformador ideal	59
8.2	Circuitos con varios transformadores ideales	63

9 El transformador real reducido

10 Bases más empleadas en la reducción de circuitos con un solo transformador real

10.1	Reducción a valores en p.u. (por unidad)	70
10.2	Reducción al primario	71
10.3	Reducción al secundario	72
10.4	Relaciones entre las tres bases referidas al propio transformador	73

11 Reducción de circuitos con varios transformadores reales

12 Cambios de base

13 Esquema equivalente de Thevenin de un transformador visto desde el secundario

14	Funcionamiento en carga, rendimiento y caída de tensión	83
15	Resumen de los circuitos equivalentes del transformador monofásico en régimen permanente senoidal	
15.1	Transformador ideal	89
15.2	Esquema en T	89
15.3	Esquema en L	90
15.4	Esquema despreciando la rama del hierro (núcleo ideal)	91
15.5	Equivalente de Thevenin desde el secundario	91
16	Transformadores en paralelo	
16.1	¿Por qué hace falta que tengan la misma relación de transformación?	94
16.2	Acoplamiento correcto	95
16.3	Acoplamiento óptimo	96
16.4	Resolución de problemas con transformadores en paralelo	98
17	Ensayos en el transformador para la determinación de parámetros	
17.1	Ensayo en vacío	100
17.2	Ensayo en cortocircuito	102
18	Valores usuales de los parámetros del transformador de potencia	105
19	Autotransformador	107
20	El transformador trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado	
20.1	Evolución del banco trifásico al transformador de tres columnas	112
20.2	Conexiones de los devanados. Propiedades	117
20.3	Valores nominales y placa de características del transformador trifásico	120

21 Reducción del transformador trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado

21.1 Elección de los valores base	124
21.2 Bases referidas al propio transformador	127

22 Índice horario

22.1 Desfase total entre tensiones de primario y de secundario en un transformador trifásico en carga	135
---	-----

23 Aplicaciones del transformador

23.1 Transformador de potencia	138
23.2 Transformadores de medida	138
23.3 Transformadores para regulación de la tensión	141
23.4 Transformadores especiales	142
23.5 Transformadores para otras aplicaciones	143

Anexo 1 Esquemas equivalentes de dos bobinas acopladas. Relación entre los parámetros de las bobinas y los del transformador monofásico ...

147

Anexo 2 Estudio transitorio de un circuito con transformadores ideales ..

155

Anexo 3 Comportamiento no lineal del transformador

157

Anexo 4 Incorporación del índice horario al esquema del transformador trifásico

161

Bibliografía

165

1 Introducción

El transformador es un elemento muy utilizado en los sistemas eléctricos, porque permite trabajar en cada situación con la tensión e intensidad más adecuadas.

Un caso significativo es el de los sistemas de potencia, en los que hace posible que la generación, transporte y consumo de la energía eléctrica se realicen a las tensiones más rentables en cada caso. El transporte resulta más económico cuanto más alta sea la tensión, ya que la corriente y la sección de los conductores son menores (intensidades pequeñas provocan menores pérdidas por efecto Joule). Razones tecnológicas impiden que los alternadores de las centrales puedan proporcionar tensiones superiores a los 30 kV. Por ello es necesaria la transformación en las centrales de estas tensiones a las típicas de transporte, generalmente inferiores a 400 kV (transformadores elevadores). Por otro lado, los aparatos consumidores de la energía eléctrica no están diseñados para tensiones tan elevadas (por seguridad de las personas), por lo que son normales las de 220 o 380 V, aunque también hay receptores de gran potencia con tensiones nominales del orden de unos pocos kilovoltios. De nuevo se hace necesaria la reducción de la tensión mediante los llamados transformadores de distribución. Esta reducción se realiza en varias etapas, en función de los receptores y de las necesidades de la distribución.

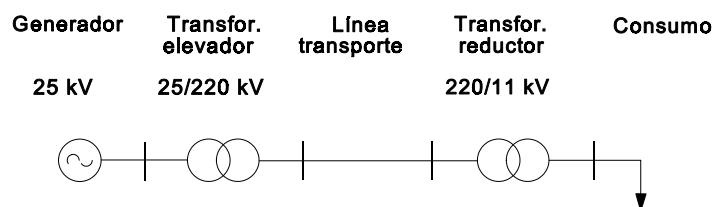


Fig. 1.1 Generación, transformación, transporte y consumo de energía eléctrica

El transformador también se utiliza en circuitos de baja potencia y tensión para otras aplicaciones como, por ejemplo, la igualación de impedancias de carga y fuente para tener máxima transferencia de potencia, el aislamiento de circuitos, o el aislamiento frente a la corriente continua, sin perder la continuidad de la corriente alterna. Otra aplicación es como dispositivo auxiliar de los aparatos de medida, reduciendo la tensión o corriente de un circuito para adecuarla a la que aceptan los aparatos de medida: son los llamados transformadores de medida.

2 Análisis de circuitos magnéticos

Los materiales magnéticos tienen una doble importancia en los dispositivos de conversión de energía. Se pueden obtener grandes densidades de flujo con niveles relativamente bajos de fuerza magnetomotriz. Por otro lado, se pueden usar para delimitar y dirigir a los campos magnéticos en unas trayectorias definidas: hacen en magnetismo el papel de conductores, al igual que los conductores eléctricos en electricidad.

Para el estudio del transformador es necesario el conocimiento de los circuitos magnéticos y de las leyes que los rigen. En el análisis de los circuitos magnéticos habituales se emplean las ecuaciones de Maxwell en su forma integral, con lo cual resultan leyes de uso común más sencillas. En concreto se utilizarán:

- la ley de Ampere,
- la ley de conservación del flujo,
- la ley de inducción de Faraday, y
- las propiedades magnéticas de los materiales empleados.

2.1 Ley de Ampere

La ley de Ampere se obtiene de la ecuación de Maxwell

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.1)$$

donde: \vec{H} = vector intensidad de campo magnético (A/m, amperio/metro),
 \vec{J} = vector densidad de corriente (A/m²),
 \vec{D} = vector desplazamiento (A·s/m²).

En los casos que se estudian habitualmente en la técnica, al trabajar con bajas frecuencias o con continua, el término del vector desplazamiento es despreciable (es importante, por ejemplo, en el estudio de la propagación de ondas electromagnéticas), por lo que para el estudio de circuitos magnéticos queda:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} \quad (2.2)$$

Escrita en forma integral (aplicando una integral de superficie a ambos lados de la misma) resulta la ley de Ampere:

$$\int_S \text{rot } \vec{H} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (2.3)$$

Donde se ha aplicado el teorema de Stokes para pasar de una integral de superficie a una integral de línea.

Si la densidad de corriente eléctrica procede de una bobina, es decir, de una serie de N espiras recorridas por una intensidad i que atraviesan la superficie S , se obtiene la expresión más común de la ley de Ampere:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma Ni \quad (2.4)$$

donde: $d\vec{l}$ = diferencial de camino del camino elegido (m),

i = intensidad que atraviesa una superficie que tiene como límite el camino elegido (A),

N = número de veces que la intensidad i atraviesa la superficie (vueltas).

Al producto Ni también se le llama fuerza magnetomotriz, \mathcal{F}_{mm} :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \Sigma Ni = \Sigma \mathcal{F}_{mm} \quad (2.5)$$

Convenio de signos de la $\Sigma \mathcal{F}_{mm} = \Sigma Ni$

Apliquemos la ley de Ampere al camino cerrado de la figura 2.1:

$$H_{Fe} l_{Fe} = N_1 i_1 - N_2 i_2 \quad (2.6)$$

donde se ha hecho la hipótesis de que la intensidad de campo magnético en el hierro, H_{Fe} , es de módulo constante (ya que no hay variación en la sección del hierro) y paralela a los diferenciales de camino del camino elegido. Además l_{Fe} es la longitud del camino escogido, que usualmente es el camino medio, es decir, el que va por la mitad de la sección.

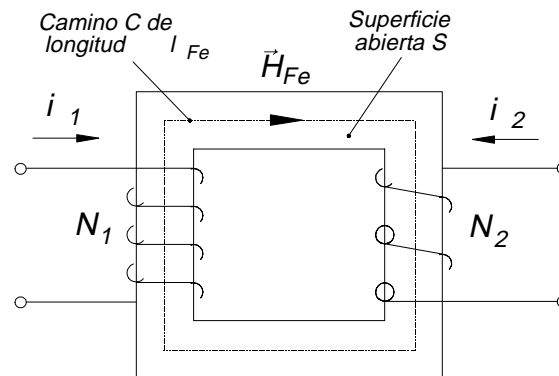


Fig. 2.1 Circuito magnético e intensidad de campo magnético

El signo positivo de $N_1 i_1$ se obtiene aplicando la regla de la mano derecha: esta intensidad crea un campo en la dirección de \vec{H}_{Fe} . El signo negativo de $N_2 i_2$ se debe a que crea un campo con dirección contraria. Obsérvese que i_1 entra al plano del papel mientras que i_2 sale de él.

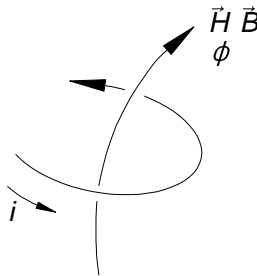


Fig. 2.2 Campos y flujo creados por una intensidad (regla de la mano derecha)

Las hipótesis anteriores para la resolución de un circuito magnético mediante la ley de Ampere solo se pueden efectuar en el caso de que las geometrías sean muy sencillas (circuitos con secciones constantes). Para la resolución de circuitos con geometrías más complicadas se debe recurrir a técnicas de resolución numérica como, por ejemplo, el método de los elementos finitos.

2.2 Ley de la conservación del flujo

Esta ley se obtiene a partir de otra ecuación de Maxwell,

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (2.7)$$

donde: \vec{B} = vector densidad de flujo magnético, o también vector inducción magnética ($T=Wb/m^2$, Tesla).

Escrita en forma integral y utilizando el teorema de la divergencia para pasar la integral de volumen a una integral de superficie,

$$\int_V \text{div } \vec{B} dV = 0 \Rightarrow \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2.8)$$

donde: $d\vec{V}$ = vector diferencial de volumen (m^3),
 $d\vec{S}$ = vector diferencial de superficie (m^2),

se obtiene la ley de la conservación del flujo en su forma de escritura más usual, cuyo significado físico es que el flujo neto que atraviesa una superficie cerrada es nulo:

$$\Phi_{\text{neto}, S} = \int_S \vec{B} d\vec{S} = 0 \quad (2.9)$$

donde: Φ = flujo magnético (Wb, Webber).

Aplicando esta ley a un circuito magnético, en una región en la que coinciden distintas ramas, se tiene (Fig. 2.3):

$$\begin{aligned} \int_S \vec{B} d\vec{S} &= \sum B S = \sum \Phi = 0 \\ \Phi_1 - \Phi_2 - \Phi_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

lo que se interpreta como que la suma de flujos que llegan a un nudo es nula.

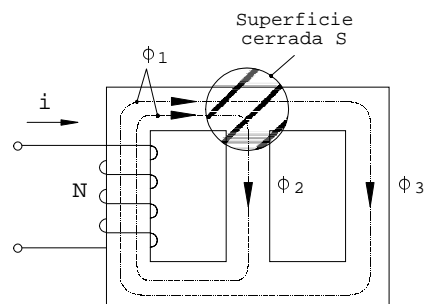


Fig. 2.3 Conservación del flujo

2.3 Propiedades de los materiales magnéticos

Relación B-H de un material

La intensidad de campo magnético y la inducción magnética en cualquier material están relacionadas a través de la permeabilidad magnética del mismo, μ ,

$$B = \mu H = \mu_0 \mu_r H \quad , \quad \mu_0 = 4 \pi 10^{-7} \quad (2.11)$$

donde: μ = permeabilidad magnética (Wb/A·v·m),

μ_0 = permeabilidad magnética del vacío (Wb/A·v·m),

μ_r = permeabilidad relativa (sin dimensiones), siendo:

- materiales no magnéticos $\mu_r \approx 1$,
- materiales ferromagnéticos $2000 < \mu_r < 6000$ (valores usuales en la zona lineal).

Las unidades utilizadas hasta el momento corresponden al Sistema Internacional de Unidades (SI), aunque existen otras que se siguen utilizando por tradición:

$$1 \text{ T} = 10.000 \text{ Gauss (G)} = 64,5 \text{ kilolíneas/pulg}^2,$$

$$1 \text{ A·v/m} = 1/80 \text{ Oersted (Oe)},$$

$$1 \text{ Wb} = 10^8 \text{ Maxwells (Mx)} = 10^8 \text{ líneas.}$$

Los *materiales ferromagnéticos*, compuestos de hierro y sus aleaciones con cobalto, tungsteno, níquel, aluminio y otros metales, son los materiales magnéticos más comunes.

Si el medio magnético es lineal, la permeabilidad magnética es constante, y si no lo es, depende del valor de H . El comportamiento de un material magnético como el hierro es, en realidad, no lineal, y está definido por la curva B - H . Esta curva puede tener una forma analítica aproximada:

$$H = a_1 B + a_3 B^3 + a_5 B^5 \quad , \quad B = \frac{aH}{\sqrt[n]{b^n + |H|^n}} + cH \quad , \quad B = \frac{aH}{b + |H|} + cH \quad (2.12)$$

Tanto en la figura 2.4a como en las expresiones analíticas se han supuesto nulas las pérdidas por histéresis, lo que se aprecia al observar que el área encerrada por la curva es nula (las pérdidas por histéresis son proporcionales al área encerrada por la curva). Aunque depende del tipo de material, la saturación puede comenzar a una densidad de campo magnético de entre 1 y 2 Teslas (Wb/m²).

La alta permeabilidad relativa, μ_r , del hierro se debe a que está constituido por dominios magnéticos que realizan una amplificación de la excitación magnética exterior al orientarse en la dirección de ésta. Cuando todos los dominios están orientados desaparece el efecto de la amplificación, y la permeabilidad relativa pasa a tener un valor próximo a la unidad, con lo que aparece el fenómeno de la saturación.

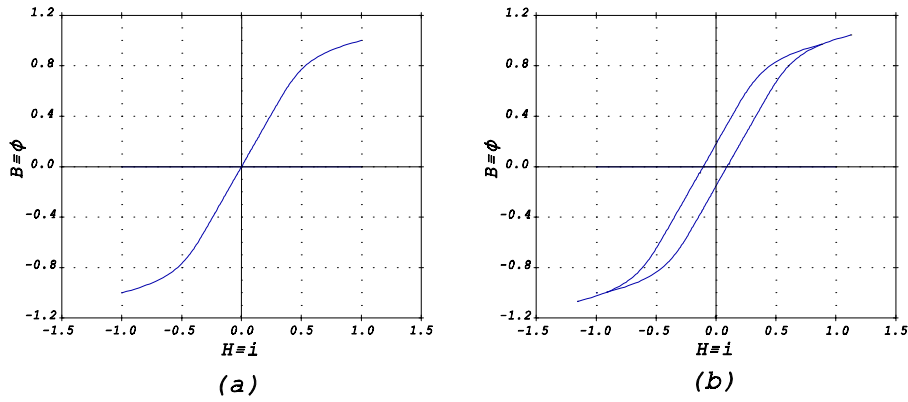


Fig. 2.4 Característica B - H no lineal: (a) sin ciclo de histéresis, y (b) con ciclo de histéresis

Es interesante representar la relación no lineal entre B y H en una bobina con un núcleo ferromagnético en función de la tensión aplicada y de la intensidad absorbida. Para ello, se observa que la intensidad de campo magnético es proporcional a la intensidad, ya que aplicando la ley de Ampere a un camino cerrado a través del núcleo,

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum N i = \sum \mathcal{F}_{mm} \Rightarrow i = \frac{H_{Fe} l_{Fe}}{N} \quad (2.13)$$

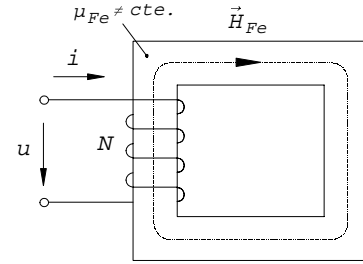


Fig. 2.5 Bobina con núcleo magnético no lineal

mientras que la densidad de flujo magnético es proporcional al flujo total concatenado por la bobina, ya que

$$\psi = N \phi = N (B S) \quad (2.14)$$

y si $u(t)$ es senoidal, por la ley de inducción de Faraday (Apdo. 2.5), el flujo también lo es:

$$u(t) = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (2.15)$$

Luego la relación entre la tensión y la intensidad de una bobina alimentada con tensión senoidal es la misma que entre B y H , con un cambio de escalas adecuado y teniendo en cuenta un adelanto de 90° de la tensión respecto al flujo:

$$\left. \begin{array}{l} u(t) \text{ senoidal} \Rightarrow \phi(t) = K_1 \cdot B(t) \text{ senoidal} \\ H(t) = K_2 \cdot i(t) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u(t) \text{ es proporcional a } B(t) \\ i(t) \text{ es proporcional a } H(t) \end{array} \quad (2.16)$$

Y con cualquier tipo de alimentación en general, el flujo es proporcional a la inducción y la intensidad eléctrica es proporcional a la intensidad de campo.

Ciclo de histéresis y corrientes parásitas en un material magnético

Los materiales magnéticos sometidos a un flujo variable en el tiempo sufren un calentamiento debido a la histéresis magnética (Fig. 2.4b) y a las corrientes parásitas de Foucault. Estos fenómenos provocan las llamadas pérdidas magnéticas (consumo de potencia activa que se disipa en forma de calor en el núcleo).

Las *pérdidas por histéresis* son debidas a los defectos de la estructura cristalina del material, y se producen cuando se modifican las fronteras de los dominios magnéticos. Son proporcionales a la frecuencia (número de veces que varían los dominios), y se pueden expresar como

$$p_H = K_H f B^\alpha \quad (2.17)$$

donde α es un coeficiente empírico cuyo valor suele ser de 1,6.

Las *pérdidas por corrientes inducidas de Foucault* son, básicamente, unas pérdidas por efecto Joule, debidas a la resistencia eléctrica del material. Dependen de la inducción y de la frecuencia, pueden expresarse como

$$p_F = K_F f^2 B^2 \quad (2.18)$$

Normalmente se acepta que las pérdidas por ciclo de histéresis y por corrientes inducidas de Foucault para una frecuencia fija dependen de la inducción al cuadrado, es decir, de la tensión al cuadrado:

$$p_H + p_F = K_1 B^2 \equiv K_2 U^2 \quad (2.19)$$

Hay dos tipos de ciclos de histéresis de un material magnético:

- dinámico: se obtiene con tensión alterna y su área incluye las pérdidas por histéresis y por corrientes inducidas de Foucault, y
- estático: se obtiene con tensión continua variable y su área sólo incluye las pérdidas por histéresis.

Para limitar las pérdidas por corrientes de Foucault en los transformadores, se suele construir el núcleo con chapas aisladas eléctricamente entre sí, con lo que se limita la posibilidad de circulación de corrientes inducidas al aumentar la resistencia eléctrica que ofrece el núcleo a este tipo de corrientes (sin alterar las propiedades magnéticas).

Ejemplo.-

Utilizaremos la relación B - H y las leyes de Ampere y de conservación del flujo para el estudio del circuito magnético de la figura 2.6. Se trata de un circuito magnético con dos bobinas, entrehierro y flujo de dispersión únicamente en una de ellas.

Aplicando la ley de Ampere a los dos caminos indicados:

$$\begin{aligned} H_{Fe} l_{Fe} + H_{\delta} l_{\delta} &= N_1 i_1 + N_2 i_2 \\ H_d l_d &= N_1 i_1 \end{aligned} \quad (2.20)$$

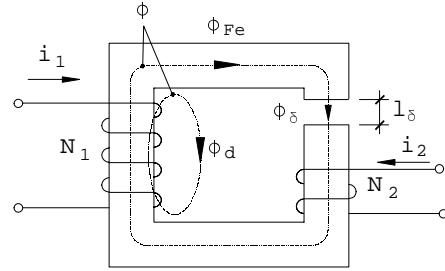


Fig. 2.6 Circuito magnético con entrehierro y flujo de dispersión

Hay que señalar que se está considerando que ϕ_d es un flujo que se cierra íntegramente por el aire a través de un circuito magnético ficticio de longitud l_d y sección S_d .

Aplicando la ley de la conservación del flujo a una superficie cerrada que cruce el entrehierro:

$$B_{Fe} S_{Fe} - B_{\delta} S_{\delta} = 0 \quad (2.21)$$

Suponiendo que $S_{Fe} = S_{\delta}$ (despreciando el efecto de bordes), se tiene que $B_{Fe} = B_{\delta}$.

Utilizando la característica magnética del material:

$$\begin{aligned} B_{Fe} &= \mu_{Fe} H_{Fe} & B_{\delta} &= \mu_0 H_{\delta} \\ B_d &= \mu_0 H_d \end{aligned} \quad (2.22)$$

se pueden calcular B_{Fe} y B_d , ya que resulta

$$\begin{aligned} \frac{B_{Fe}}{\mu_{Fe}} l_{Fe} + \frac{B_{Fe}}{\mu_0} l_{\delta} &= N_1 i_1 + N_2 i_2 \\ \frac{B_d}{\mu_0} l_d &= N_1 i_1 \end{aligned} \quad (2.23)$$

El flujo total creado por la bobina se obtiene aplicando la ley de conservación del flujo:

$$\phi = \phi_{Fe} + \phi_d = B_{Fe} S_{Fe} + B_d S_d \quad \blacksquare \quad (2.24)$$

2.4 Modelo eléctrico de un circuito magnético

Resulta muy interesante observar el paralelismo que existe entre los circuitos magnéticos y los eléctricos. Para ello, se modifica la notación de la ley de Ampere. Sea un circuito magnético con diferentes intensidades de campo H y diferentes excitaciones i :

$$\oint_C \vec{H} d\vec{l} = \sum Ni \Rightarrow \sum Hl = \sum Ni \Rightarrow \sum \frac{B}{\mu} l = \sum Ni \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum \frac{BSl}{\mu_r \mu_o S} = \sum Ni \Rightarrow \sum \frac{\phi l}{\mu_r \mu_o S} = \sum Ni \quad (2.25)$$

Que también se puede reescribir como:

$$\sum \mathcal{R}_m \phi = \sum \mathcal{F}_{mm} \quad (2.26)$$

donde: $\mathcal{R}_m = l/(\mu_r \mu_o S)$ = reluctancia magnética (l y S son la longitud y la sección del circuito respectivamente),

ϕ = flujo por unidad de espira,

$\mathcal{F}_{mm} = Ni$ = fuerza magnetomotriz.

Esta ley y la de conservación del flujo son suficientes para el estudio de los circuitos magnéticos:

$$\sum \mathcal{R}_m \phi = \sum \mathcal{F}_{mm}, \quad \sum \phi = 0 \quad (2.27)$$

y son análogas a las de los circuitos eléctricos de corriente continua:

$$\sum R I = \sum E, \quad \sum I = 0 \quad (2.28)$$

Ejemplo.-

Resolver el circuito magnético de la figura 2.6 utilizando un modelo eléctrico:

$$\mathcal{F}_{mm1} = N_1 i_1 = \mathcal{R}_d \phi_d$$

$$\mathcal{F}_{mm1} + \mathcal{F}_{mm2} = N_1 i_1 + N_2 i_2 =$$

$$= \mathcal{R}_{Fe} \phi_{Fe} + \mathcal{R}_\delta \phi_{Fe} \quad (2.29)$$

$$\phi = \phi_d + \phi_{Fe} \quad \blacksquare$$

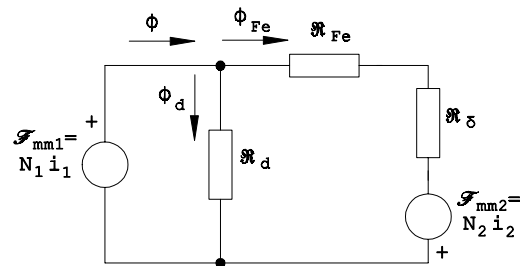


Fig. 2.7 Modelo eléctrico del circuito magnético de la figura 2.6

2.5 Ley de inducción de Faraday

La ecuación de Maxwell,

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.30)$$

donde: \vec{E} = vector campo eléctrico (V/m),

se puede escribir en forma integral aplicando el teorema de Stokes para pasar la integral de superficie a la de camino:

$$\int_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \Rightarrow \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.31)$$

La superficie S sobre la cual se integra B es una superficie abierta cuyo borde es el camino C . Si este camino corresponde a una espira, en los extremos de ésta se obtiene una tensión, $u(t)$, correspondiente a la variación de la densidad del flujo magnético.

La ley de inducción de Faraday permite calcular la tensión, $u(t)$, en los extremos de una bobina de N espiras (la superficie de integración es una superficie multifoliada de N hojas) atravesada por un flujo por espira $\phi(t)$. Esta ley se escribe como:

$$u(t) = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt} \quad (2.32)$$

donde: $u(t)$ = tensión en bornes de la bobina (V),

$\psi(t) = N \phi(t)$ = flujo total concatenado por la bobina (Wb).

El significado de $\psi(t)$ es evidente: si cada espira de la bobina concatena un flujo $\phi(t)$, la bobina de N espiras concatenará un flujo total $\psi(t) = N \phi(t)$.

En gran parte de la bibliografía clásica de Teoría de Circuitos y en la de Física aparece un signo negativo en la expresión de la ley de inducción de Faraday (Ec. 2.32). Este signo procede del de la ecuación de Maxwell (Ec. 2.31). Durante años se ha seguido utilizando el signo negativo con ayuda de un convenio adecuado para justificarlo. Este convenio utiliza unas magnitudes llamadas *fuerza electromotriz* y *fuerza contraelectromotriz* (que se designan con la letra e). En estos apuntes *nunca se utilizarán estas magnitudes*, sino que se hablará siempre de tensiones o de diferencias de potencial, al igual que se hace en la bibliografía reciente sobre Teoría de Circuitos.

Con esto se quiere decir que la ecuación 2.32 va asociada a un determinado convenio, el cual se muestra a continuación.

Convenio de signos de $u(t)$, $\phi(t)$ en una bobina

Sea la bobina de la figura 2.8a, atravesada por un flujo $\phi(t)$. Para dibujar la tensión $u(t)$ que cumple la ecuación 2.32 es necesario fijarse en la dirección del bobinado de las espiras, o lo que es lo mismo, el sentido de una intensidad que provoque flujo en la misma dirección.

Una intensidad que entrara por el terminal 1 (Fig. 2.8b) crearía flujo en la misma dirección que $\phi(t)$. Esta es la *intensidad asociada al flujo* $\phi(t)$. La tensión $u(t)$ tiene el mismo sentido que la intensidad asociada, es decir, va del terminal 1 al $1'$ (Fig. 2.8c). A la tensión y al flujo de esta figura se les llama *concordantes*.

Esto no quiere decir que la intensidad real en la bobina lleve el sentido de la intensidad asociada al flujo, ya que ésta dependerá del resto del circuito.

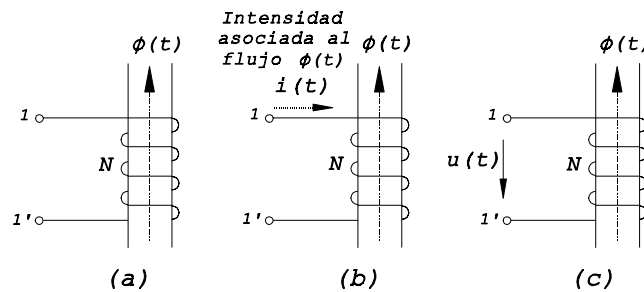


Fig. 2.8 Convenio de signos: (a) bobina con flujo variable, (b) intensidad asociada a $\phi(t)$, (c) dirección de la tensión inducida

La figura 2.9 muestra la tensión inducida en dos bobinas atravesadas por el mismo flujo.

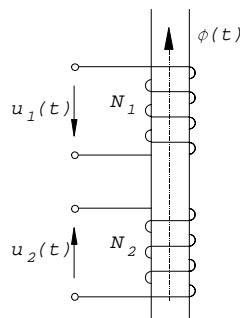


Fig. 2.9 Tensión inducida en bobinas con diferente sentido de bobinado

2.6 Terminales correspondientes de bobinas acopladas

Una vez aclarado el convenio de signos de flujo y tensión en una bobina, es necesario definir el concepto de terminales correspondientes cuando se dispone de varias bobinas con un flujo común (bobinas acopladas):

Terminales correspondientes son aquéllos por los que al entrar una intensidad produce flujo en la misma dirección.

También se pueden definir como:

Terminales correspondientes son aquéllos que al aplicarles una tensión positiva crean flujo en la misma dirección.

Los terminales correspondientes se indican con un punto. Así los terminales 1, 2' y 3' de la figura 2.10 son correspondientes.

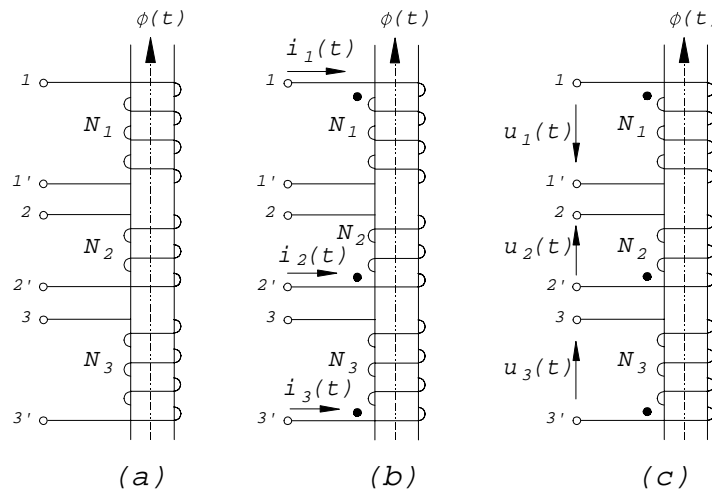


Fig. 2.10 Terminales correspondientes de bobinas acopladas

2.7 Definiciones de inductancia para circuitos lineales y no lineales

La inductancia se define como la relación entre el flujo que concatena una bobina y la intensidad que lo ha creado. En el caso de una bobina única (sin otras acopladas), la inductancia, L , es la relación entre el flujo total concatenado por la bobina y la intensidad que circula por la misma,

$$\psi = N\phi = Li \quad (2.33)$$

Si el núcleo es lineal, aplicando la ley de Ampere,

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{H} d\vec{l} &= \sum N i \Rightarrow H l = N i \Rightarrow \frac{B}{\mu} l = N i \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{B S N}{\mu S N} l &= N i \Rightarrow \frac{\phi N}{\mu S N} l = N i \Rightarrow \frac{\psi}{\mu S N} l = N i \Rightarrow \\
 \Rightarrow \psi &= \frac{\mu S N^2}{l} i
 \end{aligned} \tag{2.34}$$

donde, por comparación, resulta

$$L = \frac{\mu_0 \mu_r S N^2}{l} \tag{2.35}$$

También se puede escribir como

$$L = \frac{N^2}{\mathfrak{R}}, \quad \mathfrak{R} = \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} = \frac{l}{\mu S} \tag{2.36}$$

ya que aplicando la ley de Ohm magnética al circuito:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_{mm} &= \phi \mathfrak{R} \Rightarrow N i = \phi \mathfrak{R} \Rightarrow N^2 i = (N \phi) \mathfrak{R} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \psi &= \frac{N^2}{\mathfrak{R}} i
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

En el caso de comportamiento no lineal del núcleo, la inductancia no es constante, ya que no lo es la permeabilidad magnética, μ . En función de cómo se trabaje con la bobina, se pueden tener distintas definiciones de inductancia:

- inductancia en continua,
- inductancia incremental,
- inductancia equivalente.

Si sólo se aplica tensión continua a la bobina, la inductancia se calcula como:

$$L_c = \frac{\psi}{i} \tag{2.38}$$

que corresponde a la pendiente de la recta $O-A$ de la figura.

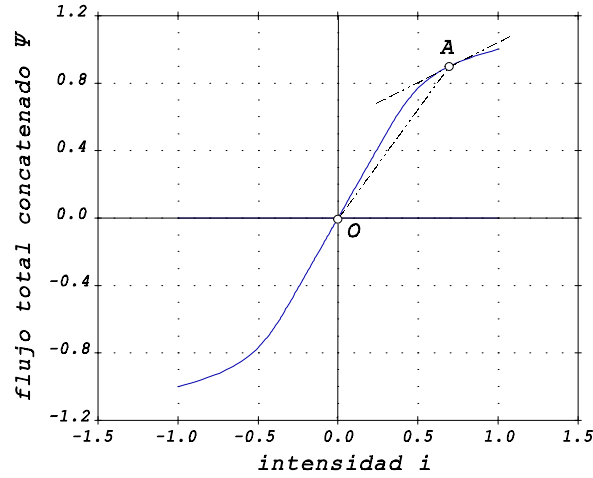


Fig. 2.11 Característica ψ - i de una bobina con núcleo no lineal

Si se aplica a la bobina tensión continua con una tensión alterna de pequeña amplitud, de forma que la tensión total se desplace ligeramente respecto al valor de continua, se utiliza la definición de inductancia incremental para la componente alterna:

$$L_{inc} = \frac{d\psi}{di} \quad (2.39)$$

que corresponde gráficamente a la pendiente de la recta tangente al punto A.

Finalmente, en el caso de una bobina alimentada con tensión senoidal, se define la inductancia equivalente utilizando el concepto de senoide equivalente (Anexo 3). Suponiendo despreciables las pérdidas en la bobina,

$$L_{eq} = \frac{U_{ef}}{\omega I_{ef}} \quad (2.40)$$

donde: U_{ef} = tensión eficaz aplicada a la bobina (V),

ω = pulsación de la tensión (rad/s),

I_{ef} = intensidad eficaz, que contiene armónicos debidos a la no linealidad (A).

2.8 Relación $u(t)$, $i(t)$, $\phi(t)$ en una bobina con núcleo lineal

Definidos los convenios tensión-flujo en una bobina y de fuerza magnetomotriz, las relaciones entre $u(t)$, $i(t)$ y $\phi(t)$ en una bobina lineal quedan completamente definidas.

Tomaremos como sentidos de referencia los de $u(t)$, $i(t)$ y $\phi(t)$ de la bobina de la figura 2.12:

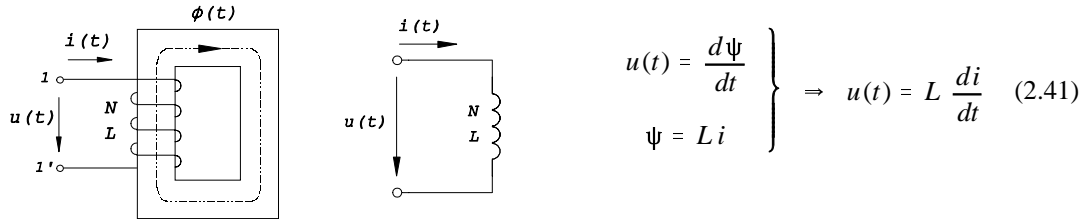


Fig. 2.12 Sentidos de referencia de u - i - ϕ en una bobina

El sentido de $u(t)$ y de $i(t)$ es el de la *intensidad asociada al flujo* $\phi(t)$, o lo que es lo mismo, $u(t)$ e $i(t)$ van de 1 a 1'. Es decir, $u(t)$, $i(t)$ y $\phi(t)$ son concordantes.

Si se tiene una bobina donde las flechas no coinciden con las de la figura 2.12, tan sólo hay que colocar un signo negativo en la magnitud correspondiente. Por ejemplo, las ecuaciones de la bobina de la figura 2.13a son idénticas a la ecuación 2.41, pero cambiando $i(t)$ por $-i(t)$, como se puede observar en la ecuación 2.42. También puede suceder que el sentido del bobinado no coincida, como en la figura 2.13b, en cuyo caso hay que cambiar los signos de $i(t)$ y $u(t)$ porque ambas magnitudes no son concordantes con el flujo dibujado $\phi(t)$.

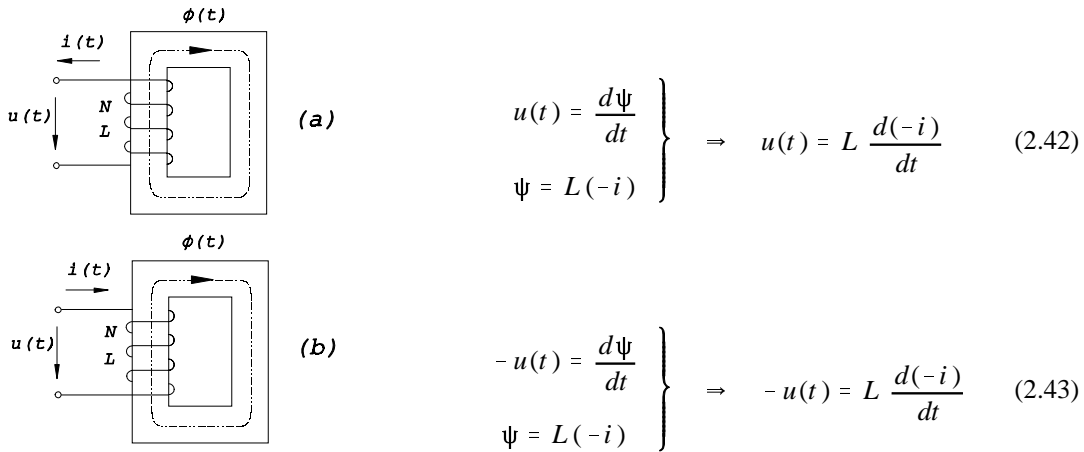


Fig. 2.13 Bobinas con u - i - ϕ no concordantes

3 Descripción del transformador

Un transformador es una máquina eléctrica estática que transfiere energía eléctrica de un circuito a otro, transformando la tensión (u_1) y la corriente (i_1) del circuito llamado primario en la tensión (u_2) y la corriente (i_2) del circuito llamado secundario (Fig. 3.1a).

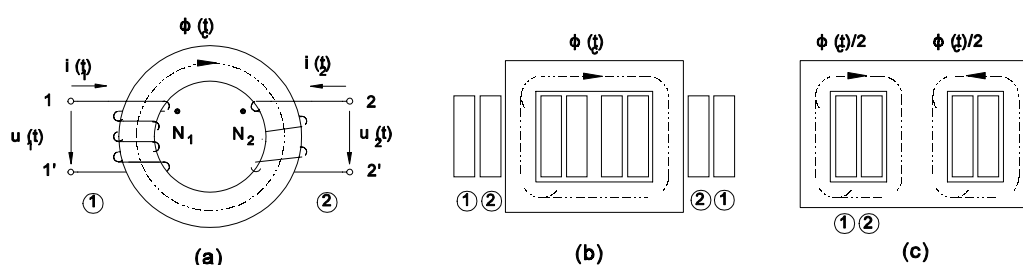


Fig. 3.1 Transformadores con núcleos tipo: (a) toroidal, (b) de columnas, y (c) acorazado

Básicamente, un transformador son *dos o más circuitos eléctricos acoplados magnéticamente mediante un flujo común*, es decir, son dos o más bobinas acopladas. Cuando el transformador está formado por dos bobinas acopladas, como el de la figura 3.1a, se llama *monofásico*.

Para conseguir que haya un flujo común entre las bobinas se puede utilizar un núcleo de aire, aunque resulta mucho más sencillo utilizar un núcleo de hierro u otro material ferromagnético (en este caso, el camino a través del aire también existe, aunque el flujo no es común a los dos devanados, y se llama flujo de dispersión). Para que un devanado induzca tensión en el otro, el flujo común ha de ser variable y, para ello, también ha de serlo la corriente que lo cree (con corriente continua constante no se puede inducir tensión).

Una característica del transformador es su reversibilidad, lo cual quiere decir que también se puede alimentar por el lado u_2, i_2 y ceder energía al lado u_1, i_1 .

Por economía, los transformadores reales se construyen de dimensiones mínimas para que se puedan colocar los devanados, como en las figuras 3.1b y 3.1c, en donde se ha realizado una sección a los mismos.

$$u_k = R_k i_k + u_{i,k} = R_k i_k + L_{d,k} \frac{di_k}{dt} + N_k \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.1)$$

y la ecuación magnética (Ec. 4.11):

$$\sum N_k i_k = H_{Fe} l_{Fe} = \phi_c \mathfrak{R}_c \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones se pueden representar mediante los esquemas equivalentes de la figura 5.2.

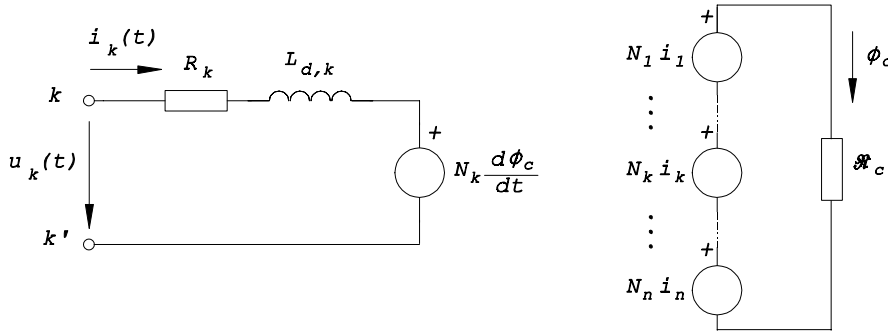


Fig. 5.2 Esquemas equivalentes que representan la ecuación eléctrica del devanado k -ésimo, y la ecuación magnética de un transformador con n devanados

Se observa que el esquema equivalente del circuito eléctrico de cada devanado tiene una fuente de tensión de valor

$$N_k \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.3)$$

Como nos planteamos la posibilidad de juntar todos los esquemas equivalentes en uno solo, si esta fuente de tensión fuera igual para todos ellos, se podrían colocar en paralelo. Dividiendo la ecuación 5.1 por el número de espiras obtenemos

$$\frac{u_k}{N_k} = \frac{R_k}{N_k^2} (N_k i_k) + \frac{L_{d,k}}{N_k^2} \frac{d(N_k i_k)}{dt} + \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.4)$$

donde la intensidad se ha escrito como $N_k i_k$ por analogía con la ecuación 5.2. Aquí surge la necesidad de reducir a una base común, ya que en lugar de trabajar con variables multiplicadas por constantes (como u_k/N_k o $i_k \cdot N_k$) resulta mucho más cómodo definir nuevas variables.

Definamos unos valores base de tensión, corriente, pulsación, flujo y reluctancia magnética. Observando

la ecuación 5.4 se deduce como han de ser estas bases:

$$\begin{aligned} \frac{U_{bI}}{N_1} = \dots = \frac{U_{bk}}{N_k} = \dots = \omega_b \phi_b \\ N_1 I_{bI} = \dots = N_k I_{bk} = \dots = \mathfrak{R}_b \phi_b \end{aligned} \quad (5.5)$$

Normalmente se elige $\omega_b = 1$. La impedancia e inductancia bases se obtienen a partir de las anteriores:

$$Z_{bk} = \frac{U_{bk}}{I_{bk}} \quad , \quad L_{bk} = \frac{U_{bk}}{I_{bk} \omega_b} = \frac{U_{bk}}{I_{bk} \cdot 1} \quad (5.6)$$

Dividiendo cada magnitud por su correspondiente valor base, se llega a la ecuación eléctrica del devanado k -ésimo reducida

$$u_k^r = R_k^r i_k^r + L_{d,k}^r \frac{di_k^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt} \quad (5.7)$$

y a la ecuación magnética reducida

$$\sum i_k^r = \phi_c^r \mathfrak{R}_c^r \quad (5.8)$$

Si el circuito magnético es lineal su reluctancia magnética, \mathfrak{R}_c^r , será constante y por lo tanto independiente del flujo, ϕ_c^r .

En las ecuaciones 5.7 aparece la derivada del flujo. Derivando la ecuación 5.8 y despejando la derivada del flujo, obtenemos

$$\phi_c^r = \frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} \sum i_k^r \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi_c^r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} \sum i_k^r \right) \quad (5.9)$$

La derivada $d\phi_c^r/dt$ se ha representado en el esquema equivalente de la figura 5.2 como una fuente de tensión dependiente, aunque también se puede utilizar una bobina si realizamos los cambios de variable siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sum i_k^r &= i_\mu^r \\ \frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} &= M_\mu^r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_c^r = M_\mu^r i_\mu^r \quad (5.10)$$

Esto significa que hay una relación entre el flujo y una corriente i_μ^r . Esta corriente se llama corriente magnetizante, y es la corriente necesaria para que se establezca el flujo ϕ_c^r en el núcleo. Si el circuito es lineal, M_μ^r será constante, y entonces

$$\frac{d\phi_c^r}{dt} = M_\mu^r \frac{di_\mu^r}{dt} \quad (5.11)$$

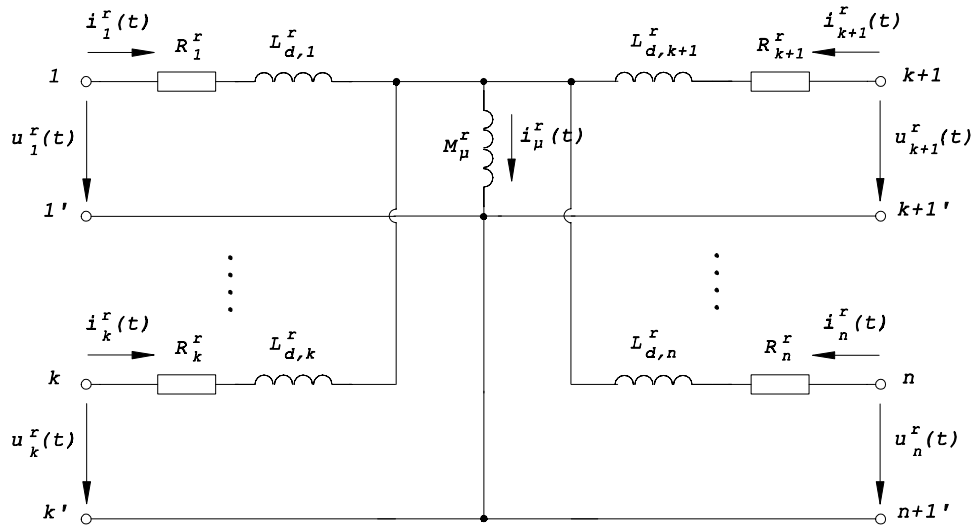


Fig. 5.3 Esquema equivalente reducido de un transformador de n devanados

La figura 5.3 muestra el esquema equivalente que cumple las ecuaciones eléctricas y magnética del transformador. Se ha de recordar que todas las magnitudes están reducidas.

Es importante recordar que las ecuaciones 5.1 y 5.2 son válidas para núcleos lineales o no lineales. En el caso no lineal se llega al mismo esquema equivalente de la figura 5.3, pero donde la inductancia M_μ^r no es lineal (no es constante), y se representa gráficamente como muestra la figura 5.4. La derivada del flujo (Ec. 5.11) en este caso es

$$\frac{d\phi_c^r}{dt} = \frac{d}{dt} (M_\mu^r i_\mu^r) \quad (5.12)$$

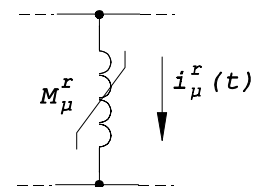


Fig. 5.4 Inductancia magnetizante no lineal

5.2 Esquema equivalente del transformador monofásico con pérdidas en el circuito magnético

A la vista de los resultados del apartado anterior, resulta muy sencillo el estudio de un transformador monofásico considerando las pérdidas magnéticas.

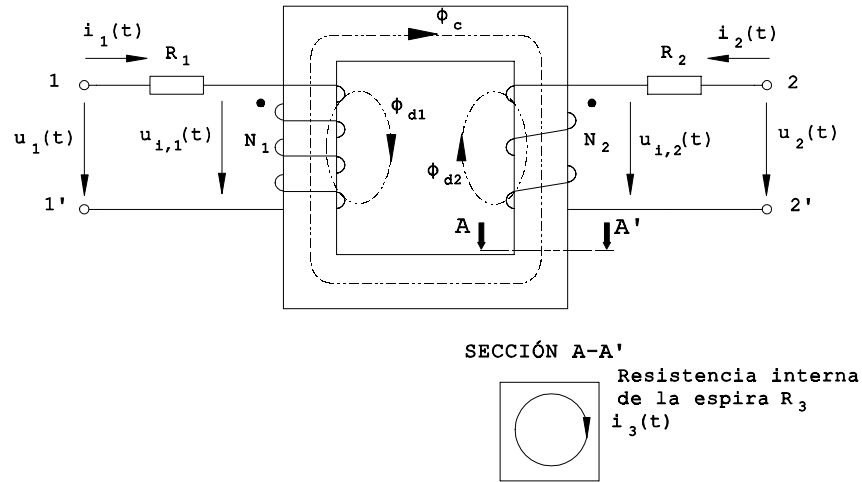


Fig. 5.5 Transformador monofásico con devanado cortocircuitado en el núcleo

Las ecuaciones de los dos devanados son:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + u_{i,1} = R_1 i_1 + L_{d,1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + u_{i,2} = R_2 i_2 + L_{d,2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Asociaremos las pérdidas magnéticas a las que se produzcan en un tercer devanado cortocircuitado embebido en el núcleo magnético, como el de la figura 5.5. Por estar cortocircuitado, su tensión es nula. Tampoco tiene flujo de dispersión al estar integrado en el núcleo. Suponiendo que tiene una sola espira, la ecuación eléctrica de este devanado es:

$$0 = R_3 i_3 + u_{i,3} = R_3 i_3 + 1 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.14)$$

Y la ecuación magnética:

$$\sum N_k i_k = H_{Fe} l_{Fe} = \phi_c \mathfrak{R}_c \quad (5.15)$$

Para reducir las ecuaciones, se eligen las bases mostradas en la ecuación 5.5:

$$\frac{U_{b1}}{N_1} = \frac{U_{b2}}{N_2} = \frac{U_{b3}}{1} = \omega_b \phi_b \quad (5.16)$$

$$N_1 I_{b1} = N_2 I_{b2} = 1 \cdot I_{b3} = \Re_b \phi_b$$

Se observa que las tensiones y corrientes base cumplen la relación de transformación, al igual que en el resto de reducciones realizadas en estos apuntes,

$$\frac{U_{b1}}{U_{b2}} = \frac{I_{b2}}{I_{b1}} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (5.17)$$

Tomaremos $\omega_b = 1$. Reduciendo las ecuaciones:

$$u_1^r = R_1^r i_1^r + L_{d,1}^r \frac{di_1^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt}$$

$$u_2^r = R_2^r i_2^r + L_{d,2}^r \frac{di_2^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt} \quad (5.18)$$

$$0 = R_3^r i_3^r + \frac{d\phi_c^r}{dt}$$

$$i_1^r + i_2^r + i_3^r = \phi_c^r \Re_c^r = M_\mu^r i_\mu^r$$

y si se supone que el núcleo es lineal, la inductancia M_μ^r será constante.

Estas ecuaciones reducidas están representadas en el siguiente esquema equivalente:

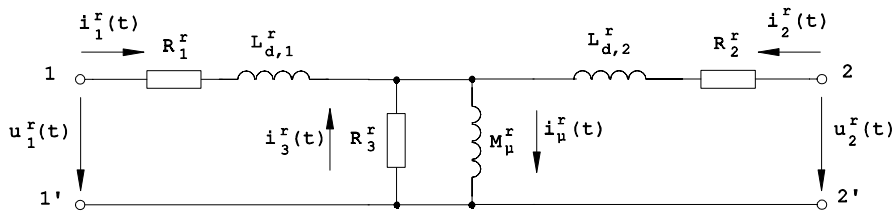


Fig. 5.6 Esquema reducido del transformador monofásico incluyendo las pérdidas en el hierro

Comparando con el esquema de la figura 4.9 se pueden identificar los parámetros del hierro:

$$R_3^r = R_{Fe}^r \quad , \quad i_3^r = -i_{Fe}^r \quad (5.19)$$

4 Expresiones temporales del transformador monofásico

Un transformador monofásico son dos bobinas acopladas. En el caso más general, las bobinas y el núcleo no serán ideales, como en el mostrado en la figura 4.1. La resistencia interna de los devanados está representada por R_1 y R_2 .

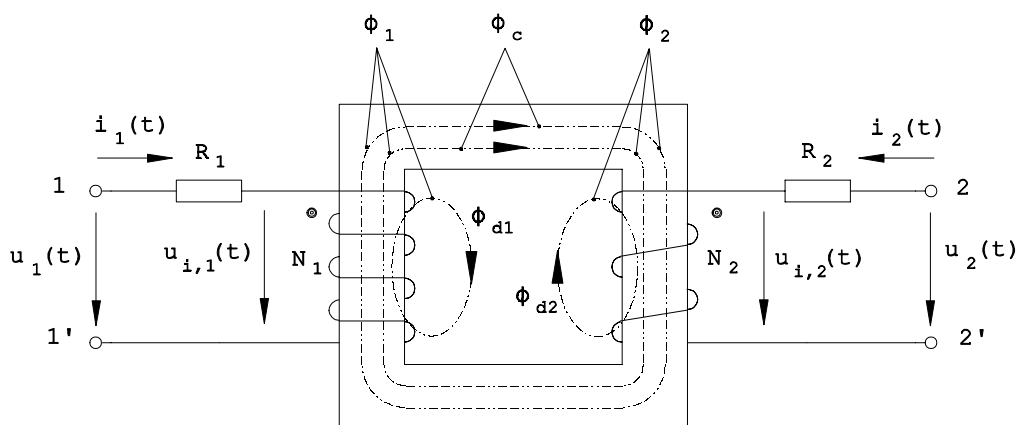


Fig. 4.1 Transformador monofásico con los flujos concatenados por cada devanado

Los flujos concatenados por los devanados son:

ϕ_1	flujo por espira concatenado por la bobina 1 (flujo total)
ϕ_{d1}	flujo por espira concatenado solamente por la bobina 1 (flujo de dispersión)
ϕ_c	flujo por espira concatenado por las bobinas 1 y 2 (flujo común)
ϕ_2	flujo por espira concatenado por la bobina 2 (flujo total)
ϕ_{d2}	flujo por espira concatenado solamente por la bobina 2 (flujo de dispersión)

Se observa que se cumple:

$$\begin{aligned}\phi_{\cap} &= \phi_{\cup} + \phi_{\varepsilon\cap} \\ \phi_{\mid} &= \phi_{\cup} + \phi_{\varepsilon\mid}\end{aligned}\tag{4.1}$$

4.1 Transformador monofásico con núcleo no lineal

Aquí se deducirán las ecuaciones más generales de un transformador monofásico, es decir, con bobinas y núcleo no ideales. Esto significa que:

- las bobinas tienen resistencia interna,
- hay flujo de dispersión (el acoplamiento no es perfecto),
- el núcleo tiene permeabilidad magnética finita ($\mu_{Fe} = \mu_o \mu_r \neq \infty$),
- el núcleo no es lineal ($\mu_{Fe} = \mu_o \mu_r \neq \text{cte}$), y
- el núcleo tiene pérdidas por corrientes parásitas y por ciclo de histéresis.

Una bobina real también tiene un cierto comportamiento capacitivo debido a la capacidad parásita que aparece entre sus espiras. Análogamente, en unas bobinas acopladas habría una capacidad entre espiras de cada bobina y otra capacidad entre espiras de diferentes bobinas. No obstante, los efectos de estas capacidades sólo son apreciables cuando las tensiones de alimentación tienen frecuencias muy elevadas. Sus efectos a 50 y 60 Hz son despreciables.

A continuación se van a justificar las ecuaciones generales del transformador monofásico con núcleo no lineal (con saturación) pero sin tener en cuenta las pérdidas en el núcleo.

Las pérdidas en el núcleo se pueden incorporar al circuito equivalente del transformador añadiendo una resistencia. Una forma de justificar su colocación es estudiando un tercer devanado cortocircuitado embebido en el núcleo (por analogía con los pequeños circuitos que recorren las corrientes inducidas de Foucault). La forma tradicional de justificar la colocación de esta resistencia es menos elegante, pues se basa en deducciones físicas. Aquí se realizará de las dos formas: en el apartado 4.4 se añadirán las pérdidas en la forma tradicional y en el capítulo 5 estudiando el devanado cortocircuitado.

Sea el transformador monofásico de la figura 4.1. Aplicando la ley de inducción de Faraday (Ec. 2.32) a las dos bobinas:

$$u_{\phi\cap}(t) = N_{\cap} \frac{d\phi_{\cap}}{dt} = \frac{d\psi_{\cap}}{dt} \quad u_{\phi\mid}(t) = N_{\mid} \frac{d\phi_{\mid}}{dt} = \frac{d\psi_{\mid}}{dt}\tag{4.2}$$

El flujo total concatenado por cada bobina es:

$$\begin{aligned}\psi_n &= N_n \phi_n = N_n (\phi_{cn} + \phi_v) = \psi_{cn} + N_n \phi_v \\ \psi_l &= N_l \phi_l = N_l (\phi_{cl} + \phi_v) = \psi_{cl} + N_l \phi_v\end{aligned}\quad (4.3)$$

Como los circuitos de dispersión se cierran principalmente a través del aire, se pueden considerar lineales (de permeabilidad μ_0). Al ser lineales, los flujos totales concatenados de dispersión, ψ_{d1} y ψ_{d2} , se pueden escribir en función de unos coeficientes de dispersión (constantes) y de las intensidades,

$$\begin{aligned}\psi_{cn} &= L_{cn} i_n \\ \psi_{cl} &= L_{cl} i_l\end{aligned}\quad (4.4)$$

donde L_{d1} y L_{d2} se podrían escribir como

$$\begin{aligned}L_{cn} &= \frac{N_n^2}{\Re_{cn}}, \quad \Re_{cn} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_{cn}}{S_{cn}} \\ L_{cl} &= \frac{N_l^2}{\Re_{cl}}, \quad \Re_{cl} = \frac{1}{\mu_0} \frac{l_{cl}}{S_{cl}}\end{aligned}\quad (4.5)$$

siendo l_{d1} , l_{d2} , S_{d1} y S_{d2} las longitudes y secciones ficticias de los circuitos por los que se cierran los flujos de dispersión.

Por el contrario, el circuito que se cierra a través del núcleo ferromagnético no es lineal, por lo que:

$$\begin{aligned}\psi_n &= L_{cn} i_n + N_n \phi_v \\ \psi_l &= L_{cl} i_l + N_l \phi_v\end{aligned}\quad (4.6)$$

Teniendo en cuenta la resistencia interna de las bobinas, las tensiones en bornes de las mismas son:

$$\begin{aligned}u_n &= R_n i_n + u_{\phi n} = R_n i_n + L_{cn} \frac{di_n}{dt} + N_n \frac{d\phi_v}{dt} \\ u_l &= R_l i_l + u_{\phi l} = R_l i_l + L_{cl} \frac{di_l}{dt} + N_l \frac{d\phi_v}{dt}\end{aligned}\quad (4.7)$$

Para determinar el flujo común, ϕ_v , se estudia el circuito magnético. Aplicando la ley de Ampere (Ec. 2.4) a un camino cerrado a través del núcleo de la figura 4.1 se obtiene:

$$N_{\cap} i_{\cap} + N_{\mid} i_{\mid} = H_{\mu\mu} l_{\mu\mu} = \frac{B_{\mu\mu}}{\mu_{\mu\mu}} l_{\mu\mu} = \frac{\phi_{\cup} / S_{\mu\mu}}{\mu_{\mu\mu}} l_{\mu\mu} = \phi_{\cup} \left(\frac{1}{\mu_{\mu\mu}} \frac{l_{\mu\mu}}{S_{\mu\mu}} \right) = \phi_{\cup} \mathfrak{R}_{\cup} \quad (4.8)$$

donde se ha supuesto que la intensidad de campo magnético en el hierro, H_{Fe} , es de módulo constante y paralela a los diferenciales de camino del camino elegido, dl . También se ha supuesto constante la sección del núcleo, S_{Fe} . La no linealidad del núcleo está reflejada en la reluctancia magnética del circuito, \mathfrak{R}_{\cup} , pues contiene a la permeabilidad magnética, μ_{Fe} , que a su vez depende del flujo en el núcleo, ϕ_{\cup} :

$$\mathfrak{R}_{\cup} = f_{\cap}(\mu_{\mu\mu}) = f_{\mid}(\phi_{\cup}) \quad (4.9)$$

El comportamiento del transformador está completamente definido por las ecuaciones tensión-corriente (Ec. 4.7) y la ecuación magnética (Ec. 4.8). Para profundizar más en el comportamiento no lineal del transformador en el caso de alimentación senoidal, véase el anexo 3.

Obsérvese que si se hubiera estudiado un transformador de n devanados, las ecuaciones habrían sido idénticas (si se dibujan tensiones y corrientes concordantes con los flujos). La ecuación eléctrica para el devanado k -ésimo es:

$$u_{\gamma} = R_{\gamma} i_{\gamma} + u_{\mathfrak{d}\gamma} = R_{\gamma} i_{\gamma} + L_{\mathfrak{d}\gamma} \frac{di_{\gamma}}{dt} + N_{\gamma} \frac{d\phi_{\cup}}{dt} \quad (4.10)$$

y la ecuación magnética:

$$\Sigma N_{\gamma} i_{\gamma} = H_{\mu\mu} l_{\mu\mu} = \phi_{\cup} \mathfrak{R}_{\cup} \quad (4.11)$$

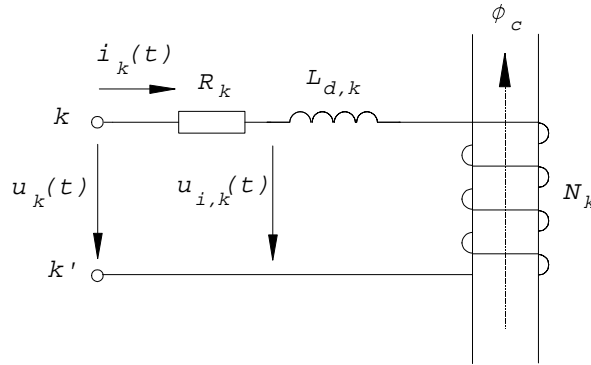


Fig. 4.2 Devanado k -ésimo de un transformador con n devanados

4.2 Transformador monofásico ideal

Un transformador monofásico ideal son dos bobinas acopladas con las siguientes características:

- los devanados no tienen resistencia interna ($R_1 = R_2 = 0$);
- no existe flujo de dispersión ($\phi_{d1} = \phi_{d2} = 0$), es decir, el acoplamiento es perfecto ($k = 1$);
- el núcleo magnético carece de ciclo de histéresis y no existen corrientes de Foucault (las pérdidas en el hierro son nulas);
- el medio magnético tiene permeabilidad infinita ($\mu_{Fe} = \mu_o \mu_r = \infty$, figura 4.5c); y
- las capacidades propias y mutuas entre devanados son nulas.

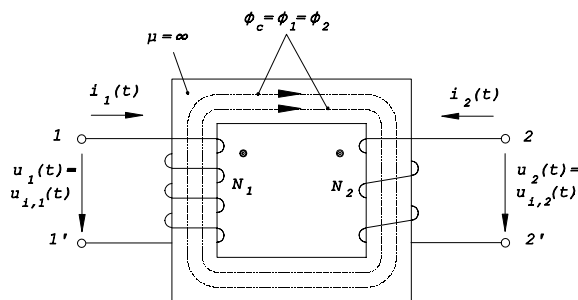


Fig. 4.3 Transformador monofásico ideal

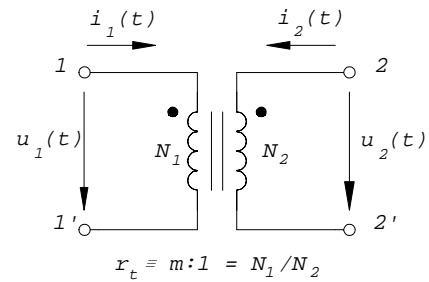


Fig. 4.4 Representación del transformador monofásico ideal

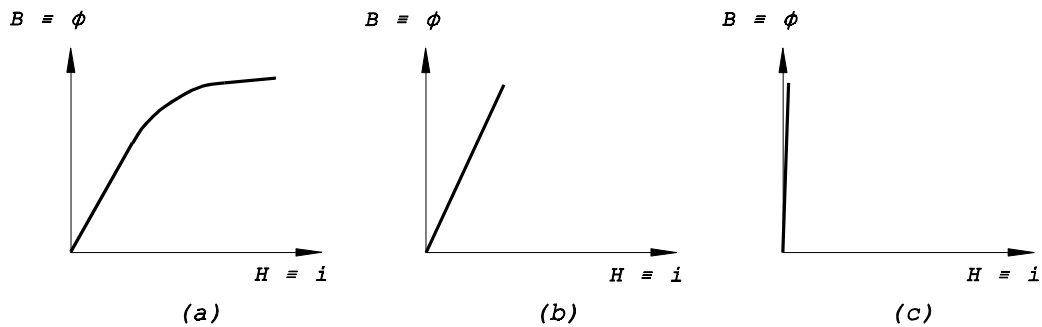


Fig. 4.5 Curva característica B-H de material ferromagnético: (a) no lineal $\mu_{Fe} \neq cte$, (b) lineal $\mu_{Fe} = cte$, y (c) con permeabilidad magnética infinita $\mu_{Fe} = \infty$

Apliquemos una tensión $u_1(t)$ al primario del transformador ideal. Como no hay resistencia interna, esta tensión coincide con la interna, $u_{e,1}(t)$, al igual que en el secundario:

$$u_{\cap}(t) = u_{\phi\cap}(t) \quad , \quad u_{\mid}(t) = u_{\phi\mid}(t) \quad (4.12)$$

El flujo que se crea viene dado por la ley de inducción de Faraday, y como no hay flujo de dispersión, $\phi_1(t) = \phi_2(t) = \phi_c(t)$, las ecuaciones 4.7 se convierten en:

$$\begin{aligned} u_{\cap}(t) &= u_{\phi\cap}(t) = N_{\cap} \frac{d\phi_{\cap}}{dt} = N_{\cap} \frac{d\phi_{\cup}}{dt} \\ u_{\mid}(t) &= u_{\phi\mid}(t) = N_{\mid} \frac{d\phi_{\mid}}{dt} = N_{\mid} \frac{d\phi_{\cup}}{dt} \end{aligned} \quad (4.13)$$

Las ecuaciones 4.13 significan que el flujo que se origina, $\phi_c(t)$, depende únicamente de la tensión de alimentación, $u_1(t)$, y que la tensión que aparece en el secundario depende únicamente del flujo creado, es decir que $u_2(t)$ depende de $u_1(t)$, sin influir para nada las intensidades $i_1(t)$ e $i_2(t)$. En la práctica, la inducción en el núcleo, $B_c = \phi_c / S_{Fe}$, no suele ser superior a 1.5 T. Dividiendo ambas expresiones se obtiene la relación entre tensiones de primario y secundario, llamada también relación de transformación, r :

$$\frac{u_{\cap}(t)}{u_{\mid}(t)} = \frac{N_{\cap}}{N_{\mid}} = r_{\ominus} \equiv m:1 \quad (\text{relación de transformación}) \quad (4.14)$$

La relación de transformación indica la relación entre las tensiones de primario y de secundario en vacío. En la bibliografía de Teoría de Circuitos se suele escribir como la relación $m:1$ y también como $a:1$.

El transformador ideal no tiene pérdidas ni almacena energía en forma de campo eléctrico o magnético, por lo que la potencia instantánea neta que absorbe es nula. Esto equivale a decir que la potencia instantánea que absorbe el primario se cede instantáneamente al secundario y viceversa.

$$p(t) = u_{\cap}(t) i_{\cap}(t) + u_{\mid}(t) i_{\mid}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_{\cap}(t) i_{\cap}(t) = -u_{\mid}(t) i_{\mid}(t) \quad (4.15)$$

De las ecuaciones 4.14 y 4.15 se obtiene la relación entre intensidades de primario y secundario, que en el transformador ideal es la inversa de la relación de transformación:

$$-\frac{i_{\cap}(t)}{i_{\mid}(t)} = \frac{u_{\mid}(t)}{u_{\cap}(t)} = \frac{N_{\mid}}{N_{\cap}} = \frac{1}{r_{\ominus}} \quad (4.16)$$

A la vista de la expresión 4.16 resulta interesante revisar la definición de transformador dada al comienzo del capítulo 3: "transforma la tensión (u_1) y la corriente (i_1) del circuito llamado primario en la tensión (u_2) y la corriente (i_2) del circuito llamado secundario".

La relación entre intensidades también se podría haber deducido a través de la ecuación magnética del circuito. Veámoslo.

Aplicando la ley de Ampere a un camino cerrado a través del núcleo de la figura 4.3, y suponiendo que la intensidad de campo magnético en el hierro, H_{Fe} , es de módulo constante y paralela a los diferenciales de camino del camino elegido, dl , y suponiendo también que la sección del núcleo, S_{Fe} , es constante, se obtiene la ecuación magnética del circuito (Ec. 4.8):

$$N_{\cap} i_{\cap} + N_{\mid} i_{\mid} = H_{\mu} l_{\mu} = \frac{B}{\mu} l_{\mu} = \frac{\phi_{\cup} / S_{\mu}}{\mu} l_{\mu} = \phi_{\cup} \left(\frac{1}{\mu} \frac{l_{\mu}}{S_{\mu}} \right) = \phi_{\cup} \mathfrak{R}_{\cup} \quad (4.17)$$

Como la permeabilidad magnética del transformador ideal es infinita, la reluctancia magnética del circuito es nula, siendo ϕ_c un valor finito definido por la ecuación 4.13, luego:

$$\mu_{\mu} = \infty \Rightarrow \mathfrak{R}_{\cup} = 0 \Rightarrow N_{\cap} i_{\cap} + N_{\mid} i_{\mid} = \phi_{\cup} \mathfrak{R}_{\cup} = 0 \Rightarrow -\frac{i_{\cap}(t)}{i_{\mid}(t)} = \frac{N_{\mid}}{N_{\cap}} \quad (4.18)$$

4.3 Transformador monofásico con núcleo lineal

Consideremos ahora el transformador de la figura 4.1 con el núcleo lineal y sin incorporar todavía las pérdidas por corrientes parásitas y por ciclo de histéresis. Es decir:

- las bobinas tienen resistencia interna,
- hay flujo de dispersión (el acoplamiento no es perfecto),
- el núcleo tiene permeabilidad magnética finita ($\mu_{Fe} = \mu_o \mu_r \neq \infty$),
- el núcleo es lineal ($\mu_{Fe} = \mu_o \mu_r = \text{cte}$), y
- el núcleo no tiene pérdidas por corrientes parásitas ni por ciclo de histéresis.

Si el circuito magnético se considera lineal, es decir, de permeabilidad magnética constante, $\mu_{Fe} = \text{cte}$, la reluctancia magnética del circuito también lo es, $\mathfrak{R}_c = \text{cte}$. Despejando ϕ_c de la ecuación 4.8:

$$\phi_{\cup} = \frac{N_{\cap} i_{\cap} + N_{\mid} i_{\mid}}{\mathfrak{R}_{\cup}}, \quad \mathfrak{R}_{\cup} = \frac{1}{\mu} \frac{l_{\mu}}{S_{\mu}} = \text{cte} \quad (4.19)$$

y sustituyéndolo en la ecuación 4.7:

$$\begin{aligned} u_{\cap} &= R_{\cap} i_{\cap} + L_{\cap} \frac{di_{\cap}}{dt} + N_{\cap} \frac{d}{dt} \left(\frac{N_{\cap} i_{\cap} + N_{\mid} i_{\mid}}{\mathfrak{R}_{\cup}} \right) = \\ &= R_{\cap} i_{\cap} + L_{\cap} \frac{di_{\cap}}{dt} + \frac{N_{\cap}^2}{\mathfrak{R}_{\cup}} \frac{di_{\cap}}{dt} + \frac{N_{\cap} N_{\mid}}{\mathfrak{R}_{\cup}} \frac{di_{\mid}}{dt} \end{aligned} \quad (4.20)$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d}{dt} \left(\frac{N_1 i_1 + N_2 i_2}{\mathfrak{R}_{\sigma}} \right) = \\
 &= R_1 i_1 + L_{\sigma} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{\sigma}} \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_{\sigma}} \frac{di_2}{dt}
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

El coeficiente de inducción mutua de dos bobinas acopladas es (ver anexo 1):

$$M = \frac{N_2 N_1}{\mathfrak{R}_{\sigma}} \tag{4.22}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 4.20 y 4.21:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= R_2 i_2 + L_{\sigma} \frac{di_2}{dt} + \left(M \frac{N_2}{N_1} \right) \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = \\
 &= R_2 i_2 + L_{\sigma} \frac{di_2}{dt} + \left(M \frac{N_2}{N_1} \right) \frac{d}{dt} \left(i_2 + i_1 \frac{N_1}{N_2} \right)
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}
 u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma} \frac{di_1}{dt} + \left(M \frac{N_1}{N_2} \right) \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} = \\
 &= R_1 i_1 + L_{\sigma} \frac{di_1}{dt} + \left(M \frac{N_1}{N_2} \right) \frac{d}{dt} \left(i_1 + i_2 \frac{N_2}{N_1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Definiendo la inductancia de magnetización como:

$$M'_{\mu} = M \frac{N_2}{N_1} \tag{4.25}$$

La inductancia de magnetización así definida se llama *referida al primario*, porque es igual al coeficiente de inducción mutua referido al primario (Fig. A2.4). La ecuación diferencial anterior queda:

$$\begin{aligned}
 u_2 &= R_2 i_2 + L_{\sigma} \frac{di_2}{dt} + M'_{\mu} \frac{d}{dt} \left(i_2 + i_1 \frac{N_1}{N_2} \right) \\
 u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma} \frac{di_1}{dt} + M'_{\mu} \left(\frac{N_1}{N_2} \right) \frac{d}{dt} \left(i_1 + i_2 \frac{N_2}{N_1} \right)
 \end{aligned} \tag{4.26}$$

Vamos a intentar escribirlas de forma que las variables sean i_1 e i_2 (N_2/N_1). Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por (N_1/N_2):

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + M'_{\mu} \frac{d}{dt} \left(i_1 + i_2 \frac{N_1}{N_2} \right) \\ u_2 \frac{N_2}{N_1} &= R_2 \left(\frac{N_2}{N_1} \right) i_1 + L_{\sigma 2} \left(\frac{N_2}{N_1} \right) \frac{d}{dt} \left(i_1 \frac{N_1}{N_2} \right) + M'_{\mu} \frac{d}{dt} \left(i_1 \frac{N_1}{N_2} + i_2 \right) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Por claridad, realizamos un cambio de notación:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{\sigma 1} \frac{di_1}{dt} + M'_{\mu} \frac{d}{dt} (i_1 + i'_1) \\ u'_1 &= R'_1 i'_1 + L'_{\sigma 1} \frac{di'_1}{dt} + M'_{\mu} \frac{d}{dt} (i'_1 + i_1) \\ u'_1 &= u_1 \frac{N_2}{N_1} \quad i'_1 = i_1 \frac{N_1}{N_2} \quad R'_1 = R_1 \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \quad L'_{\sigma 1} = L_{\sigma 1} \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2 \end{aligned} \quad (4.28)$$

En estas ecuaciones, i'_1 , u'_1 , R'_1 y $L'_{\sigma 1}$ son los llamados valores reducidos al primario. Su representación mediante un circuito eléctrico (Fig. 4.6) constituye el denominado esquema reducido al primario.

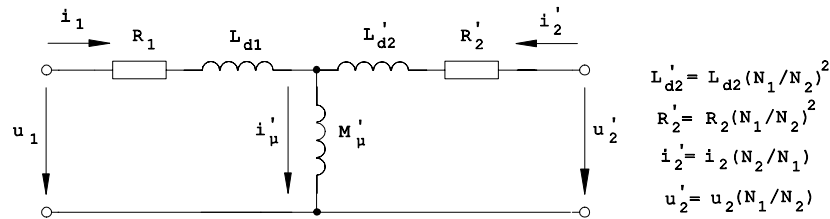


Fig. 4.6 Circuito eléctrico equivalente de las ecuaciones 4.28, que constituye el esquema reducido al primario. Las variables del secundario están reducidas al primario: $u'_2 = u_2(N_1/N_2)$ e $i'_2 = i_2(N_2/N_1)$

Para tener en el secundario del circuito de la figura 4.6 las variables u_2 e i_2 , que son las que hay realmente en el secundario del transformador de la figura 4.1, se puede colocar un transformador ideal con relación de transformación (N_1/N_2), ya que según las ecuaciones 4.16 y 4.28:

$$\left. \begin{aligned} u_2' &= u_2 \frac{N_1}{N_2} \\ i_2' &= i_2 \frac{N_2}{N_1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{u_2'}{u_2} = \frac{i_2'}{i_2} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (4.29)$$

El resultado se muestra en la figura 4.7.

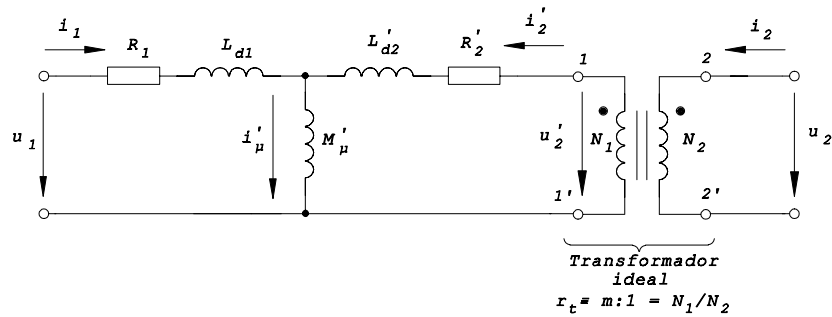


Fig. 4.7 Circuito eléctrico equivalente de las ecuaciones 4.28. Las variables del secundario son u_2 e i_2

Los componentes referentes a la bobina del secundario (R_2 y L_{d2}) se suelen representar en el secundario del transformador. Para pasar una impedancia del primario al secundario de un transformador ideal hay que dividirla por el cuadrado de la relación de transformación ($r_t \equiv N_1 / N_2$, ver capítulo 10.3 y figura 10.5). Haciendo esto se obtienen los valores reales de R_2 y L_{d2} (valores no reducidos), figura 4.8.

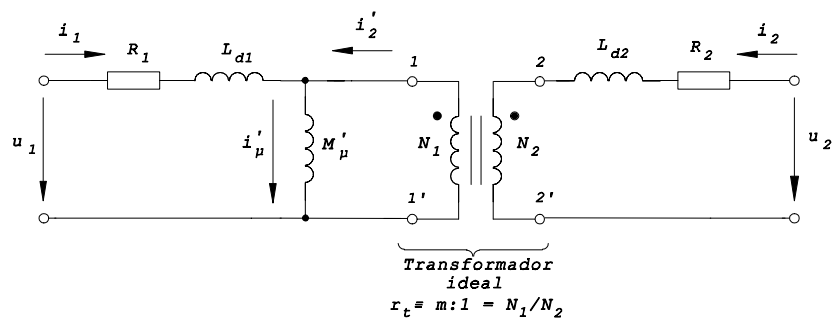


Fig. 4.8 Circuito eléctrico equivalente de las ecuaciones 4.30

Las ecuaciones que está representando el esquema de la figura 4.8 son:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + M'_\mu \frac{d}{dt} (i_1 + i_2') \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + \left[M'_\mu \frac{d}{dt} (i_2' + i_1) \right] \frac{N_2}{N_1} \quad i_2' = i_2 \frac{N_2}{N_1} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Se suele definir la corriente magnetizante, i_μ' , como:

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_\mu' = H_{Fe} l_{Fe} = \phi_c \mathfrak{R}_c \quad (4.31)$$

que representa la corriente necesaria para crear el flujo ϕ_c en el núcleo. Es la intensidad que consume el transformador cuando el secundario está en vacío, ya que: $N_1 i_1 + N_2 i_2 = N_1 i_1 + 0 = N_1 i_\mu'$. Esta corriente es consecuencia de tener un núcleo con permeabilidad finita. Sustituyendo i_μ' en la ecuación 4.30.

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + M'_\mu \frac{di_\mu'}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + \left(M'_\mu \frac{di_\mu'}{dt} \right) \frac{N_2}{N_1} \end{aligned} \quad (4.32)$$

4.4 Incorporación de las pérdidas en el núcleo: transformador monofásico real

El transformador monofásico real tiene un comportamiento no lineal definido por las ecuaciones 4.7 y 4.8. Pero el modelo que se emplea en la práctica es un modelo lineal que tiene en cuenta las pérdidas en el núcleo. Su validez está limitada a que se puedan despreciar los efectos de saturación del núcleo, lo que sucede en la mayoría de los casos.

Las pérdidas que provocan la histéresis magnética y las corrientes parásitas de Foucault (pérdidas magnéticas) no están incluidas en el esquema de la figura 4.8. Sea por deducciones físicas o con apoyo matemático (Cap. 5), se termina incorporando en el esquema una resistencia ficticia, R_{Fe}' , tal que su potencia media disipada coincida con estas pérdidas. Como son proporcionales aproximadamente al cuadrado de la tensión de alimentación del transformador, se suele colocar en paralelo con M'_μ . El esquema resultante es el siguiente.

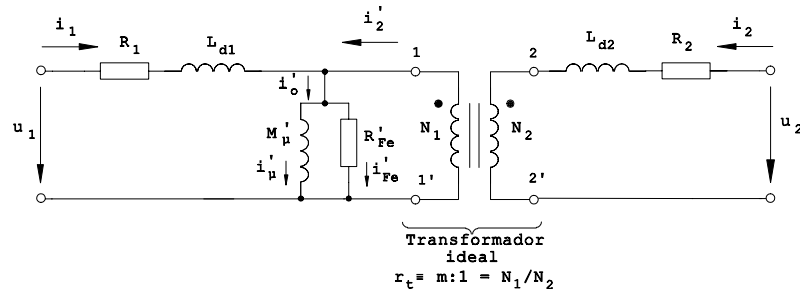


Fig. 4.9 Esquema equivalente del transformador monofásico real incluyendo pérdidas en el núcleo

Se define la corriente de vacío referida al primario, i_o' , como la suma de la magnetizante y la de pérdidas en el núcleo, también referidas al primario:

$$i_o' = i_{Fe}' + i_{\mu}' \quad (4.33)$$

La corriente de vacío es la que consume el transformador cuando el secundario está en vacío, y es necesaria para establecer el flujo en el hierro y para compensar las pérdidas magnéticas.

Se puede observar que las relaciones tensión-corriente en el transformador real son algo más complicadas que en el transformador ideal (Ec. 4.16). No obstante, el comportamiento de ambos es cualitativamente idéntico. Del transformador real de la figura 4.9 se puede llegar al ideal despreciando las resistencias internas (R_1, R_2), las caídas de tensión por flujo de dispersión ($L_{d1} i_1, L_{d2} i_2$), las pérdidas en el hierro (i_{Fe}') y la corriente magnetizante, (i_{μ}'), consecuencia de un núcleo con permeabilidad finita.

5 Procedimiento general para obtener el esquema equivalente de un transformador

En este capítulo se encontrará el esquema equivalente de un transformador con cualquier número de devanados y, en particular, el del transformador de dos devanados (monofásico) con pérdidas en el núcleo, de una forma mucho más sencilla que la empleada en los apartados 4.3 y 4.4.

Para ello, será necesario reducir ambas ecuaciones mediante una base común.

La demostración realizada en el capítulo 4 para encontrar las ecuaciones y el esquema equivalente del transformador monofásico es un caso particular de la que se utilizará aquí. La diferencia es que allí se ha realizado la reducción al primario sin decirlo, mientras que aquí se reduce a una base cualquiera (no tiene por qué ser al primario).

5.1 Esquema equivalente de un transformador de varios devanados

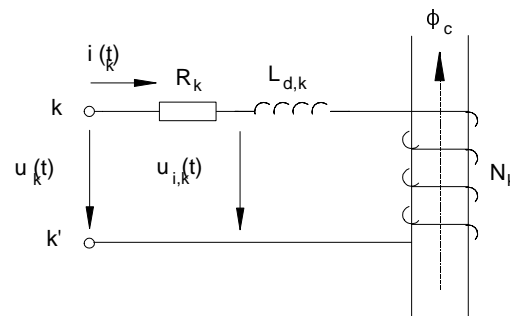


Fig. 5.1 Devanado k -ésimo de un transformador con n devanados

Sea un transformador de n devanados. La ecuación eléctrica para el devanado k -ésimo (Ec. 4.10) es:

$$u_k = R_k i_k + u_{i,k} = R_k i_k + L_{d,k} \frac{di_k}{dt} + N_k \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.1)$$

y la ecuación magnética (Ec. 4.11):

$$\sum N_k i_k = H_{Fe} l_{Fe} = \phi_c \mathfrak{R}_c \quad (5.2)$$

Estas ecuaciones se pueden representar mediante los esquemas equivalentes de la figura 5.2.

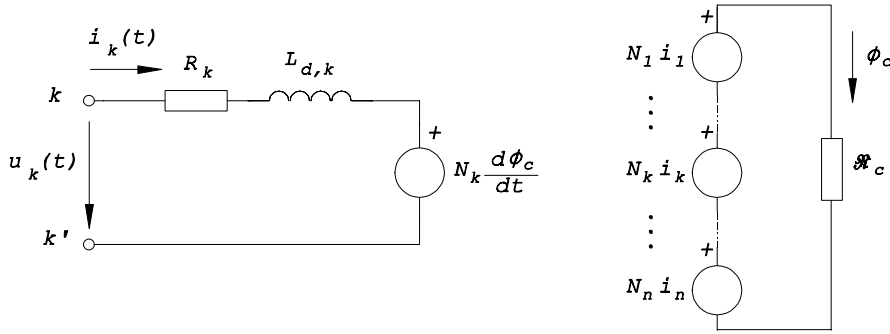


Fig. 5.2 Esquemas equivalentes que representan la ecuación eléctrica del devanado k -ésimo, y la ecuación magnética de un transformador con n devanados

Se observa que el esquema equivalente del circuito eléctrico de cada devanado tiene una fuente de tensión de valor

$$N_k \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.3)$$

Como nos planteamos la posibilidad de juntar todos los esquemas equivalentes en uno solo, si esta fuente de tensión fuera igual para todos ellos, se podrían colocar en paralelo. Dividiendo la ecuación 5.1 por el número de espiras obtenemos

$$\frac{u_k}{N_k} = \frac{R_k}{N_k^2} (N_k i_k) + \frac{L_{d,k}}{N_k^2} \frac{d(N_k i_k)}{dt} + \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.4)$$

donde la intensidad se ha escrito como $N_k i_k$ por analogía con la ecuación 5.2. Aquí surge la necesidad de reducir a una base común, ya que en lugar de trabajar con variables multiplicadas por constantes (como u_k/N_k o $i_k \cdot N_k$) resulta mucho más cómodo definir nuevas variables.

Definamos unos valores base de tensión, corriente, pulsación, flujo y reluctancia magnética. Observando

la ecuación 5.4 se deduce como han de ser estas bases:

$$\begin{aligned} \frac{U_{bI}}{N_1} = \dots = \frac{U_{bk}}{N_k} = \dots = \omega_b \phi_b \\ N_1 I_{bI} = \dots = N_k I_{bk} = \dots = \mathfrak{R}_b \phi_b \end{aligned} \quad (5.5)$$

Normalmente se elige $\omega_b = 1$. La impedancia e inductancia bases se obtienen a partir de las anteriores:

$$Z_{bk} = \frac{U_{bk}}{I_{bk}} \quad , \quad L_{bk} = \frac{U_{bk}}{I_{bk} \omega_b} = \frac{U_{bk}}{I_{bk} \cdot 1} \quad (5.6)$$

Dividiendo cada magnitud por su correspondiente valor base, se llega a la ecuación eléctrica del devanado k -ésimo reducida

$$u_k^r = R_k^r i_k^r + L_{d,k}^r \frac{di_k^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt} \quad (5.7)$$

y a la ecuación magnética reducida

$$\sum i_k^r = \phi_c^r \mathfrak{R}_c^r \quad (5.8)$$

Si el circuito magnético es lineal su reluctancia magnética, \mathfrak{R}_c^r , será constante y por lo tanto independiente del flujo, ϕ_c^r .

En las ecuaciones 5.7 aparece la derivada del flujo. Derivando la ecuación 5.8 y despejando la derivada del flujo, obtenemos

$$\phi_c^r = \frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} \sum i_k^r \quad \Rightarrow \quad \frac{d\phi_c^r}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} \sum i_k^r \right) \quad (5.9)$$

La derivada $d\phi_c^r/dt$ se ha representado en el esquema equivalente de la figura 5.2 como una fuente de tensión dependiente, aunque también se puede utilizar una bobina si realizamos los cambios de variable siguientes:

$$\left. \begin{aligned} \sum i_k^r &= i_\mu^r \\ \frac{1}{\mathfrak{R}_c^r} &= M_\mu^r \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_c^r = M_\mu^r i_\mu^r \quad (5.10)$$

Esto significa que hay una relación entre el flujo y una corriente i_μ^r . Esta corriente se llama corriente magnetizante, y es la corriente necesaria para que se establezca el flujo ϕ_c^r en el núcleo. Si el circuito es lineal, M_μ^r será constante, y entonces

$$\frac{d\phi_c^r}{dt} = M_\mu^r \frac{di_\mu^r}{dt} \quad (5.11)$$

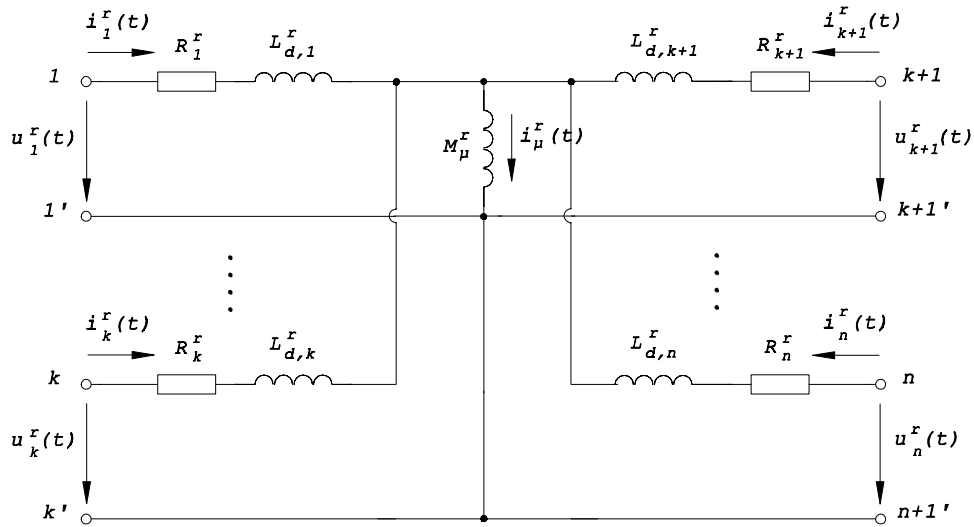


Fig. 5.3 Esquema equivalente reducido de un transformador de n devanados

La figura 5.3 muestra el esquema equivalente que cumple las ecuaciones eléctricas y magnética del transformador. Se ha de recordar que todas las magnitudes están reducidas.

Es importante recordar que las ecuaciones 5.1 y 5.2 son válidas para núcleos lineales o no lineales. En el caso no lineal se llega al mismo esquema equivalente de la figura 5.3, pero donde la inductancia M_μ^r no es lineal (no es constante), y se representa gráficamente como muestra la figura 5.4. La derivada del flujo (Ec. 5.11) en este caso es

$$\frac{d\phi_c^r}{dt} = \frac{d}{dt} (M_\mu^r i_\mu^r) \quad (5.12)$$

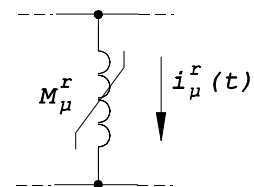


Fig. 5.4 Inductancia magnetizante no lineal

5.2 Esquema equivalente del transformador monofásico con pérdidas en el circuito magnético

A la vista de los resultados del apartado anterior, resulta muy sencillo el estudio de un transformador monofásico considerando las pérdidas magnéticas.

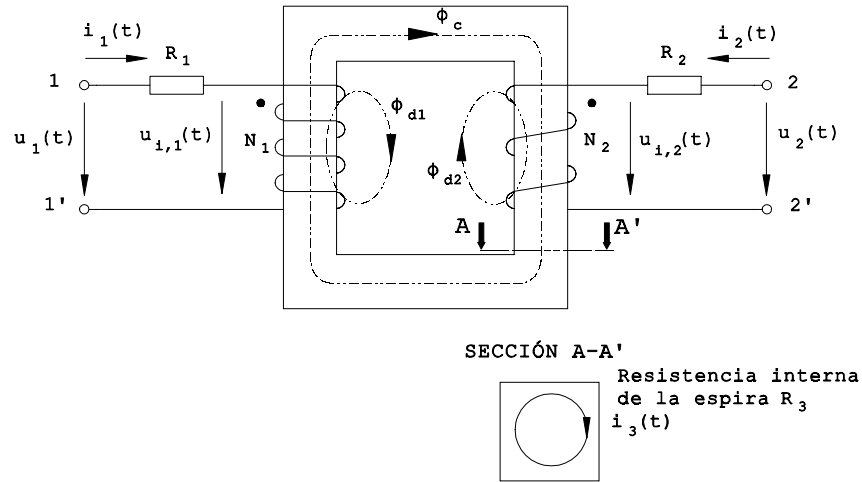


Fig. 5.5 Transformador monofásico con devanado cortocircuitado en el núcleo

Las ecuaciones de los dos devanados son:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + u_{i,1} = R_1 i_1 + L_{d,1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + u_{i,2} = R_2 i_2 + L_{d,2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Asociaremos las pérdidas magnéticas a las que se produzcan en un tercer devanado cortocircuitado embebido en el núcleo magnético, como el de la figura 5.5. Por estar cortocircuitado, su tensión es nula. Tampoco tiene flujo de dispersión al estar integrado en el núcleo. Suponiendo que tiene una sola espira, la ecuación eléctrica de este devanado es:

$$0 = R_3 i_3 + u_{i,3} = R_3 i_3 + 1 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (5.14)$$

Y la ecuación magnética:

$$\sum N_k i_k = H_{Fe} l_{Fe} = \phi_c \mathcal{R}_c \quad (5.15)$$

Para reducir las ecuaciones, se eligen las bases mostradas en la ecuación 5.5:

$$\frac{U_{b1}}{N_1} = \frac{U_{b2}}{N_2} = \frac{U_{b3}}{1} = \omega_b \phi_b \quad (5.16)$$

$$N_1 I_{b1} = N_2 I_{b2} = 1 \cdot I_{b3} = \Re_b \phi_b$$

Se observa que las tensiones y corrientes base cumplen la relación de transformación, al igual que en el resto de reducciones realizadas en estos apuntes,

$$\frac{U_{b1}}{U_{b2}} = \frac{I_{b2}}{I_{b1}} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (5.17)$$

Tomaremos $\omega_b = 1$. Reduciendo las ecuaciones:

$$u_1^r = R_1^r i_1^r + L_{d,1}^r \frac{di_1^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt}$$

$$u_2^r = R_2^r i_2^r + L_{d,2}^r \frac{di_2^r}{dt} + \frac{d\phi_c^r}{dt} \quad (5.18)$$

$$0 = R_3^r i_3^r + \frac{d\phi_c^r}{dt}$$

$$i_1^r + i_2^r + i_3^r = \phi_c^r \Re_c^r = M_\mu^r i_\mu^r$$

y si se supone que el núcleo es lineal, la inductancia M_μ^r será constante.

Estas ecuaciones reducidas están representadas en el siguiente esquema equivalente:

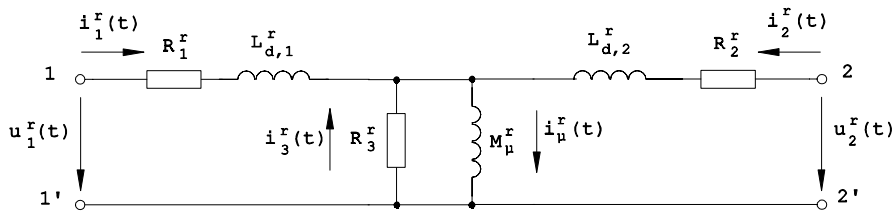


Fig. 5.6 Esquema reducido del transformador monofásico incluyendo las pérdidas en el hierro

Comparando con el esquema de la figura 4.9 se pueden identificar los parámetros del hierro:

$$R_3^r = R_{Fe}^r \quad , \quad i_3^r = -i_{Fe}^r \quad (5.19)$$

6 Transformador monofásico en régimen permanente senoidal

El transformador se alimenta normalmente con tensión senoidal, por lo que todas las magnitudes resultan senoidales en régimen permanente. En realidad la corriente de vacío del transformador no lo es, debido a la saturación, pero ya se ha comentado que se acepta la aproximación de núcleo lineal (aunque redefiniendo los parámetros del mismo, R_{Fe}' y M_μ'). Por ello, las ecuaciones (y circuitos) que se utilizan son las de régimen permanente senoidal. Estas ecuaciones se obtienen pasando las expresiones temporales a notación fasorial (la derivada se convierte en el operador $j\omega$).

Para deducir en los capítulos 4 y 5 las ecuaciones que rigen el comportamiento del transformador en el dominio del tiempo, el transformador se ha considerado con tensiones y corrientes de ambos devanados hacia su interior. Cuando el transformador se alimenta a través de una fuente de tensión por el primario y se conecta en su secundario una carga, la dirección real de la intensidad del secundario va en sentido contrario al dibujado. Por ello, a partir de ahora, $i_2(t)$ siempre se dibujará en dirección contraria, sin perder por ello ninguna generalidad en las expresiones (donde haya i_2 habrá que poner $-i_2$).

6.1 Transformador monofásico ideal

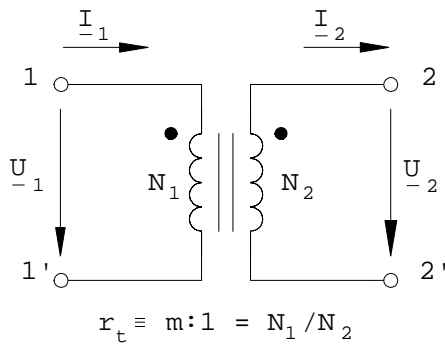


Fig. 6.1 Transformador monofásico ideal en régimen permanente senoidal

En las ecuaciones del transformador monofásico ideal no afecta el hecho de trabajar con fasores o con magnitudes temporales, ya que no hay derivadas. Recordémoslas:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (6.1)$$

Por ser ideal, no consume internamente potencia activa ni reactiva, y por ello se cumple que

$$\underline{S} = \underline{U}_1 I_1^* = \underline{U}_2 I_2^* \quad (6.2)$$

6.2 Transformador monofásico real

A partir del circuito de la figura 4.9 se obtiene el siguiente esquema equivalente del transformador monofásico real para régimen permanente senoidal:

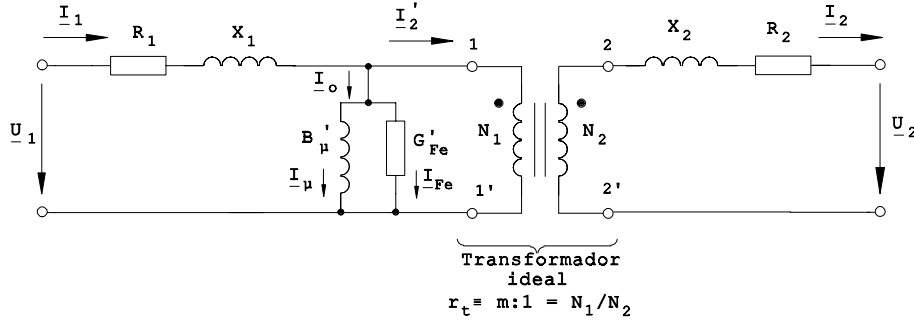


Fig. 6.2 Esquema equivalente del transformador monofásico real para régimen permanente senoidal

donde: R_1 = resistencia del devanado primario en Ω ,
 X_1 = reactancia de dispersión del devanado primario en Ω ($L_{d1}\omega$),
 R_2 = resistencia del devanado secundario en Ω ,
 X_2 = reactancia de dispersión del devanado secundario en Ω ($L_{d2}\omega$),
 G_{Fe}' = conductancia de pérdidas en el hierro vista desde el primario en Ω^{-1} ($1/R_{Fe}'$),
 B_{μ}' = susceptancia de magnetización vista desde el primario en Ω^{-1} ($1/X_{\mu}' = 1/(M_{\mu}'\omega)$).

En realidad, cuando un transformador monofásico real se alimenta con tensión senoidal pura, no todas las magnitudes son senoidales. Debido a la saturación del núcleo, la corriente de vacío no lo es (figura A3.1b del anexo 3).

Como en vacío las pérdidas en el cobre son despreciables frente a las del hierro, lo que se hace es definir una intensidad senoidal, I_o' , que produzca las mismas pérdidas en una resistencia ficticia R_{Fe}' que las que se producen en el hierro (para ello ha de tener el mismo valor eficaz que la intensidad de vacío real). Es la llamada senoide equivalente (Anexo 3). A partir de esta I_o' senoidal se calculan la resistencia e inductancia ficticias R_{Fe}' y M_{μ}' .

Las impedancias de la figura 6.2 se pueden agrupar como:

$$\underline{Z}_1 = R_1 + jX_1 \quad \underline{Z}_2 = R_2 + jX_2 \quad \underline{Y}_o' = \frac{1}{\underline{Z}_o'} = \frac{1}{R_{Fe}'} + \frac{1}{jX_{\mu}'} = G_{Fe}' - jB_{\mu}' \quad (6.3)$$

Al contrario de lo que sucede con la resistencia y reactancia de los devanados, la conductancia G_{fe}' y la susceptancia B_{μ}' no pertenecen a ninguno de los dos devanados sino que son propias del transformador. Por ello, estamos hablando de conductancia y susceptancia vistas desde uno de los devanados (en la figura 6.2 se han denotado con el superíndice ': vistas por el primario).

Las ecuaciones del esquema de la figura 6.2 son:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= R_1 I_1 + jX_1 I_1 + Z_o' (I_1 - I_2') \\ \underline{U}_2 &= -R_2 I_2 - jX_2 I_2 + \left[Z_o' (-I_2' + I_1) \right] \frac{N_2}{N_1} \quad I_2' = I_2 \frac{N_2}{N_1} \end{aligned} \quad (6.4)$$

7 Valores nominales. Placa de características

En este capítulo se comentarán los parámetros para los cuales se ha diseñado un transformador monofásico. Conceptualmente son idénticos para el transformador trifásico, aunque para concretar las diferencias véase el capítulo 20.3.

7.1 Valores nominales

Los valores nominales de una máquina eléctrica son aquellos para los cuales ha sido diseñada. Los más importantes de un transformador diseñado para trabajar en régimen senoidal son:

- potencia nominal,
- tensión nominal de primario y secundario,
- intensidad nominal de primario y secundario,
- relación de transformación, y
- frecuencia nominal.

Al igual que en otras máquinas eléctricas, la potencia máxima que puede suministrar el transformador está limitada por la calidad de sus aislantes, que se pueden deteriorar por un exceso de tensión o por un exceso de temperatura:

- la tensión máxima del aislante fija la tensión máxima del transformador;
- la temperatura máxima del aislante, junto con la capacidad de disipación de calor del transformador, fija las pérdidas máximas que se pueden producir en su interior (pérdidas en el hierro y en el cobre). Para una tensión determinada (pérdidas en el hierro constantes) y una sección de conductor determinada (resistencia constante, $R = \rho \cdot l / S$), la temperatura máxima del aislante fija una intensidad máxima en el transformador.

Potencia nominal, S_n

Es la potencia aparente (VA, kVA o MVA) que se obtiene a partir de la tensión nominal y la corriente nominal de ambos devanados del transformador. Para el transformador monofásico se calcula como:

$$S_n = U_{n1} I_{n1} = U_{n2} I_{n2} \quad (7.1)$$

Salvando las pérdidas, indica la potencia activa máxima que podría suministrar el secundario del transformador con carga resistiva y régimen permanente sin que se produzca un calentamiento excesivo. En condiciones intermitentes de funcionamiento (conexiones y desconexiones periódicas), el transformador puede suministrar hasta 1,5 veces la potencia nominal. El motivo es que durante el tiempo de desconexión el transformador se enfriará hasta la temperatura ambiente (u otra intermedia entre la de funcionamiento y la ambiente), y un transformador frío puede suministrar una potencia superior a la nominal mientras se calienta hasta alcanzar su temperatura máxima.

Tensión nominal, U_{n1} , U_{n2}

Es la tensión que se debe aplicar a los devanados del transformador para que funcione correctamente en régimen permanente sin deterioro del mismo. En condiciones intermitentes de funcionamiento, se pueden admitir sobretensiones de 1,05 veces la tensión nominal.

Intensidad nominal, I_{n1} , I_{n2}

Es la intensidad máxima que puede circular por los devanados del transformador sin deterioro de los mismos. En condiciones intermitentes se pueden admitir sobrecargas.

Relación de transformación, r_t

Es la relación entre tensiones de primario y secundario cuando el transformador trabaja en vacío. En el transformador monofásico se suele tomar como la relación entre números de espiras de primario y secundario o, lo que es lo mismo, entre U_{n1} y U_{n2} :

$$r_t = \frac{N_1}{N_2} = \frac{U_{n1}}{U_{n2}} \quad (7.2)$$

Frecuencia nominal, f_n

Es la frecuencia a la que corresponden el resto de valores nominales.

Los valores nominales de un transformador son unos valores de funcionamiento, pero también puede funcionar correctamente con otros valores diferentes. Por ejemplo:

- puede suministrar potencias inferiores a la nominal (las potencias están fijadas por la carga), o lo que es lo mismo, puede suministrar intensidades inferiores a la nominal, que es lo que normalmente sucede;
- puede trabajar a tensiones inferiores a la nominal, aunque no podrá suministrar entonces la potencia máxima (sí podrá suministrar la intensidad máxima);
- puede trabajar a otra frecuencia, aunque si es superior se producirán mayores pérdidas en el hierro, con lo que la potencia máxima será inferior a la nominal.

7.2 Placa de características

La placa de características de un transformador contiene, entre otros, los siguientes valores:

- potencia nominal, S_n ,
- tensiones nominales de primario y secundario, U_{n1} y U_{n2} ,
- intensidades nominales de primario y secundario, I_{n1} e I_{n2} ,
- relación de transformación, r ,
- frecuencia nominal, f_n ,
- datos de los ensayos en vacío y en cortocircuito (Cap. 17): potencia en valor real y corriente y tensión en p.u., W_o , i_o , W_{cc} y ε_{cc} .

8 Reducción de circuitos con transformadores ideales

8.1 Circuitos con un transformador ideal

Cuando se tiene un circuito con un transformador ideal (por ejemplo un circuito con un transformador real, ya que su esquema equivalente contiene un transformador ideal -Fig. 6.2-), en realidad se tienen dos circuitos separados eléctricamente y relacionados mediante las ecuaciones del transformador ideal:

$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{L_2}{L_1} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (8.1)$$

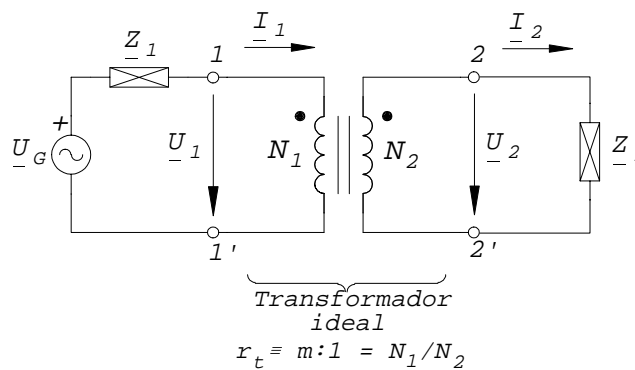


Fig. 8.1 Circuito con un transformador ideal

El trabajo con circuitos de este tipo puede resultar engorroso, por lo que normalmente se opta por eliminar el transformador ideal. Un transformador ideal se podría suprimir si fuera de relación de transformación unitaria o, lo que es lo mismo, si las tensiones o corrientes de ambos lados del mismo fueran iguales. Un transformador así se puede sustituir por dos hilos que unan 1 con 2 y 1' con 2'. Para conseguir esto hay que reducir el esquema. *Reducir un esquema es dividir todas las magnitudes del*

mismo por unos valores base determinados. Los valores base necesarios para poder prescindir del transformador ideal no pueden ser cualesquiera, sino que han de cumplir:

- que la potencia base (S_b) sea única para todo el circuito;
- que las tensiones base de cada lado del transformador (U_{b1} , U_{b2}) cumplan la relación de transformación del transformador ideal ($U_{b1}/U_{b2}=r_t$).

A partir de la potencia y tensiones base elegidas, se obtienen las corrientes e impedancias base de cada lado del transformador. También se pueden calcular las admitancias base.

S_b (VA)		
U_{b1} (V)	$\left(\frac{U_{b1}}{U_{b2}} = r_t \right)$	U_{b2} (V)
$I_{b1} = \frac{S_b}{U_{b1}}$ (A)		$I_{b2} = \frac{S_b}{U_{b2}}$ (A)
$Z_{b1} = \frac{U_{b1}^2}{S_b}$ (Ω)		$Z_{b2} = \frac{U_{b2}^2}{S_b}$ (Ω)
$Y_{b1} = \frac{1}{Z_{b1}} = \frac{S_b}{U_{b1}^2}$ (Ω^{-1})		$Y_{b2} = \frac{1}{Z_{b2}} = \frac{S_b}{U_{b2}^2}$ (Ω^{-1})

Ejemplo.-

Vamos a reducir el circuito de la figura 8.1 para eliminar el transformador ideal.

Las ecuaciones del circuito son:

$$\underline{U}_G = \underline{Z}_1 \underline{I}_1 + \underline{U}_1 \quad \underline{U}_2 = \underline{Z}_2 \underline{I}_2 \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = r_t \quad (8.2)$$

Elegimos una potencia base S_b y unas tensiones base U_{b1} y U_{b2} tal que $U_{b1} / U_{b2} = r_t$ (Fig. 8.2a) y dividimos la primera ecuación por U_{b1} y la segunda por U_{b2} :

$$\frac{\underline{U}_G}{U_{b1}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{I}_1}{U_{b1}} + \frac{\underline{U}_1}{U_{b1}} \quad \frac{\underline{U}_2}{U_{b2}} = \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}_2}{U_{b2}} \quad (8.3)$$

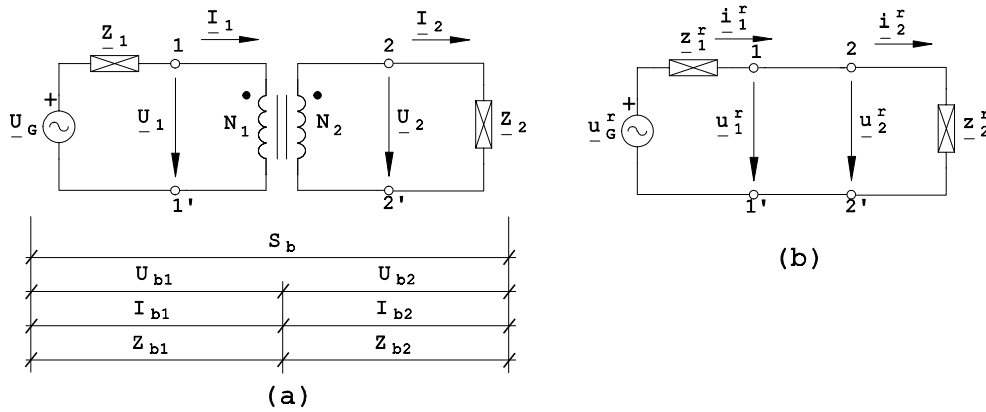


Fig. 8.2 Circuito con un transformador ideal: (a) elección de valores base, y (b) circuito reducido

Como las tensiones base cumplen la relación de transformación, se tiene que:

$$\frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{\underline{U}_{b1}}{\underline{U}_{b2}} = r_t \quad \Rightarrow \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_{b1}} = \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_{b2}} \quad (8.4)$$

por lo que se pueden juntar ambas ecuaciones, resultando:

$$\frac{\underline{U}_G}{\underline{U}_{b1}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{I}_1}{\underline{U}_{b1}} + \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}_2}{\underline{U}_{b2}} \quad (8.5)$$

Cambiando la tensión base por el producto de impedancia base por corriente base se obtiene:

$$\frac{\underline{U}_G}{\underline{U}_{b1}} = \frac{\underline{Z}_1 \underline{I}_1}{\underline{Z}_{b1} \underline{I}_{b1}} + \frac{\underline{Z}_2 \underline{I}_2}{\underline{Z}_{b2} \underline{I}_{b2}} \quad (8.6)$$

A cada magnitud real dividida por la base se le denomina magnitud reducida, y se indica por una letra minúscula (el superíndice indica que se ha realizado la reducción r):

$$\underline{u}_G^r = \underline{z}_1^r \underline{i}_1^r + \underline{z}_2^r \underline{i}_2^r, \quad \text{donde:} \quad \underline{u}_G^r = \frac{\underline{U}_G}{\underline{U}_{b1}}, \quad \underline{z}_1^r = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_{b1}}, \quad \underline{i}_1^r = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_{b1}}, \quad \underline{z}_2^r = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_{b2}}, \quad \underline{i}_2^r = \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_{b2}} \quad (8.7)$$

Como las intensidades también cumplen la relación de transformación:

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{I_{b2}}{I_{b1}} = r_t \Rightarrow \frac{I_1}{I_{b1}} = \frac{I_2}{I_{b2}} \Rightarrow \dot{I}_1^r = \dot{I}_2^r = \dot{I}^r \quad (8.8)$$

se tiene la ecuación (reducida):

$$\underline{u}_G^r = \underline{z}_1^r \dot{I}^r + \underline{z}_2^r \dot{I}^r \quad (8.9)$$

que se puede representar mediante el circuito (reducido) de la figura 8.2b, en el que ha desaparecido el transformador ideal (se puede interpretar que se ha convertido en dos hilos).

Como se puede comprobar, con la reducción se han igualado las tensiones en ambos lados del transformador, y como sigue cumpliendo que $u_1 i_1 = u_2 i_2$, también se igualan las intensidades de primario y secundario.

$$\frac{U_1}{U_{b1}} = \frac{U_2}{U_{b2}} \Rightarrow \underline{u}_1^r = \underline{u}_2^r = \underline{u}^r \Rightarrow \dot{I}_1^r = \dot{I}_2^r = \dot{I}^r \quad \blacksquare \quad (8.10)$$

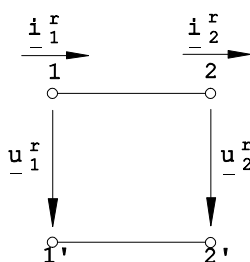


Fig. 8.3 Transformador ideal reducido

Se puede decir entonces que al reducir de esta forma un circuito que contiene un transformador ideal, éste desaparece, o lo que es lo mismo, se convierte en dos hilos (Fig. 8.3). Todas las variables (potencias, tensiones, intensidades e impedancias) y todos los componentes (fuentes de tensión o de corriente, impedancias, cargas) de cada lado del transformador se han dividido por su correspondiente valor base. De esta forma, la fuente de tensión situada en el primario del transformador de la figura 8.2a, \underline{U}_G , se reduce dividiendo su tensión por la tensión base del primario, con lo cual se convierte en \underline{u}_G^r en la figura 8.2b. Por este motivo, las magnitudes reducidas no tienen dimensiones. Al dar un valor reducido se añade *p.u.* que quiere decir *valor por unidad* y, además, debe indicarse la base a la que está referido.

8.2 Circuitos con varios transformadores ideales

Si el circuito contiene varios transformadores ideales (o reales) se tienen igualmente circuitos separados eléctricamente y relacionados mediante las ecuaciones de los transformadores ideales. Para eliminarlos hay que reducir el circuito:

- se elige una potencia base (S_b) única para todo el circuito, y
- se eligen tantas tensiones base como niveles de tensión haya, de forma que cumplan las relaciones de transformación entre niveles de tensión.

Las reducciones de circuitos con varios transformadores ideales no tienen un nombre especial, y se llaman en general reducciones a p.u. Como en cualquier otra reducción, al dar los datos en p.u. también hay que especificar la base a la que están referidos.

Como ejemplo de que se pueden elegir tantas bases como se desee al reducir un circuito, en el de la figura 8.4 también se podrían haber elegido:

- base referida a los valores nominales de la carga y del transformador elevador: $S_b = 1 \text{ MVA}$, $U_{b1} = 2 \text{ kV}$,
- ídem a los del transformador reductor: $S_b = 1 \text{ MVA}$, $U_{b2} = 18 \text{ kV}$,
- otras combinaciones.

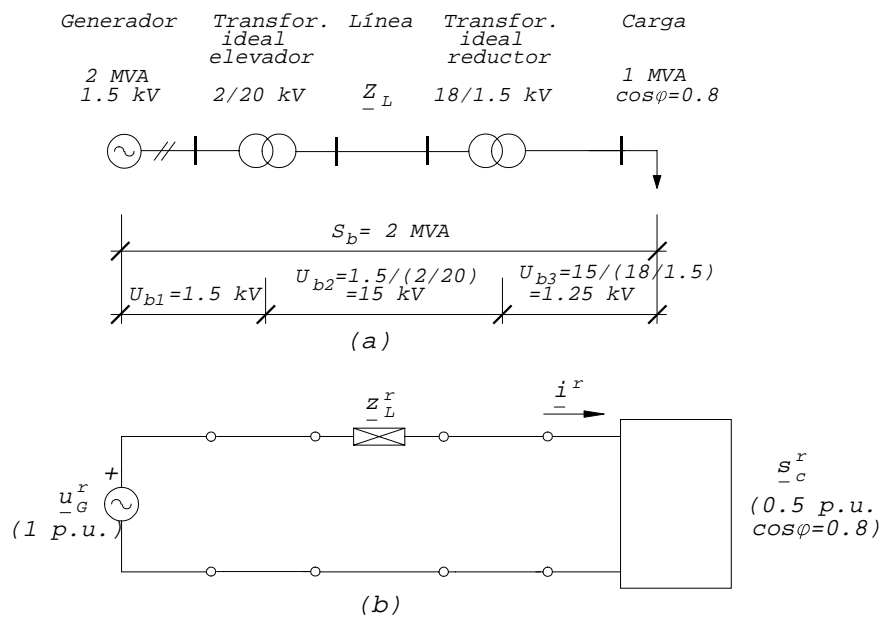


Fig. 8.4 Circuito con varios transformadores ideales: (a) elección de las bases, y (b) circuito reducido

9 El transformador real reducido

Como el transformador real contiene un transformador ideal, la reducción de un circuito con un transformador real es idéntica a la comentada en el capítulo anterior en cuanto a la eliminación del transformador ideal. Pero como el transformador real contiene, además del transformador ideal, unas resistencias y reactancias, éstas también quedan reducidas. El esquema reducido del transformador real permite realizar una aproximación que es muy utilizada.

Sea el transformador monofásico real de la figura 9.1. Elegimos una potencia y unas tensiones base adecuadas (que cumplan la relación de transformación) para poder reducir el esquema y eliminar el transformador ideal.

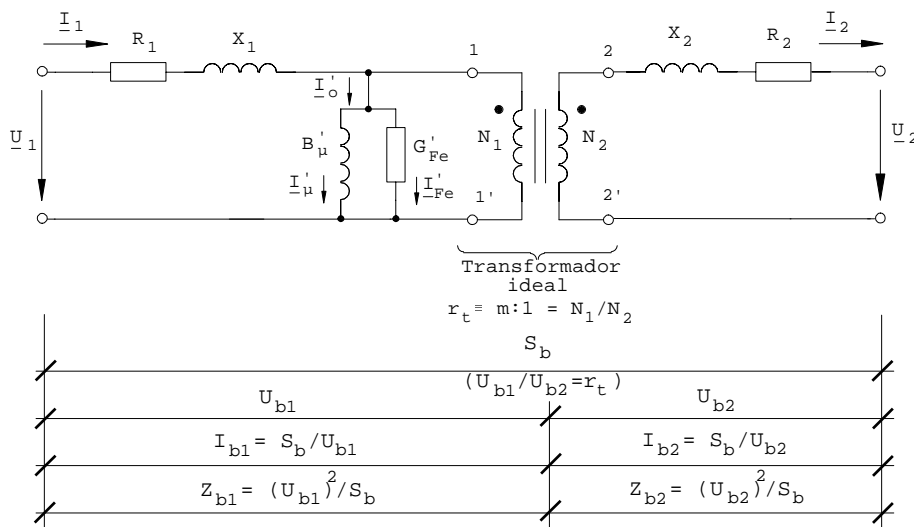


Fig. 9.1 Transformador monofásico real. Potencia, tensión, corriente e impedancias base

La figura 9.2 muestra el esquema del transformador real reducido. Todas las variables (potencias, tensiones, intensidades e impedancias) y todos los componentes (fuentes de tensión o de corriente,

impedancias, cargas) de cada lado del transformador se han dividido por su correspondiente valor base. De esta forma, la tensión \underline{U}_1 del primario del transformador se ha reducido dividiendo su valor por la tensión base del primario, y se ha convertido en \underline{u}_1^r . Por otro lado las impedancias R_2 y X_2 , que se encuentran físicamente situadas en el secundario del transformador de la figura 9.1, se han reducido utilizando la impedancia base del secundario. El esquema que se obtiene se denomina *esquema en T*.

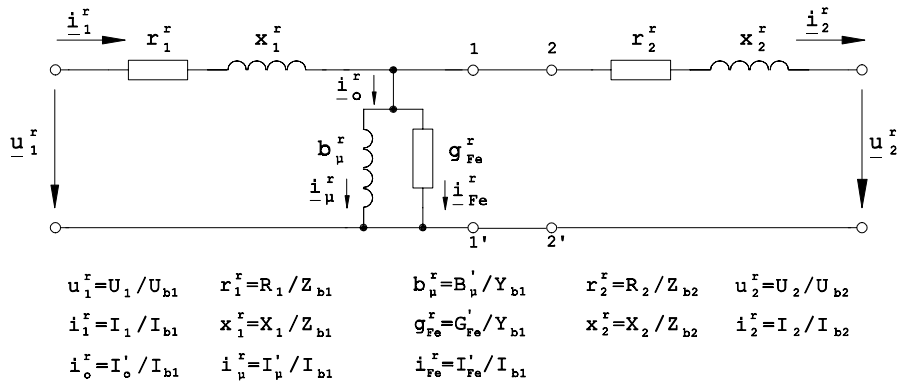


Fig. 9.2 Transformador monofásico real con sus valores reducidos (esquema en T)

En la práctica, dado el pequeño error que se comete, se juntan las resistencias y reactancias de ambos devanados del transformador real en una sola, *situada normalmente (por convenio) en el lado de alta tensión (AT)*, de valor la suma de ambas (r^r y x^r son mucho más pequeñas que $1/g_{Fe}^r$ y $1/b_p^r$), con lo que resulta el *esquema en L* de la figura 9.3:

$$r^r = r_1^r + r_2^r \quad x^r = x_1^r + x_2^r \quad (9.1)$$

(¡Cuidado! Estas resistencias sólo se pueden juntar cuando estén reducidas: no se puede hacer $R = R_1 + R_2$ en la figura 9.1.)

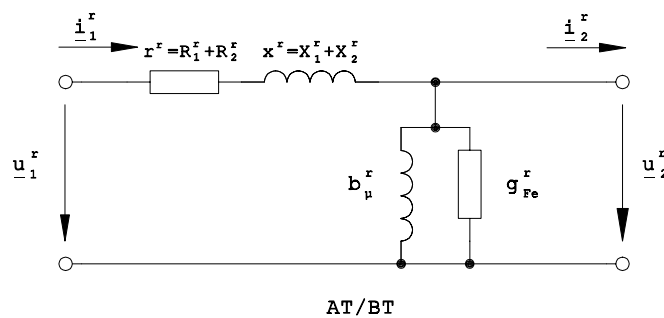


Fig. 9.3 Transformador monofásico real con r_1^r , x_1^r , r_2^r y x_2^r unidas en la misma rama (esquema en L)

Se ha de señalar que en la mayoría de los ejemplos utilizados a partir de este momento se hace referencia a transformadores reductores (AT/BT), por lo que el subíndice 1 corresponde al lado de alta tensión. Para un transformador elevador (BT/AT), el subíndice 1 sería para el lado de baja tensión, y el esquema sería como el que se muestra en la figura 9.4 (con r^r y x^r situadas siempre en el lado de AT).

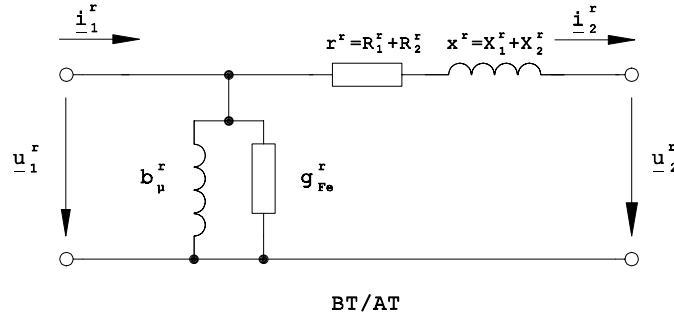


Fig. 9.4 Transformador elevador (BT/AT) con sus valores reducidos

La última simplificación que se realiza en el esquema reducido del transformador es *despreciar la rama del hierro* (que es lo mismo que suponer que el núcleo es ideal). Cuando se cumpla que:

$$i_2^r \gg i_o^r \quad (9.2)$$

entonces se podrá despreciar la rama del hierro del esquema equivalente, ya que,

$$i_1^r \approx i_2^r \quad (9.3)$$

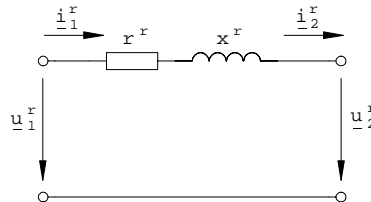


Fig. 9.5 Esquema reducido del transformador despreciando la rama del hierro (la intensidad es tal que se puede considerar $i_1^r \approx i_2^r$)

La ecuación 9.2 será cierta cuando la impedancia de la carga que alimente el secundario cumpla:

$$|z_{carga}^r + (r^r + jx^r)| \ll \frac{1}{y_o^r} \quad (9.4)$$

Es decir que *cuando el transformador no está en vacío (ni próximo a él) se puede despreciar la rama del hierro.*

Este esquema reducido se utiliza para calcular tensiones y corrientes en ambos lados del transformador, pero no para calcular rendimientos, ya que, al ser generalmente del mismo orden que las del hierro, las pérdidas en el cobre se han de tener en cuenta. Para calcular estas pérdidas de una forma aproximada con este esquema se puede suponer que g_{Fe}^r tiene en bornes una tensión u_2^r si es un transformador AT/BT o una tensión u_1^r si es BT/AT.

10 Bases más empleadas en la reducción de circuitos con un solo transformador real

De entre todas las bases posibles que se pueden utilizar para reducir circuitos con un solo transformador ideal, hay algunas más utilizadas, sobre todo cuando se trata de reducir un transformador real. Son las llamadas *bases referidas al propio transformador*, y son:

- reducción en la base referida a los valores nominales del transformador (S_n , U_{n1} y U_{n2}) conocida como reducción a valores en p.u. (por unidad),
- reducción al primario, y
- reducción al secundario.

Ya se ha comentado que cualquier reducción reduce a valores en p.u., aunque la que se refiere a los valores nominales del transformador haya tomado el nombre. En realidad es la más utilizada con diferencia.

A continuación se pasa a describir estas tres reducciones.

10.1 Reducción a valores en p.u. (por unidad)

Se eligen las siguientes potencia y tensiones base:

$S_b^{p.u.} = S_n \text{ (VA)}$ <p>(potencia nominal del transformador)</p>		
$U_{b1}^{p.u.} = U_{n1} \text{ (V)}$ <p>(tensión nominal del primario)</p>	$\left(\frac{U_{b1}^{p.u.}}{U_{b2}^{p.u.}} = r_t \right)$	$U_{b2}^{p.u.} = U_{n2} \text{ (V)}$ <p>(tensión nominal del secundario)</p>
$I_{b1}^{p.u.} = \frac{S_n}{U_{n1}} = I_{n1} \text{ (A)}$		$I_{b2}^{p.u.} = \frac{S_n}{U_{n2}} = I_{n2} \text{ (A)}$
$Z_{b1}^{p.u.} = \frac{U_{n1}^2}{S_n} \text{ (}\Omega\text{)}$		$Z_{b2}^{p.u.} = \frac{U_{n2}^2}{S_n} \text{ (}\Omega\text{)}$

Los valores reducidos en p.u.:

- se denotan por letras minúsculas, no se acostumbra a poner ningún superíndice, y
- como cualquier otro valor reducido no tienen dimensiones, y normalmente se añade al final de los mismos la expresión p.u., por ejemplo, $r = 0.3 \text{ p.u.}$

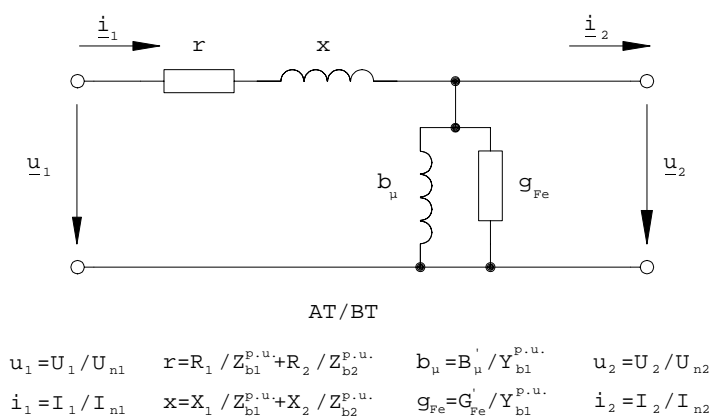


Fig. 10.1 Transformador monofásico real con valores reducidos a p.u.

10.2 Reducción al primario

Se eligen las siguientes potencia y tensiones base:

$S'_b = 1 \text{ (VA)}$		
$U'_{b1} = 1 \text{ (V)}$	$\left(\frac{U'_{b1}}{U'_{b2}} = r_t \right)$	$U'_{b2} = \frac{1}{r_t} = \frac{U_{n2}}{U_{n1}} \text{ (V)}$
$I'_{b1} = 1 \text{ (A)}$		$I'_{b2} = r_t = \frac{U_{n1}}{U_{n2}} \text{ (A)}$
$Z'_{b1} = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$		$Z'_{b2} = \left(\frac{1}{r_t} \right)^2 = \left(\frac{U_{n2}}{U_{n1}} \right)^2 \text{ (}\Omega\text{)}$

Los valores reducidos al primario:

- se denotan con letras mayúsculas y una prima ('), y
- no tienen dimensiones, como cualquier otro valor reducido.

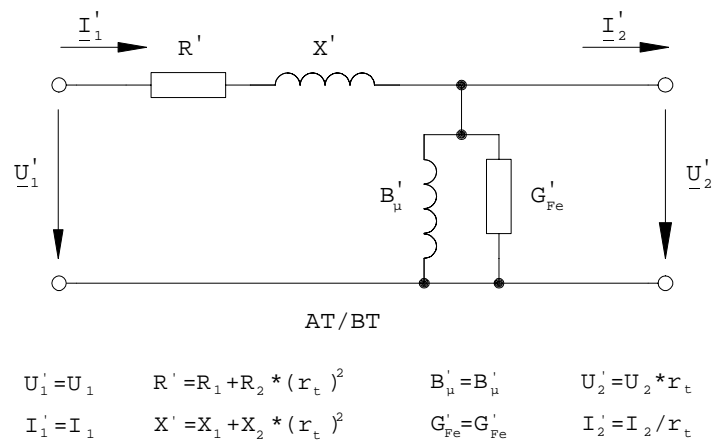


Fig. 10.2 Transformador monofásico real con valores reducidos al primario

Con esta reducción, una impedancia del secundario vista por el primario se convierte en $(r_t)^2 \cdot Z_2$, como sucede con el transformador ideal de la figura 10.3 (ver la ecuación 23.5).

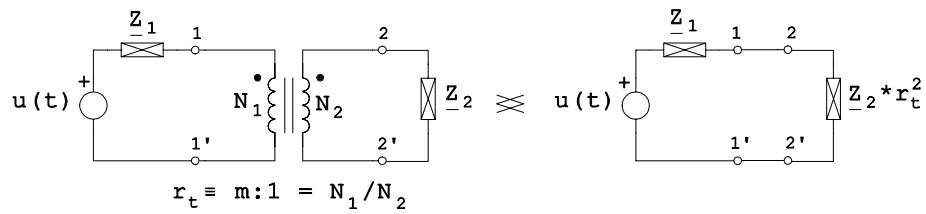


Fig. 10.3 Reducción al primario de una impedancia en el secundario de un transformador monofásico ideal

10.3 Reducción al secundario

Se eligen las siguientes potencia y tensiones base:

$S_b'' = 1 \text{ (VA)}$		
$U_{b1}'' = r_t = \frac{U_{n1}}{U_{n2}} \text{ (V)}$	$\left(\frac{U_{b1}''}{U_{b2}''} = r_t \right)$	$U_{b2}'' = 1 \text{ (V)}$
$I_{b1}'' = \frac{1}{r_t} = \frac{U_{n2}}{U_{n1}} \text{ (A)}$		$I_{b2}'' = 1 \text{ (A)}$
$Z_{b1}'' = (r_t)^2 = \left(\frac{U_{n1}}{U_{n2}} \right)^2 \text{ (}\Omega\text{)}$		$Z_{b2}'' = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$

Los valores reducidos al secundario:

- se denotan con letras mayúsculas y una doble prima ("), y
- no tienen dimensiones, como cualquier otro valor reducido.

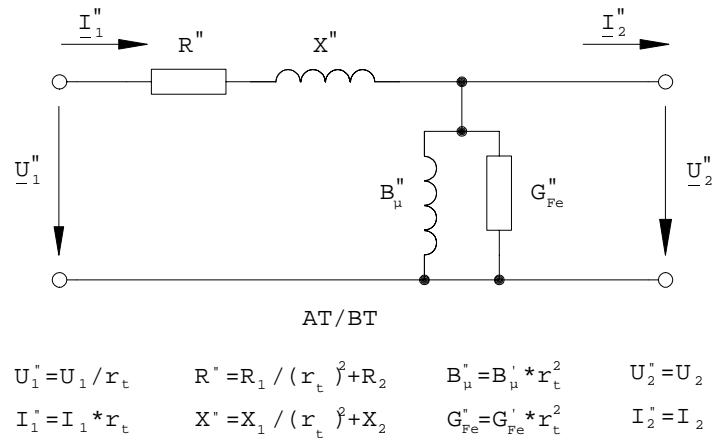


Fig. 10.4 Transformador monofásico real con valores reducidos al secundario

Como consecuencia de esta reducción, una impedancia del primario vista por el secundario se convierte en $Z_p / (r_t)^2$, como sucede con el transformador ideal de la figura 10.5.

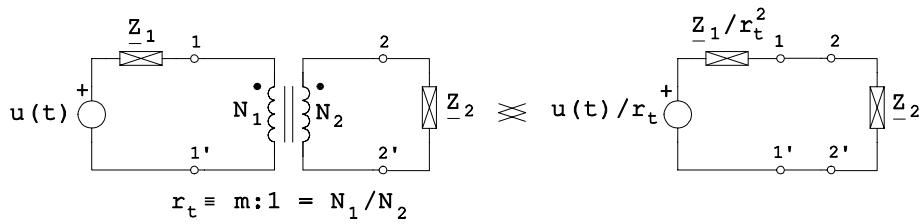


Fig. 10.5 Reducción de una fuente de tensión y una impedancia al secundario de un transformador monofásico ideal

10.4 Relaciones entre las tres bases referidas al propio transformador

Estas tres bases se denominan *bases referidas al propio transformador* por estar referidas:

- a los valores nominales del transformador, S_n , U_{n1} y U_{n2} , o
- al primario del transformador, o
- al secundario del transformador.

En el caso de circuitos con varios transformadores normalmente no será posible utilizar bases referidas a todos los transformadores a la vez (por ejemplo, porque las potencias nominales de los transformadores pueden ser distintas o porque hay varios primarios y varios secundarios).

Cada una de estas bases tiene sus peculiaridades. Debido a su sencillez, la reducción a p.u. es la más utilizada. Además, algunos datos de la placa característica del transformador suelen estar referidos a esta base (i_o y ε_{cc}).

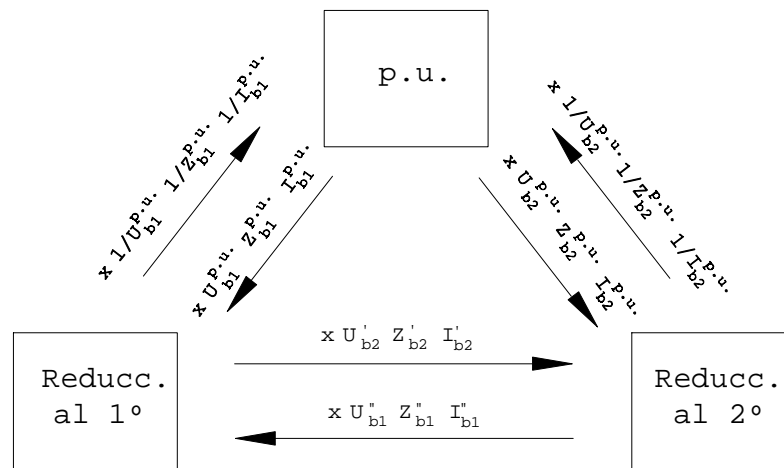


Fig. 10.6 Relaciones entre las tres reducciones

La ventaja de la reducción al primario/secundario es que no se ha de reducir el circuito del lado primario/secundario (las potencias, tensiones, corrientes e impedancias no cambian). Con esta reducción se "convierte" todo el circuito que se encuentra en el secundario/primario del transformador (que tiene un nivel de tensión determinado) en un circuito que sea equivalente (pero a la tensión del primario/secundario).

A veces es necesario pasar unos valores reducidos en una base a reducidos en otra. El paso más común es de valores en p.u. a valores reducidos al primario o al secundario, para ello se ha de multiplicar por las correspondientes bases en p.u. del primario o del secundario respectivamente. En el capítulo 12 se explican con detalle los cambios de base.

11 Reducción de circuitos con varios transformadores reales

En la reducción de circuitos con varios transformadores reales vale todo lo dicho para circuitos con varios transformadores ideales:

- Se ha de elegir una potencia base para todo el circuito, y tantas tensiones base como niveles de tensión haya en el mismo. Evidentemente, los valores base de tensión deben cumplir las relaciones de transformación entre niveles de tensión.
- Se dice que se trabaja en p.u. Como son posibles tantas reducciones como se desee (se puede elegir cualquier potencia base y cualquier tensión base inicial), al dar los datos en p.u. también hay que especificar la base a la que están referidos.
- En este tipo de circuitos no tiene sentido hablar de reducción al primario o al secundario, ya que habrá tantos primarios y secundarios como transformadores.

La figura 11.1 muestra una red eléctrica, compuesta por alternador, transformadores, línea y carga, con tres niveles de tensión, que se ha reducido a p.u. utilizando la base indicada. En el estudio de redes eléctricas en carga, se suele utilizar el circuito equivalente aproximado del transformador que desprecia la rama del hierro (Fig. 9.5), aunque para calcular el rendimiento hay que tenerla en cuenta.

Como ejemplo de que se pueden elegir tantas bases como se desee al reducir un circuito, en el de la figura 11.1 también se podrían haber elegido:

- base referida a los valores nominales del transformador elevador: $S_b = 2.2 \text{ MVA}$, $U_{b1} = 2 \text{ kV}$,
- ídem a los del transformador reductor: $S_b = 1.8 \text{ MVA}$, $U_{b2} = 18 \text{ kV}$,
- otras combinaciones.

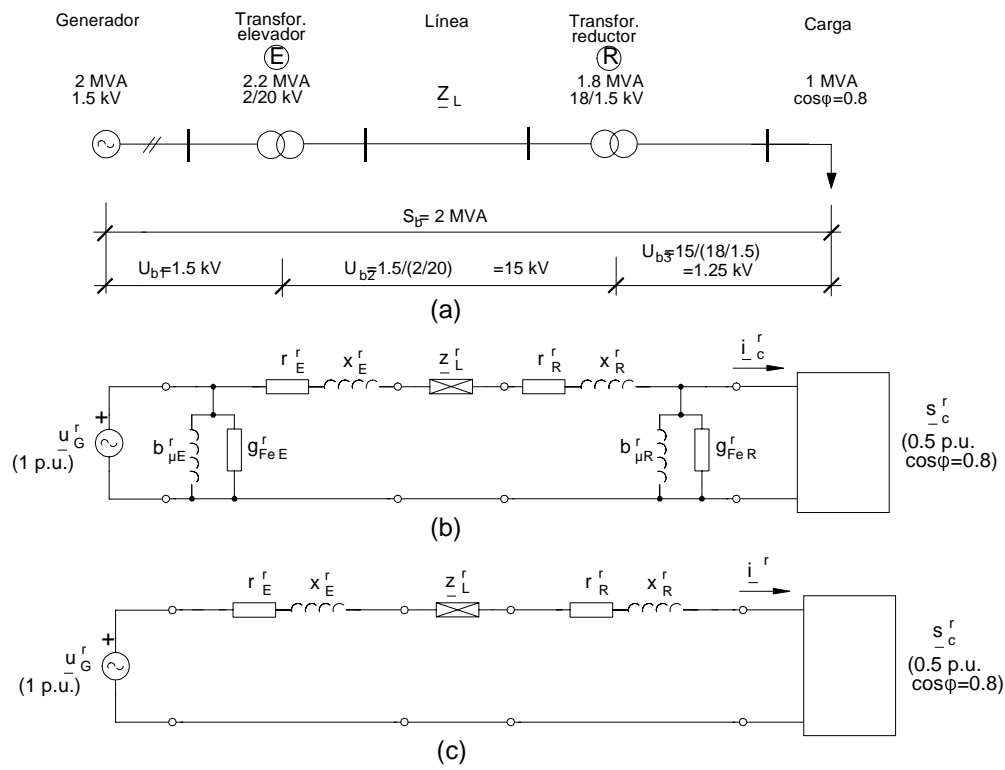


Fig. 11.1 Red eléctrica con varios niveles de tensión: (a) elección de las bases, (b) circuito reducido a p.u., y (c) circuito reducido utilizando el esquema simplificado de los transformadores que desprecia la rama del hierro

12 Cambios de base

La potencia base en la reducción de circuitos con varios transformadores es única. Por ello, los parámetros de los transformadores reales (que normalmente están referidos a sus propias bases) se tienen que pasar a la base común. Este proceso se llama *cambio de base*.

Para realizar un cambio de base se ha de tener en cuenta que el valor real (valor al deshacer la reducción) es el mismo. Por ejemplo, se desea realizar un cambio de base a una impedancia situada en el primario $Z_{1\text{ real}}$, cuyo valor reducido en la base A es z_1^A . Para hallar el valor reducido en la base B, z_1^B , se ha de cumplir que:

$$Z_{1\text{ real}} = z_1^A Z_{b1}^A = z_1^B Z_{b1}^B \quad (12.1)$$

Si la impedancia hubiera estado en el secundario:

$$Z_{2\text{ real}} = z_2^A Z_{b2}^A = z_2^B Z_{b2}^B \quad (12.2)$$

Y en general, el nuevo valor reducido de la impedancia se calcula como:

$$z_i^B = z_i^A \frac{Z_{bi}^A}{Z_{bi}^B} \quad (12.3)$$

Si se tuviera que realizar un cambio de base a una tensión, corriente o potencia se procede de la misma forma:

$$(\text{Valor reducido})_i^B = (\text{Valor reducido})_i^A \frac{(\text{Valor base})_i^A}{(\text{Valor base})_i^B} \quad (12.4)$$

Casos particulares de cambio de base son los mostrados en la figura 10.6: son cambios de base entre bases que están referidas al propio transformador.

Ejemplo.-

Se tiene una tensión del primario que está en p.u., $\underline{u}^{p.u.}$, y se desea conocer su valor reducido al secundario, $\underline{U}^{//}$:

$$\underline{U}^{//} = \underline{u}^{p.u.} \frac{U_{b1}^{p.u.}}{U_{b1}^{//}} = \underline{u}^{p.u.} \frac{U_{n1}}{(U_{n1}/U_{n2})} = \underline{u}^{p.u.} U_{b2}^{p.u.} \quad (12.5)$$

este resultado es el que indica la figura 10.6 para el paso de valores en p.u. a valores reducidos al secundario.

Lo mismo sucederá con impedancias: sea una impedancia del secundario en p.u., $\underline{z}^{p.u.}$, de la que se desea conocer su valor reducido al primario, \underline{Z}' :

$$\underline{Z}' = \underline{z}^{p.u.} \frac{Z_{b2}^{p.u.}}{Z_{b2}'} = \underline{z}^{p.u.} \frac{(U_{n2}^2/S_n)}{(U_{n2}/U_{n1})^2} = \underline{z}^{p.u.} Z_{b1}^{p.u.} \quad \blacksquare \quad (12.6)$$

13 Esquema equivalente de Thevenin de un transformador visto desde el secundario

Cuando el primario de un transformador está conectado a una fuente de tensión conocida U_1 , puede resultar útil conocer el esquema equivalente de Thevenin visto desde el secundario. Para evitar conclusiones erróneas en cuanto a la reversibilidad del transformador debido a que el esquema equivalente en L no es simétrico, se realizará la demostración partiendo del esquema en T, que es un esquema completamente simétrico.

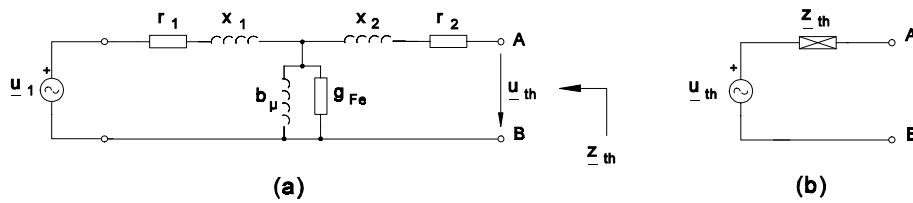


Fig. 13.1 (a) Transformador monofásico en p.u., y (b) equivalente de Thevenin del circuito visto desde el secundario

Vamos a trabajar en p.u. La tensión de Thevenin es:

$$\underline{u}_{th} = \frac{\underline{u}_1}{r_1 + jx_1 + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu}} \quad (13.1)$$

Obsérvese que la tensión de Thevenin es la tensión del secundario del transformador cuando está en vacío, es decir que $U_1 / U_{th} = r_1$. La impedancia de Thevenin es:

$$\underline{z}_{th} = r_2 + jx_2 + \frac{1}{\frac{1}{r_1 + jx_1} + g_{Fe} - jb_\mu} \quad (13.2)$$

Normalmente no se dispone de los valores de r_1 , x_1 , r_2 y x_2 , sino de $r = r_1 + r_2$ y de $x = x_1 + x_2$. Por ello, dado el pequeño valor de r_1 , r_2 , x_1 y x_2 frente a $1/g_{Fe}$ y $1/b_\mu$, se puede hacer la aproximación

$$\begin{aligned} (r_1 + jx_1) + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu} &\approx (r_1 + r_2 + jx_1 + jx_2) + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{u}_{th} &\approx \frac{\underline{u}_1}{r + jx + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu}} \end{aligned} \quad (13.3)$$

y en la impedancia Thevenin:

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} (r_2 + jx_2) &\ll \frac{1}{\frac{1}{r_1 + jx_1} + g_{Fe} - jb_\mu} \\ \frac{1}{r_1 + jx_1} + g_{Fe} - jb_\mu &\approx \frac{1}{r_1 + r_2 + jx_1 + jx_2} + g_{Fe} - jb_\mu \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \underline{z}_{th} &\approx \frac{1}{\frac{1}{r + jx} + g_{Fe} - jb_\mu} \end{aligned} \quad (13.4)$$

Las ecuaciones 13.3 y 13.4 que se han obtenido son sencillas de recordar porque corresponden al equivalente de Thevenin del esquema en L del transformador reductor de la figura 13.2.

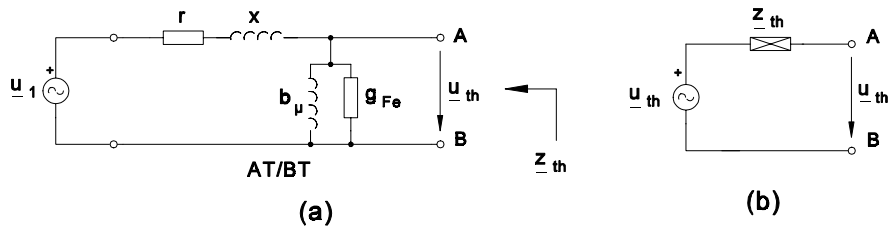


Fig. 13.2 (a) Transformador monofásico reductor (AT/BT) en p.u., y (b) equivalente de Thevenin del circuito visto desde el secundario

Si se desea obtener el equivalente de Thevenin, pero en valores reducidos al secundario, sólo hay que multiplicar las ecuaciones 13.3 y 13.4 por las bases del secundario:

$$\underline{U}_{th}'' = \underline{u}_{th} U_{b2} \quad \underline{Z}_{th}'' = \underline{z}_{th} Z_{b2} \quad (13.5)$$

Como un circuito equivalente de Thevenin solamente es válido desde los terminales hacia afuera, no se pueden calcular potencias en su interior (no se pueden calcular las pérdidas en el hierro ni en el cobre).

¡Cuidado! No hay que confundir el equivalente de Thevenin con el esquema equivalente reducido aproximado del transformador que no tiene en cuenta la rama del hierro (Fig. 9.5). No obstante los valores numéricos de tensiones, corrientes e impedancias en ambos esquemas son aproximadamente iguales, ya que, recordando que r y x son despreciables frente a $1/g_{Fe}$ y $1/b_{\mu}$, obtenemos

$$(r + jx) \ll \frac{1}{g_{Fe} - jb_{\mu}} \Rightarrow \begin{cases} u_{th} = \frac{u_1}{r + jx + \frac{1}{g_{Fe} - jb_{\mu}}} \frac{1}{g_{Fe} - jb_{\mu}} \approx u_1 \\ z_{th} = \frac{1}{\frac{1}{r + jx} + g_{Fe} - jb_{\mu}} \approx r + jx \end{cases} \quad (13.6)$$

Si la fuente de tensión U_1 no es ideal, sino que tiene una impedancia interna no despreciable, supuesta reactiva pura y de valor X_{cc} , el equivalente de Thevenin quedará modificado:

$$\begin{aligned} u_{th} &= \frac{u_1}{r + jx + jx_{cc} + \frac{1}{g_{Fe} - jb_{\mu}}} \frac{1}{g_{Fe} - jb_{\mu}} \\ z_{th} &= \frac{1}{\frac{1}{r + jx + jx_{cc}} + g_{Fe} - jb_{\mu}} \end{aligned} \quad (13.7)$$

14 Funcionamiento en carga, rendimiento y caída de tensión

Como ya se ha comentado en el capítulo 9, el esquema reducido del transformador que desprecia la rama del hierro se puede utilizar cuando se cumpla que:

$$i_2^r \gg i_o^r \Rightarrow i_1^r \approx i_2^r \quad (14.1)$$

La ecuación 14.1 será cierta *cuando el transformador no esté en vacío (ni próximo a él)*, ya que la impedancia de la carga que alimente el secundario cumplirá:

$$|z_{carga}^r + (r^r + jx^r)| \ll \frac{1}{y_o^r} \quad (14.2)$$

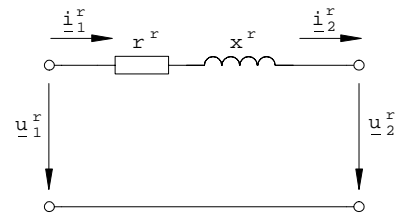


Fig. 14.1 Esquema reducido del transformador despreciando la rama del hierro (la intensidad es tal que se puede considerar $i_1^r \approx i_2^r$)

Este esquema reducido se utiliza para calcular tensiones y corrientes en ambos lados del transformador cuando se encuentre *trabajando normalmente en carga*.

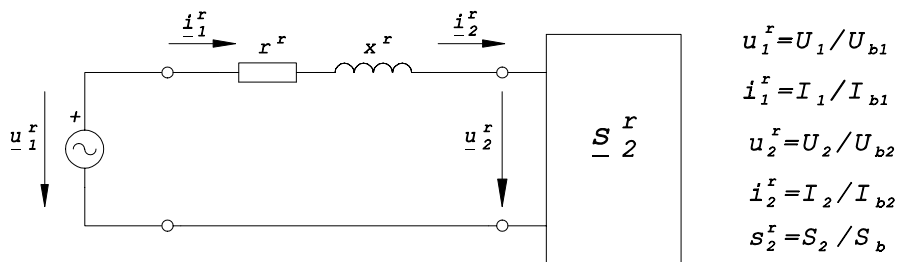


Fig. 14.2 Esquema reducido del transformador despreciando la rama del hierro, alimentando una carga tal que se pueda considerar $i_1^r \approx i_2^r$

Circuitos como el de la figura 14.2 dan lugar a problemas del tipo Thevenin-carga. Cabe recordar que las ecuaciones del Thevenin-carga de la figura 14.3 son:

$$\left. \begin{aligned} \underline{E} &= \underline{Z} \underline{I} + \underline{U} = (R + jX) \underline{I} + \underline{U} \\ \underline{S} &= \underline{U} \underline{I}^* = P + jQ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \quad (14.3)$$

$$\Rightarrow U^4 + U^2(2RP + 2XQ - E^2) + (X^2 + R^2)(P^2 + Q^2) = 0$$

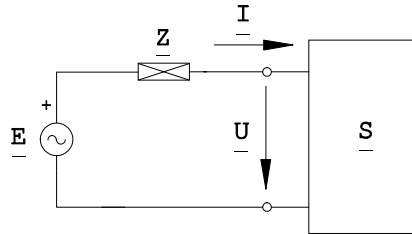


Fig. 14.3 Circuito del tipo Thevenin-carga

Para calcular el *rendimiento* del transformador se han de tener en cuenta las pérdidas en el cobre y en el hierro, siendo necesario considerar la rama magnetizante. El rendimiento se calcula como:

$$\eta = \frac{\text{Potencia útil}}{\text{Potencia absorbida}} = \frac{p_2^r}{p_2^r + p_{Cu}^r + p_{Fe}^r} \quad (14.4)$$

Las pérdidas en el hierro se pueden calcular suponiendo que g_{Fe}^r tiene en bornes una tensión u_2^r si es un transformador AT/BT o una tensión u_1^r si es BT/AT. Por ejemplo, si es reductor:

$$p_{Cu}^r = r^r (i^r)^2 \quad p_{Fe}^r = (u_2^r)^2 g_{Fe}^r \quad (14.5)$$

Para una tensión constante (que es lo normal en los transformadores de potencia) y un factor de potencia constante (impuesto por la carga), el rendimiento depende de la intensidad. Para ver en qué condiciones se tendrá rendimiento máximo, hay que derivar la ecuación 14.3 respecto a la intensidad. Como la potencia entregada por el secundario es de la forma

$$p_2^r = K i^r \quad (14.6)$$

entonces

$$\eta = \frac{K i^r}{K i^r + r^r (i^r)^2 + g_{Fe}^r (u_2^r)^2} = \frac{K}{K + r^r i^r + \frac{g_{Fe}^r (u_2^r)^2}{i^r}} \quad (14.7)$$

Para que el rendimiento sea máximo, el denominador ha de ser mínimo, luego

$$\frac{\partial}{\partial i^r} \left(K + r^r i^r + \frac{g_{Fe}^r (u_2^r)^2}{i^r} \right) = 0 \Rightarrow r^r - \frac{g_{Fe}^r (u_2^r)^2}{(i^r)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$r^r (i^r)^2 = g_{Fe}^r (u_2^r)^2 \Rightarrow p_{Cu}^r = p_{Fe}^r \quad (14.8)$$

El rendimiento máximo se obtiene cuando las pérdidas fijas son iguales a las variables, esto es, cuando las pérdidas en el cobre son iguales a las del hierro. La intensidad que hace máximo el rendimiento es:

$$i_{\eta_{\max}}^r = u_2^r \left(\frac{g_{Fe}^r}{r^r} \right)^2 \quad (14.9)$$

Los transformadores tienen un rendimiento muy elevado. En el caso de los de potencia, se puede llegar a rendimientos del orden del 99%.

La *potencia reactiva* que consume el propio transformador se puede calcular, en el caso de un transformador reductor, como

$$q^r = x^r (i^r)^2 + b_{\mu}^r (u_2^r)^2 \quad (14.10)$$

Además de esta potencia reactiva, el transformador consumirá, y cederá a la carga, la potencia reactiva que ésta necesite.

La *caída de tensión* se define como la diferencia entre los módulos de la tensión que se tiene en el secundario del transformador cuando está en vacío y cuando está en carga.

$$c.d.t. = |U_{2, \text{vacío}}| - |U_{2, \text{carga}}| \quad (14.11)$$

Despreciando la caída de tensión en la rama del cobre, la tensión del secundario en vacío es

$$(r^r + jx^r) \dot{I}_o^r \ll \frac{1}{g_{Fe}^r - jb_{\mu}^r} \dot{I}_o^r \Rightarrow |U_{2, \text{vacío}}| \approx |u_1^r| U_{b2} \quad (14.12)$$

y como la tensión del secundario en carga es

$$|U_{2, \text{carga}}| = |u_2^r| U_{b2} \quad (14.13)$$

entonces la caída de tensión se calcula a través del esquema reducido mediante

$$c.d.t. = |U_{2,vacío}| - |U_{2,carga}| = (|u_1^r| - |u_2^r|) U_{b2} = c.d.t.^r U_{b2} \quad (14.14)$$

donde $c.d.t.^r = |u_1^r| - |u_2^r|$ es la caída de tensión reducida (obtenida del esquema en valores reducidos).

La elección de los valores adecuados de r y x en el diseño de un transformador requiere un compromiso entre que sean lo suficientemente pequeñas para que no haya mucha caída de tensión en carga, y lo suficientemente grandes para proteger al transformador en caso de cortocircuito. Como r provoca pérdidas de potencia activa, se suele optar por elegir:

- r pequeña para que no hayan muchas pérdidas, y
- x relativamente grande para proteger en caso de cortocircuito.

Normalmente la caída de tensión es positiva, aunque puede llegar a ser negativa cuando se alimentan cargas capacitivas (es decir que la tensión del secundario en carga es mayor que la tensión en vacío). Se dice entonces que se produce el *efecto Ferranti*, que es debido a la resonancia entre la capacidad de la carga y la inductancia x^r .

Ejemplo.-

Calcular la *c.d.t.* en un transformador de 500 kVA, 12000/400 V, $\varepsilon_{cc} = 0.05$ p.u. cuyo primario está conectado a una red de 12000 V y que alimenta una impedancia de valor $Z = 0.305 \Omega$ que consume la corriente nominal.

La carga consume la corriente nominal (1 p.u.)

$$I_{n2} = \frac{S_n}{U_{n2}} = \frac{500 \cdot 10^3}{12000} = 1250 \text{ A} \quad , \quad i \approx i_2 = \frac{I_2}{I_{n2}} = 1 \text{ p.u.} \quad (14.15)$$

La impedancia en p.u. vale

$$Z_{b2} = \frac{(U_{b2})^2}{S_b} = \frac{400^2}{500 \cdot 10^3} = 0.32 \Omega$$

$$z = \frac{Z_c}{Z_{b2}} = \frac{0.305}{0.32} = 0.953 \text{ p.u.} \quad (14.16)$$

La tensión del secundario será:

$$u_2 = z i = 0.953 \cdot 1 = 0.953 \text{ p.u.} \quad (14.17)$$

Y la caída de tensión:

$$\begin{aligned} c.d.t.^r &= u_1 - u_2 = 1 - 0.953 = 0.047 \text{ p.u.} \\ c.d.t. &= (c.d.t.^r) U_{b2} = 0.047 \cdot 400 = 18.8 \text{ V} \end{aligned} \quad (14.18)$$

La caída de tensión es aproximadamente igual a $\varepsilon_{cc} = u_{cc} = z_{cc}$, ya que la corriente es la nominal. En estas condiciones de carga habrá una tensión en el secundario de

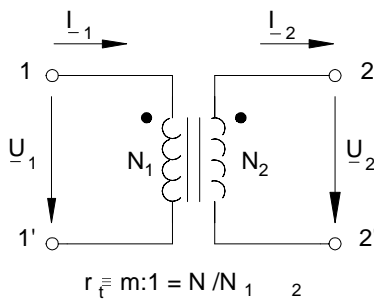
$$\begin{aligned} U_2 &= |U_{2, \text{vacío}}| - c.d.t. = 400 - 18.8 = 381.2 \text{ V} \\ (\text{o también } u_2 U_{b2} &= 0.953 \cdot 400) \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (14.19)$$

15 Resumen de circuitos equivalentes del transformador monofásico en régimen permanente senoidal

No siempre es necesario trabajar con los esquemas equivalentes completos. A veces se pueden hacer simplificaciones de los mismos, validas bajo ciertas condiciones.

15.1 Transformador ideal

Las ecuaciones del transformador monofásico ideal son:



$$\frac{U_1}{U_2} = \frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = r_t \quad (15.1)$$

$$S = U_1 I_1^* = U_2 I_2^* \quad (15.2)$$

Fig. 15.1 Transformador monofásico ideal en régimen permanente senoidal

15.2 Esquema en T

En este esquema reducido del transformador monofásico real no se ha realizado ninguna simplificación. Normalmente no se podrá trabajar con él ya que los ensayos de vacío y cortocircuito proporcionan las resistencias y reactancias de ambos devanados, r' y x' .

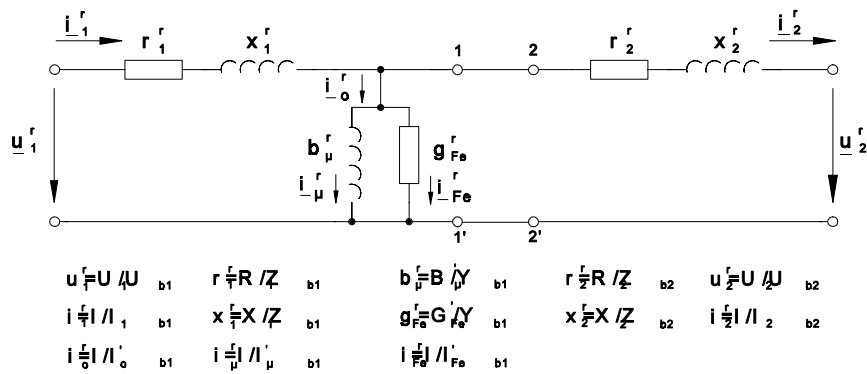


Fig. 15.2 Transformador monofásico real con sus valores reducidos (esquema en T)

15.3 Esquema en L

Es una simplificación del esquema anterior. Es el más utilizado por tener juntas las resistencias y reactancias de los devanados. La simplificación realizada es:

$$r^r = r_1^r + r_2^r \quad x^r = x_1^r + x_2^r \quad (15.3)$$

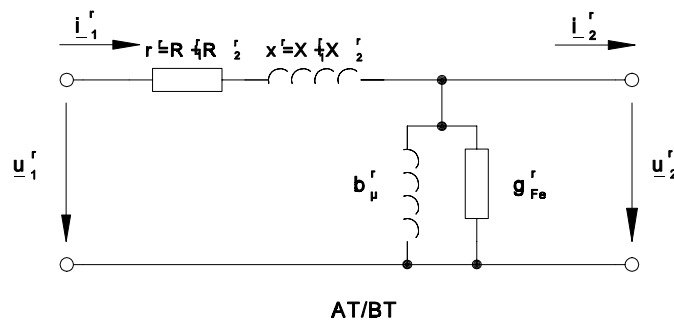


Fig. 15.3 Transformador monofásico real con r_1^r , x_1^r , r_2^r y x_2^r unidas en la misma rama (esquema en L)

15.4 Esquema despreciando la rama del hierro (núcleo ideal)

Este esquema se utiliza cuando el transformador está en funcionamiento normal (no está en vacío ni próximo a él).

La impedancia de la carga ha de ser tal que:

$$i_2^r \gg i_o^r \Rightarrow i_1^r \approx i_2^r \quad (15.4)$$

o lo que es lo mismo:

$$|z_{carga}^r + (r^r + jx^r)| \ll \frac{1}{y_o^r} \quad (15.5)$$

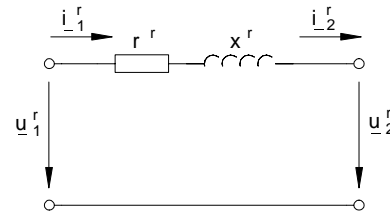


Fig. 15.4 Esquema reducido del transformador despreciando la rama del hierro (la intensidad es tal que se puede considerar $i_1^r \approx i_2^r$)

El circuito que resulta es bastante sencillo. Se utiliza para calcular tensiones y corrientes en ambos lados del transformador. Para calcular el rendimiento se deben introducir las pérdidas en el hierro (g_{Fe}^r tiene en bornes una tensión u_2^r o u_1^r , según sea reductor o elevador respectivamente).

15.5 Equivalente de Thevenin desde el secundario

Este esquema es idéntico al esquema en T (contiene la misma información) o al esquema en L (realizando las simplificaciones usuales), y no debe confundirse con el esquema que desprecia la rama del hierro, aunque los valores numéricos de ambos esquemas son muy parecidos.

Se suele utilizar cuando se desea un circuito sencillo visto desde el secundario mientras el primario está alimentado por una fuente de tensión conocida (que puede ser ideal o no). Tiene el inconveniente de que no se pueden calcular las pérdidas en el interior del transformador (un equivalente de Thevenin no vale para calcular potencias en su interior).

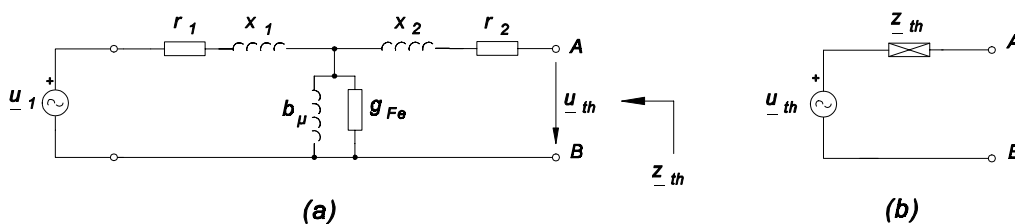


Fig. 15.5 (a) Transformador monofásico en p.u., y (b) equivalente de Thevenin del circuito visto desde el secundario

La tensión e impedancia Thevenin son:

$$\underline{u}_{th} = \frac{\underline{u}_1}{r_1 + jx_1 + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu}} \quad (15.6)$$

$$\underline{z}_{th} = r_2 + jx_2 + \frac{1}{\frac{1}{r_1 + jx_1} + g_{Fe} - jb_\mu} \quad (15.7)$$

Realizando las simplificaciones normales en la tensión e impedancia Thevenin se obtiene:

$$\underline{u}_{th} = \frac{\underline{u}_1}{r + jx + \frac{1}{g_{Fe} - jb_\mu}} \quad \underline{z}_{th} = \frac{1}{\frac{1}{r + jx} + g_{Fe} - jb_\mu} \quad (15.8)$$

Las ecuaciones 15.8 son las que se utilizan normalmente (r_1 , x_1 , r_2 y x_2 no se conocen por separado) y son fáciles de recordar porque corresponden al equivalente de Thevenin del transformador reductor de la figura 15.6.

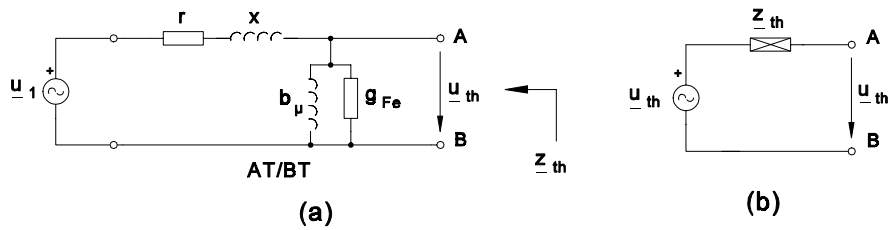


Fig. 15.6 (a) Transformador monofásico reductor (AT/BT) en p.u., y (b) equivalente de Thevenin del circuito visto desde el secundario

16 Transformadores en paralelo

Los transformadores se suelen colocar en paralelo cuando la potencia instalada se ha quedado pequeña y también como medida de seguridad para no quedarse sin conexión a la red cuando se estropea un transformador o se tienen que realizar operaciones de mantenimiento.

Este capítulo es válido tanto para transformadores monofásicos como trifásicos, con la lógica excepción de que cuando en un transformador trifásico se habla de potencias reales, éstas son trifásicas, y cuando se habla de tensiones e intensidades reales, son de línea (no obstante, la potencia y la tensión pueden ser de fase si se eligen unas potencia y tensión base adecuadas -Cap. 21-).

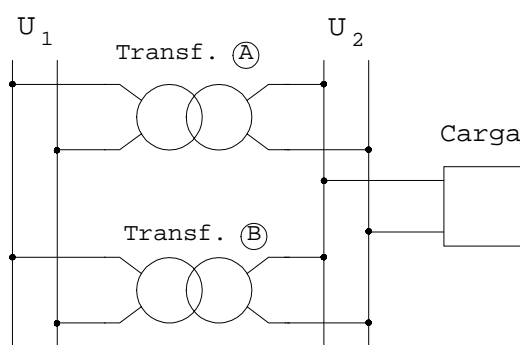


Fig. 16.1 Transformadores en paralelo alimentando una carga

La mínima condición que se le debe exigir a dos transformadores para que trabajen adecuadamente en paralelo es que tengan la misma relación de transformación:

$$r_{tA} = r_{tB}.$$

(En el caso de transformadores trifásicos también es condición indispensable que tengan el mismo índice horario.)

Además se pueden exigir otras condiciones,

- para tener *acoplamiento correcto*:

$$\begin{aligned} & - r_{tA} = r_{tB}, \text{ y} \\ & - u_{ccA}^r = u_{ccB}^r \quad (\text{ ó } U_{ccA} = U_{ccB}) \end{aligned}$$

- para tener *acoplamiento óptimo*:

$$\begin{aligned} & - r_{tA} = r_{tB}, \\ & - u_{ccA}^r = u_{ccB}^r \quad (\text{ ó } U_{ccA} = U_{ccB}), \text{ y} \\ & - \varphi_{ccA} = \varphi_{ccB} \end{aligned}$$

donde u_{ccA}^r y u_{ccB}^r representan las tensiones de cortocircuito de los transformadores A y B en la referencia r.

16.1 ¿Por qué hace falta que tengan la misma relación de transformación?

Si los dos transformadores no tienen la misma relación de transformación, circulará una corriente entre ambos en vacío, de tal manera que sus tensiones secundarias sean iguales. La corriente circulatoria será tanto más elevada cuanto más diferentes sean las relaciones de transformación, y las pérdidas que produce se evitarían si las relaciones de transformación fueran iguales.

Por ejemplo, sean dos transformadores de 132 / 66 kV y 132 / 65 kV conectados a una red de 132 kV. En vacío, con sus secundarios no conectados en paralelo, se tendrían unas tensiones secundarias de 66 kV y 65 kV respectivamente. Conectando sus secundarios en paralelo se fuerza que las tensiones secundarias sean iguales, para lo cual aparece una intensidad circulatoria entre ambos, dejando de estar en vacío, aunque no alimenten ninguna carga.

Utilizando sus circuitos equivalentes de Thevenin reducidos al secundario (Fig. 16.2a) se puede calcular la corriente circulatoria.

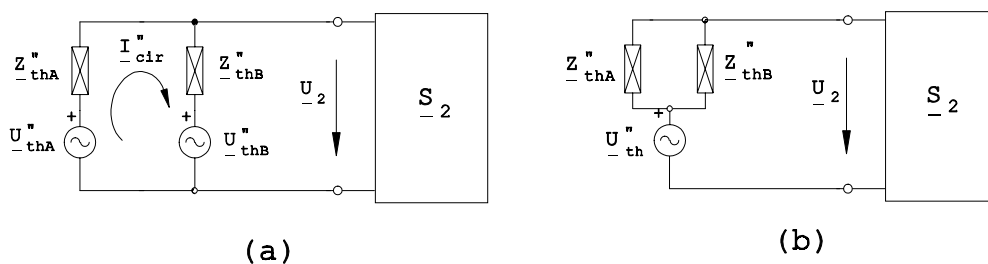


Fig. 16.2 (a) Circuitos equivalentes de Thevenin de dos transformadores en paralelo, y (b) simplificación si $r_{tA} = r_{tB}$

Si el secundario está en vacío, la corriente circulatoria vale

$$I_{\text{circ}}'' = \frac{U_{thA}'' - U_{thB}''}{Z_{thA}'' + Z_{thB}''} \quad (16.1)$$

Si las relaciones de transformación de ambos transformadores son iguales, las tensiones Thevenin son iguales. Recuérdese que la tensión Thevenin representa la tensión del secundario del transformador en vacío ($U_1 / U_{thA} = r_{tA}$ y $U_1 / U_{thB} = r_{tB}$) y si los dos tienen igual relación de transformación y su primario conectado a la misma tensión, sus tensiones secundarias en vacío son iguales.

El circuito que resulta es el de la figura 16.2b, donde la corriente circulatoria entre ambos transformadores es nula. También se puede observar en la ecuación 16.1, haciendo $U_{thA}'' = U_{thB}''$.

16.2 Acoplamiento correcto

Está definido por $r_{tA} = r_{tB}$ y $u_{ccA}^r = u_{ccB}^r$ (ó $U_{ccA} = U_{ccB}$).

Con el acoplamiento correcto se desea los dos transformadores lleguen a la vez a sus respectivas intensidades nominales. El acoplamiento correcto evita sobrecargas en los transformadores, ya que la intensidad y la potencia se reparten proporcionalmente a las intensidades nominales (es equivalente a un reparto proporcional a las potencias nominales, si las tensiones nominales son iguales).

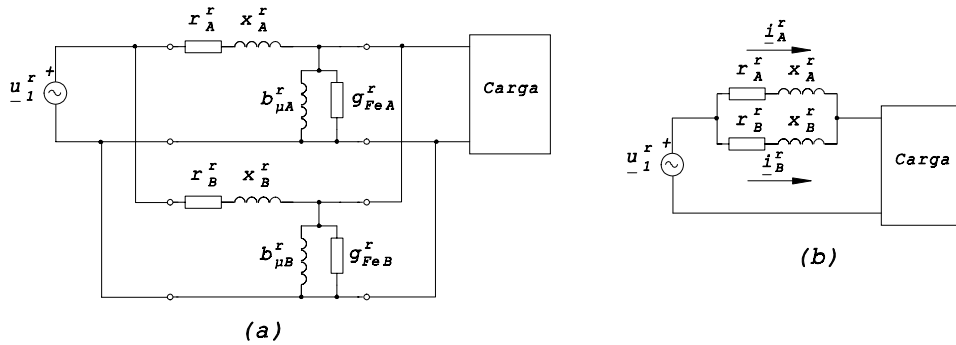


Fig. 16.3 Transformadores de igual relación de transformación en paralelo, (a) circuito reducido, y (b) simplificación utilizando el esquema que desprecia la rama del hierro

Vamos a deducir la condición necesaria para tener acoplamiento correcto. Despreciando la rama en el hierro (Fig. 16.3b), la conexión en paralelo impone que

$$z_A^r i_A^r = z_B^r i_B^r \quad (16.2)$$

y si ambos transformadores llegan a la vez a la intensidad nominal (caso particular de la ecuación 16.2, en el que $i_A^r = i_{nA}^r$ e $i_B^r = i_{nB}^r$),

$$z_A^r i_{nA}^r = z_B^r i_{nB}^r \Rightarrow u_{ccA}^r = u_{ccB}^r \quad (16.3)$$

Como el índice de carga de un transformador, C , es la relación entre la intensidad suministrada y la nominal, en un acoplamiento correcto los índices de carga de los transformadores son iguales:

$$C_A = \frac{I_A}{I_{nA}} = C_B = \frac{I_B}{I_{nB}} \Rightarrow i_A^A = i_B^B \quad (16.4)$$

¿Qué relación existe entre las placas de características de los transformadores de un acoplamiento correcto? Las respectivas tensiones de cortocircuito han de cumplir:

$$\varepsilon_{ccB} = u_{ccB}^r \frac{U_r}{U_{nB}} = \left(u_{ccA}^r \frac{U_r}{U_{nB}} \right) \frac{U_{nA}}{U_{nA}} = \varepsilon_{ccA} \frac{U_{nA}}{U_{nB}} \quad (16.5)$$

16.3 Acoplamiento óptimo

Está definido por $r_{tA} = r_{tB}$, $u_{ccA}^r = u_{ccB}^r$ (ó $U_{ccA} = U_{ccB}$) y $\varphi_{ccA} = \varphi_{ccB}$.

Con el acoplamiento óptimo se aprovecha toda la intensidad que circula por los transformadores, y se evitan pérdidas innecesarias en el cobre. En la figura 16.4 se observa qué sucede si $\varphi_{ccA} \neq \varphi_{ccB}$ y si $\varphi_{ccA} = \varphi_{ccB}$. Como $i_{total}^r = i_A^r + i_B^r$, el rendimiento será mayor cuanto menores sean i_A^r e i_B^r , ya que ambas influyen en las pérdidas en el cobre de sus respectivos transformadores.

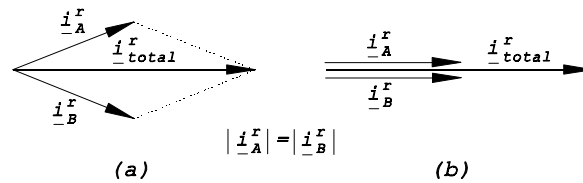


Fig. 16.4 Diagrama fasorial de intensidades cuando:

(a) $\varphi_{ccA} \neq \varphi_{ccB}$ y (b) $\varphi_{ccA} = \varphi_{ccB}$

Las condiciones del acoplamiento óptimo también se pueden escribir como:

$$\left. \begin{array}{l} u_{ccA}^r = u_{ccB}^r \\ \varphi_{ccA} = \varphi_{ccB} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} u_{rccA}^r = u_{rccB}^r \\ u_{xcca}^r = u_{xccb}^r \end{array} \quad (16.6)$$

¿Qué relación existe entre las placas de características de los transformadores de un acoplamiento óptimo? Además de la ecuación 16.5, ha de cumplirse que:

$$W_{ccB} = W_{ccA} \frac{S_{nB}}{S_{nA}} \frac{\epsilon_{ccB}}{\epsilon_{ccA}} \quad (16.7)$$

Vamos a demostrarlo. Como los cosenos son iguales,

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{ccA} = \cos \varphi_{ccB} &\Rightarrow \frac{r_A^r}{z_A^r} = \frac{r_B^r}{z_B^r} \Rightarrow \frac{r_A^r i_{nA}^r}{z_A^r i_{nA}^r} = \frac{r_B^r i_{nB}^r}{z_B^r i_{nB}^r} \\ \left. \begin{aligned} z_A^r i_{nA}^r &= u_{ccA}^r \\ z_B^r i_{nB}^r &= u_{ccB}^r \end{aligned} \right\} &\Rightarrow r_B^r = r_A^r \frac{i_{nA}^r}{i_{nB}^r} \frac{u_{ccB}^r}{u_{ccA}^r} \end{aligned} \quad (16.8)$$

y poniendo las resistencias en función de las potencias de cortocircuito,

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} w_{ccA}^r &= r_A^r \left(i_{nA}^r \right)^2 \\ w_{ccB}^r &= r_B^r \left(i_{nB}^r \right)^2 \end{aligned} \right\} &\Rightarrow \frac{w_{ccB}^r}{\left(i_{nB}^r \right)^2} = \frac{w_{ccA}^r}{\left(i_{nA}^r \right)^2} \frac{i_{nA}^r}{i_{nB}^r} \frac{u_{ccB}^r}{u_{ccA}^r} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{W_{ccB}}{S_r} = \frac{W_{ccA}}{S_r} \frac{I_{nB}/I_r}{I_{nA}/I_r} \frac{U_{ccB}/U_r}{U_{ccA}/U_r} &\Rightarrow W_{ccB} = W_{ccA} \frac{I_{nB}}{I_{nA}} \frac{U_{ccB}}{U_{ccA}} \\ \Rightarrow W_{ccB} = \left(W_{ccA} \frac{I_{nB}}{I_{nA}} \frac{U_{ccB}}{U_{ccA}} \right) \frac{U_{nA}}{U_{nB}} \frac{U_{nB}}{U_{nA}} &= W_{ccA} \frac{S_{nB}}{S_{nA}} \frac{\epsilon_{ccB}}{\epsilon_{ccA}} \end{aligned} \quad (16.9)$$

Trabajando en p.u. la demostración es más sencilla pues la impedancia coincide con la tensión de cortocircuito y la resistencia con la potencia de cortocircuito:

$$\begin{aligned} \cos \varphi_{ccA} = \cos \varphi_{ccB} &\Rightarrow \frac{r_A^A}{z_A^A} = \frac{r_B^B}{z_B^B} \\ \left. \begin{aligned} r_A^A &= w_{ccA}^A, \quad z_A^A = \epsilon_{ccA} \quad (\text{en p.u.}) \\ r_B^B &= w_{ccB}^B, \quad z_B^B = \epsilon_{ccB} \quad (\text{en p.u.}) \end{aligned} \right\} &\Rightarrow w_{ccB}^B = w_{ccA}^A \frac{\epsilon_{ccB}}{\epsilon_{ccA}} \\ &\Rightarrow W_{ccB} = W_{ccA} \frac{S_{nB}}{S_{nA}} \frac{\epsilon_{ccB}}{\epsilon_{ccA}} \end{aligned} \quad (16.10)$$

16.4 Resolución de problemas con transformadores en paralelo

Si los transformadores tienen diferente relación de transformación, se ha de trabajar con sus equivalentes de Thevenin (Fig. 16.2a) para obtener I_A'' e I_B'' . Deshaciendo la reducción al secundario se calculan las intensidades reales de cada primario:

$$I_{1A} = I_A'' I_{b1A}'', \quad I_{1B} = I_B'' I_{b1B}'' \quad (16.11)$$

Si los transformadores tienen igual relación de transformación, se puede trabajar con el equivalente de Thevenin (Fig. 16.2b), con el esquema reducido completo (Fig. 16.3a) o con el que desprecia la rama del hierro (Fig. 16.3b).

Del circuito de la figura 16.2b se calculan I_A'' e I_B'' , y la corriente real de ambos primarios se obtiene deshaciendo la reducción al secundario:

$$I_{1A} = I_A'' I_{b1}''', \quad I_{1B} = I_B'' I_{b1}''' \quad (16.12)$$

Utilizando el de la figura 16.3b se obtienen i_A^r e i_B^r , y las corrientes reales:

$$I_{1A} = i_A^r I_{b1}^r, \quad I_{1B} = i_B^r I_{b1}^r \quad (16.13)$$

17 Ensayos en el transformador para la determinación de parámetros

Para determinar los parámetros del transformador real (r^r , x^r , g_{Fe}^r y b_{μ}^r) se realizan dos ensayos: el de vacío y el de cortocircuito.

Para realizar estos ensayos es necesario conocer:

- la potencia nominal, S_n , y
- la relación de transformación nominal, U_{n1} / U_{n2} ,

de donde se calcula la intensidad nominal de cada devanado:

$$\begin{aligned} I_{\varphi\theta} &= \frac{S_{\varphi}}{U_{\varphi\theta}} \quad ; \quad I_{\varphi\theta} = \frac{S_{\varphi}}{U_{\varphi\theta}} \quad (\text{transformador monofásico}) \\ I_{\varphi\theta} &= \frac{S_{\varphi}}{\sqrt{3} U_{\varphi\theta}} \quad ; \quad I_{\varphi\theta} = \frac{S_{\varphi}}{\sqrt{3} U_{\varphi\theta}} \quad (\text{transformador trifásico}) \end{aligned} \quad (17.1)$$

Con los resultados de estos ensayos,

- vacío: potencia y corriente en valores reales o en p.u., w_o e i_o ,
- cortocircuito: potencia y tensión en valores reales o en p.u., w_{cc} y ε_{cc} ,

se calculan los parámetros del transformador.

Por este motivo, la placa de características del transformador incluye, entre otros datos:

- S_n , U_{n1} / U_{n2} , W_o , i_o , W_{cc} y ε_{cc} .

Al igual que sucede con el capítulo sobre transformadores en paralelo, este capítulo sobre estimación de parámetros es válido tanto para transformadores monofásicos como trifásicos, con la lógica excepción de que cuando se habla de potencias reales en un transformador trifásico, éstas son trifásicas, y cuando

se habla de tensiones e intensidades reales, son de línea (no obstante, la potencia y la tensión pueden ser de fase si se eligen unas potencia y tensión base adecuadas -Cap. 21-). Por ello, cuando se trata de medir la potencia, tensión y corriente que consume un transformador trifásico, habrá que colocar los aparatos de medida adecuados, como por ejemplo dos vatímetros en conexión Aron.

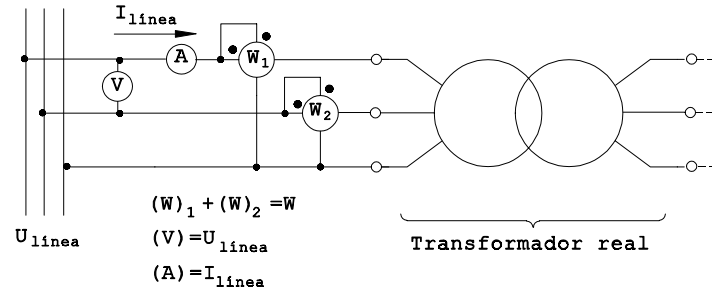


Fig. 17.1 Lecturas de potencia, tensión y corriente consumidas por un transformador trifásico durante los ensayos de vacío y cortocircuito

17.1 Ensayo en vacío

Este ensayo se realiza de la siguiente forma:

- se alimenta un devanado del transformador,
 - normalmente se alimenta el devanado de baja tensión,
 - normalmente se alimenta a su tensión nominal, y
- el otro devanado se deja en vacío (sin carga).

No obstante, se puede alimentar a una tensión diferente de la nominal (aunque próxima a ella) o por el lado de alta tensión (en cuyo caso la tensión nominal es la que corresponde a este devanado), o ambas cosas a la vez.

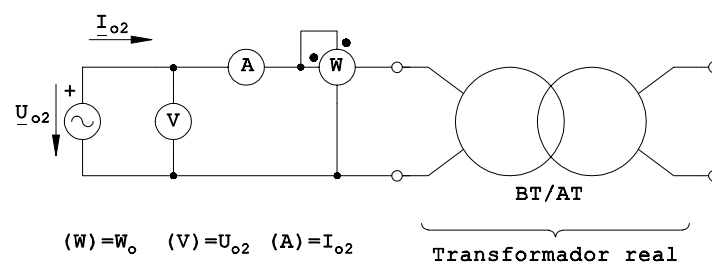


Fig. 17.2 Ensayo en vacío del transformador, alimentando por el lado de B.T.

En este ensayo se miden:

- la tensión de alimentación (U_{o2}),
- la corriente (I_{o2}) consumida, y
- la potencia (W_o) consumida.

La corriente del ensayo de vacío es mucho más pequeña que la nominal ($I_{o2} \ll I_{n2}$). Reduciendo los valores medidos,

$$w'_{\omega} = \frac{W_{\omega}}{S_{\omega}} \quad u'_{\omega\theta} = \frac{U_{\omega\theta}}{U_{\omega\theta}} \quad i'_{\omega\theta} = \frac{I_{\omega\theta}}{I_{\omega\theta}} \quad (17.2)$$

se pueden calcular g_{Fe}^r y b_{μ}^r , según:

$$\left. \begin{aligned} w'_{\omega} = (u'_{\omega\theta})^{\theta} g'_{\sigma\Omega} &\Rightarrow g'_{\sigma\Omega} = \frac{w'_{\omega}}{(u'_{\omega\theta})^{\theta}} \\ i'_{\omega\theta} = u'_{\omega\theta} y'_{\omega} &\Rightarrow y'_{\omega} = \frac{i'_{\omega\theta}}{u'_{\omega\theta}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_{\mu}^r = \sqrt{(y'_{\omega})^{\theta} - (g'_{\sigma\Omega})^{\theta}} \quad (17.3)$$

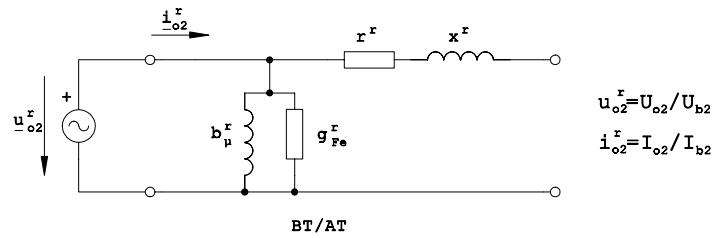


Fig. 17.3 Esquema reducido del ensayo en vacío, alimentando por el lado de B.T.

Si el ensayo en vacío se realiza por el lado de alta tensión, quedan la rama del cobre y la del hierro en serie, pero como r^r y x^r son muy pequeñas frente a $1/g_{Fe}^r$ y $1/b_{\mu}^r$ se pueden despreciar

$$z'_{\omega} = r' + jx' + \left(\frac{1}{g'_{\sigma\Omega} - jb'_{\mu}} \right) \approx \left(\frac{1}{g'_{\sigma\Omega} - jb'_{\mu}} \right) \quad (17.4)$$

por lo que no se alteran las fórmulas anteriores, a excepción de que en la reducción de u_{o1}^r e i_{o1}^r se tienen que utilizar como bases U_{b1} e I_{b1} .

Con el esquema en p.u.

Trabajando en p.u. no se distingue entre u_{o1} y u_{o2} ni entre i_{o1} e i_{o2} , por lo que se escribe

$$u_{\bar{\omega}} = u_{\bar{\omega}\theta} = u_{\bar{\omega}\theta} \quad ; \quad i_{\bar{\omega}} = i_{\bar{\omega}\theta} = i_{\bar{\omega}\theta} \quad (17.5)$$

Si el ensayo se realiza a la tensión nominal las fórmulas se simplifican:

Si $u_{\bar{\omega}} = 1$ (tensión nominal) :

$$\left. \begin{aligned} g_{\sigma\Omega} &= \frac{w_{\bar{\omega}}}{(u_{\bar{\omega}})^{\theta}} = \frac{w_{\bar{\omega}}}{1^{\theta}} = w_{\bar{\omega}} \\ y_{\bar{\omega}} &= \frac{i_{\bar{\omega}}}{u_{\bar{\omega}}} = \frac{i_{\bar{\omega}}}{1} = i_{\bar{\omega}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow b_{\mu} = \sqrt{(i_{\bar{\omega}})^{\theta} - (w_{\bar{\omega}})^{\theta}} \quad (17.6)$$

17.2 Ensayo en cortocircuito

Este ensayo se realiza de la siguiente forma:

- se alimenta un devanado del transformador,
 - *normalmente se alimenta el devanado de alta tensión,*
 - *normalmente se alimenta hasta que circula su intensidad nominal* (se aumenta la tensión desde 0V hasta que la corriente consumida sea la nominal de ese devanado), y
- el otro devanado se cortocircuita.

No obstante, se puede alimentar a una corriente diferente de la nominal (aunque próxima a ella) o por el lado de baja tensión (en cuyo caso la corriente nominal es la que corresponde a este devanado), o ambas cosas a la vez.

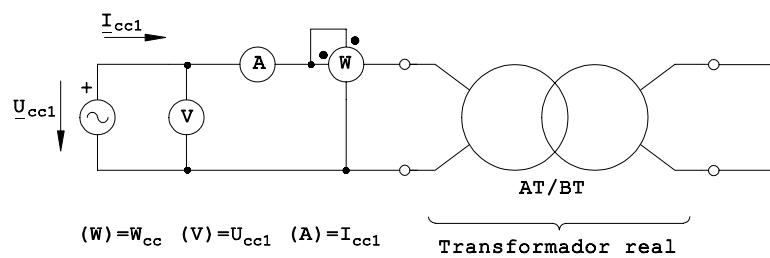


Fig. 17.4 Ensayo en cortocircuito del transformador, alimentando por el lado de A.T.

En este ensayo se miden:

- la tensión de alimentación (U_{cc1}),
- la corriente (I_{cc1}) consumida, y
- la potencia (W_{cc}) consumida.

La tensión del ensayo de cortocircuito es mucho más pequeña que la nominal ($U_{cc1} \ll U_{n1}$). Reduciendo los valores medidos,

$$w'_{\tilde{r}\tilde{r}} \frac{W_{\tilde{r}\tilde{r}}}{S_v} \quad u'_{\tilde{r}\tilde{\theta}} \frac{U_{\tilde{r}\tilde{\theta}}}{U_{v\theta}} \quad i'_{\tilde{r}\tilde{\theta}} \frac{I_{\tilde{r}\tilde{\theta}}}{I_{v\theta}} \quad (17.7)$$

se pueden calcular r' y x' , según:

$$\left. \begin{aligned} w'_{\tilde{r}\tilde{r}} r' (i'_{\tilde{r}\tilde{r}})^2 &\Rightarrow r' = \frac{w'_{\tilde{r}\tilde{r}}}{(i'_{\tilde{r}\tilde{r}})^2} \\ u'_{\tilde{r}\tilde{\theta}} z'_{\tilde{r}\tilde{r}} i'_{\tilde{r}\tilde{\theta}} &\Rightarrow z'_{\tilde{r}\tilde{r}} = \frac{u'_{\tilde{r}\tilde{\theta}}}{i'_{\tilde{r}\tilde{\theta}}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x' = \sqrt{(z'_{\tilde{r}\tilde{r}})^2 - (r')^2} \quad (17.8)$$

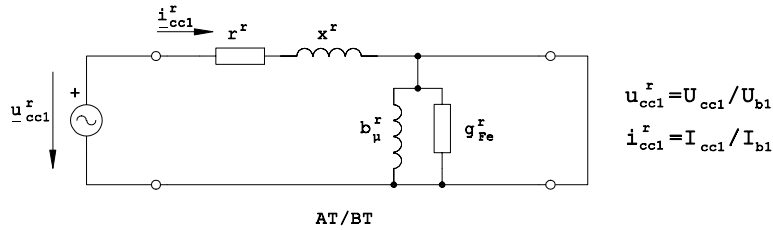


Fig. 17.5 Esquema reducido del ensayo en cortocircuito, alimentando por el lado de A.T.

Si el ensayo en cortocircuito se realiza por el lado de baja tensión, la rama del hierro y la del cobre están en paralelo, pero como $1/g_{fe}^r$ y $1/b_{\mu}^r$ son muy grandes frente a r^r y x^r se pueden despreciar

$$z'_{\tilde{r}\tilde{r}} = (r' + jx') \parallel \left(\frac{1}{g'_{\sigma\Omega} - jb'_{\mu}} \right) \approx r' + jx' \quad (17.9)$$

por lo que no se alteran las fórmulas anteriores, a excepción de que en la reducción de u_{cc2}^r e i_{cc2}^r se tienen que utilizar como bases U_{b2} e I_{b2} .

Con el esquema en p.u.

Trabajando en p.u. no se distingue entre u_{cc1} y u_{cc2} ni entre i_{cc1} e i_{cc2} , por lo que se escribe

$$u_{\dot{I}\dot{I}} = u_{\dot{I}\dot{I}\theta} = u_{\dot{I}\dot{I}0} \quad ; \quad i_{\dot{I}\dot{I}} = i_{\dot{I}\dot{I}\theta} = i_{\dot{I}\dot{I}0} \quad (17.10)$$

Si el ensayo se realiza a la corriente nominal las fórmulas quedan simplificadas:

Si $i_{\dot{I}\dot{I}} = 1$ (corriente nominal) :

$$\left. \begin{aligned} r &= \frac{w_{\dot{I}\dot{I}}}{(i_{\dot{I}\dot{I}})^\theta} = \frac{w_{\dot{I}\dot{I}}}{1^\theta} = w_{\dot{I}\dot{I}} \\ z_{\dot{I}\dot{I}} &= \frac{u_{\dot{I}\dot{I}}}{i_{\dot{I}\dot{I}}} = \frac{u_{\dot{I}\dot{I}}}{1} = u_{\dot{I}\dot{I}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = \sqrt{(u_{\dot{I}\dot{I}})^\theta - (w_{\dot{I}\dot{I}})^\theta} \quad (17.11)$$

Si el ensayo se realiza a la corriente nominal, a la tensión u_{cc} también se le conoce como tensión relativa de cortocircuito en tanto por uno, ε_{cc} . Numéricamente también coincide con z_{cc} ,

$$\text{Si } i_{\dot{I}\dot{I}} = 1 \text{ (corriente nominal) : } \quad \left\{ \begin{aligned} u_{\dot{I}\dot{I}} &= \varepsilon_{\dot{I}\dot{I}} = z_{\dot{I}\dot{I}} \\ \varepsilon_{\dot{I}\dot{I}} &= r \\ \varepsilon_{\dot{I}\dot{I}} &= x \end{aligned} \right. \quad (17.12)$$

18 Valores usuales de los parámetros del transformador de potencia

Los parámetros del hierro (i_o , i_{Fe} , i_μ , g_{Fe} y b_μ) de la tabla inferior corresponden a transformadores monofásicos o trifásicos con chapa de grano orientado laminada en frío. Los transformadores de potencias inferiores a 1000 kVA pueden ser tanto monofásicos como trifásicos, mientras que los de potencias superiores son generalmente trifásicos.

Como se puede observar, los grandes transformadores tienen núcleos magnéticos de mayor calidad (los valores porcentuales de la corriente de vacío son más pequeños). Además la influencia de la resistencia en el cobre se hace prácticamente despreciable frente a la reactancia de dispersión, cuyo elevado valor es deseable para que limite las corrientes de cortocircuito.

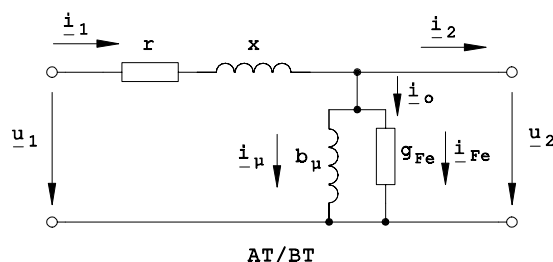


Fig. 18.1 Esquema equivalente del transformador reducido a p.u.

	POTENCIA DEL TRANSFORMADOR	
	< 1000 kVA	> 1000 kVA
i_o	8 % 0,6 %
i_{Fe}	1,2 % 0,006 %
b_μ	5 % 0,6 %
g_{Fe}	1,2 % 0,006 %
$u_{cc} = \varepsilon_{cc}$	3 ÷ 6 %	6 ÷ 13 %
$x = \varepsilon_x$	2,5 ÷ 6 %	5 ÷ 13 %
$r = \varepsilon_r$	1,1 ÷ 2,5 %	0,4 ÷ 1,3 %
x/r	1,2 ÷ 6	3 ÷ 30

19 Autotransformador

Un autotransformador es una bobina sobre un núcleo magnético con una toma intermedia (toma 2 en la figura 19.1).

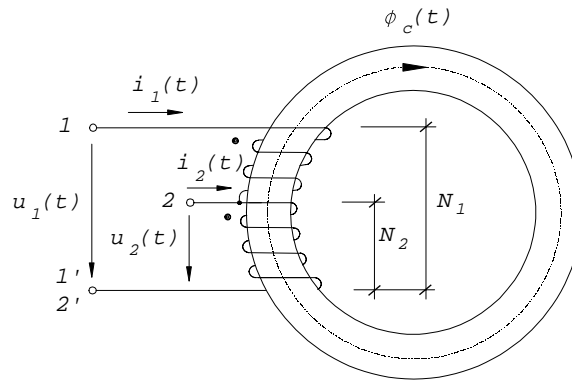


Fig. 19.1 Autotransformador con núcleo toroidal

Vamos a ver cómo se puede construir un autotransformador. Sea el transformador monofásico de la figura 19.2a, de características:

$$S_{nT}, U_{n1T}, U_{n2T}, W_{ccT}, \epsilon_{ccT}, W_{oT}, i_{oT} \quad (19.1)$$

Por claridad llamaremos:

$$\begin{aligned} S_T &= S_{nT}, \quad U_{1T} = U_{n1T}, \quad U_{2T} = U_{n2T} \\ I_{1T} &= I_{n1T} = \frac{S_{nT}}{U_{n1T}}, \quad I_{2T} = I_{n2T} = \frac{S_{nT}}{U_{n2T}} \end{aligned} \quad (19.2)$$

El devanado primario del transformador ha sido construido para soportar la tensión U_{1T} y la corriente I_{1T} , y el secundario para U_{2T} e I_{2T} . Como ambos devanados se encuentran aislados galvánicamente, se pueden unir por un punto (Fig. 19.2b). Los devanados continuarán funcionando igual (soportan las mismas tensiones e intensidades).

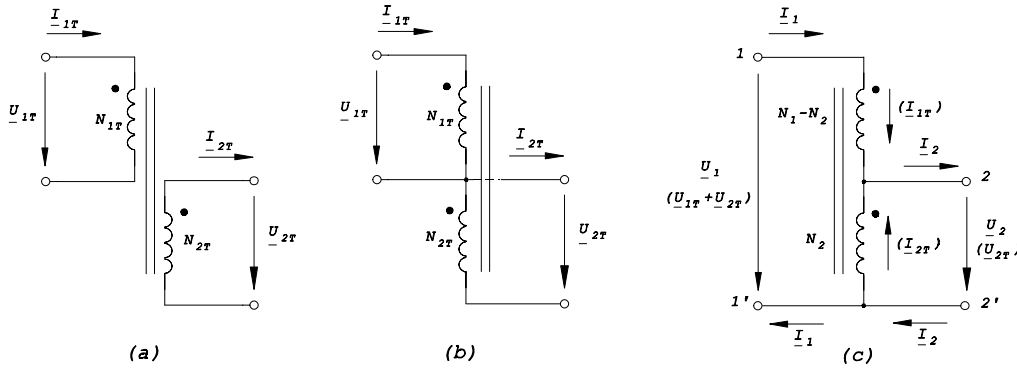


Fig. 19.2 Construcción de un autotransformador a partir de un transformador con el mismo material

Por otro lado, en lugar de aplicar U_{1T} a N_{1T} espiras, se puede aplicar $U_{1T} + U_{2T}$ a $N_{1T} + N_{2T}$ espiras en el primario (U_{1T} y U_{2T} están en fase porque el flujo es común). Esto se observa en la figura 19.2b. Para que los devanados de la figura 19.2c continúen en las mismas condiciones de intensidad y tensión, se tiene que cumplir que:

$$U_1 = U_{1T} + U_{2T} \quad , \quad U_2 = U_{2T} \quad , \quad I_1 = I_{1T} \quad , \quad I_2 = I_{1T} + I_{2T} \quad (19.3)$$

La potencia aparente que absorbe el primario del autotransformador es:

$$\begin{aligned} S &= U_1 I_1 = (U_{1T} + U_{2T}) I_{1T} = U_{1T} I_{1T} + U_{2T} I_{1T} = \\ &= S_T + U_{2T} I_{1T} = S_{ind} + S_{cond} > S_T \end{aligned} \quad (19.4)$$

donde: - S (potencia del autotransformador) es la llamada *potencia de paso*,
 - $S_T = S_{ind}$ (potencia del transformador a partir del que está construido el autotransformador, contiene el mismo material) es la llamada *potencia por inducción*. También se llama *potencia propia* o *interna*.
 - S_{cond} es la llamada *potencia por conducción*.

Es decir, que el autotransformador transfiere más potencia del primario al secundario que un transformador construido con el mismo material.

La *potencia por inducción* es la potencia que el primario del autotransformador transfiere al secundario por efecto del flujo común, es decir, por el efecto de la inducción magnética. Es la potencia que transfiere el transformador a partir del que está construido.

La *potencia por conducción* es la potencia que el primario del autotransformador transfiere al secundario mediante la corriente I_{1T} , es decir, por conducción, ya que esta intensidad circula del primario al secundario (del terminal 1 al 2 en la figura 19.2c).

Si el autotransformador es ideal (no tiene pérdidas internas), la potencia que cede al secundario:

$$\begin{aligned} S &= U_1 I_1 = U_2 I_2 = U_{2T} (I_{1T} + I_{2T}) = U_{2T} I_{1T} + U_{2T} I_{2T} = \\ &= U_{2T} I_{1T} + S_T = S_{cond} + S_{ind} > S_T \end{aligned} \quad (19.5)$$

Normalmente $U_{1T} < U_{2T}$, o lo que es lo mismo, la relación de transformación es próxima a la unidad.

Como los devanados están sometidos a las mismas condiciones de tensión e intensidad (tanto en carga como en los ensayos en vacío y cortocircuito), las pérdidas, caídas de tensión, impedancias, flujos, etc., son iguales en valores reales que las del transformador del cual procede, pero los valores reducidos son diferentes, ya que las características nominales son diferentes:

$$r_t = \frac{U_1}{U_2} = \frac{U_{1T}}{U_{1T} + U_{2T}} \quad (19.6)$$

Ensayo en vacío

Como el flujo es el mismo y hay $N_{1T} + N_{2T}$ espiras que lo crean, la corriente de vacío necesaria es menor. La potencia se mantiene:

$$\left. \begin{array}{l} N_{1T} I_{oT} = (N_{1T} + N_{2T}) I_o \\ I_{n1T} = I_{n1} \end{array} \right\} \Rightarrow i_o = \frac{I_o}{I_{n1}} = \frac{N_{1T}}{N_{1T} + N_{2T}} i_{oT} \quad (19.7)$$

$$W_o = W_{oT}$$

Ensayo en cortocircuito

Solamente las N_{1T} primeras espiras del primario soportan la U_{cc} (el secundario está cortocircuitado), por lo que la tensión de cortocircuito es la misma (porcentualmente cambia al tener diferente tensión nominal). La potencia también se mantiene:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{ccT} &= \frac{U_{cc}}{U_{n1T}} \\ \varepsilon_{cc} &= \frac{U_{cc}}{U_{n1}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \varepsilon_{cc} = \varepsilon_{ccT} \frac{U_{n1T}}{U_{n1}} \quad (19.8)$$

$$W_{cc} = W_{ccT}$$

Comparando el autotransformador con el transformador del que procede

- transfiere más potencia;
- el rendimiento es mucho mejor, (con las mismas pérdidas transfiere más potencia);
- tiene una ε_{cc} pequeña, lo que plantea el inconveniente de que la corriente en caso de cortocircuito es elevada;
- no tiene aislados primario y secundario;
- aunque cuesta aproximadamente el mismo dinero que el transformador (ambos tienen el mismo material), puede transmitir más potencia.

Comparando un autotransformador con un transformador de la misma potencia

- tiene menores reactancias de dispersión, ya que el flujo de las primeras N_2 espiras del primario está completamente concatenado por las N_2 espiras del secundario (son comunes);
- tiene menores pérdidas de potencia, pues en las N_2 espiras del primario y del secundario sólo circula la intensidad ($I_1 - I_2$) mientras que en el transformador circula por un lado I_1 y por el otro I_2 ;
- necesita menor corriente de excitación, al poder ser el circuito magnético de menor longitud, o sea de menor reluctancia;
- es de menor tamaño, emplea menos hierro y cobre, por lo que cuesta menos dinero cuando la relación de transformación no es muy diferente de 1:1; y
- presenta la desventaja de no tener aislados los devanados.

Por todo ello, el autotransformador puede ser una opción válida para relaciones de transformación próximas a la unidad cuando no sea imprescindible tener aislados galvánicamente primario y secundario.

Cuando la toma intermedia del autotransformador se puede variar, se tiene un autotransformador variable, que es muy utilizado en laboratorios para la regulación de la tensión.

20 El transformador trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado

Conectando tres transformadores monofásicos se puede conseguir uno trifásico (que en este caso se llama banco trifásico). El transformador trifásico puede tener otras formas constructivas derivadas del banco trifásico: con núcleo de tres o cinco columnas. El más utilizado es el de tres columnas.

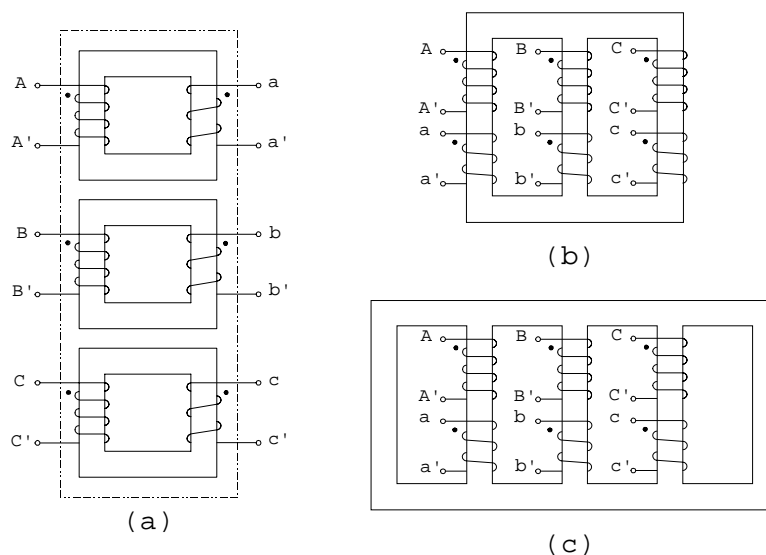


Fig. 20.1 Transformador trifásico: (a) banco trifásico (tres transformadores monofásicos), (b) de tres columnas, y (c) de cinco columnas o acorazado

20.1 Evolución del banco trifásico al transformador de tres columnas

Un transformador trifásico en régimen equilibrado tiene su primario conectado a un sistema simétrico de tensiones y su secundario en vacío o alimentando una carga simétrica (las tres impedancias son iguales). Tanto el primario como el secundario pueden estar conectados en triángulo o en estrella, con o sin neutro. Si el neutro del primario está conectado, el sistema de tensiones ha de ser también equilibrado (situado en el c.d.g. del triángulo de tensiones).

Vamos a demostrar que la suma de los flujos de las tres fases de un transformador trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado es nula. Esta característica se mostrará para el banco trifásico, y permitirá la evolución hacia la estructura de tres columnas.

Sea un banco trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado. Por simplicidad *supongamos que los transformadores monofásicos son ideales*.

Primario conectado en triángulo

Si el primario está conectado en triángulo (Fig. 20.2a) y es alimentado por el sistema simétrico de tensiones de la figura 20.2b, los flujos que se crean en cada transformador monofásico son:

$$u_{AB}(t) = N_1 \frac{d\phi_a(t)}{dt}, \quad u_{BC}(t) = N_1 \frac{d\phi_b(t)}{dt}, \quad u_{CA}(t) = N_1 \frac{d\phi_c(t)}{dt} \quad (20.1)$$

Como las tensiones son senoidales, el flujo también lo es, por lo que la ecuación 20.1 se puede escribir en forma fasorial (sustituyendo la derivada por $j\omega$):

$$\underline{U}_{AB} = j\omega N_1 \underline{\phi}_a, \quad \underline{U}_{BC} = j\omega N_1 \underline{\phi}_b, \quad \underline{U}_{CA} = j\omega N_1 \underline{\phi}_c \quad (20.2)$$

Los flujos forman un sistema simétrico que adelanta 90° a las respectivas tensiones. Y como:

$$\underline{U}_{AB} + \underline{U}_{BC} + \underline{U}_{CA} = 0 \quad (20.3)$$

entonces la suma de los tres flujos es:

$$\underline{\phi}_a + \underline{\phi}_b + \underline{\phi}_c = 0 \quad (20.4)$$

Es decir que, en todo momento, la suma de los flujos de los tres núcleos es nula:

$$\phi_a(t) + \phi_b(t) + \phi_c(t) = 0 \quad (20.5)$$

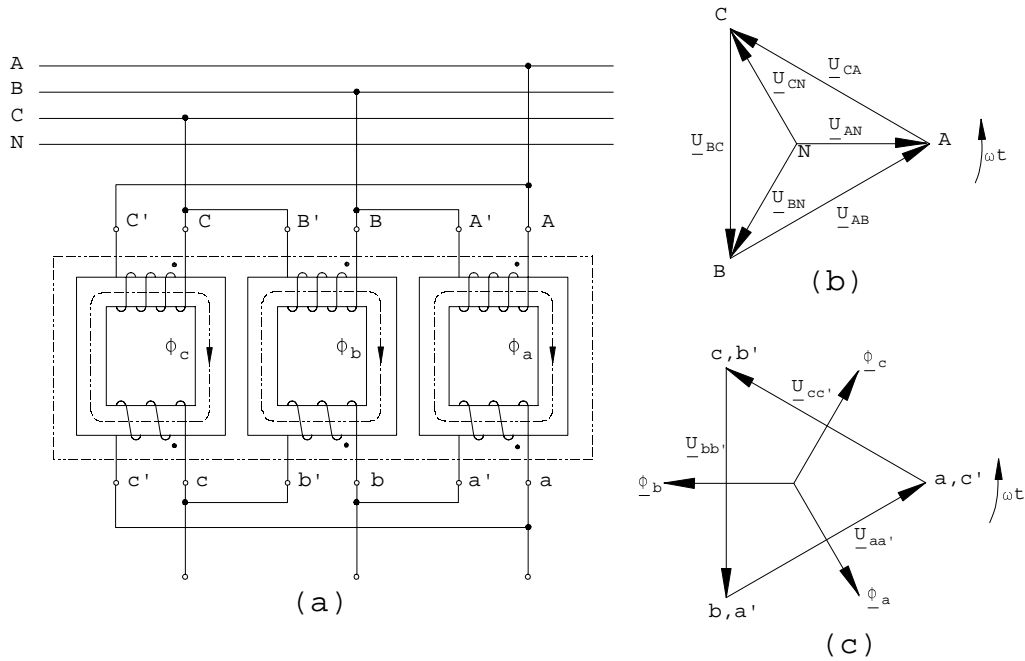


Fig. 20.2 (a) Banco trifásico con primario y secundario conectados en triángulo, (b) sistema de tensiones simétricas y (c) flujos creados y tensiones inducidas en el secundario

Primario conectado en estrella con neutro

Supongamos en primer lugar que el primario está conectado en estrella y con neutro (Fig. 20.3a), y que está alimentado por el sistema de tensiones simétrico y equilibrado de la figura 20.3b.

Los flujos son:

$$u_{AN}(t) = N_1 \frac{d\phi_a(t)}{dt} \quad , \quad u_{BN}(t) = N_1 \frac{d\phi_b(t)}{dt} \quad , \quad u_{CN}(t) = N_1 \frac{d\phi_c(t)}{dt} \quad (20.6)$$

Como la tensión es senoidal, los flujos también lo son, por lo que la ecuación 20.6 se puede escribir fasorialmente:

$$\underline{U}_{AN} = j\omega N_1 \underline{\Phi}_a \quad , \quad \underline{U}_{BN} = j\omega N_1 \underline{\Phi}_b \quad , \quad \underline{U}_{CN} = j\omega N_1 \underline{\Phi}_c \quad (20.7)$$

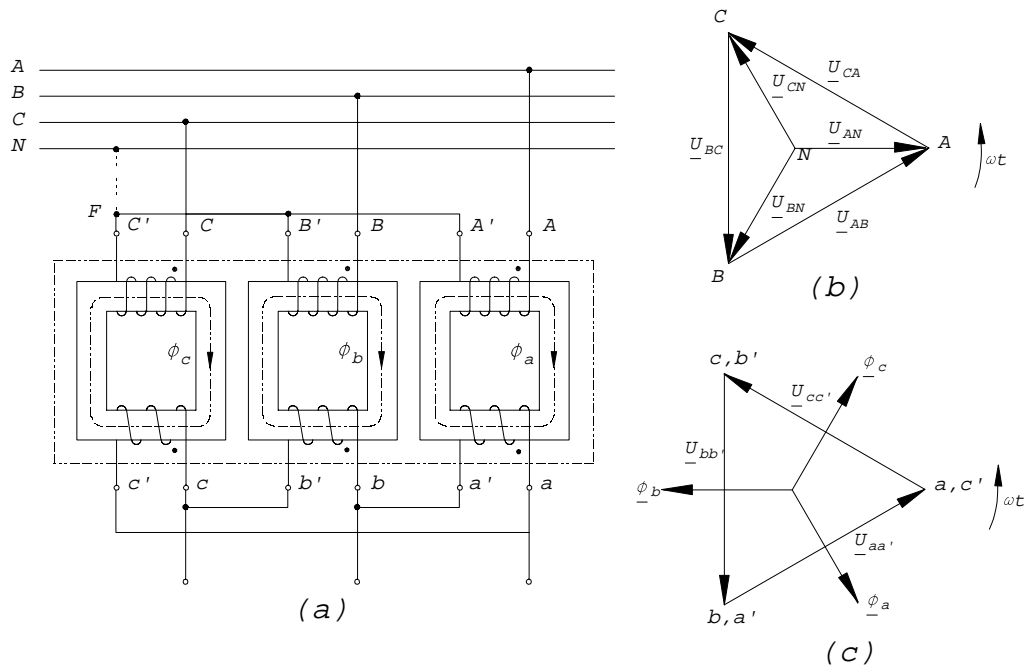


Fig. 20.3 (a) Banco trifásico con primario conectado en estrella (con o sin neutro) y secundario conectado en triángulo, (b) sistema de tensiones simétricas, y (c) flujos creados y tensiones inducidas en el secundario

Es decir, que los flujos forman un sistema simétrico adelantado 90° a las tensiones, y como:

$$\underline{U}_{AN} + \underline{U}_{BN} + \underline{U}_{CN} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{\phi}_a + \underline{\phi}_b + \underline{\phi}_c = 0 \quad (20.8)$$

Luego la suma de los tres flujos para cada instante de tiempo también es nula:

$$\phi_a(t) + \phi_b(t) + \phi_c(t) = 0 \quad (20.9)$$

Primario conectado en estrella sin neutro

Aunque el neutro de la alimentación no esté conectado, si la carga del secundario es simétrica, el transformador se comporta de forma equilibrada, es decir que el potencial del neutro del primario es igual al del centro de gravedad de la alimentación, $F \equiv G$ (F potencial del neutro del primario y G potencial del c.d.g. de la alimentación).

Para demostrarlo partiremos de que el neutro del primario está conectado. Veremos que no circulará corriente por el mismo, y que por lo tanto se puede colocar o no. Si el neutro está conectado, los flujos son los indicados en las ecuaciones 20.6 ó 20.7. Las tensiones inducidas en el secundario son:

$$\underline{U}_{ab} = j\omega N_2 \Phi_a, \quad \underline{U}_{bc} = j\omega N_2 \Phi_b, \quad \underline{U}_{ca} = j\omega N_2 \Phi_c \quad (20.10)$$

Si la carga que alimenta el secundario es simétrica, las intensidades que consume también lo serán,

$$\underline{I}_{ab} = \frac{\underline{U}_{ab}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{bc} = \frac{\underline{U}_{bc}}{\underline{Z}}, \quad \underline{I}_{ca} = \frac{\underline{U}_{ca}}{\underline{Z}} \quad (20.11)$$

Por ello, las corrientes del primario (que aparecen para compensar la fuerza magnetomotriz de las del secundario) forman también una terna simétrica de secuencia directa, luego:

$$\underline{I}_A + \underline{I}_B + \underline{I}_C = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{I}_N = 0 \quad (20.12)$$

sin importar que el neutro del primario esté o no conectado, ya que $F \equiv G$.

Como se ha demostrado, el transformador se comporta de forma equilibrada tanto en vacío como con una carga simétrica, por lo que la suma de los flujos de las tres fases es nula.

Si la carga no hubiera sido simétrica (las tres impedancias diferentes), entonces las corrientes consumidas tampoco lo hubieran sido, y si el primario hubiera estado conectado en estrella sin neutro, el potencial de éste no coincidiría con el del c.d.g. de la alimentación, $F \neq G$. Por ello, las tensiones de los tres devanados del primario no hubieran sumado cero, y la de los flujos tampoco:

$$\underline{U}_{AF} + \underline{U}_{BF} + \underline{U}_{CF} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi_a + \Phi_b + \Phi_c \neq 0 \quad (20.13)$$

Cuando la carga no es simétrica se dice que el transformador está desequilibrado. Para solucionar un problema general con cargas desequilibradas hay que plantear las ecuaciones magnéticas y las ecuaciones eléctricas. Si, por ejemplo, se trata de un transformador de tres columnas, se han de plantear las ecuaciones magnéticas correspondientes a las columnas del transformador y al camino magnético que se cierra a través del aire o de la armadura del transformador, junto con las ecuaciones eléctricas de la carga y de la alimentación. La solución de problemas con cargas desequilibradas se sale de los objetivos de estos apuntes.

Evolución de la geometría del banco trifásico a la del transformador de tres columnas

Como la suma de los flujos es nula en cada instante, en el banco trifásico mostrado en la figura 20.4 se pueden juntar las tres columnas en una sola, por la cual no circulará flujo alguno. Suprimiendo esta columna y acortando las culatas, se llega a la disposición de tres columnas (Fig. 20.1b).

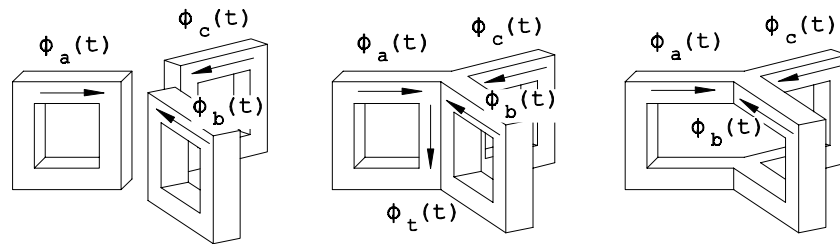


Fig. 20.4 Evolución del banco trifásico al transformador de tres columnas

Esta disposición es la más utilizada de entre las tres presentadas ya que el ahorro de material que supone implica un ahorro económico, de peso y de pérdidas. El inconveniente que tiene es que crea una asimetría en los circuitos magnéticos de las tres columnas, ya que el de la columna central es más corto que los otros dos, aunque su efecto es poco perceptible en carga, sobre todo con materiales de elevada permeabilidad. Esta asimetría magnética se evita con la estructura de cinco columnas, ya que tiene iguales los circuitos magnéticos por fase.

Frente al de tres columnas, el banco trifásico presenta la ventaja de que la unidad mínima de reserva es monofásica, y por lo tanto, más económica.

Si el transformador trabaja en régimen desequilibrado:

- porque estando el primario conectado en estrella las tensiones de alimentación no son simétricas, o
- porque estando el primario conectado en estrella con neutro la tensión de alimentación no es equilibrada ($F \neq G$), o
- porque estando el primario conectado en estrella sin neutro la carga no es simétrica, o
- por otros desequilibrios (entre ellos la no linealidad del transformador),

entonces la suma de los tres flujos no es cero. Sin embargo, si se tiene un transformador de tres columnas como el de la figura 20.4 se podría pensar que la suma de los tres flujos es nula. Lo que sucede es que existe una cuarta columna, que es el aire o la carcasa del transformador, por la cual se cierra el flujo neto de la suma.

20.2 Conexiones de los devanados. Propiedades

Tanto el primario como el secundario de un transformador trifásico se pueden conectar de tres formas: estrella (Y), triángulo (D) y zig-zag (Z). Dependiendo de la forma de conexión, tendrá relaciones de transformación y propiedades diferentes.

La *conexión en estrella* permite tener el neutro accesible. La corriente de línea coincide con la corriente de cada devanado. Los devanados soportan la tensión sencilla.

En la *conexión en triángulo* no se puede tener neutro. La corriente de cada devanado es la de línea dividida por $\sqrt{3}$. Los devanados aguantan la tensión compuesta. Para igual tensión de línea e igual potencia, cada devanado debe tener $\sqrt{3} = 1.73$ veces más espiras que en estrella (la tensión de devanado es superior), pero de sección $\sqrt{3}$ veces inferior (la intensidad de devanado es inferior). Luego la cantidad total de cobre es la misma.

Para tener una *conexión en zigzag* hay que hacer dos bobinas iguales por fase, por las que circulará la intensidad de línea. Para igual tensión, hace falta un número de espiras $2/\sqrt{3} = 1.15$ veces más grande que en estrella, espiras de la misma sección. Se puede tener neutro accesible. Cada una de las dos bobinas de cada devanado soporta una tercera parte de la tensión compuesta.

En las dos figuras siguientes se muestran ejemplos de transformadores conectados en estrella, triángulo y zigzag, así como los diagramas fasoriales de las tensiones de primario y secundario. En la figura 20.7 se observa la relación entre tensiones y corrientes de línea y tensiones y corrientes en cada devanado del transformador en las tres conexiones posibles.

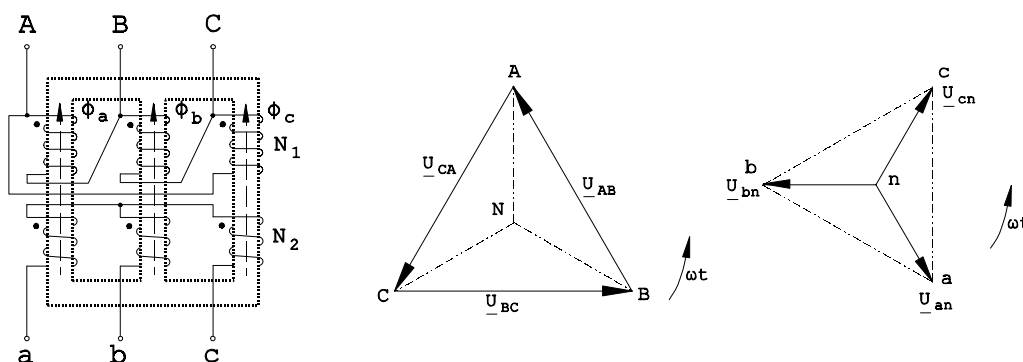


Fig. 20.5 Transformador trifásico conexión triángulo-estrella (grupo de conexión Dy5) y diagrama fasorial

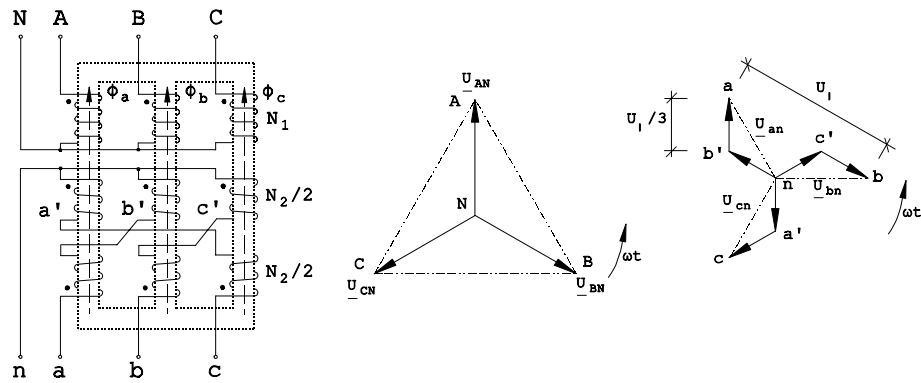


Fig. 20.6 Transformador trifásico conexión estrella-zigzag (grupo de conexión YNzn11) y diagrama fasorial

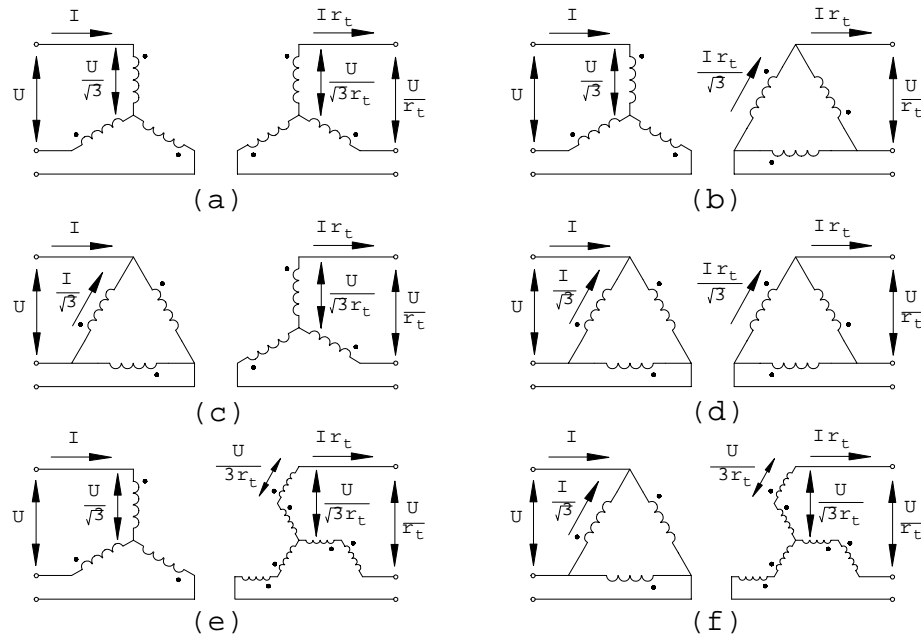


Fig. 20.7 Conexiones usuales de los devanados de un transformador trifásico: (a) estrella-estrella (Y-Y), (b) estrella-triángulo (Y-D), (c) triángulo-estrella (D-Y), (d) triángulo-triángulo (D-D), (e) estrella-zigzag (Y-Z), y (f) triángulo-zigzag (D-Z)

En general, la conexión en triángulo se comporta bien frente a los desequilibrios que provoca la alimentación de cargas no simétricas, mientras que las conexiones en estrella presentan problemas, deformando la onda de tensión (aparecen armónicos de tensión). La conexión en zigzag representa una opción mejorada de la conexión en estrella, y se comporta bien ante desequilibrios, aunque presenta el inconveniente de necesitar un 15% más de cobre. Permite también la creación de un neutro artificial.

Entonces:

- la conexión $Y-Y$ se utiliza poco por los problemas mencionados,
- las conexiones $Y-D$ y $D-Y$ funcionan razonablemente bien ante cargas desequilibradas, ya que el triángulo redistribuye parcialmente el desequilibrio entre las fases,
- la conexión $D-D$ se comporta bien con cargas desequilibradas, aunque la ausencia de neutro resulta a veces un inconveniente si se utiliza para distribución. Si se trata de un banco trifásico tiene la ventaja de que se puede quitar un transformador para realizar operaciones de mantenimiento o reparación, mientras que los restantes pueden seguir trabajando (resulta la conexión en V de la figura 23.6),
- las conexiones $Y-Z$ y $D-Z$ se emplean bastante en distribución por su excelente comportamiento frente a desequilibrios. La conexión en zigzag se encuentra siempre en el lado de baja tensión por la posibilidad de crear un neutro artificial. La conexión $Y-Z$ es la opción mejorada de la $Y-Y$.

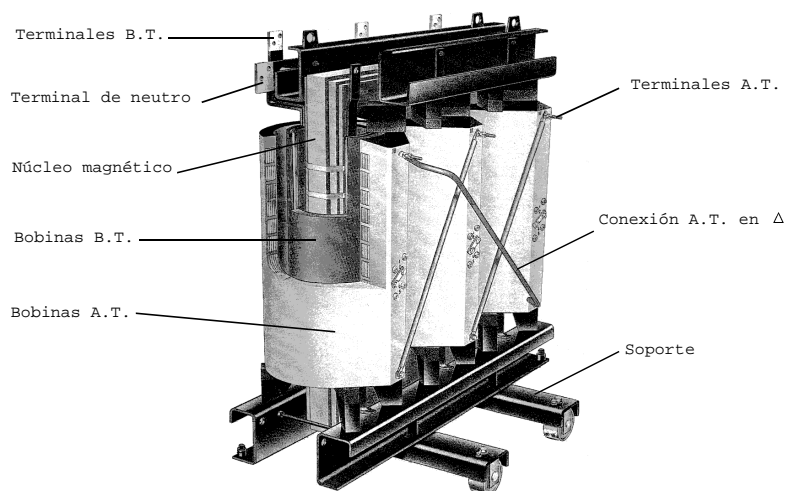


Fig. 20.8 Detalles constructivos de un transformador trifásico

20.3 Valores nominales y placa de características del transformador trifásico

Valores nominales del transformador trifásico

Los valores nominales del transformador trifásico son análogos a los del monofásico (ver capítulo 7). Lo único que cambia es la forma de calcular alguno de ellos.

Potencia nominal. Es la potencia trifásica. Se calcula como:

$$S_n = \sqrt{3} U_{n1} I_{n1} = \sqrt{3} U_{n2} I_{n2} \quad (20.14)$$

Tensión nominal, U_{n1} , U_{n2} . Es la tensión de línea que se debe aplicar al transformador para que funcione correctamente en régimen permanente sin deterioro de sus devanados.

Intensidad nominal, I_{n1} , I_{n2} . Es la intensidad máxima de línea que puede consumir y suministrar el transformador sin deterioro de sus devanados.

Relación de transformación, r_t . Es la relación entre tensiones de línea de primario y secundario cuando el transformador trabaja en vacío. Se suele calcular como la relación entre números de espiras de primario y secundario incluyendo en conexiones Y el factor $\sqrt{3}$ y en conexiones Z el factor $3/2$, o lo que es lo mismo, la relación entre U_{n1} y U_{n2} :

$$\begin{aligned} Dd: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{N_1}{N_2} & Yy: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{\sqrt{3} N_1}{\sqrt{3} N_2} = \frac{N_1}{N_2} \\ Dy: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{N_1}{\sqrt{3} N_2} & Yd: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{\sqrt{3} N_1}{N_2} \\ Dz: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{N_1}{3/2 N_2} = \frac{2 N_1}{3 N_2} & Yz: r_t &= \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{\sqrt{3} N_1}{3/2 N_2} = \frac{2 N_1}{\sqrt{3} N_2} \end{aligned} \quad (20.15)$$

Vamos a demostrar una de estas relaciones de transformación, por ejemplo la Dy. Alimentando el primario a la tensión nominal, U_{n1} , se crea el flujo nominal, ϕ_n . Por ejemplo, en la fase *a* de la figura 20.2a:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{AB} &= j\omega N_1 \phi_a \\ \text{Si } |\underline{U}_{AB}| &= U_{n1} \Rightarrow |\phi_a| = \phi_n \end{aligned} \quad (20.16)$$

Este flujo induce una tensión fase-neutro en el secundario del transformador:

$$\underline{U}_{aa'} = j\omega N_2 \Phi_a$$

$$\text{Si } |\Phi_a| = \Phi_n \Rightarrow |\underline{U}_{aa'}| = \frac{U_{n2}}{\sqrt{3}} \quad (20.17)$$

al estar el secundario en estrella, la tensión de línea es $\sqrt{3}$ veces superior a la de fase, y por tanto la relación de transformación es:

$$r_t = \frac{U_{n1}}{U_{n2}} = \frac{\omega N_1 \Phi_n}{\sqrt{3} \omega N_2 \Phi_n} = \frac{N_1}{\sqrt{3} N_2} \quad (20.18)$$

Frecuencia nominal, f_n . Es la frecuencia a la que corresponden el resto de valores nominales.

Placa de características del transformador trifásico

La placa de características de un transformador trifásico contiene, entre otros, los siguientes valores:

- potencia nominal, S_n ,
- tensiones nominales de primario y secundario, U_{n1} y U_{n2} ,
- intensidades nominales de primario y secundario, I_{n1} e I_{n2} ,
- relación de transformación, r_t ,
- frecuencia nominal, f_n ,
- datos del ensayo en vacío: potencia y corriente en valores reales y en p.u., W_o e i_o ,
- datos del ensayo en cortocircuito: potencia y tensión en valores reales y en p.u. W_{cc} y ε_{cc} ,
- tipo de conexión y existencia de neutro, por ejemplo Dyn .

21 Reducción del transformador trifásico en régimen permanente senoidal equilibrado

Para trabajar con el transformador trifásico en régimen permanente equilibrado se ha de reducir el esquema. Al reducirlo se convierte en un esquema fase-neutro, como muestra la figura 21.1.

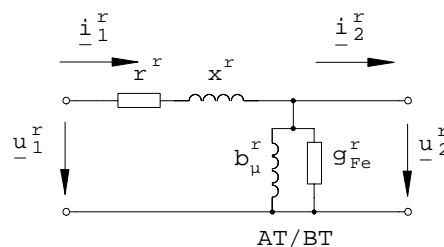


Fig. 21.1 Esquema reducido del transformador trifásico real en régimen permanente senoidal equilibrado

Una consideración se debe tener en cuenta: las tensiones de los devanados de un transformador monofásico ideal solamente pueden estar en fase o en contrafase (desfasadas 180° , por ejemplo en la figura 6.1 considerando la tensión entre $2'$ y 2), mientras que en el transformador trifásico se pueden conseguir otros desfases entre primario y secundario. Estos desfases se denotan mediante el índice horario. No es necesario considerar este desfase en el esquema reducido, pero sí al volver al esquema trifásico.

Por ello, el desfase total entre tensiones de primario y secundario en carga es la suma de:

- el desfase del índice horario, y
- el desfase del esquema reducido (provocado por las impedancias del circuito).

Otra observación se ha de realizar. Como el esquema reducido corresponde a una fase, las tensiones y corrientes que se obtengan serán las de una fase, mientras que las de las otras dos fases serán iguales en módulo y desfasadas 120° y 240° .

21.1 Elección de los valores base

Las bases que se deben elegir para reducir un esquema con un transformador trifásico ideal han de cumplir condiciones semejantes a cuando se reduce un transformador monofásico ideal:

- que la potencia base (S_b) sea única para todo el circuito,
- que las tensiones base de cada lado del transformador (U_{b1} , U_{b2}) cumplan la relación de transformación del transformador ideal ($U_{b1}/U_{b2}=r_t$).

A partir de la potencia y tensiones base elegidas, se obtienen las corrientes e impedancias base de cada lado del transformador. También se pueden calcular las admitancias base. *La expresión de la corriente base cambia con respecto a la reducción del transformador monofásico, ya que aparece un $\sqrt{3}$.*

POTENCIA TRIFÁSICA	S_b (VA)		
POTENCIA DE FASE	$S_{b,F} = \frac{S_b}{3}$ (VA)		
TENSIÓN DE LÍNEA (FASE-FASE)	U_{b1} (V)	$\left(\frac{U_{b1}}{U_{b2}} = r_t \right)$	U_{b2} (V)
TENSIÓN DE FASE	$U_{b1,F} = \frac{U_{b1}}{\sqrt{3}}$ (V)	$\left(\frac{U_{b1,F}}{U_{b2,F}} = r_t \right)$	$U_{b2,F} = \frac{U_{b2}}{\sqrt{3}}$ (V)
CORRIENTE DE LÍNEA	$I_{b1} = \frac{S_b}{\sqrt{3} U_{b1}}$ (A)		$I_{b2} = \frac{S_b}{\sqrt{3} U_{b2}}$ (A)
IMPEDANCIA DE FASE EN Y	$Z_{b1} = \frac{U_{b1}^2}{S_b}$ (Ω)		$Z_{b2} = \frac{U_{b2}^2}{S_b}$ (Ω)
ADMITANCIA DE FASE EN Y	$Y_{b1} = \frac{1}{Z_{b1}} = \frac{S_b}{U_{b1}^2}$ (Ω^{-1})		$Y_{b2} = \frac{1}{Z_{b2}} = \frac{S_b}{U_{b2}^2}$ (Ω^{-1})

Se ha de observar que los valores base corresponden a:

- una potencia trifásica (o una potencia monofásica),
- una tensión compuesta o de línea (fase-fase) (o una tensión de fase),
- una impedancia de una fase en estrella, y
- una corriente de línea.

Por ello,

- para reducir una carga P-Q (potencia trifásica) se divide su valor por la potencia base trifásica, o si se prefiere se divide la potencia de una fase por la potencia base de fase:

$$s^r = \frac{S}{S_b} = \frac{S/3}{S_{b,F}} \quad (21.1)$$

- para reducir una tensión de línea se divide por la tensión base, o si se prefiere, se divide la tensión de fase por la tensión base de fase; por ejemplo una tensión de línea situada en el primario del transformador U_1 :

$$u_1^r = \frac{U_1}{U_{b1}} = \frac{U_1/\sqrt{3}}{U_{b1,F}} \quad (21.2)$$

- cuando una impedancia está en conexión triángulo, se ha de pasar a su estrella equivalente ($Z_Y = Z_D/3$) para poder ser reducida al dividir por la impedancia base, y
- para reducir una corriente de línea se divide por la corriente base.

La conexión del transformador (en Y o D) no importa, ya que normalmente se tienen datos nominales S_n , U_{n1} , U_{n2} , r_t y valores de fase r , x , g_{Fe} y b_μ .

¿Cómo se opera con el esquema reducido?

Se opera exactamente igual que con cualquier circuito monofásico. Por ejemplo, la potencia que entrega el secundario del transformador de la figura 21.1 es:

$$s_2^r = u_2^r (i_2^r)^* \Rightarrow s_2^r = u_2^r i_2^r \quad (21.3)$$

Y al deshacer la reducción, esta potencia puede ser trifásica o por fase, según lo que más nos interese. Si se multiplica por S_b será una potencia trifásica y si se multiplica por $S_{b,F}$ será la potencia de una fase:

$$\underline{S}_2 = \underline{s}_2^x S_b \quad \text{potencia trifásica}$$

$$\underline{S}_{2,F} = \frac{\underline{S}_2}{3} = \underline{s}_2^x S_{b,F} \quad \text{potencia de una fase} \quad (21.4)$$

Al deshacer la reducción de una tensión, esta tensión puede ser de línea o de fase, según lo que más nos interese. Si se multiplica por U_b será una tensión de línea y si se multiplica por $U_{b,F}$ será una tensión de fase. Lo que no nos proporciona el esquema es el ángulo de la tensión de línea (sí el de la tensión de fase), pero es un ángulo que carece de importancia. Por ejemplo la tensión \underline{u}_2^x de la figura 21.1:

$$U_2 = u_2^x U_{b2} \quad \text{tensión de línea}$$

$$\underline{U}_{2,F} = \underline{u}_2^x U_{b2,F} \quad \text{tensión de fase} \quad (21.5)$$

Una corriente se convierte en una corriente de línea al deshacer la reducción. Una corriente de primario, por ejemplo:

$$I_1 = i_1^x I_{b1} \quad (21.6)$$

Al deshacer una impedancia reducida, se obtiene una impedancia por fase (impedancia de una fase de una estrella equivalente)

$$\underline{Z}_2 = \underline{z}_2^x Z_{b2} \quad (21.7)$$

El desfase entre u_2^r e i_2^r en la figura 21.1 corresponde al desfase de la carga, es decir al desfase entre la tensión de fase y la corriente de línea (cuando la carga está conectada en estrella). Lo mismo sucede con el ángulo entre u_1^r e i_1^r , que corresponde al desfase entre la tensión de fase y la corriente de línea del primario. Otro ángulo importante es el desfase entre u_1^r y u_2^r , que es el desfase entre tensiones de línea o entre tensiones de fase de ambos devanados.

Reducción de circuitos con varios transformadores trifásicos

Para reducir circuitos que contienen varios transformadores trifásicos, se procede igual que en el caso monofásico, es decir, se elige una potencia base y tantas tensiones base como niveles de tensión haya, y de manera que cumplan las relaciones entre niveles de tensión.

21.2 Bases referidas al propio transformador

Al igual que en el caso monofásico, de entre todas las bases posibles, las *bases referidas al propio transformador* (p.u., reducción al 1º y reducción al 2º) son las más utilizadas, y especialmente la primera de ellas. Los valores base que se deben emplear son:

Reducción a valores en p.u. (por unidad)

POTENCIA TRIFÁSICA	$S_b^{pu} = S_n \text{ (VA)}$ (potencia nominal del transformador)	
TENSIÓN DE LÍNEA (FASE-FASE)	$U_{b1}^{pu} = U_{n1} \text{ (V)}$ (tensión nominal del primario)	$\left. \begin{array}{l} \frac{U_{b1}^{pu}}{U_{b2}^{pu}} = r_t \end{array} \right\}$ $U_{b2}^{pu} = U_{n2} \text{ (V)}$ (tensión nominal del secundario)
CORRIENTE DE LÍNEA	$I_{b1}^{pu} = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_{n1}} = I_{n1} \text{ (A)}$ (corriente nominal primario)	$I_{b2}^{pu} = \frac{S_n}{\sqrt{3} U_{n2}} = I_{n2} \text{ (A)}$ (corriente nominal secundario)
IMPEDANCIA DE FASE EN Y	$Z_{b1}^{pu} = \frac{U_{n1}^2}{S_n} \text{ (}\Omega\text{)}$	$Z_{b2}^{pu} = \frac{U_{n2}^2}{S_n} \text{ (}\Omega\text{)}$

Reducción al primario

POTENCIA TRIFÁSICA	$S'_b = 1 \text{ (VA)}$	
TENSIÓN DE LÍNEA (FASE-FASE)	$U'_{b1} = 1 \text{ (V)}$	$\left(\frac{U'_{b1}}{U'_{b2}} = r_t \right)$ $U'_{b2} = \frac{1}{r_t} = \frac{U_{n2}}{U_{n1}} \text{ (V)}$
CORRIENTE DE LÍNEA	$I'_{b1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (A)}$	$I'_{b2} = \frac{r_t}{\sqrt{3}} \text{ (A)}$
IMPEDANCIA DE FASE EN Y	$Z'_{b1} = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$	$Z'_{b2} = \left(\frac{1}{r_t} \right)^2 = \left(\frac{U_{n2}}{U_{n1}} \right)^2 \text{ (}\Omega\text{)}$

Reducción al secundario

POTENCIA TRIFÁSICA	$S_b'' = 1 \text{ (VA)}$		
TENSIÓN DE LÍNEA (FASE-FASE)	$U_{b1}'' = r_t = \frac{U_{n1}}{U_{n2}} \text{ (V)}$	$\left(\frac{U_{b1}''}{U_{b2}''} = r_t \right)$	$U_{b2}'' = 1 \text{ (V)}$
CORRIENTE DE LÍNEA	$I_{b1}'' = \frac{1}{\sqrt{3} r_t} \text{ (A)}$		$I_{b2}'' = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (A)}$
IMPEDANCIA DE FASE EN Y	$Z_{b1}'' = (r_t)^2 = \left(\frac{U_{n1}}{U_{n2}} \right)^2 \text{ (}\Omega\text{)}$		$Z_{b2}'' = 1 \text{ (}\Omega\text{)}$

Ejemplo.-

Sea el transformador de 500 kVA, 24/0.4 kV de la figura 21.2. Supongamos que las impedancias del esquema equivalente del transformador reducidas a p.u. y las bases empleadas son las mostradas en la figura. Se desea hallar el valor real de las impedancias vistas desde el primario o desde el secundario (equivalente a calcular las impedancias reducidas al primario o al secundario).

Para ello habrá que multiplicar por las respectivas bases. Por ejemplo, la resistencia de pérdidas en el cobre, r , en valor real en el secundario (reducida al secundario):

$$R'' = Z_{b2} \cdot r = 0.32 \cdot 0.016 = 5.12 \text{ m}\Omega \quad (21.8)$$

donde R'' corresponde a la resistencia de una fase (en Y).

Si la tensión del secundario vale $u_2 = 0.9$ p.u., entonces, la tensión real es:

$$\begin{aligned}
 U_{2,F} &= U_{b2,F} \cdot u_2 = \left(\frac{400}{\sqrt{3}} \right) \cdot 0.9 = 207.8 \text{ V} \quad \text{Tensión de fase} \\
 U_2 &= U_{b2} \cdot u_2 = 400 \cdot 0.9 = 360 \text{ V} \quad \text{Tensión de línea} \\
 \left(U_2 &= \sqrt{3} U_{2,F} \right) \quad \blacksquare
 \end{aligned} \quad (21.9)$$

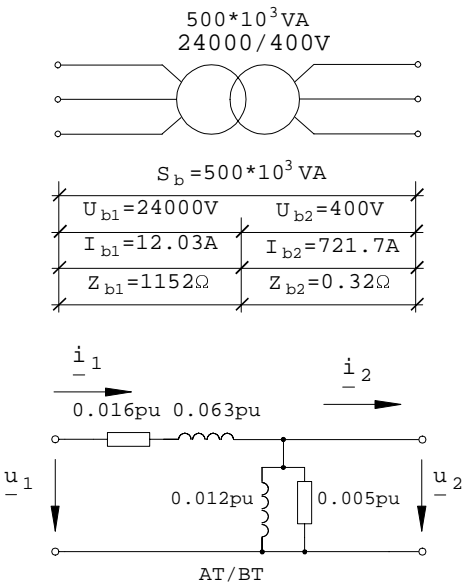


Fig. 21.2 Reducción a p.u. de un transformador trifásico

22 Índice horario

En un transformador monofásico las tensiones del primario y del secundario solamente pueden estar en fase (desfase 0°) o en contrafase (desfase 180°). En un transformador trifásico, las tensiones pueden tener otros desfases. Como las bobinas van montadas en columnas, las tensiones de las bobinas de cada columna estarán en fase o en contrafase. Al realizar las conexiones (estrella, triángulo o zigzag) en el primario y secundario, aparecen desfases diferentes según la conexión.

El *índice horario* es el ángulo de la tensión entre dos fases del primario con la tensión entre las fases de igual nombre del secundario. Por ejemplo entre \underline{U}_{AB} y \underline{U}_{ab} en la figura 22.1.

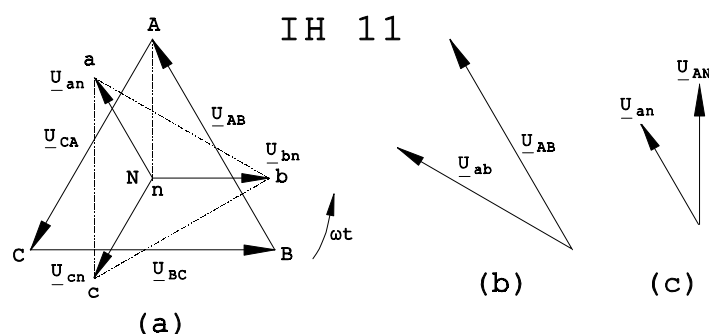


Fig. 22.1 Índice horario: (a) triángulos de tensiones, (b) desfase entre tensiones compuestas, y (c) desfase entre tensiones sencillas

Este ángulo también se puede medir entre las tensiones sencillas de una fase del primario y la misma fase del secundario (aunque si los devanados no tienen neutro, se trata de la tensión entre una fase y un neutro imaginario situado en el centro de gravedad de tensiones). Por ejemplo entre \underline{U}_{AN} y \underline{U}_{an} en la figura 22.1.

El índice horario se refiere a un transformador alimentado por el lado de tensión más elevada con un sistema trifásico simétrico de secuencia directa. Nótese también que el índice horario representa el desfase entre tensiones de primario y secundario cuando el *transformador está en vacío*.

Debido a las simetrías de los sistemas trifásicos, se puede deducir que cualquier desfase será múltiplo de $\pi/6$ sea cual sea la conexión. Como hay entonces 12 desfases posibles, se han asimilado a un reloj que con la manecilla larga en las 12, dirección del fasor de la tensión entre dos fases del lado de tensión más elevada, y la manecilla corta en la dirección del fasor de la tensión entre las mismas fases del lado de tensión más baja. Por ejemplo, un desfase de $11\pi/6$ corresponde a un índice horario 11.

El grupo de conexión de un transformador indica el tipo de devanados y el índice horario del mismo. Suele constar de dos letras y un número:

- la primera letra indica la conexión del devanado de más alta tensión (independientemente de si trabaja como primario o como secundario),
- la segunda letra indica la conexión del devanado de menor tensión, y
- el número es el índice horario (entre 0 y 11).

La primera letra se pone con mayúscula y la segunda con minúscula. Por ejemplo, un transformador *Yd11* tiene su devanado de más alta tensión en estrella y el de menor tensión en triángulo y el desfase que existe entre las tensiones compuestas (o sencillas) es de $11\pi/6$.

Otra nomenclatura más completa del grupo de conexión consiste en añadir una *N* (o *n*) después de la letra del devanado correspondiente si el neutro está accesible en la placa de conexiones. Por ejemplo, *Dyn11*, *YNd6*, etc.

El índice horario es muy importante al conectar transformadores en paralelo, ya que dos tensiones en paralelo del mismo valor eficaz y diferente ángulo suponen un cortocircuito. Por eso, es condición indispensable que *dos transformadores en paralelo tengan el mismo índice horario*.

Ejemplo.-

Vamos a determinar el grupo de conexión del transformador trifásico de 3 columnas de la figura.

Cada una de las tres columnas tiene un flujo común para los devanados primario y secundario. Despreciando las caídas de tensión internas, y fijándonos, por ejemplo, en la columna A (flujo ϕ_a) y en la posición de los terminales correspondientes, se tiene que:

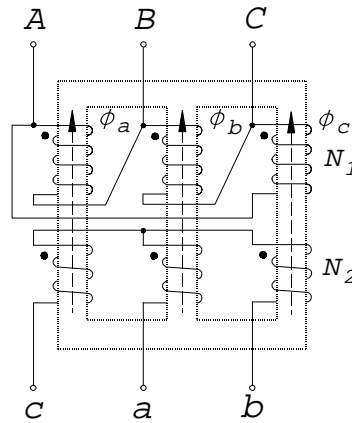


Fig. 22.2 Transformador trifásico
conexión Dy

$$u_{AB}(t) = N_1 \frac{d\phi_a}{dt} \quad (22.1)$$

$$u_{nc}(t) = N_2 \frac{d\phi_a}{dt}$$

por lo que \underline{U}_{AB} y \underline{U}_{nc} tienen la misma fase, lo cual escribimos de la siguiente forma:

$$\text{fase}(\underline{U}_{AB}) = \text{fase}(\underline{U}_{nc}) \quad (22.2)$$

Ahora se trata de dibujar un diagrama fasorial que cumpla la relación 22.2. Comenzamos dibujando el triángulo del lado de alta tensión. Después se dibuja la estrella del lado de baja tensión, imponiendo la condición 22.2, es decir, su fasor \underline{U}_{nc} debe llevar la misma dirección que el fasor \underline{U}_{AB} .

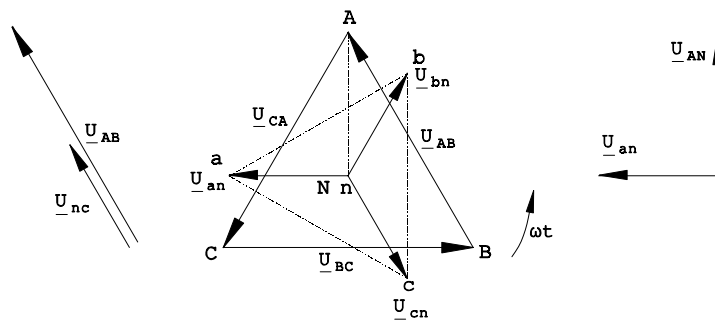


Fig. 22.3 Diagrama fasorial

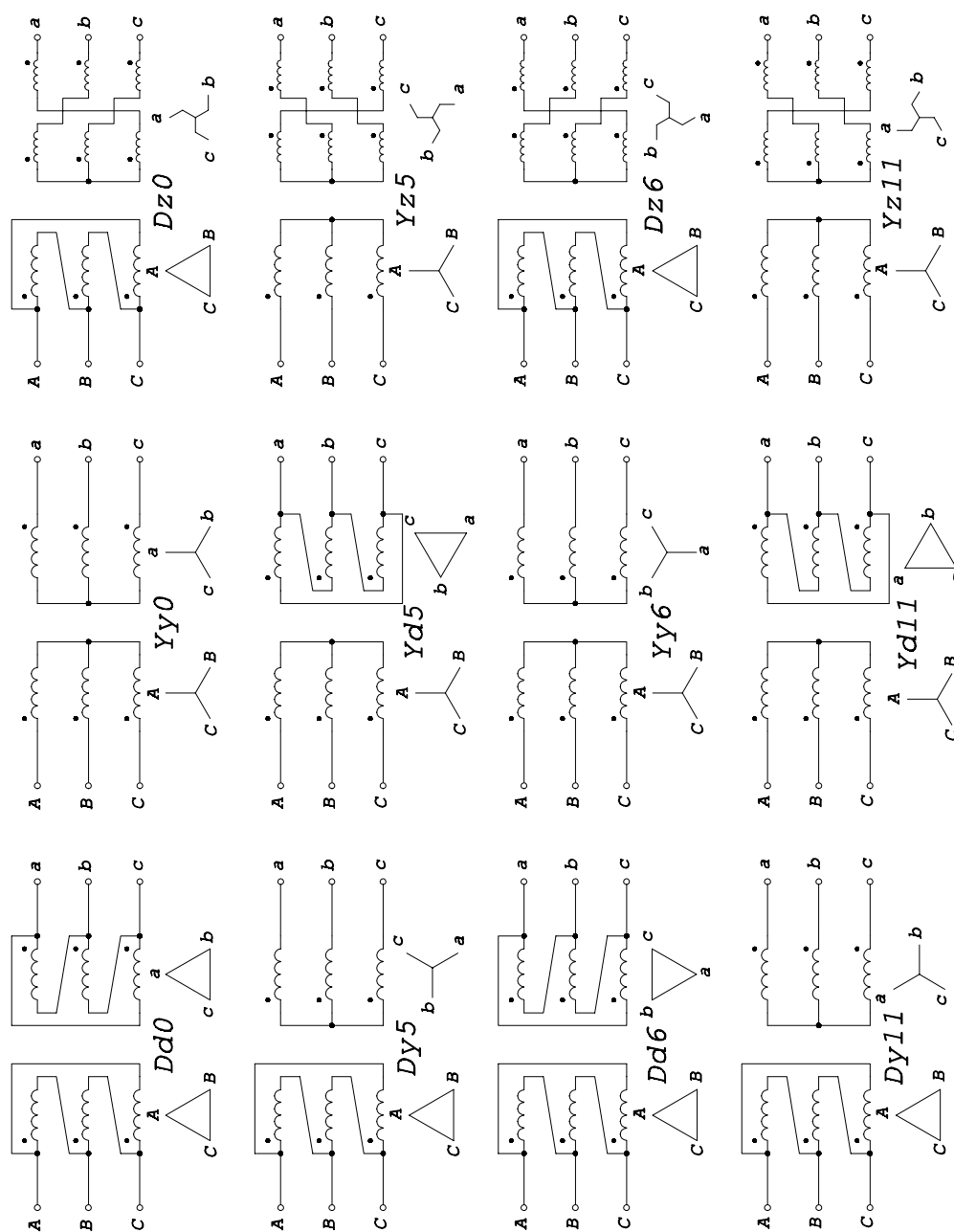


Fig. 22.4 Grupos de conexión utilizados normalmente

El índice horario es el desfase entre tensiones análogas de primario y secundario. Por ejemplo, nos podemos fijar en \underline{U}_{AN} y \underline{U}_{an} . El desfase es 9.

También nos podríamos haber fijado en \underline{U}_{AB} y \underline{U}_{ab} . Colocando figuradamente \underline{U}_{AB} sobre las 12 horas, el desfase vuelve a ser de 9.

Entonces, el grupo de conexión es $Dy9$.

Se ha de tener en cuenta que la estrella de la figura 22.5 también cumple la ecuación 22.2, pero no es válida ya que es de secuencia inversa. ■

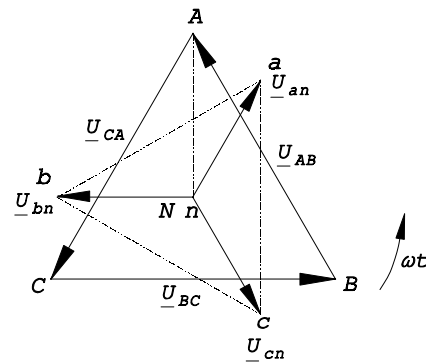


Fig. 22.5 Estrella de secuencia inversa no válida como solución

Los grupos de conexión utilizados normalmente son los que se muestran en la figura 22.4. De estos grupos de conexión se pueden conseguir otros desfases diferentes rotando las fases o cambiando la secuencia de fases de alimentación. Rotando las fases se consigue aumentar el desfase en un múltiplo de 4. Por ejemplo, del índice 0 se obtienen el 4 y el 8, del 5 se obtienen el 9 y el 1, del 6 se obtienen el 10 y el 2, y del 11 se obtienen el 3 y el 7.

Cambiando la secuencia de fases de la alimentación (también cambia la del secundario), se obtiene el índice simétrico respecto del eje 0-6. Por ejemplo, del índice 5 se obtiene el 7, del 11 se obtiene el 1 y el 0 y el 6 no cambian.

22.1 Desfase total entre tensiones de primario y de secundario en un transformador trifásico en carga

El desfase total entre las tensiones de primario y de secundario de un transformador trifásico en carga viene dado por la suma de:

- el desfase en vacío (que se mide mediante el índice horario), llamado también desfase del circuito magnético, y
- el desfase obtenido del esquema en carga (desfase provocado por las impedancias del circuito), llamado también desfase del circuito eléctrico.

El índice horario también se puede añadir en el esquema del transformador trifásico en carga. Consúltase el anexo 4.

Ejemplo.-

Calcular el desfase total entre tensiones primarias y secundarias del transformador trifásico de la figura 22.2 (tiene un índice horario 9), suponiendo que al resolver su esquema reducido en p.u. con carga (Fig. 22.6) se obtiene que

$$\underline{u}_1 = 1 \angle 0 \quad , \quad \underline{u}_2 = 0.95 \angle -0.3 \quad (22.3)$$

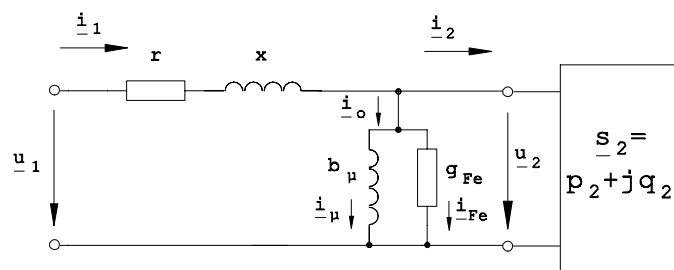


Fig. 22.6 Esquema fase-neutro reducido en p.u. de un transformador trifásico en carga

Como el desfase entre \underline{u}_1 y \underline{u}_2 es igual al desfase entre \underline{U}_{AN} y \underline{U}_{an} o entre \underline{U}_{AB} y \underline{U}_{ab} , el desfase total (vacío más carga) entre \underline{U}_{AN} y \underline{U}_{an} es:

$$\frac{9\pi}{6} + 0.3 = 5.01 \text{ rad} \quad (22.4)$$

\underline{U}_{AN} adelanta en 5.01 radianes a \underline{U}_{an} . ■

23 Aplicaciones del transformador

Una posible clasificación de los transformadores es por aplicaciones:

- Transformador de potencia.
- Transformadores de medida:
 - Transformador de tensión.
 - Transformador de intensidad.
- Transformadores para regulación de la tensión:
 - Autotransformador.
 - Regulador de inducción.
 - Transformador con tomas.
- Transformadores especiales:
 - Transformador con varios arrollamientos.
 - Transformador en V.
 - Transformador trifásico-monofásico.
 - Transformador trifásico-exafásico y trifásico-dodecafásico.
- Transformadores para otras aplicaciones:
 - Transformador de aislamiento.
 - Transformador de impedancias.
 - Transformador de frecuencia variable.

23.1 Transformador de potencia

El transformador de potencia está diseñado para transmitir potencia de un circuito a otro. Su utilidad básica reside en la elevación o reducción de la tensión para que el transporte y el consumo de la energía eléctrica se realicen a las tensiones más adecuadas.

La elevación de la tensión se hace para disminuir las pérdidas por efecto Joule que se producen en las líneas de transmisión, ya que al aumentar la tensión de transporte (para una potencia transmitida fija), la intensidad disminuye y con ella, las pérdidas.

La disminución de la tensión es también necesaria ya que la mayoría de los aparatos consumidores de energía eléctrica (comenzando por los domésticos) son de bajas tensiones por seguridad de las personas.

El transformador de potencia puede trabajar con el secundario en vacío (sin cargas conectadas). Sin embargo, no tolera el secundario en cortocircuito. En vacío cumple aproximadamente la relación de transformación:

$$r_t = \frac{N_1}{N_2} \approx \frac{U_1}{U_{2, \text{vacío}}} \quad (23.1)$$

La potencia que puede transmitir un transformador de potencia está limitada por su capacidad de pasar al medio ambiente el calor que produce internamente las pérdidas en el cobre y en el hierro, sin sobrepasar una temperatura que estropee sus materiales, principalmente sus aislantes.

23.2 Transformadores de medida

Los transformadores de medida están diseñados como aparatos auxiliares para realizar medidas de tensiones e intensidades, por lo que la potencia que pueden transmitir es muy pequeña (usualmente entre 10 y 400 VA).

Transformador de tensión

Los transformadores de tensión están orientados a la medida de tensiones, por lo que se diseñan para que cumplan lo más fielmente posible la relación de tensiones:

$$r_t = \frac{N_1}{N_2} \approx \frac{U_1}{U_2} \quad (23.2)$$

Para ello, se construyen con pequeña resistencia en el cobre y poco flujo de dispersión (r y x pequeñas), y se les hace trabajar en la zona lineal. Como su funcionamiento normal es próximo a trabajar en vacío (con el secundario abierto), ya que alimentan usualmente voltímetros, o bobinas voltimétricas de vatímetros, es más fácil que se cumpla la ecuación 23.2. Los transformadores de tensión tienen muchas espiras, ya que las tensiones que soportan, al menos el devanado primario, son elevadas.

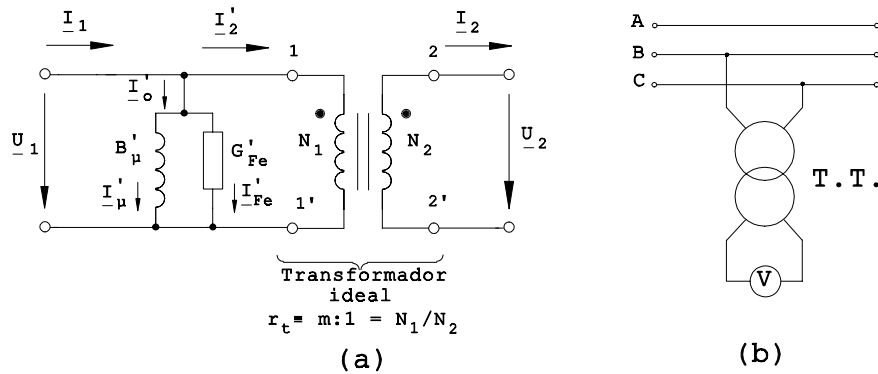


Fig. 23.1 Transformador de medida de tensión: (a) esquema equivalente que se pretende conseguir, y (b) conexión del mismo

Su necesidad es evidente si se desea medir la tensión en una línea de alta tensión, ya que los voltímetros disponibles normalmente sólo llegan a los 500 V. Además, resulta más económica la construcción de transformadores de tensión que la de aparatos de medida distintos para cada escala de medidas. También se utilizan para alimentar circuitos auxiliares de protección de las redes de transporte de energía, circuitos que absorben muy poca potencia.

La tensión normalizada del secundario es de 110 V. En la elección de un transformador de tensión se ha de tener en cuenta el error cometido en la relación de transformación (error de relación) y el desfase introducido entre las tensiones de primario y secundario (error de fase). Estos errores de relación y de fase vienen indicados en sus placas de características.

Transformador de intensidad

Los transformadores de intensidad están diseñados para la medida de intensidades, por lo que se procura que cumplan lo más fielmente la relación de corrientes:

$$\frac{1}{r_t} = \frac{N_2}{N_1} \approx \frac{I_1}{I_2} \quad (23.3)$$

Para conseguirlo, se construyen con núcleos de muy buena calidad (de pocas pérdidas y permeabilidad relativa elevada, g_{Fe} y b_μ pequeños) y se les hace trabajar en la zona lineal. Los transformadores de intensidad tienen pocas espiras, ya que las caídas de tensión que producen, para no desvirtuar el circuito, deberán ser muy próximas a cero. Si la intensidad del primario es muy elevada, el primario puede tener una sola espira (se hace pasar el conductor una sola vez por el interior de un núcleo toroidal).

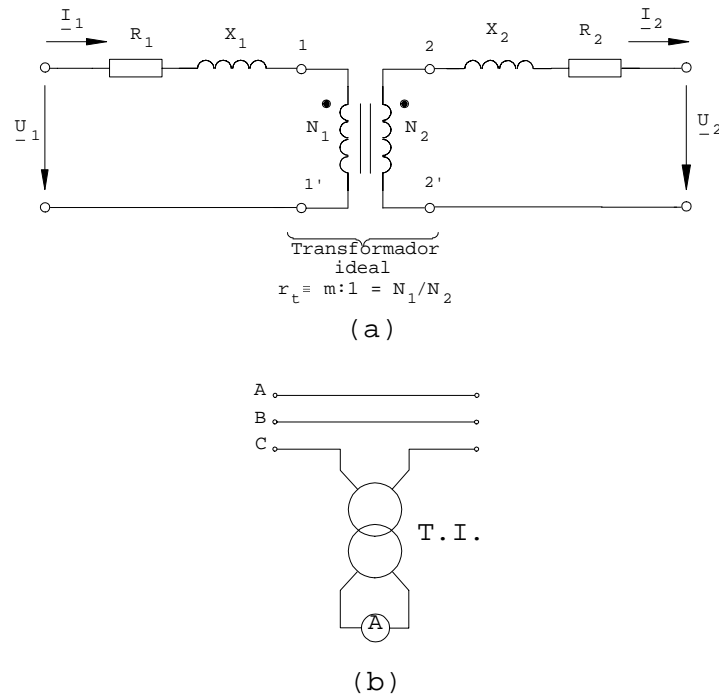


Fig. 23.2 Transformador de medida de intensidad: (a) esquema equivalente que se pretende conseguir, y (b) conexión del mismo

Este transformador tiene que trabajar siempre con el secundario cortocircuitado a través de amperímetros (de resistencia interna muy pequeña) o bobinas amperimétricas de vatímetros (ídem), y no puede dejarse abierto ya que la tensión inducida en él puede ser peligrosa para la seguridad de las personas y del propio transformador (no posee un aislamiento preparado para elevadas tensiones entre espiras, por lo que se perforaría).

La intensidad normalizada del secundario es de 5 A. Al elegir un transformador de intensidad ha de considerarse el error cometido en la relación de transformación (error de relación) y el desfase introducido entre las intensidades de primario y secundario (error de fase).

23.3 Transformadores para regulación de la tensión

Los transformadores se pueden utilizar como elementos para regular pequeñas variaciones de tensión.

Autotransformador

Este tipo de transformador ya ha sido estudiado. Su principal característica es que posee el primario y el secundario unidos eléctricamente, lo que permite un considerable ahorro en los componentes constructivos (comparado con un transformador convencional de similar potencia transmitida). Su utilidad está limitada a relaciones de transformación próximas a la unidad.

Regulador de inducción

Los reguladores de inducción son básicamente autotransformadores en los cuales la bobina del secundario puede girar respecto al primario, con lo que puede variarse de forma continua el acoplamiento magnético entre ambos y obtener una variación continua de la relación de transformación. Un ejemplo de regulador de inducción podría ser una máquina de inducción con el rotor bobinado y bloqueado en una determinada posición.

Transformador con tomas

Un transformador con tomas tiene distintas conexiones (o tomas) en uno de los devanados, de forma que al hacer contacto con cada una de ellas, el número de espiras efectivo del devanado es distinto, característica que permite poseer distintas relaciones de transformación en forma discreta.

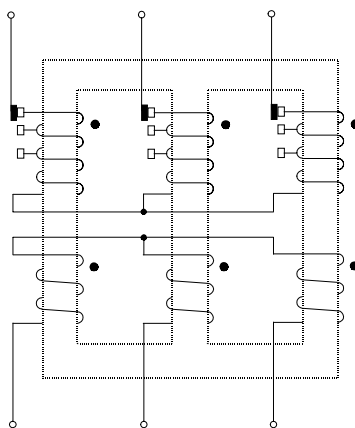


Fig. 23.3 Transformador trifásico con tomas

23.4 Transformadores especiales

Transformador con varios arrollamientos

Se trata de un transformador con varios devanados, de los cuales uno de ellos se utiliza como primario y los otros como secundarios. Permite realizar simultáneamente mediante un solo transformador las transformaciones a dos o más tensiones secundarias. Una de sus utilidades es para compensación de reactiva: se colocan las baterías de condensadores en el tercer devanado, que se puede diseñar a la tensión nominal de las mismas.

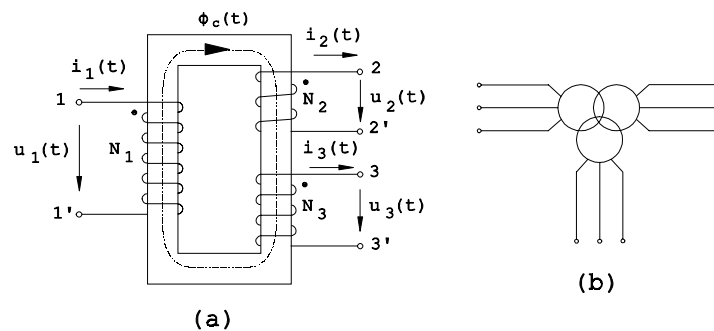


Fig. 23.4 (a) Transformador de dos secundarios, y (b) símbolo utilizado en un diagrama para un transformador trifásico de dos secundarios

La potencia del primario es igual a la suma de las máximas potencias secundarias que se pueden obtener simultáneamente.

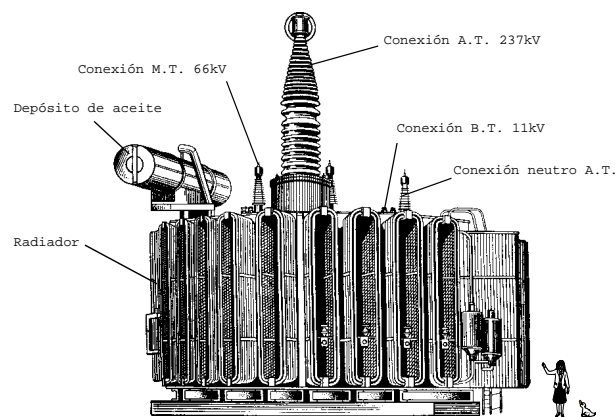


Fig. 23.5 Transformador monofásico de dos secundarios

Transformador en V

Un transformador trifásico se puede construir mediante tres transformadores monofásicos en conexión *Dd*. La eliminación de uno de ellos da lugar a la conexión en *Vv*. Como las prestaciones de esta conexión son inferiores a las del transformador trifásico, sólo se recomienda utilizarla en caso de avería o en situaciones especiales.

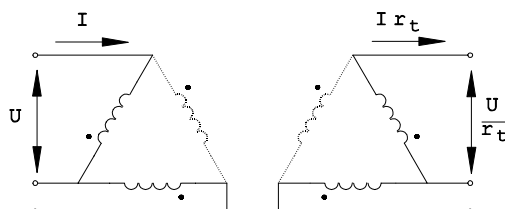


Fig. 23.6 Transformador en conexión *Vv*

Transformador trifásico-monofásico

Este transformador se utiliza cuando hay que alimentar un sistema monofásico de gran potencia a partir de una red trifásica. El problema que se presenta es que un consumo trifásico equilibrado consume una potencia instantánea constante, mientras que el consumo monofásico del secundario consume una potencia instantánea fluctuante. Este problema se puede tratar de solucionar en parte mediante almacenamientos de energía (bobinas, condensadores, volantes de inercia,...). Por ello, generalmente se admiten repartos imperfectos de la carga monofásica entre las tres fases del primario.

Transformador trifásico-exafásico y trifásico-dodecafásico

La utilidad de estos transformadores se debe a que el contenido de armónicos de la tensión continua procedente de la rectificación de un sistema exafásico (6 tensiones desfasadas 60°) o dodecafásico (12 tensiones desfasadas 30°) es inferior al que resulta de un sistema trifásico. El rizado obtenido con el sistema dodecafásico es lógicamente inferior al del exafásico.

23.5 Transformadores para otras aplicaciones

Transformador de aislamiento

Cuando es interesante aislar un circuito del resto de la red (por ejemplo parte de la instalación eléctrica de una empresa), se utiliza un transformador cuya única finalidad es separar eléctricamente primario y

secundario (sólo están unidos magnéticamente). Estos transformadores pueden ser de relación de transformación unitaria. Ejemplos de aplicación son los utilizados en la instalación eléctrica de un quirófano y en los equipos electrónicos.

Transformador de impedancias

En ciertos casos puede ser interesante que una carga conectada a una fuente de tensión con impedancia interna no nula presente una impedancia distinta de su valor real. Intercalando un transformador se puede conseguir que la impedancia del conjunto transformador-carga vista desde la fuente tenga el valor deseado.

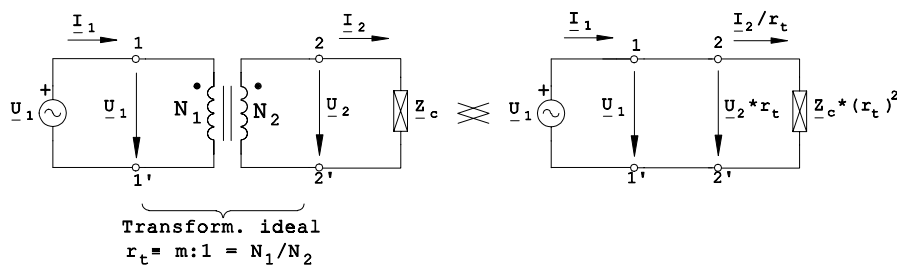


Fig. 23.7 Reducción al primario de una impedancia en el secundario de un transformador ideal

Vamos a calcular cuánto vale la impedancia que se ve a través de un transformador. Sea la impedancia Z_c conectada en el secundario del transformador ideal de la figura. Como:

$$Z_c = \frac{U_2}{I_2} \quad (23.4)$$

la impedancia que se ve desde el primario será el cociente (U_1 / I_1) :

$$Z_{\text{vista primario}} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{U_2 r_t}{(I_2 / r_t)} = r_t^2 \frac{U_2}{I_2} = r_t^2 Z_c \quad (23.5)$$

Lo que se ha hecho es pasar la impedancia del circuito secundario al primario, quedando el transformador cortocircuitado. Es un ejemplo de la reducción al primario que se ha descrito anteriormente (Fig. 10.3).

Transformador de frecuencia variable

Los transformadores de frecuencia variable se utilizan en circuitos electrónicos para transformar señales de frecuencias elevadas (en el rango de las audiofrecuencias, desde 20 Hz hasta 20 kHz), es decir, mucho mayores de los 50 Hz industriales. Estos transformadores tienen núcleos de ferrita, que son materiales ferromagnéticos de mala conductividad eléctrica para limitar las pérdidas por Foucault. Los que se utilizan en electrónica para transmitir flancos de subida y bajada rápidos se llaman de impulsos.

Las prestaciones que se esperan de este tipo de transformadores son que al variar la frecuencia en un rango amplio el voltaje de salida sea instantáneamente proporcional al voltaje de entrada (los voltajes se deben amplificar por igual y con desfase nulo para todas las frecuencias). Estas características son demasiado ideales para poderlas conseguir en la realidad, ya que a bajas frecuencias las reactancias de dispersión ($L_{d1}\omega$, $L_{d2}\omega$) son casi despreciables y en cambio, es muy importante la reactancia de magnetización ($M_\mu'\omega$), mientras que a altas frecuencias el efecto de la inductancia de magnetización es despreciable y las reactancias de dispersión son elevadas. A frecuencias intermedias, no se comete mucho error despreciando ambas inductancias. A frecuencias elevadas, el efecto de las capacidades entre espiras y entre devanados puede no ser despreciable (estas capacidades aparecen en su esquema equivalente).

Anexo 1 Esquemas equivalentes de dos bobinas acopladas. Relación entre los parámetros de las bobinas y los del transformador monofásico

En este anexo vamos a encontrar las ecuaciones de dos bobinas acopladas, dibujaremos después varios esquemas equivalentes y por último se mostrarán las relaciones de sus coeficientes con los del esquema equivalente del transformador monofásico real.

Ecuaciones de dos bobinas acopladas

Sea el acoplamiento magnético de la figura A1.1, cuyos flujos son:

ϕ_1	flujo por espira concatenado por la bobina 1 (flujo total)
ϕ_{d1}	flujo por espira concatenado solamente por la bobina 1 (flujo de dispersión)
ϕ_{11}	flujo por espira concatenado por la bobina 1 debido a i_1
ϕ_{12}	flujo por espira concatenado por la bobina 1 debido a i_2
ϕ_c	flujo por espira concatenado por las bobinas 1 y 2 (flujo común)
ϕ_2	flujo por espira concatenado por la bobina 2 (flujo total)
ϕ_{d2}	flujo por espira concatenado solamente por la bobina 2 (flujo de dispersión)
ϕ_{22}	flujo por espira concatenado por la bobina 2 debido a i_2
ϕ_{21}	flujo por espira concatenado por la bobina 2 debido a i_1

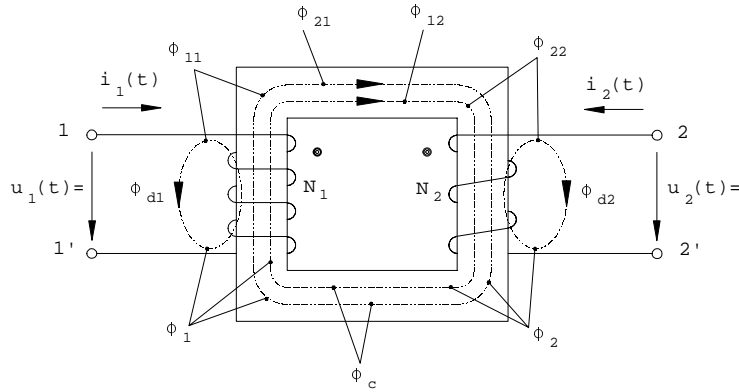


Fig. A1.1 Bobinas acopladas magnéticamente y flujos concatenados

Se observa que se cumple:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} = (\phi_{d1} + \phi_{21}) + \phi_{12} = \phi_{d1} + (\phi_{21} + \phi_{12}) = \phi_{d1} + \phi_c \\ \phi_2 &= \phi_{22} + \phi_{21} = (\phi_{d2} + \phi_{12}) + \phi_{21} = \phi_{d2} + (\phi_{12} + \phi_{21}) = \phi_{d2} + \phi_c\end{aligned}\quad (\text{A1.1})$$

Para deducir las ecuaciones del transformador monofásico real se empleó la expresión 4.1, que corresponde a la última parte de la igualdad A1.1, mientras que para deducir las de las bobinas acopladas se empleará la primera parte de la igualdad,

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_{11} + \phi_{12} \\ \phi_2 &= \phi_{22} + \phi_{21}\end{aligned}\quad (\text{A1.2})$$

Las expresiones 4.1 y A1.2 son análogas, pero conducen a coeficientes diferentes. En el caso de las bobinas acopladas se obtienen los coeficientes de autoinducción L_1, L_2 y el de inducción mutua M , y en el del transformador real (donde también es necesario conocer los números de espiras N_1 y N_2) se llega a las inductancias de dispersión L_{d1}, L_{d2} y a la de magnetización M_μ' .

El flujo total concatenado por cada bobina es:

$$\begin{aligned}\psi_1 &= N_1 \phi_1 = N_1 (\phi_{11} + \phi_{12}) = \psi_{11} + \psi_{12} \\ \psi_2 &= N_2 \phi_2 = N_2 (\phi_{21} + \phi_{22}) = \psi_{21} + \psi_{22}\end{aligned}\quad (\text{A1.3})$$

Supongamos que los tres caminos magnéticos (el común y los dos de dispersión) son lineales. En tal caso habrá una relación lineal entre flujos e intensidades:

$$\begin{aligned}\psi_{11} &= L_1 i_1 & , & \quad \psi_{12} = M_{12} i_2 \\ \psi_{21} &= M_{21} i_1 & , & \quad \psi_{22} = L_2 i_2\end{aligned}\tag{A1.4}$$

Se puede demostrar que se cumple que: $M = M_{12} = M_{21}$.

Aplicando la ley de inducción de Faraday,

$$u(t) = N \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\psi}{dt}\tag{A1.5}$$

al no haber resistencia en los devanados, u_1 y u_2 coinciden con las tensiones en bornes de las bobinas, luego:

$$\begin{aligned}u_1(t) &= \frac{d\psi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ u_2(t) &= \frac{d\psi_2}{dt} = M \frac{di_1}{dt} + L_2 \frac{di_2}{dt}\end{aligned}\tag{A1.6}$$

El coeficiente de acoplamiento k mide el grado de acoplamiento entre los dos devanados (indica cuanto flujo de dispersión hay). Se define como

$$M = k \sqrt{L_1 L_2}\tag{A1.7}$$

El coeficiente de acoplamiento, k , es adimensional y puede valer entre 0 y 1.

Esquemas equivalentes de dos bobinas acopladas

Las relaciones tensión-corriente de dos bobinas acopladas (Ec. A1.6) se pueden representar mediante el esquema eléctrico de la figura A1.2a.

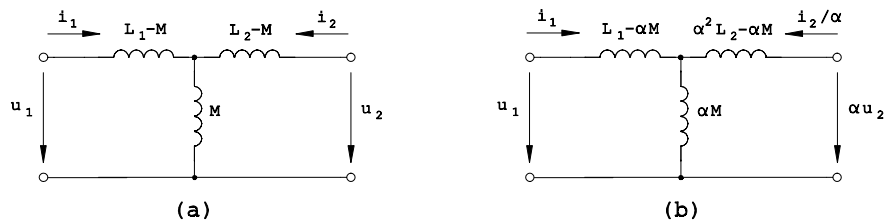


Fig. A1.2 Circuitos eléctricos que cumplen las ecuaciones de dos bobinas acopladas

Este esquema eléctrico está formado por tres bobinas, y por lo tanto se podría construir físicamente. Pero no siempre será posible hacerlo, ya que si $L_1 < M$ o si $L_2 < M$ habrá una bobina con coeficiente de inducción negativo.

Estudiemos esta posibilidad multiplicando la ecuación de la bobina 2 por un coeficiente α :

$$\begin{aligned} u_1 &= L_1 \frac{di_1}{dt} + \alpha M \frac{d(i_2/\alpha)}{dt} \\ \alpha u_2 &= \alpha M \frac{di_1}{dt} + \alpha^2 L_2 \frac{d(i_2/\alpha)}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A1.8})$$

Como el coeficiente que acompaña a di_2/dt en la segunda ecuación es αM , para poder representar estas ecuaciones con un circuito eléctrico se necesita αM en la primera ecuación. Esto obliga a que la corriente sea i_2/α . Estas ecuaciones están representadas en el circuito de la figura A1.2b, el cual será realizable físicamente cuando α cumpla

$$\begin{aligned} L_1 &\geq \alpha M \\ \alpha^2 L_2 &\geq \alpha M \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

Como caso particular se puede elegir un valor de α que elimine una de las tres bobinas. Por ejemplo, si se cumple

$$\alpha^2 L_2 = \alpha M \quad (\text{A1.10})$$

se tiene un circuito donde el efecto de los flujos de dispersión de ambos devanados está concentrado en una inductancia situada en el lado del devanado 1 (Fig. A1.3a) y de valor

$$L_1 - \alpha M = L_1 - \frac{M}{L_2} M = L_1 - \frac{k^2 L_1 L_2}{L_2} = L_1 (1 - k^2) \quad (\text{A1.11})$$

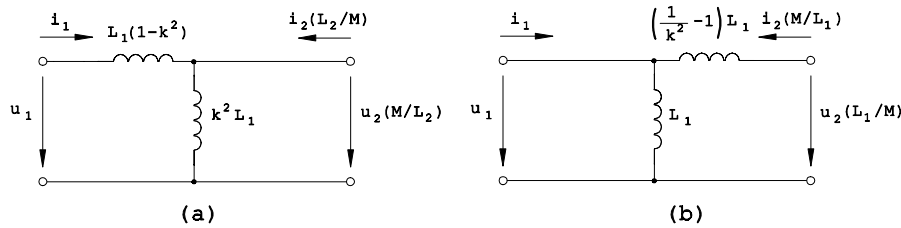


Fig. A1.3 Esquemas de dos bobinas acopladas con el efecto del flujo de dispersión concentrado: (a) en el devanado 1, y (b) en el devanado 2

Y si se cumple

$$L_1 = \alpha M \quad (\text{A1.12})$$

se tendrá todo el flujo de dispersión representado en una bobina situada en el lado del devanado 2 (Fig. A1.3b), y de valor

$$\alpha^2 L_2 - \alpha M = \left(\frac{L_1}{M} \right)^2 L_2 - \frac{L_1}{M} M = \frac{L_1^2 L_2}{k^2 L_1 L_2} = L_1 \left(\frac{1}{k^2} - 1 \right) \quad (\text{A1.13})$$

Otro caso particular es elegir α igual a la relación entre las espiras de las bobinas (lo que se ha llamado relación de transformación en el transformador):

$$\alpha = r_t = \frac{N_1}{N_2} \quad (\text{A1.14})$$

Se llega a un esquema (Fig. A1.4) donde las variables de entrada del segundo devanado son (u_2/r_t) e (i_2/r_t) . Por ello, se trata de un esquema reducido al primario, como el de la figura 4.6, pero considerando nula la resistencia de los devanados ($R_1 = R_2' = 0$). Como las tres bobinas han de ser idénticas, calculando sus valores obtendremos las relaciones entre parámetros:

$$\begin{aligned} L_1 - \alpha M &= L_1 - \frac{N_1}{N_2} M = L_{d1} \\ \alpha^2 L_2 - \alpha M &= r_t^2 \left(L_2 - \frac{N_2}{N_1} M \right) = r_t^2 L_{d2} = L_{d2}' \\ \alpha M &= \frac{N_1}{N_2} M = M_{\mu}' \end{aligned} \quad (\text{A1.15})$$

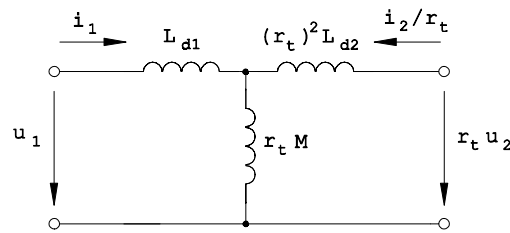


Fig. A1.4 Esquema de dos bobinas acopladas o esquema equivalente de transformador reducido al primario

Otra forma de encontrar las relaciones entre los parámetros de dos bobinas acopladas y los de un transformador monofásico

Deseamos conocer el valor de L_1 , L_2 y M en función de los parámetros que se utilizan en los transformadores.

Para estudiar el circuito magnético de la figura A1.1 se utiliza el símil eléctrico del mismo, que está representado en la figura A1.5:

$$\mathcal{F}_{mm} = Ni \rightarrow E, \quad \phi \rightarrow I, \quad \mathfrak{R}_m \rightarrow R \quad (\text{A1.16})$$

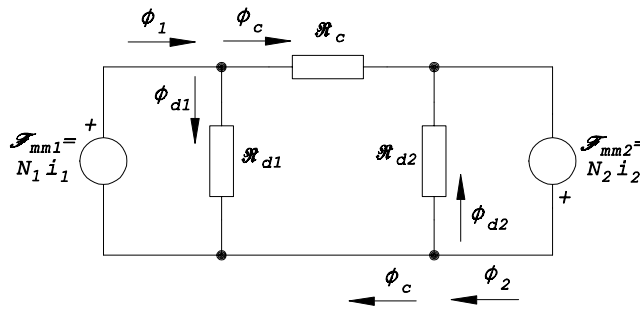


Fig. A1.5 Símil eléctrico del circuito magnético de dos bobinas acopladas

Las ecuaciones que resultan del circuito son:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{mm1} &= N_1 i_1 = \mathfrak{R}_{d1} \phi_{d1} \\ \mathcal{F}_{mm2} &= N_2 i_2 = \mathfrak{R}_{d2} \phi_{d2} \\ \mathcal{F}_{mm1} + \mathcal{F}_{mm2} &= N_1 i_1 + N_2 i_2 = \mathfrak{R}_c \phi_c \\ \phi_1 &= \phi_{d1} + \phi_c \\ \phi_2 &= \phi_{d2} + \phi_c \end{aligned} \quad (\text{A1.17})$$

por lo que los flujos totales concatenados por las bobinas son:

$$\begin{aligned} \psi_1 &= N_1 \phi_1 = N_1 (\phi_{d1} + \phi_c) = N_1 \left(\frac{\mathcal{F}_{mm1}}{\mathfrak{R}_{d1}} + \frac{\mathcal{F}_{mm1} + \mathcal{F}_{mm2}}{\mathfrak{R}_c} \right) = \\ &= \left(\frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{d1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_c} \right) i_1 + \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} i_2 = L_1 i_1 + M i_2 \end{aligned} \quad (\text{A1.18})$$

$$\begin{aligned}
\psi_2 &= N_2 \phi_2 = N_2 (\phi_c + \phi_{d2}) = N_2 \left(\frac{\mathcal{F}_{mm1} + \mathcal{F}_{mm2}}{\mathfrak{R}_c} + \frac{\mathcal{F}_{mm2}}{\mathfrak{R}_{d2}} \right) = \\
&= \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} i_1 + \left(\frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{d2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_c} \right) i_2 = M i_1 + L_2 i_2
\end{aligned} \tag{A1.19}$$

Entonces:

$$L_1 = \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_{d1}} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_c}, \quad L_2 = \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_{d2}} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_c}, \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} \tag{A1.20}$$

y como \mathfrak{R}_{d1} y \mathfrak{R}_{d2} corresponden a los flujos de dispersión, entonces:

$$L_1 = L_{d1} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_c}, \quad L_2 = L_{d2} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_c}, \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} \tag{A1.21}$$

También se puede eliminar \mathfrak{R}_c poniendo L_1 y L_2 en función de M :

$$L_1 = L_{d1} + M \frac{N_1}{N_2}, \quad L_2 = L_{d2} + M \frac{N_2}{N_1}, \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} \tag{A1.22}$$

Y como la inductancia de magnetización del transformador referida al primario, M_μ' , se ha definido en la ecuación 4.25 como:

$$M_\mu' = M \frac{N_1}{N_2} \tag{A1.23}$$

con las ecuaciones A1.22 y A1.23 se tienen las relaciones entre los parámetros de las bobinas acopladas y los del transformador.

Despejando M de las expresiones de L_1 y L_2 , y multiplicándolos:

$$M^2 = (L_1 - L_{d1})(L_2 - L_{d2}) = k L_1 L_2 \quad 1 \geq k \geq 0 \tag{A1.24}$$

se obtiene el coeficiente de acoplamiento k . En esta expresión se puede observar que si $k=0$ no existe acoplamiento (sólo hay flujos de dispersión), son dos bobinas que no están acopladas. Si $k=1$, el acoplamiento es perfecto (no hay flujos de dispersión).

¿Bobinas acopladas o transformador?

Como ya se ha comentado en repetidas ocasiones bobinas acopladas y transformadores son iguales. Se puede hacer una aclaración: los transformadores son bobinas acopladas con coeficientes de acoplamiento altos, para que la corriente de magnetización no sea muy elevada, mientras que unas bobinas acopladas pueden tener en general cualquier coeficiente de acoplamiento.

¿Por qué en el transformador se trabaja con N_1 y N_2 en lugar de L_1 , L_2 y M como en las bobinas acopladas?

El medio magnético del transformador ideal tiene permeabilidad infinita, luego la reluctancia magnética del circuito del hierro, \mathfrak{R}_c , es nula. Por ello, *no será necesaria corriente alguna para que haya flujo en el núcleo* (Fig. 4.5c). Esto significa que las inductancias propias y mutua de las bobinas acopladas son infinitas ya que:

$$L_1 = L_{d1} + \frac{N_1^2}{\mathfrak{R}_c} = \infty \quad , \quad L_2 = L_{d2} + \frac{N_2^2}{\mathfrak{R}_c} = \infty \quad , \quad M = \frac{N_1 N_2}{\mathfrak{R}_c} = \infty \quad (\text{A1.25})$$

Al ser infinitas, en el transformador ideal no se trabaja con ellas, como en el caso de las bobinas acopladas normales, sino con los números de espiras de cada bobina (N_1 y N_2).

Anexo 2 Estudio transitorio de un circuito con transformadores ideales

El transformador ideal no almacena ni devuelve energía, al contrario de lo que ocurre en condensadores y bobinas. Por ello, la corriente de ambos devanados puede variar bruscamente sin provocar deltas de Dirac en la tensión (a pesar de que sean dos bobinas).

La corriente de una resistencia puede variar bruscamente, pero no en una bobina, ya que un salto en la intensidad

$$u = L \frac{di}{dt} \quad (\text{A2.1})$$

provocará un pico de tensión de valor infinito (delta de Dirac). Lo mismo sucede si se varía bruscamente la tensión de un condensador: se produce una delta de Dirac en la corriente.

Si se ha de analizar el régimen transitorio de un circuito que tenga transformadores ideales, éstos no alteran el orden de la ecuación característica (a pesar de que sean dos bobinas) y, por lo tanto, se puede prescindir de ellos si se desea.

La siguiente figura muestra ejemplos de circuitos que son equivalentes a efectos de calcular su régimen transitorio.

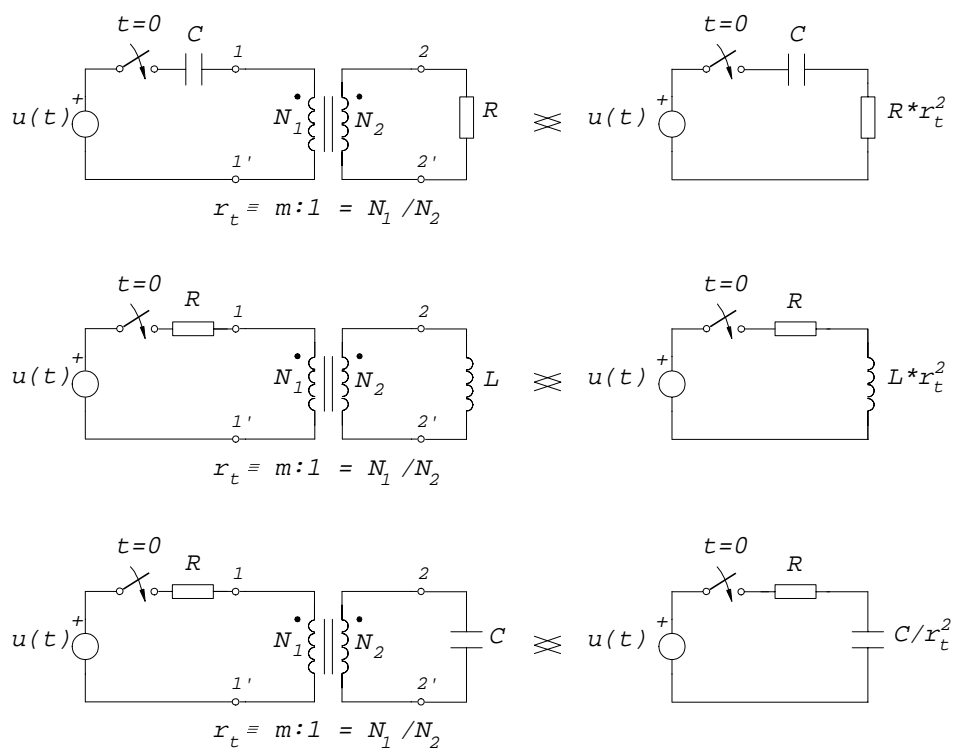


Fig. A2.1 Régimen transitorio en circuitos con transformadores ideales

Anexo 3 Comportamiento no lineal del transformador

El funcionamiento no lineal del transformador se debe a que el núcleo tiene una característica $B-H$ no lineal. Cuando se trabaja en la zona no lineal, se dice que el núcleo está saturado.

El transformador de potencia suele trabajar en el codo de la curva de saturación, lo que hace que absorba armónicos de corriente cuando se alimenta con tensión senoidal.

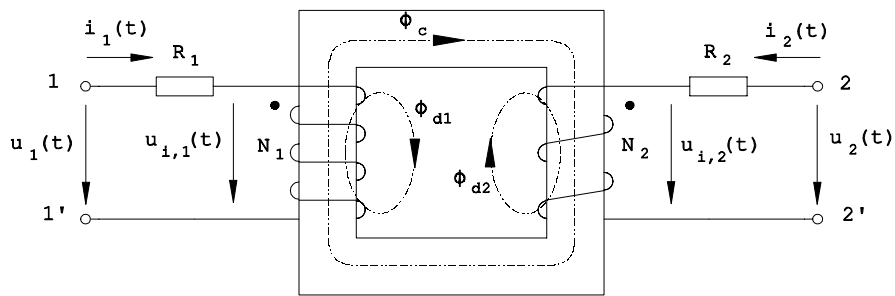


Fig. A3.1 Transformador monofásico

Las ecuaciones tensión-corriente del transformador de la figura A3.1 son:

$$\begin{aligned} u_1 &= R_1 i_1 + u_{i,1} = R_1 i_1 + L_{d1} \frac{di_1}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \\ u_2 &= R_2 i_2 + u_{i,2} = R_2 i_2 + L_{d2} \frac{di_2}{dt} + N_2 \frac{d\phi_c}{dt} \end{aligned} \quad (\text{A3.1})$$

Supongamos primero el transformador en vacío ($i_2 = 0$) alimentado por una tensión senoidal pura. El primario consumirá una corriente $i_1 = i_\mu'$. Como R_1 y L_{d1} son muy pequeñas y la corriente i_μ' también, se puede despreciar la caída de tensión en las mismas:

$$u_1(t) = R_1 i_\mu' + L_{dl} \frac{di_\mu'}{dt} + N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \approx N_1 \frac{d\phi_c}{dt} \quad (A3.2)$$

$$u_2(t) = N_2 \frac{d\phi_c}{dt}$$

La primera ecuación indica que el flujo ϕ_c será de forma tal que su derivada sea igual a la tensión. Si la tensión es senoidal pura, el flujo también lo será (retrasado 90°). La segunda ecuación indica que si el flujo es senoidal, la tensión del secundario también lo será. Entonces, independientemente de estar o no trabajando en la zona lineal del núcleo, al alimentar el transformador con tensión senoidal, *el flujo en el núcleo y la tensión inducida en el secundario son senoidales* (siempre que R_1 , L_{dl} e i_μ' sean pequeños, que es lo que normalmente sucede).

Observando la característica no lineal del núcleo, para conseguir un flujo senoidal la corriente debe tener la forma característica en campana de la figura A3.2b. Si se considera el efecto del ciclo de histéresis, la campana deja de ser perfectamente simétrica respecto al eje vertical. Se ha de observar que el flujo y la corriente están desfasados 90° con respecto a la tensión.

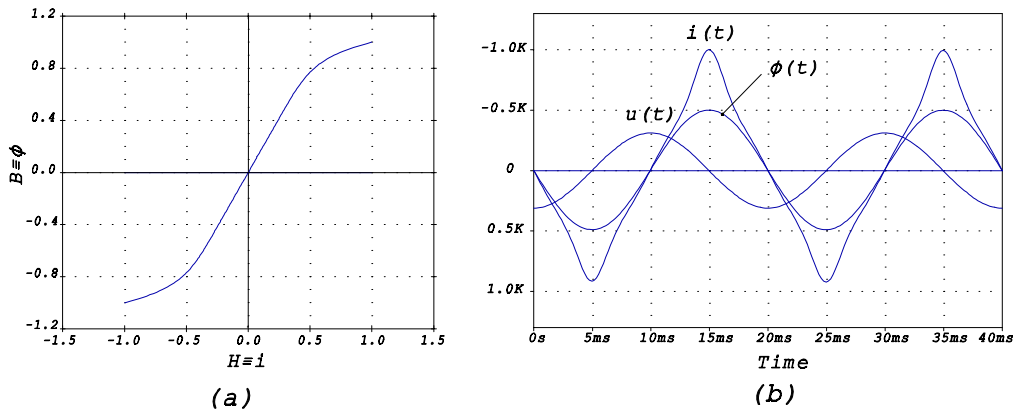


Fig. A3.2 (a) Característica B-H no lineal, y (b) corriente i_μ' necesaria para la creación de un flujo senoidal

Ahora supóngase que el secundario no está abierto, sino que tiene conectado alguna carga lineal (R , L o C lineales), por lo que puede circular una intensidad i_2 en sentido contrario al dibujado en la figura A4.1, es decir, $-i_2$. Si la carga es lineal, como la tensión u_2 es senoidal, la intensidad $-i_2$ también lo será.

Si circula una intensidad $-i_2$ por el secundario, creará una fuerza magnetomotriz de valor $(-N_2 i_2)$, que tiene que ser compensada por un incremento en la intensidad del primario, es decir:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{F}_{antigua} &= N_1 i_{\mu}' \\ \mathcal{F}_{nueva} &= N_1 i_1 - N_2 i_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N_1 i_{\mu}' = N_1 i_1 - N_2 i_2 \quad (\text{A3.3})$$

Es lógico que la fuerza magnetomotriz se conserve aproximadamente, ya que si aumentara, aumentaría el flujo, y aumentaría la tensión inducida en cada bobina, pero u_{i_1} no puede ser, por ejemplo, mayor que u_1 , sino que tiene que tener un valor tal que cumpla la ecuación A3.1.

Si el incremento de i_1 es tal que compense la fuerza magnetomotriz de $-i_2$, como $-i_2$ es senoidal, el incremento de i_1 también lo será. Es decir, que i_1 tendrá una parte senoidal pura (de valor bastante elevado) y una parte (pequeña, i_{μ}') con armónicos.

Entonces se puede decir que el flujo se mantendrá aproximadamente constante en el núcleo tanto en vacío como en carga. La puntualización "aproximadamente" se debe a que en carga, como la intensidad i_1 será normalmente mucho mayor que i_{μ}' , habrá una caída de tensión interna más grande (debida a R_1 y a L_{dl}) y el flujo será tal que se cumpla las ecuaciones A3.1, aunque de valor muy parecido al de vacío.

Por otro lado, la parte de i_1 que compensa a $-i_2$ no deformará la tensión en bornes de la bobina (al pasar por R_1 y L_{dl}), ya que es senoidal, mientras que la parte que corresponde a la magnetización (i_{μ}') deformará algo la tensión por su contenido de armónicos, aunque esta deformación sea insignificante, dado que $i_{\mu}' \ll i_1$.

Aquí se ha hecho el análisis considerando tan sólo la corriente magnetizante i_{μ}' , pero en realidad, la corriente de vacío que absorbe el transformador, i_o' , está algo más deformada debido al ciclo de histéresis, i_{Fe}' . En concreto, el contenido de armónicos típico de la corriente de vacío es:

- tercer armónico, con una amplitud entre el 10% y el 60% de la onda fundamental,
- quinto armónico, con una amplitud entre el 0% y el 30% de la onda fundamental,
- séptimo armónico, con una amplitud entre el 0% y el 20% de la onda fundamental.

El resto de armónicos se pueden despreciar por su pequeña amplitud.

Senoide equivalente

Como ya se ha visto, cuando la tensión impuesta al transformador le hace trabajar fuera de la zona lineal de la curva $B-H$, al imponer una tensión senoidal, la respuesta no lineal del transformador consiste en absorber una intensidad de vacío no lineal, es decir, con armónicos. Para la determinación de los parámetros que caracterizan el hierro, al ser el comportamiento no lineal, se recurre a la definición de la senoide equivalente, es decir, se caracteriza el consumo no lineal con un consumo lineal que absorbe la misma intensidad eficaz y la misma potencia activa.

Sea un transformador que, alimentado con una tensión senoidal U , absorbe una intensidad de vacío i_o' con un contenido de armónicos:

$$I'_{o1}, I'_{o3}, I'_{o5}, I'_{o7}, \dots \quad (\text{A3.4})$$

y consume una potencia activa P . Entonces:

$$I'_{eq} = \sqrt{\sum I_k'^2}, \quad P = U I'_{eq} \cos \varphi_{eq} \quad (\text{A3.5})$$

Tomando como referencia de ángulos la tensión U , se obtiene la intensidad equivalente:

$$I'_{eq} = I'_{eq} \angle -\varphi_{eq} \quad (\text{A3.6})$$

a partir de la cual, se pueden calcular los parámetros del hierro.

$$Y'_o = \frac{I'_{eq}}{U} = \frac{I'_{eq}}{U} \angle -\varphi_{eq} = G'_{Fe} - j B'_\mu \quad (\text{A3.7})$$

En realidad, el concepto de la senoide equivalente se adopta directamente al realizar el ensayo en vacío, ya que la lectura del amperímetro da el valor eficaz de la intensidad de vacío, es decir, el valor de I'_{eq} . El ángulo φ_{eq} se obtiene de P y de $S = U I'_{eq}$.

Esta forma de trabajar es suficientemente correcta, ya que el grado de saturación depende de la tensión aplicada, y los transformadores trabajan siempre a tensión constante (aproximadamente). Si un transformador trabaja a una tensión distinta a la que se han realizado los ensayos, se ha de volver a caracterizar el hierro (se tienen que volver a calcular G'_{Fe} y B'_μ).

Los componentes G'_{Fe} y B'_μ son lineales, imponiendo una relación tensión-corriente en forma de elipse (la tensión y la corriente serán dos vectores de módulo constante con un desfase constante entre ellos). Esta elipse representa un ciclo de histéresis "lineal". La no linealidad del material es la que deforma la elipse hasta darle la forma característica de la figura A3.3b (en un material no lineal con ciclo de histéresis, la intensidad es un vector de módulo no constante, ya que no es una senoide pura).

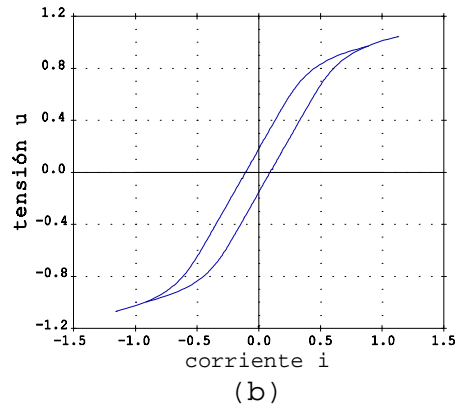
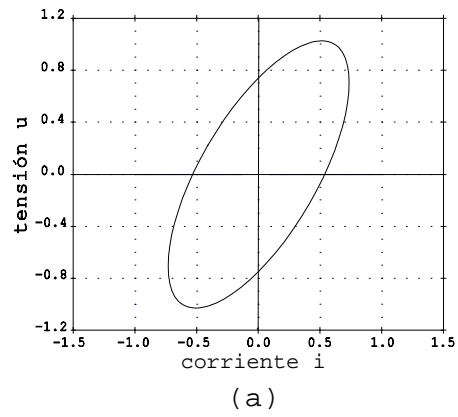


Fig. A3.3 Característica tensión-corriente de un material con ciclo de histéresis: (a) material lineal, y (b) material no lineal

Anexo 4 Incorporación del índice horario al esquema del transformador trifásico

Añadir el índice horario al esquema de un transformador trifásico supone una complejidad adicional que no es necesaria, ya que se ha explicado cómo calcular sencillamente los desfases reales entre tensiones de primario y secundario. No obstante, algunos autores sí que lo incorporan, motivo por el que aquí también se incluirá.

Se ha de definir un transformador ideal monofásico con relación de transformación compleja.

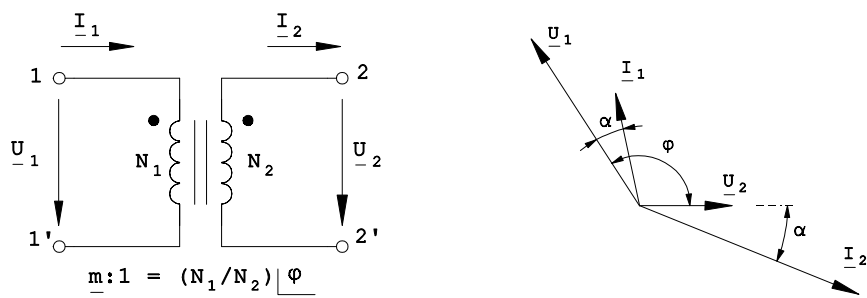


Fig. A4.1 Transformador ideal monofásico con relación de transformación compleja

Este transformador se caracteriza por provocar un desfase φ entre \underline{U}_1 y \underline{U}_2 . Además, no consume potencia activa ni reactiva. Por ello,

$$\left. \begin{array}{l} \text{(Desfase } \underline{U}_1 - \underline{U}_2) \\ \text{(Sin consumo de potencia)} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \underline{U}_1 = \underline{m} \underline{U}_2 \\ \underline{U}_1 I_1^* - \underline{U}_2 I_2^* = 0 \end{array} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{\underline{m}^*} I_2 \quad (\text{A4.1})$$

donde \underline{m} es la relación de transformación compleja.

El índice horario se puede añadir al esquema fase-neutro del transformador trifásico o al esquema trifásico. Si se añade al esquema fase-neutro, se utiliza un transformador monofásico ideal de relación de transformación compleja. La relación de transformación compleja debe ser tal que:

- el módulo de la relación de transformación sea la relación de transformación (si es necesaria), y
- el ángulo sea el índice horario.

Un esquema fase-neutro no reducido en T de un transformador trifásico se muestra en la figura A4.2. Este esquema es análogo al de la figura 6.2. La relación de transformación compleja tiene de módulo la relación de transformación del transformador trifásico (normalmente diferente de 1) y de ángulo su índice horario.

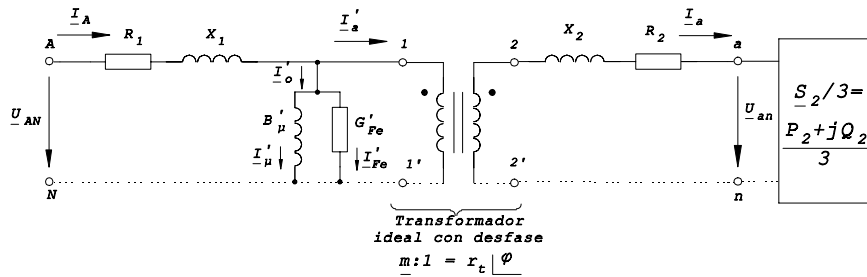


Fig. A4.2 Esquema fase-neutro en T no reducido de un transformador trifásico que incluye el índice horario

Si el transformador hubiera sido un Dyn5 de relación de transformación 11000/400 V,

$$\underline{m} = 11000/400 \angle 5\pi/6 \quad (\text{A4.2})$$

Si el transformador trifásico se reduce (como se hizo en el capítulo 9 con el monofásico), el transformador ideal pasa a ser de relación de transformación compleja unitaria (de módulo la unidad), y resulta el de la figura A4.3.

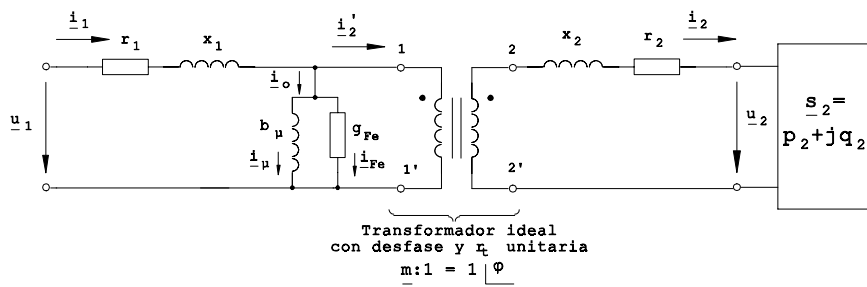


Fig. A4.3 Esquema en T reducido a p.u. de un transformador trifásico que incluye el índice horario

Al igual que en el capítulo 9, se puede pasar a un esquema en L. Como la relación de transformación compleja tiene de módulo la unidad, las impedancias pueden estar a un lado u otro del transformador ideal, y resultan los esquemas en L de las figuras A4.4 y A4.5, que son los esquemas que se utilizan en la práctica.

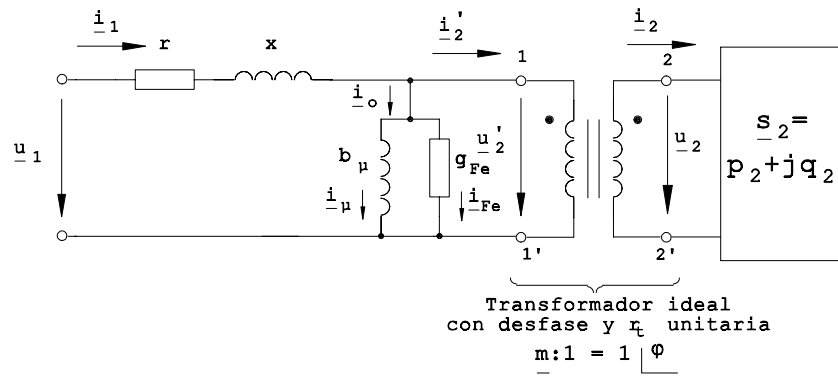


Fig. A4.4 Esquema en L reducido a p.u. de un transformador trifásico que incluye el índice horario (transformador ideal con desfase horario situado entre secundario y carga)

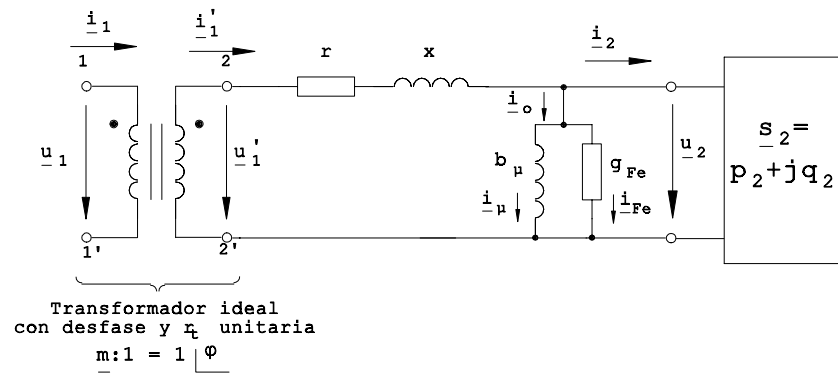


Fig. A4.5 Esquema en L reducido a p.u. de un transformador trifásico que incluye el índice horario (transformador ideal con desfase horario situado entre alimentación y primario)

Bibliografía

FITZGERALD, A.E.; KINGSLEY Jr., C.; UMANS, S.D. *Máquinas eléctricas* (5ª edición). México, McGraw-Hill, 1992.

FRAILE MORA, J. *Máquinas eléctricas*. Serv. de Publicaciones. Madrid, Revista de Obras Públicas, 1992.

RAS, E. *Transformadores de potencia, de medida y de protección* (5ª edición). Barcelona, Marcombo, 1983.

SANJURJO NAVARRO, R. *Máquinas eléctricas*. Madrid, McGraw-Hill, 1989.