UNIDAD 3

Cinemática en dos dimensiones

Prof. Ing. Natalia Montalván

Movimiento en dos dimensiones

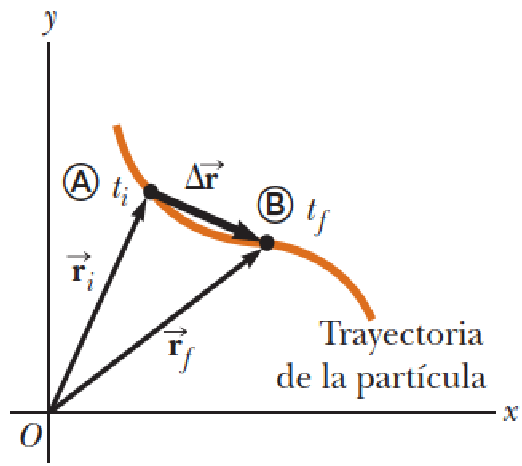
El movimiento de satélites en órbita o el movimiento de electrones en un campo eléctrico uniforme, se dan sólo en dos dimensiones, es decir, en un plano, y deben describirse con **dos componentes de posición, velocidad y aceleración**.

Vector de posición

- En una dimensión (MRU- MRUV), se mostró que el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta se conoce por completo si se conoce su posición como función del tiempo. Esta idea se amplía al movimiento bidimensional de una partícula en el plano xy.
- Se comienza por describir la posición de la partícula mediante su **vector de posición** $\vec{r}$, que se dibuja desde el origen de algún sistema coordenado hasta la posición de la partícula en el plano xy.

Consideremos una partícula que se mueve en el plano xy:

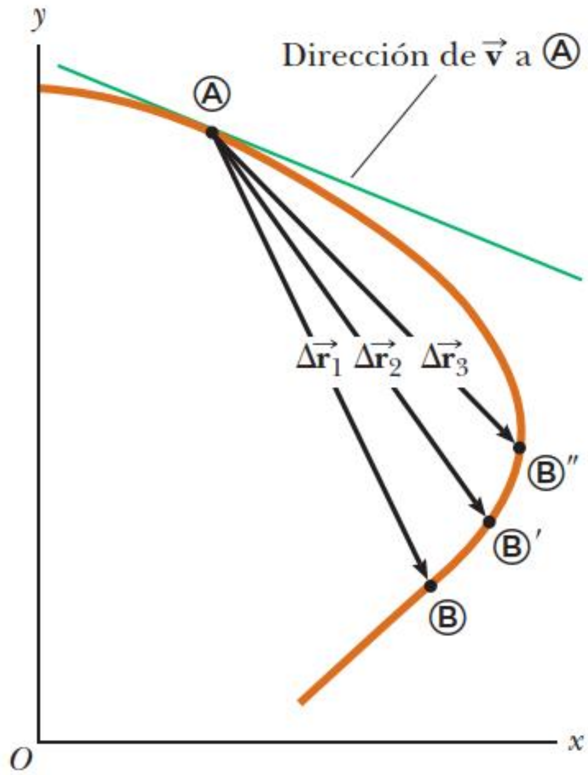
- En el tiempo $\mathbf{t_i}$, la partícula está en el punto **A**: vector de posición $\vec{r}_i$.
- En un tiempo posterior $\mathbf{t_f}$, está en el punto **B**: vector de posición $\vec{r}_f$.
- Conforme la partícula se mueve de **A** a **B** en el intervalo de tiempo $\Delta t = t_i - t_f$, su vector de posición cambia de $\vec{r}_i$ a $\vec{r}_f$.



El desplazamiento de la partícula es un vector, y se calcula como la diferencia entre su posición final y su posición inicial: $\Delta\vec{\mathbf{r}} \equiv \vec{\mathbf{r}}_f - \vec{\mathbf{r}}_i$

Velocidad instantánea

Considere de nuevo el movimiento de una partícula entre dos puntos en el plano xy como
se muestra en la figura:



- Conforme el intervalo de tiempo sobre el que se observa el movimiento se vuelve más y más pequeño (esto es, a medida que **B** se mueve a **B´** y después a **B´´** y así sucesivamente), la dirección del desplazamiento tiende a la línea tangente a la trayectoria en **A**.
- La velocidad instantánea $\vec{v}$ se define como el límite de la velocidad promedio $\vec{v}_{prom}$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{v}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$$

- La velocidad instantánea es igual a la derivada del vector de posición respecto del tiempo.
- La dirección del vector velocidad instantánea en cualquier punto en la trayectoria de una partícula es a lo largo de una línea tangente a la trayectoria en dicho punto y en la dirección del movimiento.
- La magnitud del vector velocidad instantánea v † Sv de una partícula se llama rapidez de la partícula, que es una cantidad escalar.

Movimiento en dos dimensiones

Velocidad promedio

La cinemática bidimensional es similar a la cinemática unidimensional, pero ahora se debe usar notación vectorial completa en lugar de signos positivos y negativos para indicar la dirección del movimiento.

Con frecuencia, es útil **cuantificar el movimiento** al obtener la relación de un desplazamiento, dividido entre el intervalo de tiempo durante el que ocurre dicho desplazamiento, que proporciona la relación de cambio de posición.

La velocidad promedio $\vec{v}_{prom}$ de una partícula durante el intervalo de tiempo Δt se define como el desplazamiento de la partícula dividido entre el intervalo de tiempo:

$$\vec{\mathbf{v}}_{\text{prom}} \equiv \frac{\Delta \vec{\mathbf{r}}}{\Delta t}$$

Al multiplicar o dividir una cantidad vectorial por una cantidad escalar positiva como Δt sólo cambia la magnitud del vector, no su dirección. Puesto que el desplazamiento es una cantidad vectorial y el intervalo de tiempo es una cantidad escalar positiva, se concluye que la velocidad promedio es una cantidad vectorial.

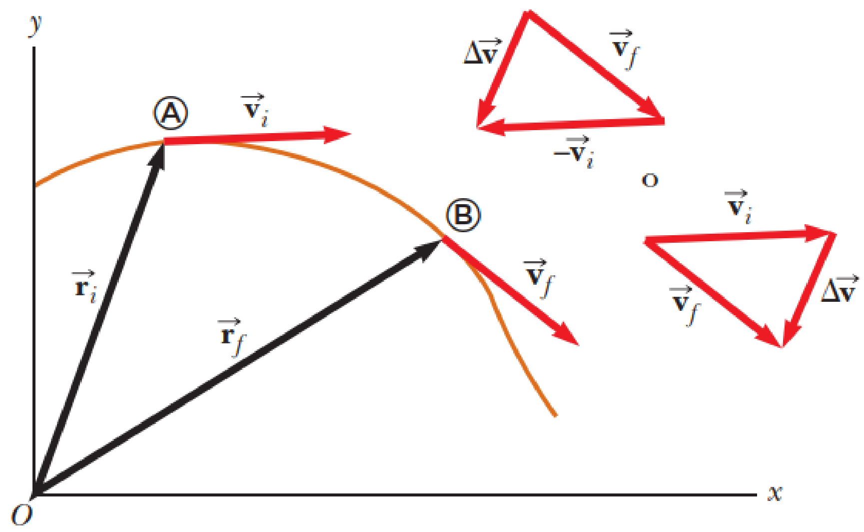
La velocidad promedio entre los puntos es independiente de la trayectoria; porque la velocidad promedio es proporcional al desplazamiento, que sólo depende de los vectores de posición inicial y final y no de la trayectoria seguida. Al igual que el movimiento unidimensional, si una partícula comienza su movimiento en algún punto y regresa a dicho punto a través de cualquier trayectoria, su velocidad promedio es cero para este viaje, porque su desplazamiento es cero.

Aceleración promedio

Conforme una partícula se mueve de un punto a otro a lo largo de cierta trayectoria, su vector velocidad instantánea cambia de $\vec{v}_i$ en el tiempo t_i a $\vec{v}_f$ en el tiempo t_f.

Conocer la velocidad en dichos puntos permite determinar la aceleración promedio de la partícula.

La aceleración promedio $\vec{a}_{prom}$ de una partícula se define como el cambio en su vector velocidad instantánea $\overrightarrow{\Delta v}$ dividido por el intervalo de tiempo Δt durante el que ocurre dicho cambio:



$$\vec{a}_{\text{prom}} \equiv \frac{\vec{v}_f - \vec{v}_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

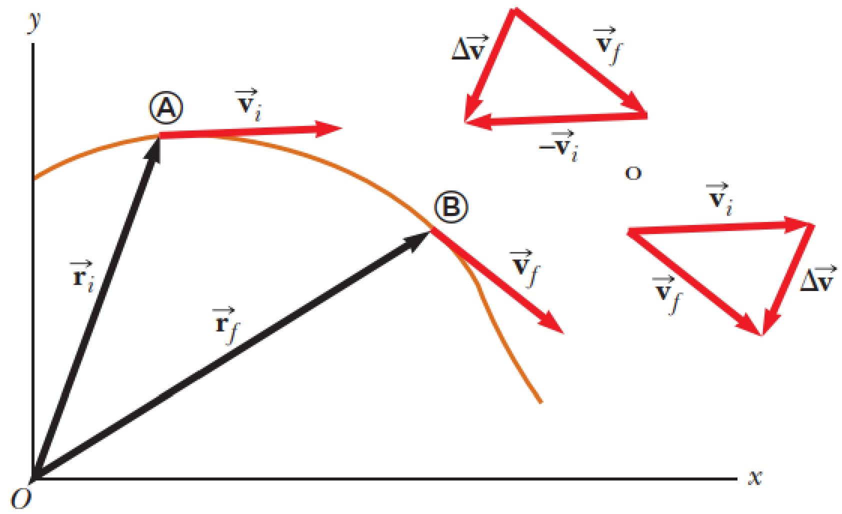
- Puesto que $\vec{a}_{prom}$ es la relación de una cantidad vectorial $\overrightarrow{\Delta v}$ y una cantidad escalar positiva Δt, se concluye que la aceleración promedio es una cantidad vectorial.

Aceleración instantánea

Cuando la aceleración promedio de una partícula cambia en el transcurso de diferentes intervalos de tiempo, es útil definir su aceleración instantánea.

La aceleración instantánea $\vec{a}$ se define como el valor límite de la proporción $\overrightarrow{\Delta v}/\Delta t$ conforme Δt tiende a cero:

$$\vec{\mathbf{a}} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{\mathbf{v}}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\mathbf{v}}}{dt}$$



En otras palabras, la aceleración instantánea es igual a la derivada del vector velocidad respecto del tiempo.

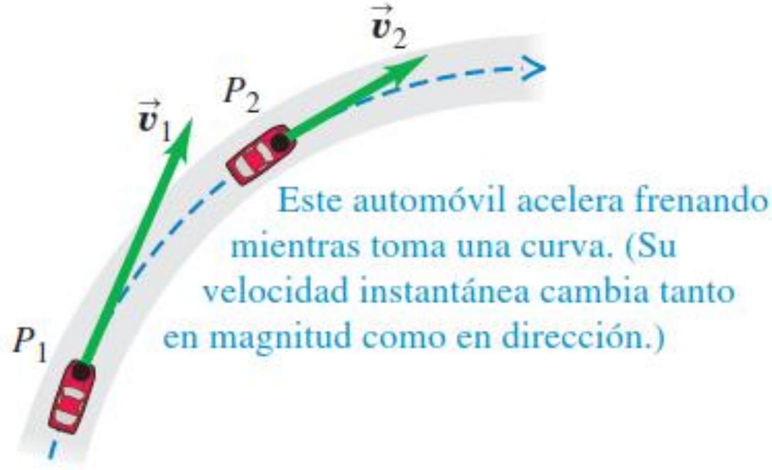
Cuando una partícula acelera ocurren varios cambios.

- Primero, la magnitud del vector velocidad (la rapidez) puede cambiar con el tiempo como en movimiento en línea recta (unidimensional).
- Segundo, la dirección del vector velocidad puede cambiar con el tiempo incluso si su magnitud (rapidez) permanece constante como en movimiento bidimensional a lo largo de una trayectoria curva.
- Por último, tanto la magnitud como la dirección del vector velocidad pueden cambiar simultáneamente.

Aceleración instantánea

Considere los siguientes controles en un automóvil: acelerador, freno, volante.
¿En esta lista cuáles son los controles que provocan una aceleración en el automóvil?

a) los tres controles
b) el acelerador y el freno
c) sólo el freno
d) sólo el acelerador

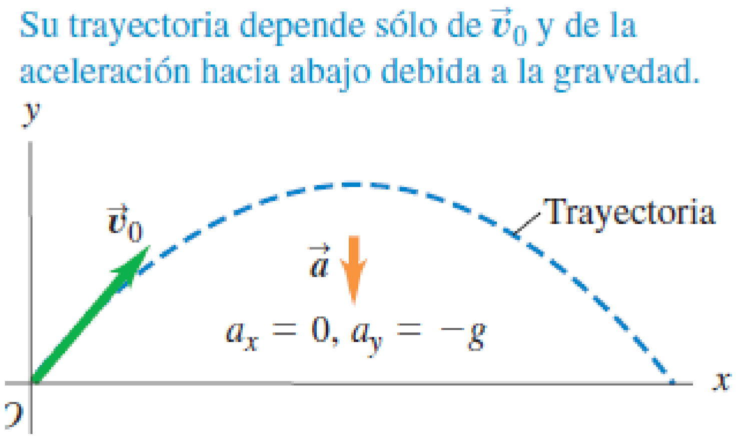


Si una partícula sigue una trayectoria curva, su aceleración siempre es distinta de cero, aun si se mueve con rapidez constante. Quizá le parezca que esta conclusión es contraria a su intuición, pero más bien va contra el uso cotidiano de la palabra "aceleración" para implicar que la velocidad aumenta.
La aceleración **no es cero** cuando el vector de velocidad cambia de cualquier forma, ya sea en su magnitud, dirección o ambas.

Tiro oblicuo o Movimiento de proyectiles

- Un proyectil es cualquier cuerpo que recibe una velocidad inicial v_0 y luego sigue una trayectoria determinada totalmente por los efectos de la aceleración gravitacional y la resistencia del aire.
- Una pelota pateada, un paquete soltado desde un avión y una bala disparada de un rifle son todos ejemplos de proyectiles.

- Si se desprecia la resistencia del aire, la trayectoria de un proyectil es una combinación de **movimiento horizontal con velocidad constante y movimiento vertical con aceleración constante e igual a - g**.
- Este movimiento es **bidimensional**, pues **el proyectil se mueve simultáneamente a lo largo del eje x y al mismo tiempo se desplaza a lo largo del eje y**:

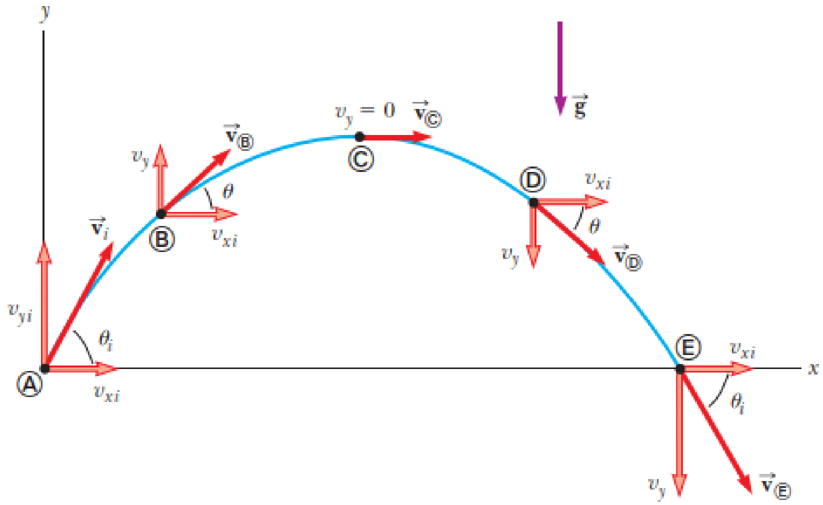


Tiro oblicuo o Movimiento de proyectiles

El movimiento de proyectil de un objeto es simple de analizar a partir de dos suposiciones:

1) La aceleración de caída libre es constante en el intervalo de movimiento y se dirige hacia abajo.
2) El efecto de la resistencia del aire es despreciable.

Con estas suposiciones, se encuentra que **la trayectoria de un proyectil siempre es una parábola**, como se muestra en la figura.



- La clave del análisis del movimiento de proyectiles es que **podemos tratar por separado las coordenadas x e y**.
- La componente x de la aceleración es cero, y la componente y es constante e igual a - g.
- Así, podemos analizar el movimiento de un proyectil como una combinación de **movimiento horizontal con velocidad constante** y **movimiento vertical con aceleración constante**.

Podemos expresar todas las relaciones vectoriales de posición, velocidad y aceleración del proyectil, con ecuaciones independientes para las componentes horizontales y verticales. Las componentes de $\vec{a}$ son:

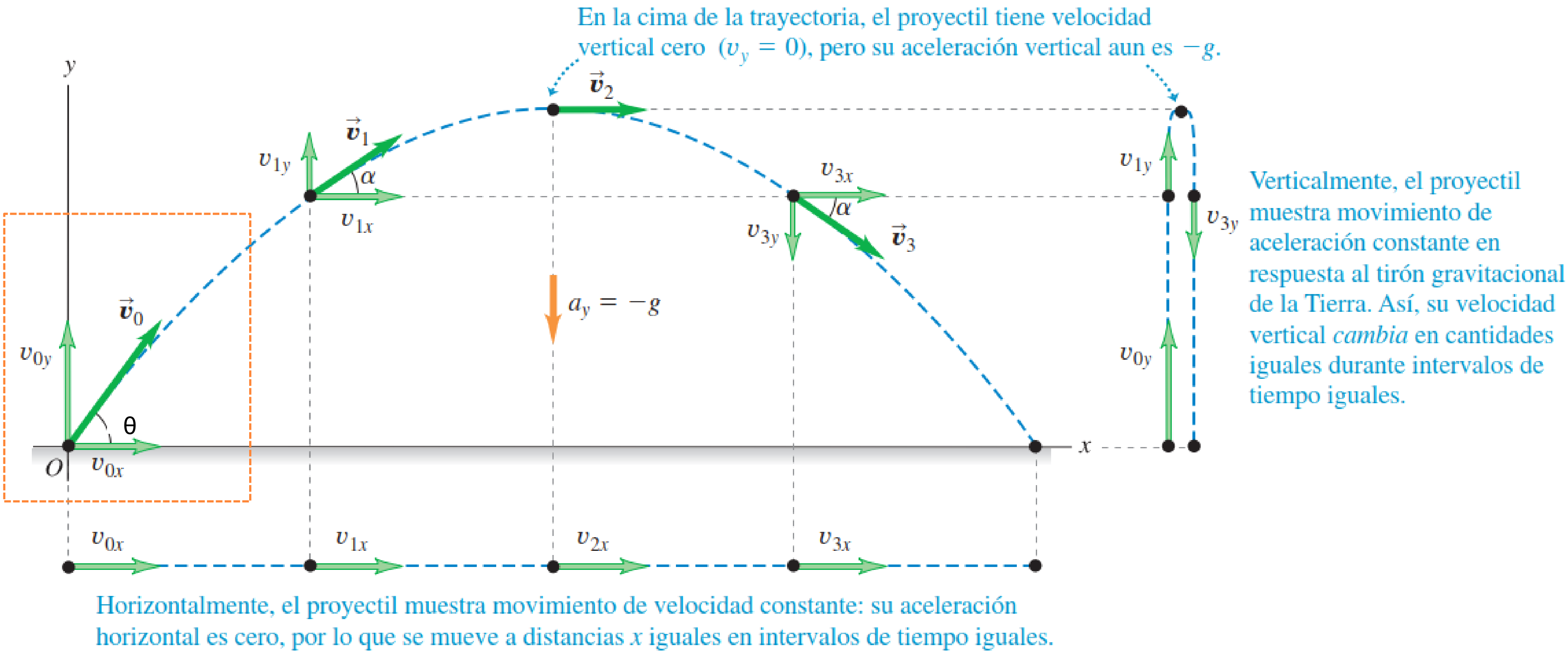
$$a_x = 0 \qquad a_y = -g \quad \text{(movimiento de proyectil, sin resistencia del aire)}$$

Tiro oblicuo o Movimiento de proyectiles

Velocidad inicial

Utilizaremos un plano de coordenadas *xy* para representar la trayectoria de una partícula que se lanza con una velocidad inicial v_0 y un ángulo θ con respecto a la horizontal. Las componentes de la velocidad inicial se calculan de la siguiente manera:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\ \theta$$
$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin \theta$$



Tiro oblicuo o Movimiento de proyectiles

Coordenadas de posición

El movimiento de un proyectil se representa como la sobreposición de dos movimientos:

1) Movimiento de una partícula bajo velocidad constante en la dirección horizontal
2) Movimiento de una partícula bajo aceleración constante (caída libre) en la dirección vertical.

Las componentes horizontal y vertical del movimiento de un proyectil son completamente independientes una de otra y se manejan por separado, con el tiempo t como la variable común para ambas componentes.

A cada punto de la trayectoria le corresponde un par de coordenadas (x;y). En el momento del lanzamiento, t = 0, la partícula se encuentra en el origen de coordenadas y las coordenadas de la posición inicial son (0,0).

Coordenadas en x: MRU $x = v_x \cdot t$

Coordenadas en y: MRUV $y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$

Velocidad

El vector velocidad $\vec{v}$ cambia con el tiempo tanto en magnitud como en dirección. Este cambio es el resultado de la aceleración en la dirección y negativa. La componente x de velocidad permanece constante en el tiempo porque no hay aceleración a lo largo de la dirección horizontal.

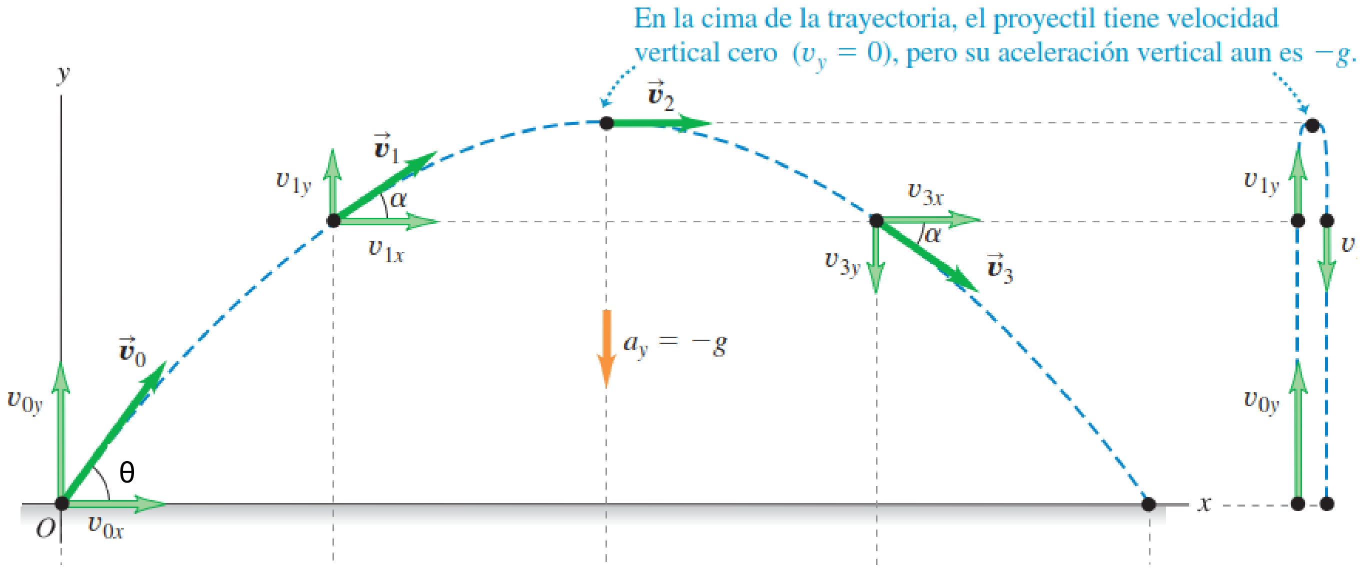
$$v_x = v_{0x} = constante$$

$$v_y = v_{0y} - g \cdot t$$

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

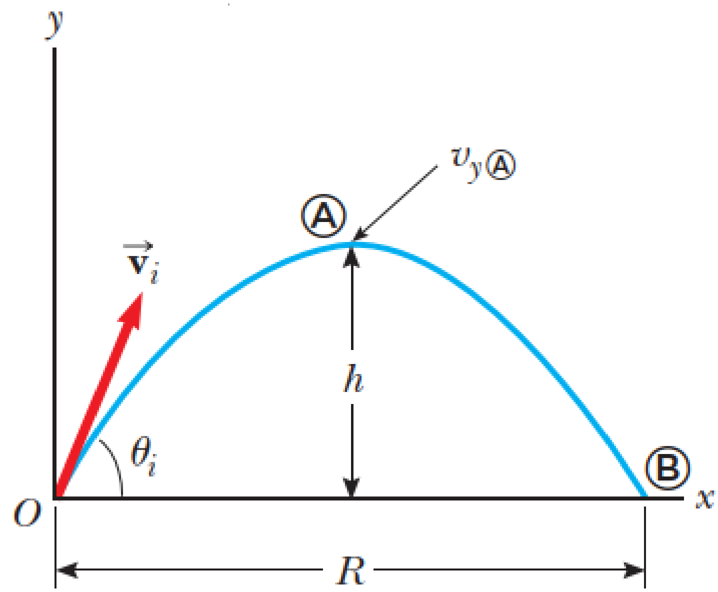
Tiro oblicuo o Movimiento de proyectiles

Rango y altura máxima



Considere que un proyectil es lanzado desde el origen en ti = 0 con una componente v_{0y} positiva, como se muestra en la figura, y regresa al mismo nivel horizontal. Dos puntos son de especial interés para analizar:

- La distancia R se llama alcance horizontal del proyectil que tiene coordenadas **(R, 0)**
- La distancia h que es su altura máxima, y tiene coordenadas cartesianas **(R/2, h)**

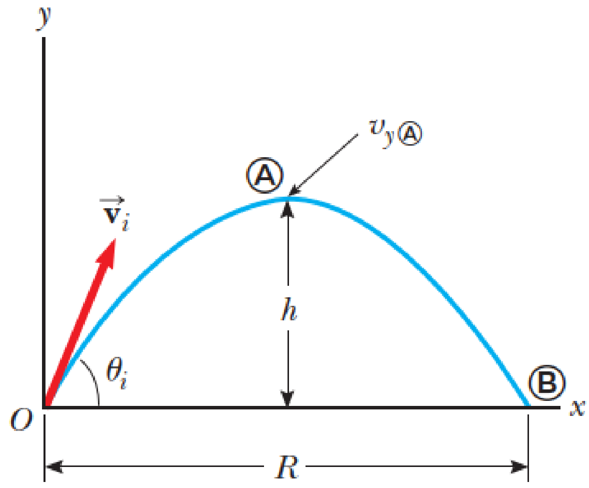


Rango y altura máxima

- Se puede determinar h al notar que, en el máximo, $v_y = 0$:

$$v_y^2 = v_{0y}^2 - 2 \cdot g \cdot y$$

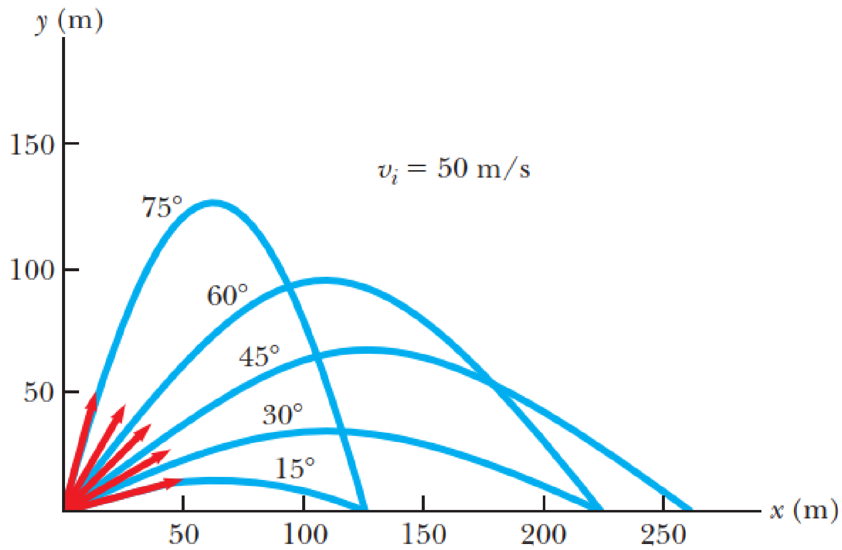
$$h = y_{máx} = \frac{v_{0y}^2}{2 \cdot g}$$



- El alcance R es la posición horizontal del proyectil en un tiempo que es el doble del tiempo en el que alcanza su altura máxima:

$$R = \frac{2 \cdot v_{0x} \cdot v_{0y}}{g}$$

Ejemplo: Rangos y alturas máximas para un proyectil lanzado sobre una superficie plana desde el origen con una rapidez inicial de 50 m/s en varios ángulos de proyección.



TIRO OBLICUO - Ejercicio 3. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0 = 100 m/s y un ángulo de inclinación de 60° respecto a la horizontal. Suponiendo nula la resistencia del aire, se pide calcular:

a) El tiempo en que el proyectil alcanza una posición de x = 250 m:
En primer lugar, conociendo el ángulo de lanzamiento (θ = 60°) y la velocidad inicial (v_0 = 100 m/s), determinamos sus componentes:

$$v_{0x} = v_0 \cdot cos\theta = 100\,\frac{m}{s} \cdot \cos 60$$

$$v_{0x} = 50\,m/s$$

$$v_{0y} = v_0 \cdot \sin\theta = 100\,\frac{m}{s} \cdot \sin 60$$

$$v_{0y} = 86{,}6\,m/s$$

Nos pide el tiempo que demora en proyectil en alcanzar la posición x = 250 m. Sabemos además que:

$$v_x = v_{0x} = 50\,\frac{m}{s}$$

IMPORTANTE: nos da como dato la **coordenada en x** de la posición, por lo tanto debemos utilizar las ecuaciones de **MRU para el movimiento horizontal en x**, podemos despejar el tiempo de la ecuación:

$$x = v_x \cdot t$$

$$250\,m = 50\,\frac{m}{s} \cdot t$$

$$5\,s = t$$

TIRO OBLICUO - Ejercicio 3. Se dispara un proyectil con una velocidad inicial v_0 = 100 m/s y un ángulo de inclinación de 60° respecto a la horizontal. Suponiendo nula la resistencia del aire, se pide calcular:

b) Las componentes de la velocidad en dicha posición:
Nos pide las componentes de la velocidad en "dicha posición" (cuando x = 250 m). En el inciso anterior calculamos el tiempo, entonces determinaremos las componentes de la velocidad cuando t = 5 s.

- Velocidad en x es siempre constante: $v_x = v_{0x} = 50\,\dfrac{m}{s}$

- Velocidad en y: $v_y = v_{0y} - g \cdot t = 86{,}6\,\dfrac{m}{s} - 9{,}8\,\dfrac{m}{s^2} \cdot 5\ s$

$$v_y = 37{,}6\ m/s$$

c) La altura alcanzada:
Debemos determinar la altura alcanzada al cabo de 5 s (CUIDADO! NO NOS PIDE LA ALTURA MÁXIMA). Calcularemos el valor de la posición en y cuando t = 5 s.

$$y = v_{0y} \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$y = 86{,}6\,\frac{m}{s} \cdot 5s - \frac{1}{2} \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \cdot (5\ s)^2$$

$$y = 310{,}5\ m$$