



UNIDAD 3

Cinemática en una dimensión MRU – MRUV

Prof. Ing. Natalia Montalván

Cinemática: Movimiento unidimensional

La *cinemática* es la parte de la mecánica que describe el movimiento.

Al tratar los principios de la cinemática, consideraremos a los objetos como **partículas**. Esto significa que no tendremos en cuenta su forma y dimensiones.

Para describir este movimiento, introducimos las cantidades físicas **posición, velocidad y aceleración**. Un aspecto muy importante es que tales cantidades son **vectores**.

Analizaremos el **movimiento unidimensional**, o sea, el movimiento de un objeto a lo largo de una **línea recta**.

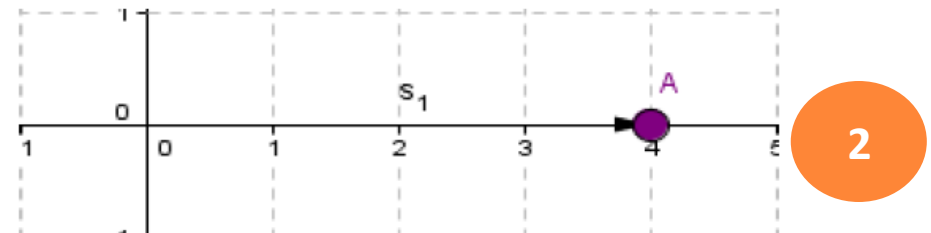
- ✓ Aquí nos interesa solo el **movimiento rectilíneo**, por lo que no necesitaremos aún el álgebra vectorial; no obstante, el uso de vectores será esencial en el movimiento en dos dimensiones.
- ✓ Desarrollaremos ecuaciones sencillas para describir el movimiento rectilíneo en el caso en que la **aceleración es constante**.

Posición y desplazamiento

La **posición** de una partícula es la **ubicación** de la misma respecto a un **punto de referencia**. Así, la partícula A se encuentra en la posición (4, 0) con respecto al sistema de coordenadas:



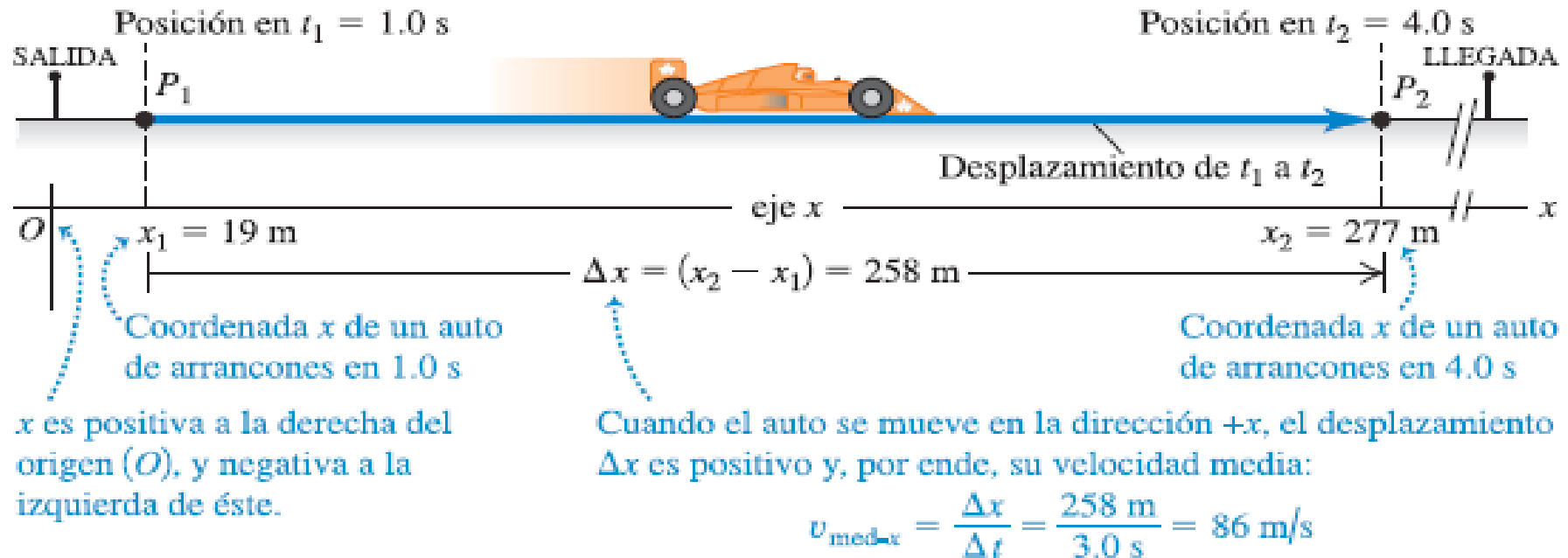
El **desplazamiento** es el **cambio en la posición** de la partícula. Es una **magnitud vectorial** y se representa de la siguiente manera:



Posición y desplazamiento

Consideremos un automóvil que se traslada en línea recta desde el punto P_1 hasta el punto P_2 . El desplazamiento desde una posición inicial x_1 hacia una posición final x_2 estará dado por:

$$\Delta x = x_2 - x_1$$



El desplazamiento de una partícula podrá ser, positivo, negativo o nulo. Sin embargo, la distancia recorrida, d por una partícula siempre es un número positivo.

Velocidad media

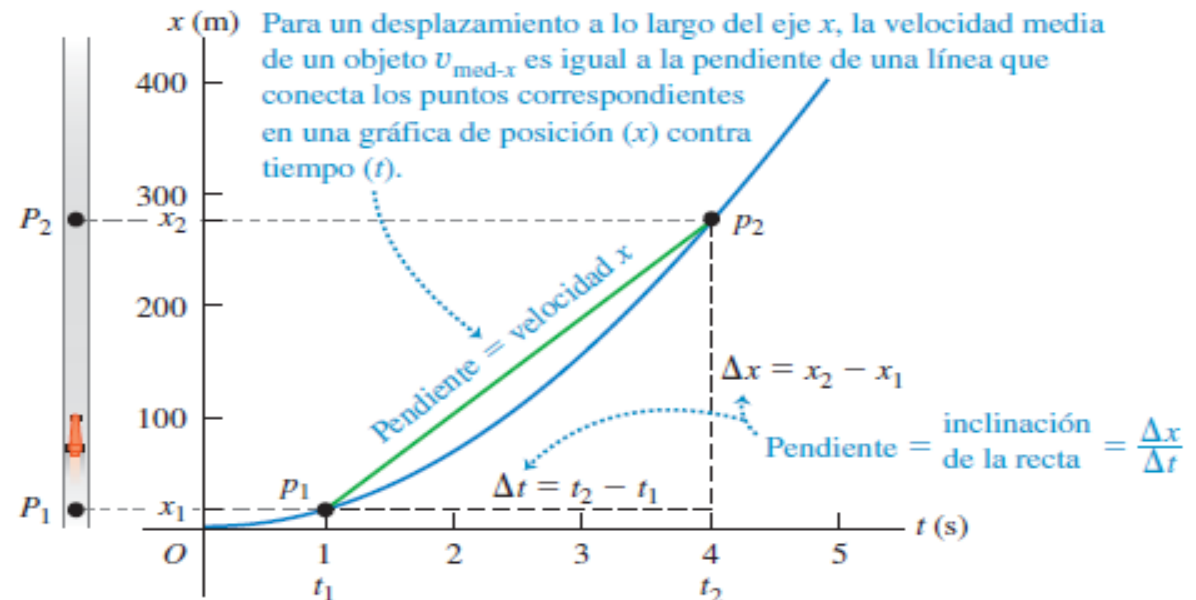
La **velocidad media** de una partícula se define como el *cociente entre el desplazamiento de la partícula y el tiempo transcurrido para dicho desplazamiento*.

$$v_{med-x} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

- La velocidad media de una partícula podrá ser, positiva, negativa (dependiendo del signo del desplazamiento) o nula (si el desplazamiento es nulo).
- La velocidad media es una magnitud vectorial (posee módulo, dirección y sentido).
- Su unidad en el SI el **m/s**.

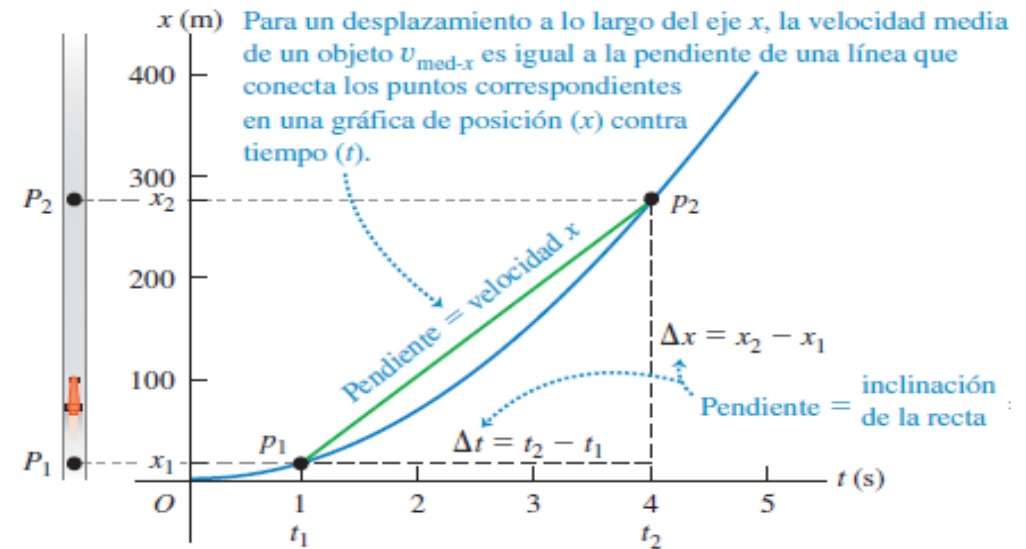
En movimiento rectilíneo llamaremos Δx el desplazamiento y a v_{med-x} la velocidad media. Sin embargo, no olviden que éstas son realmente las **componentes en x** de cantidades vectoriales que, en este caso especial (movimiento unidimensional), sólo tienen componentes x.

La figura es una gráfica de la **posición** del auto **en función del tiempo**, es decir, una gráfica x-t. La curva de la figura **no representa la trayectoria del auto** (ésta es una línea recta).



Velocidad media

- La gráfica es una forma de representar visualmente cómo cambia la posición del auto con el tiempo.
- Los puntos p_1 y p_2 en la gráfica corresponden a los puntos P_1 y P_2 de la trayectoria del auto.
- La línea p_1p_2 es la hipotenusa de un triángulo rectángulo con cateto vertical $\Delta x = x_2 - x_1$ y cateto horizontal $\Delta t = t_2 - t_1$.
- Así, la velocidad media del auto $v_{\text{med-x}} = \Delta x / \Delta t$ es igual a la **pendiente** de la línea p_1p_2 , es decir, el cociente del cateto vertical Δx y el cateto horizontal Δt .
- La velocidad media depende sólo del desplazamiento total Δx que se da durante el intervalo Δt , no en los pormenores de lo que sucede dentro de ese intervalo.



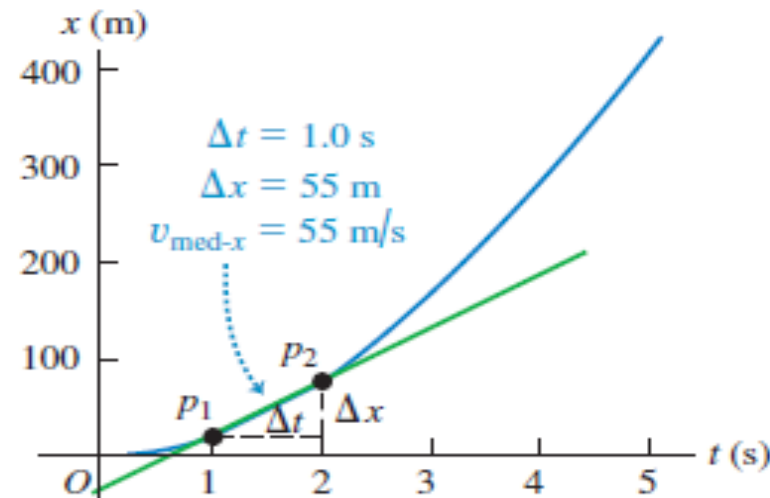
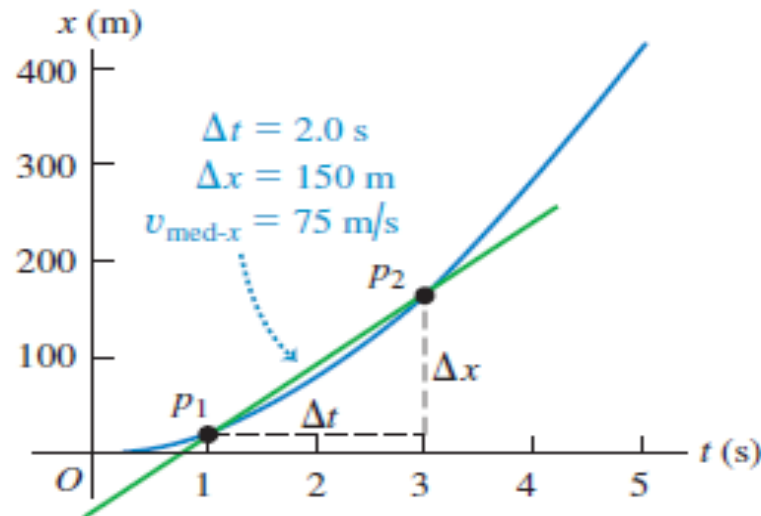
Velocidad instantánea

Para describir el movimiento con mayor detalle, necesitamos definir la **velocidad en cualquier instante específico** o punto específico del camino.

La **velocidad instantánea**, v_x es la velocidad de la partícula en un instante específico en el tiempo. Es una magnitud vectorial (módulo, dirección y sentido).

Para obtener la velocidad instantánea del auto en el punto P_1 , movemos el segundo punto P_2 cada vez más cerca del primer punto P_1 y calculamos la velocidad media: $v_{\text{med-x}} = \Delta x / \Delta t$ para estos desplazamientos y lapsos **cada vez más cortos**.

Tanto Δx y Δt se hacen muy pequeños, pero su cociente no necesariamente lo hace.

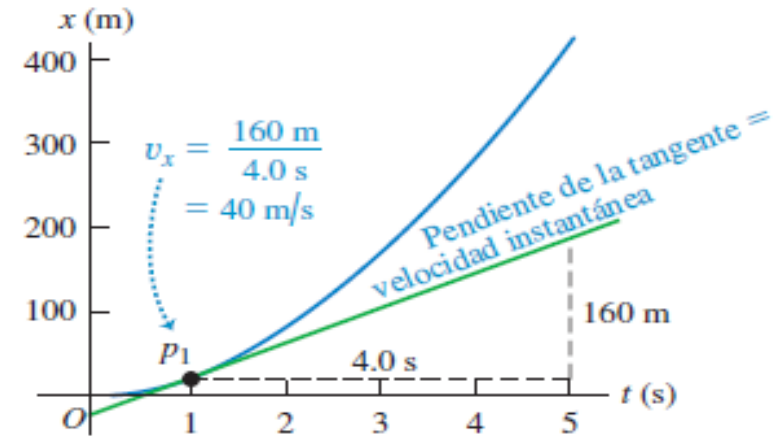


Velocidad instantánea

En el lenguaje del cálculo, el límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt se acerca a cero es la derivada de x con respecto a t y se escribe dx/dt .

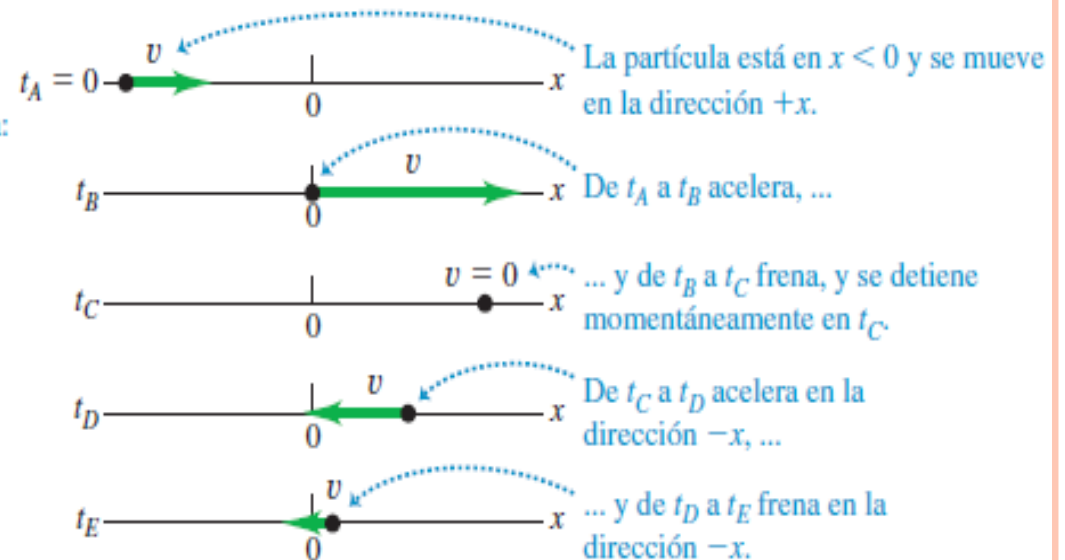
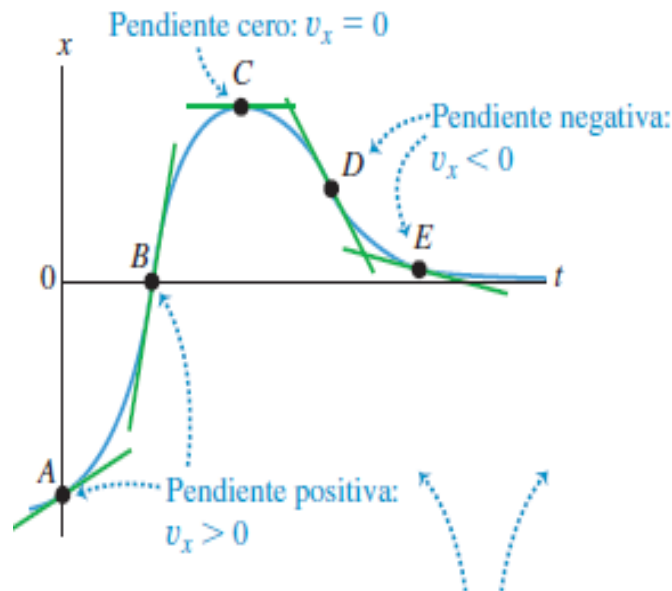
La velocidad instantánea es el **límite de la velocidad media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero**:

$$v_x \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$



La velocidad instantánea v_x en un tiempo dado es igual a la pendiente de la tangente a la curva x - t en ese tiempo.

Gráfica de posición en función del tiempo



Cuanto más empinada está la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica x - t de un objeto, mayor será la rapidez del objeto en la dirección positiva o negativa.

Aceleración

Así como la velocidad describe la tasa de cambio de posición con el tiempo, la aceleración describe la tasa de **cambio de velocidad con el tiempo**. Al igual que la velocidad, **la aceleración es una cantidad vectorial**. En el movimiento rectilíneo, su única componente distinta de cero está sobre el eje en que ocurre el movimiento. Como veremos, en el movimiento rectilíneo la aceleración puede referirse tanto a aumentar la rapidez como a disminuirla.

Aceleración media

En el tiempo t_1 la partícula está en el punto P_1 y tiene una velocidad instantánea v_{1x} , y en un instante posterior t_2 está en P_2 y tiene una velocidad v_{2x} .

La componente x de la velocidad cambia en $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ en el intervalo $\Delta t = t_2 - t_1$

Definimos la **aceleración media** de la partícula al moverse de P_1 a P_2 como una **cantidad vectorial** cuya componente x es igual a:

$$a_{med-x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

Aceleración instantánea

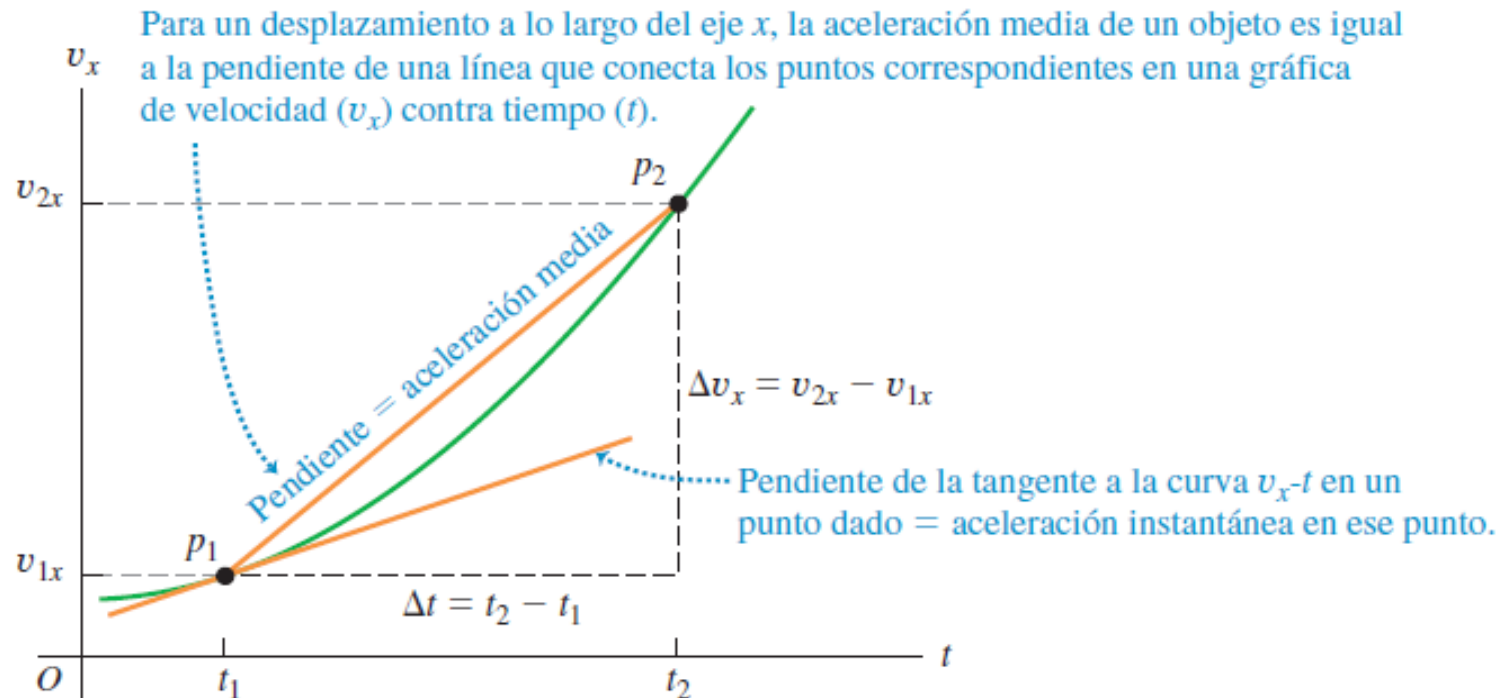
La **aceleración instantánea** es el límite de la aceleración media conforme el intervalo de tiempo se acerca a cero. En el lenguaje del cálculo, la aceleración instantánea es la tasa instantánea de cambio de la velocidad con el tiempo:

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}$$

Aceleración

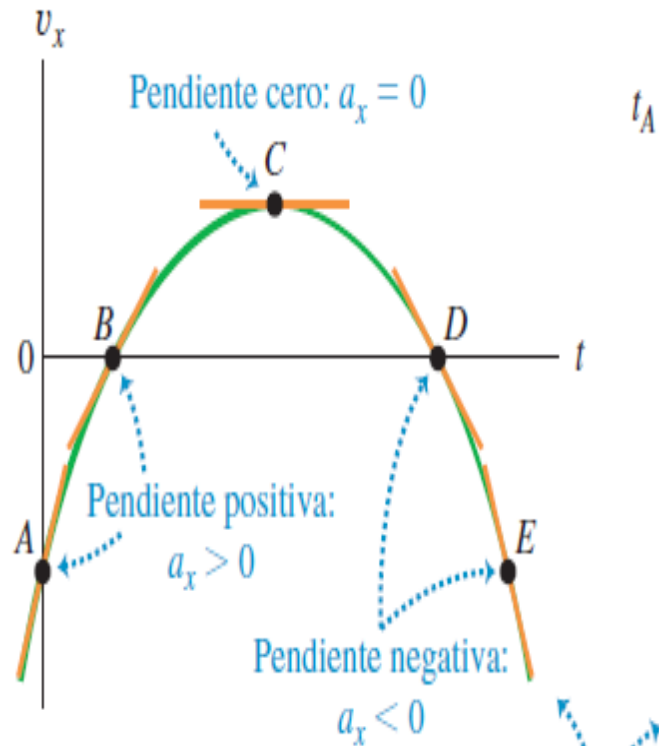
Gráfica de velocidad en función del tiempo

En una gráfica de velocidad en función del tiempo, la aceleración instantánea en cualquier punto es igual a la pendiente de la tangente de la curva en ese punto:

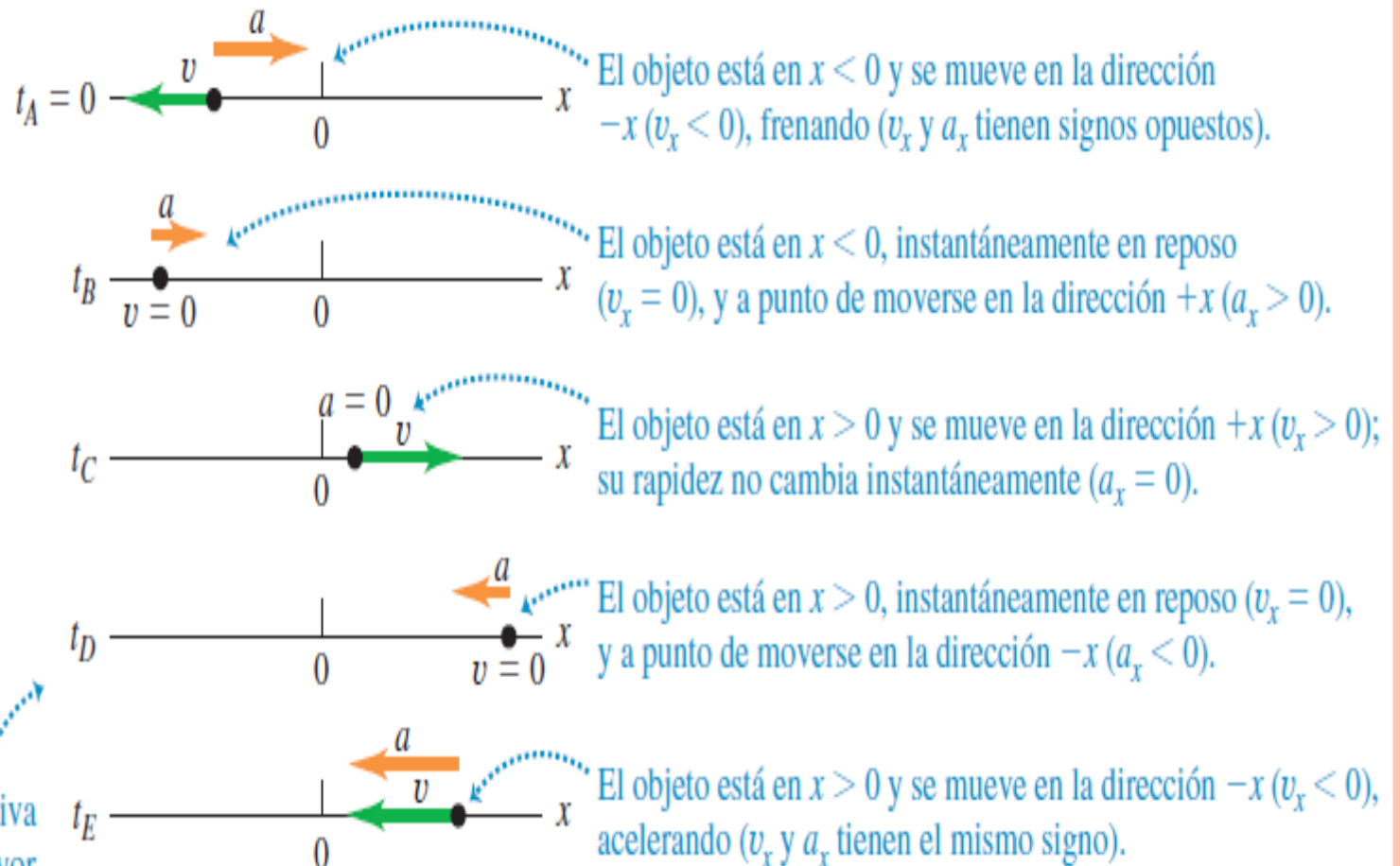


Aceleración

Gráfica de velocidad en función del tiempo



Cuanto más empinada esté la pendiente (positiva o negativa) de la gráfica v_x-t de un objeto, mayor será la aceleración del objeto en la dirección positiva o negativa.



Movimiento rectilíneo uniforme MRU

A pesar de que encontrar el movimiento rectilíneo uniforme o MRU en la naturaleza es bastante extraño, es el movimiento más fácil de estudiar y nos servirá para estudiar otros más complejos. El movimiento rectilíneo uniforme cumple las siguientes propiedades:

- La trayectoria es una **línea recta**,
- La **velocidad es constante**. Esto implica que el móvil recorre distancias iguales en tiempos iguales. Si la representamos gráficamente en función del tiempo, obtendremos una recta de pendiente nula.
- La aceleración es cero ($a=0$).



Ecuaciones para el MRU:

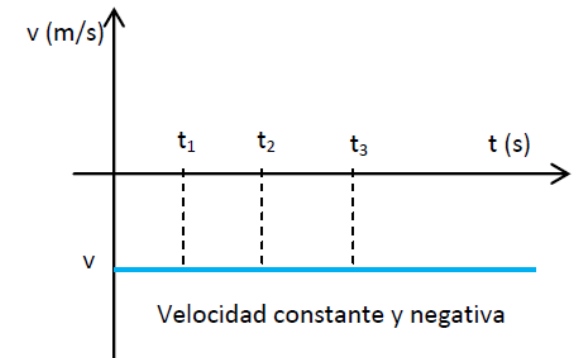
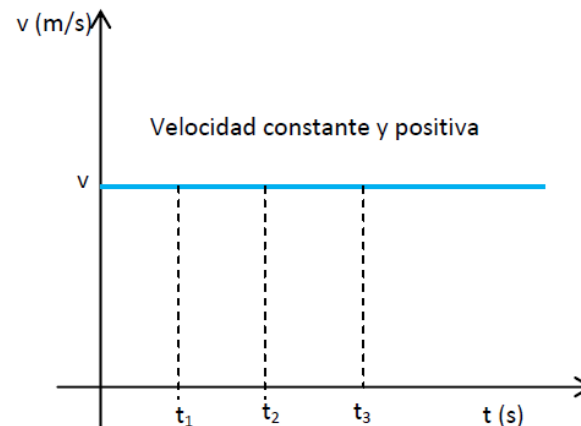
$$v = v_0 = \text{constante}$$

$$x = x_0 + v \cdot t$$



¿Qué forma tendrá la gráfica de la posición en función del tiempo?

Gráficos MRU: Velocidad

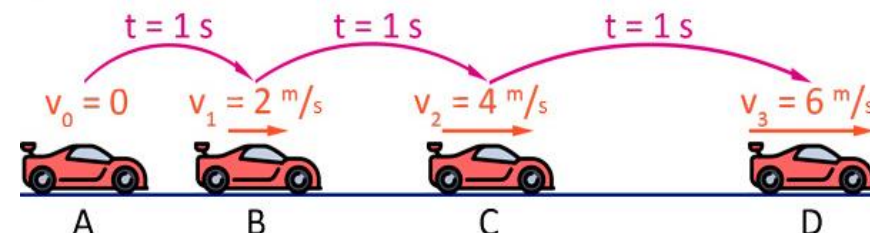
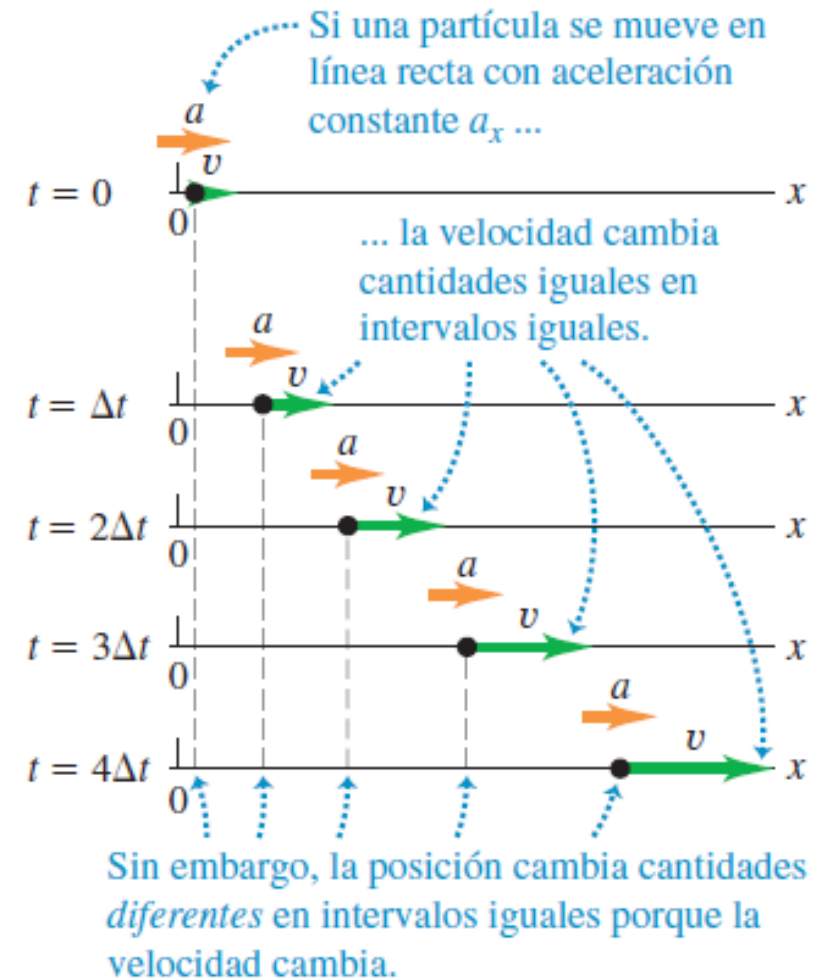


Movimiento con aceleración constante - MRUV

- Sean $t_1 = 0$ y t_2 cualquier instante posterior t . Simbolizamos con v_{0x} a la componente en x de la velocidad en el instante inicial $t = 0$.
- La componente en x de la velocidad en el instante posterior t es v_x .
- Si la aceleración es constante y distinta de cero, la velocidad de un móvil para un instante t estará dada por:

$$v_x = v_{0x} + a_x \cdot t$$

El movimiento acelerado más sencillo es el rectilíneo con aceleración constante. Un cuerpo realiza un **movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)** cuando su **trayectoria es una línea recta** y su **aceleración es constante y distinta de 0**. Esto implica que *la velocidad aumenta o disminuye su módulo de manera uniforme*.



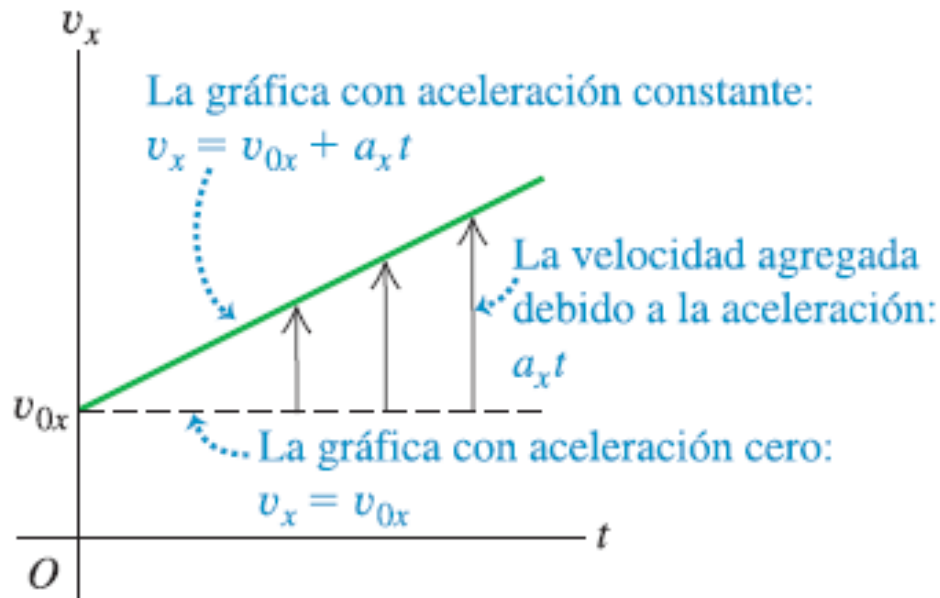
Movimiento rectilíneo uniformemente variado MRUV

Ecuaciones para el MRUV:

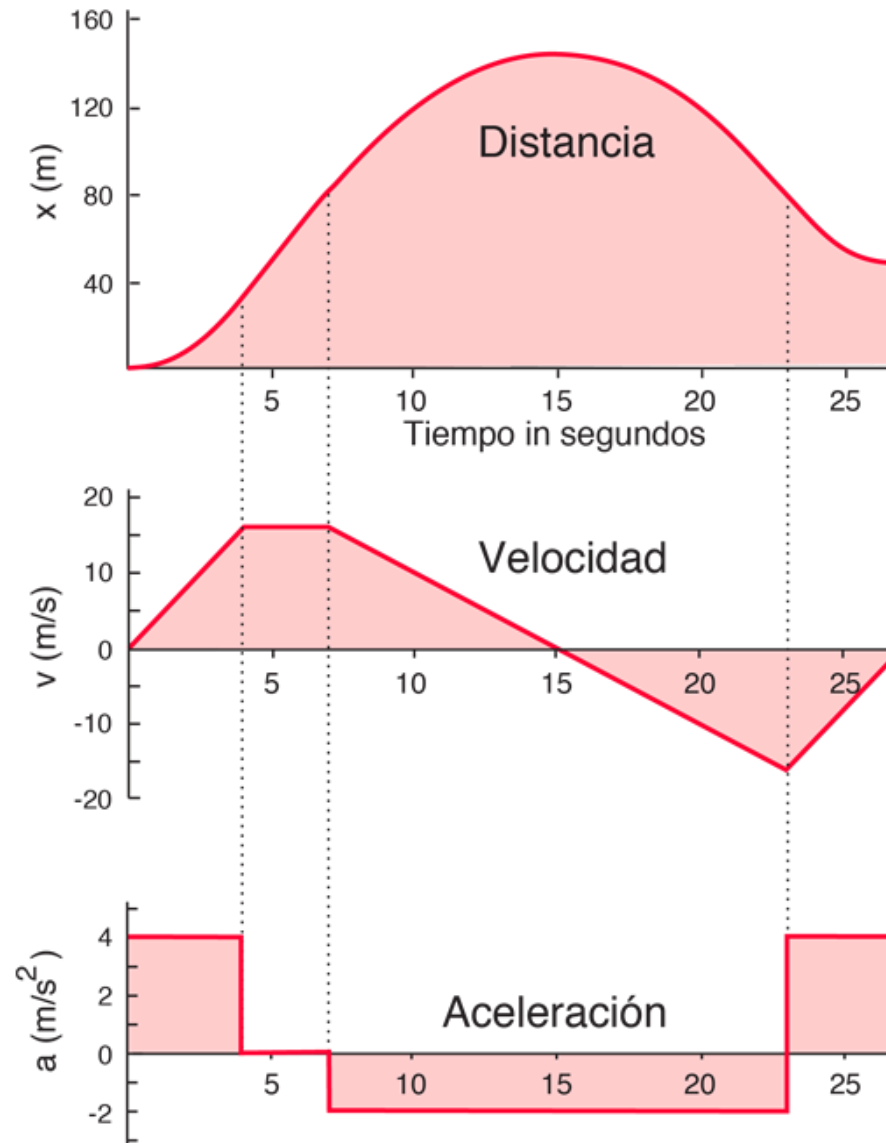
$$v = v_0 + a \cdot t$$

$$x = x_0 + v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x - x_0)$$

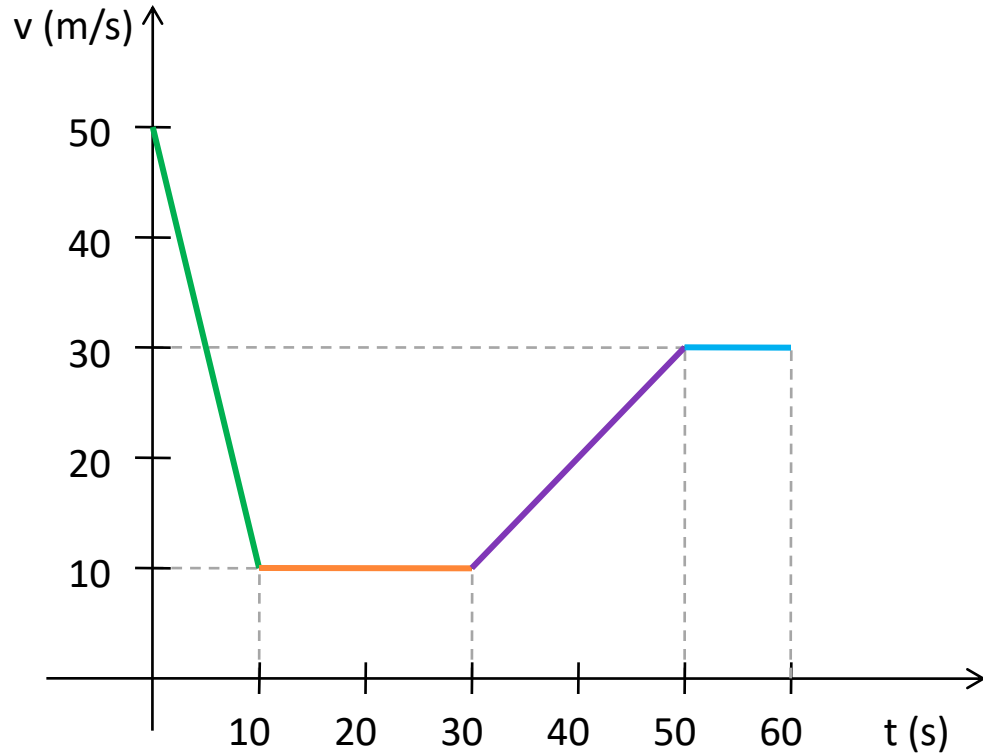


Gráficos MRUV: ejemplo



MRU - MRUV

Ejercicio 4. Dado el siguiente gráfico de la velocidad de un móvil en función del tiempo, calcular el espacio total recorrido, la velocidad media y hacer el gráfico de la aceleración en función del tiempo.



TRAMO 1: Desde $t = 0$ hasta los 10s la velocidad desciende (MRUV desacelerado).

- Velocidad inicial del tramo $v_0 = 50 \text{ m/s}$
- Velocidad final del tramo 1 $v_1 = 10 \text{ m/s}$
- Duración del tramo 1 $t_1 = 10\text{s}$

TRAMO 1: Desde $t = 0$ hasta los 10s la velocidad desciende (MRUV desacelerado).

TRAMO 2: Desde los 10s hasta los 30s la velocidad se mantiene constante (MRU).

TRAMO 3: Desde los 30s hasta los 50s la velocidad aumenta (MRUV acelerado).

TRAMO 4: Desde los 50s hasta los 60s la velocidad se mantiene constante (MRU).

La aceleración del tramo 1 a_1 no es dato, en cinemática si no conocemos la aceleración, lo primero que debemos hacer es calcularla:

$$a_1 = \frac{v_1 - v_0}{t_1} = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}} - 50 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{10\text{s}} = -4 \text{ m/s}^2$$

MRU - MRUV

TRAMO 1: Calculamos el desplazamiento del tramo 1 con la ecuación de posición de MRUV:

$$x_1 = x_0 + v_0 \cdot t_1 + \frac{1}{2} \cdot a_1 \cdot t_1^2$$

$$x_1 = 50 \frac{m}{s} \cdot 10s + \frac{1}{2} \cdot \left(-4 \frac{m}{s^2}\right) \cdot (10s)^2$$

$$x_1 = 300 \text{ m}$$

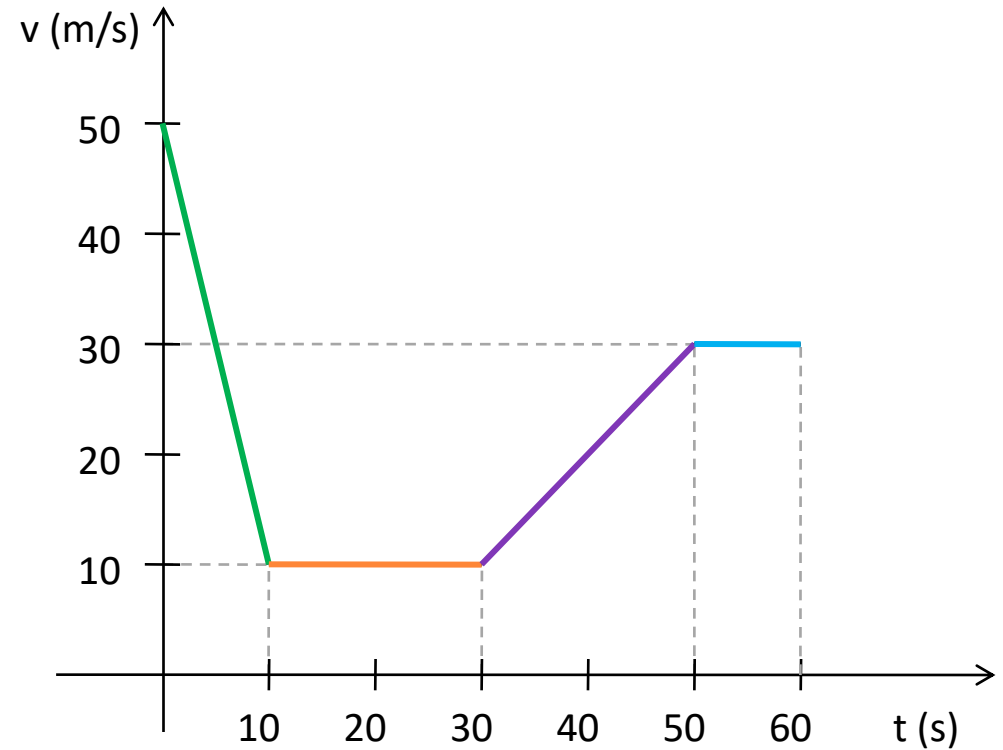
TRAMO 2: Desde los 10s hasta los 30s la velocidad se mantiene constante (MRU).

- Velocidad del tramo $v_2 = 10 \text{ m/s}$
- Duración del tramo 2 $t_2 = 20s$

Calculamos el desplazamiento en el tramo 2 con la ecuación de posición de MRU.

Si tomamos como posición inicial los 300 m que el móvil ya lleva recorridos durante el primer tramo tenemos que:

$$x_2 = x_{02} + v_2 \cdot t_2 = 300 \text{ m} + 10 \frac{m}{s} \cdot 20 \text{ s}$$



Éste valor representará la distancia recorrida durante los dos primeros tramos:

$$x_2 = 500 \text{ m}$$



¿Se podría haber planteado de otra manera?

MRU - MRUV

TRAMO 3: Desde los 30s hasta los 50s la velocidad aumenta (MRUV acelerado).

- Velocidad inicial del tramo $v_{03} = 10 \text{ m/s}$
- Velocidad final del tramo 3 $v_3 = 30 \text{ m/s}$
- Duración del tramo 3 $t_3 = 20\text{s}$

La aceleración del tramo 3 a_3 no es dato, debemos calcularla:

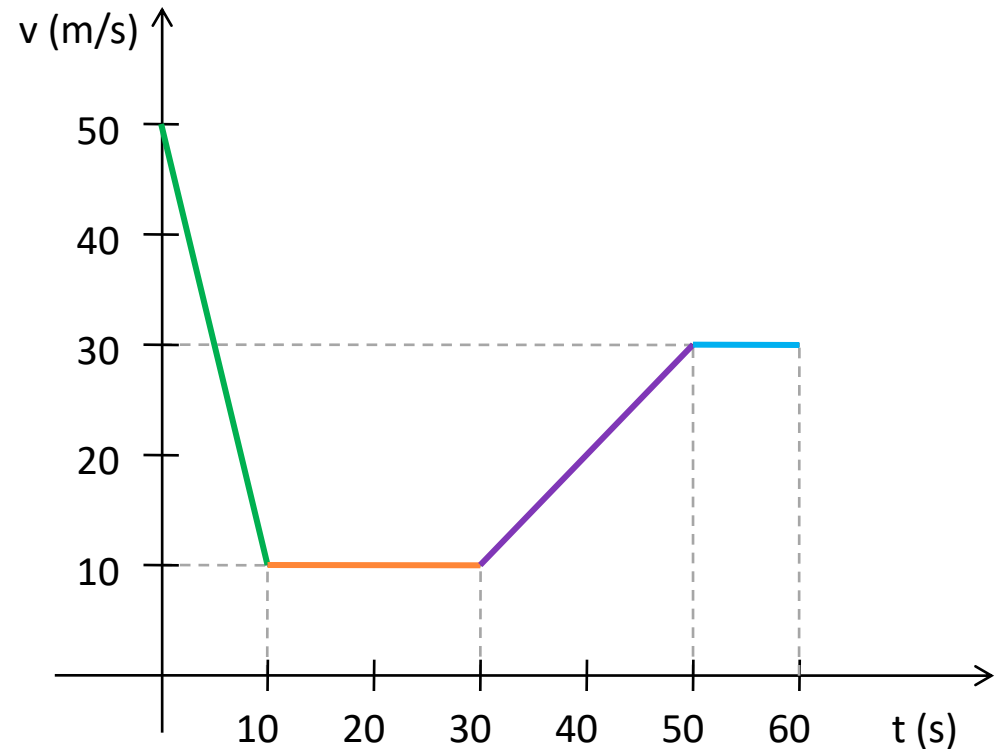
$$a_3 = \frac{v_3 - v_{03}}{t_3} = \frac{30 \frac{m}{s} - 10 \frac{m}{s}}{20s} = 1 \text{ m/s}^2$$

Calculamos el desplazamiento al finalizar el tramo 3 con la ecuación de posición de MRUV:

$$x_3 = x_{03} + v_{03} \cdot t_3 + \frac{1}{2} \cdot a_3 \cdot t_3^2$$

$$x_3 = 500 \text{ m} + 10 \frac{m}{s} \cdot 20s + \frac{1}{2} \cdot 1 \frac{m}{s^2} \cdot (20s)^2$$

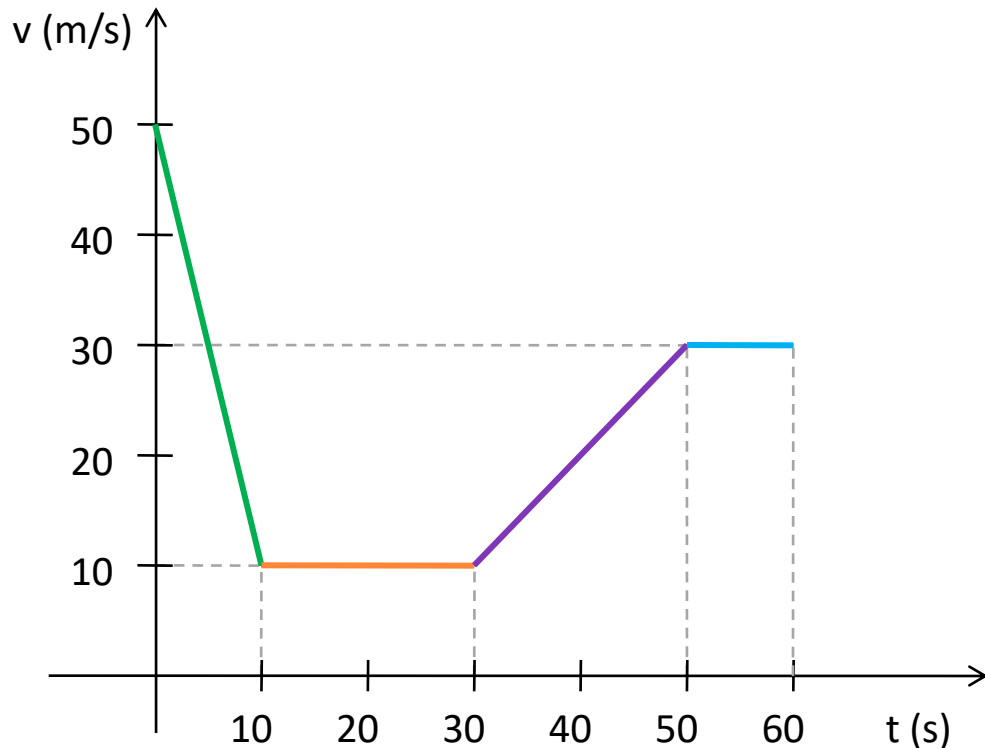
$$x_3 = 900 \text{ m}$$



MRU - MRUV

TRAMO 4: Desde los 50s hasta los 60s la velocidad se mantiene constante (MRU).

- Velocidad del tramo $v_4 = 30 \text{ m/s}$
- Duración del tramo 4 $t_4 = 10 \text{ s}$



Calculamos el desplazamiento en el tramo 4 con la ecuación de posición de MRU.

$$x_4 = x_{04} + v_4 \cdot t_4 = 900 \text{ m} + 30 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 10 \text{ s}$$
$$x_4 = 1200 \text{ m}$$

Éste valor representa el desplazamiento total recorrido.



¿Es igual a la distancia total recorrida? ¿Qué diferencia hay entre ambas magnitudes?
¿En qué caso no serían iguales?

Velocidad media: $v_{media} = \frac{\text{DESPLAZAMIENTO TOTAL}}{\text{TIEMPO TOTAL}} = \frac{1200 \text{ m}}{60 \text{ s}} = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

MRU - MRUV

Ejercicio 4. Dado el siguiente gráfico de la velocidad de un móvil en función del tiempo. **Hacer el gráfico de la aceleración en función del tiempo.**

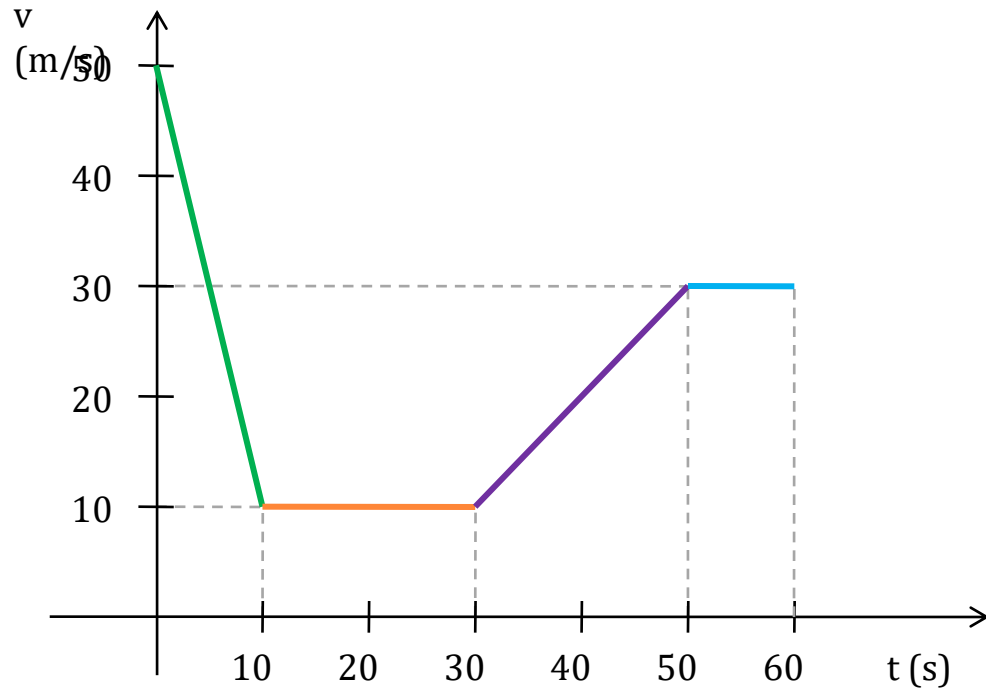


Gráfico de la velocidad en función del tiempo

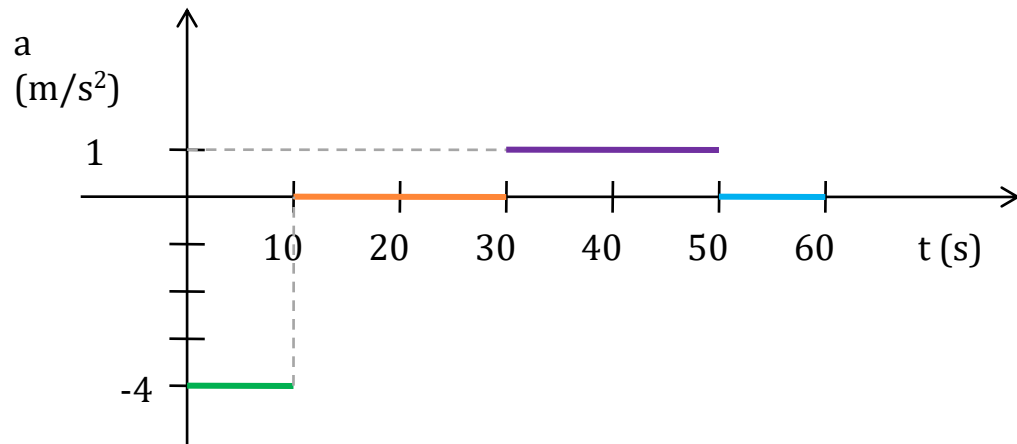
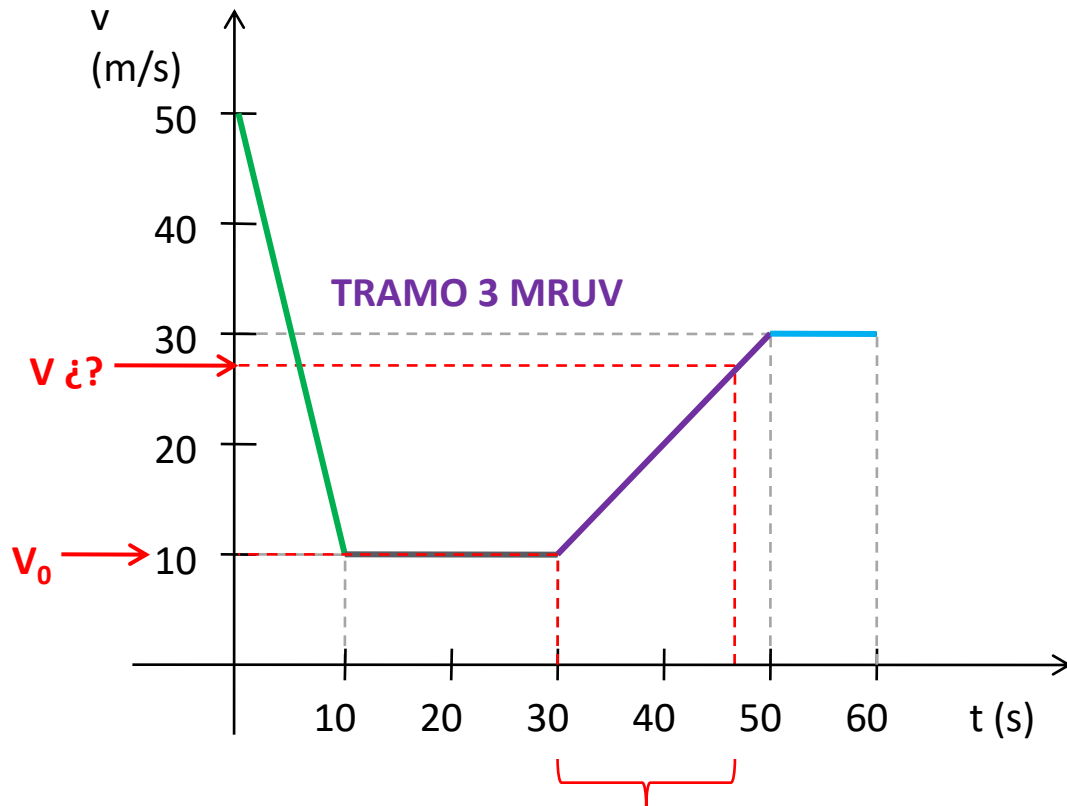


Gráfico de la aceleración en función del tiempo

MRU - MRUV

Ejercicio 4. Consigna adicional: Determinar la velocidad del móvil a los 48 segundos.



Duración entre la velocidad inicial y la velocidad desconocida $t = 18 \text{ s}$

Velocidad desconocida v a los 48 s

Velocidad inicial del tramo $v_{03} = 10 \text{ m/s}$

$$a_3 = 1 \text{ m/s}^2$$

Calculamos la velocidad instantánea:

$$v = v_0 + a_3 \cdot t$$

$$v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} + 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 18 \text{ s}$$

$$v = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



UNIDAD 3

Caída libre y Tiro vertical

Prof. Ing. Natalia Montalván

Caída libre

- En la caída libre un objeto **cae verticalmente** desde cierta altura h despreciando cualquier tipo de rozamiento con el aire o cualquier otro obstáculo.
- Se trata de un **movimiento rectilíneo uniformemente variado (MRUV)** en el que la aceleración constante de un cuerpo en caída libre es la **aceleración debida a la gravedad**, y denotamos su magnitud con la letra g . Por lo general, usaremos el valor aproximado de g cerca de la superficie terrestre:

$$g = 9,8 \frac{m}{s^2}$$

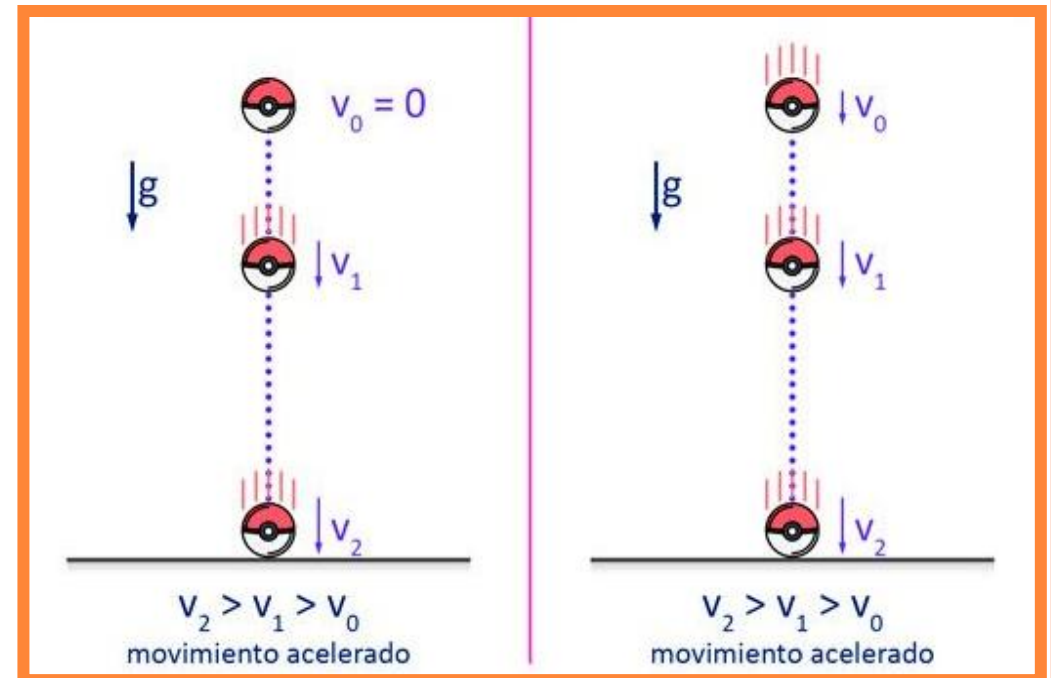
- Para estudiar el movimiento de caída libre consideramos que un objeto se mueve verticalmente a lo largo del eje y y con aceleración:

$$a = -g$$

La velocidad inicial de un objeto en caída libre puede ser:

- Igual a cero si el objeto “es soltado”.
- Distinta de cero si el objeto “es lanzado”.

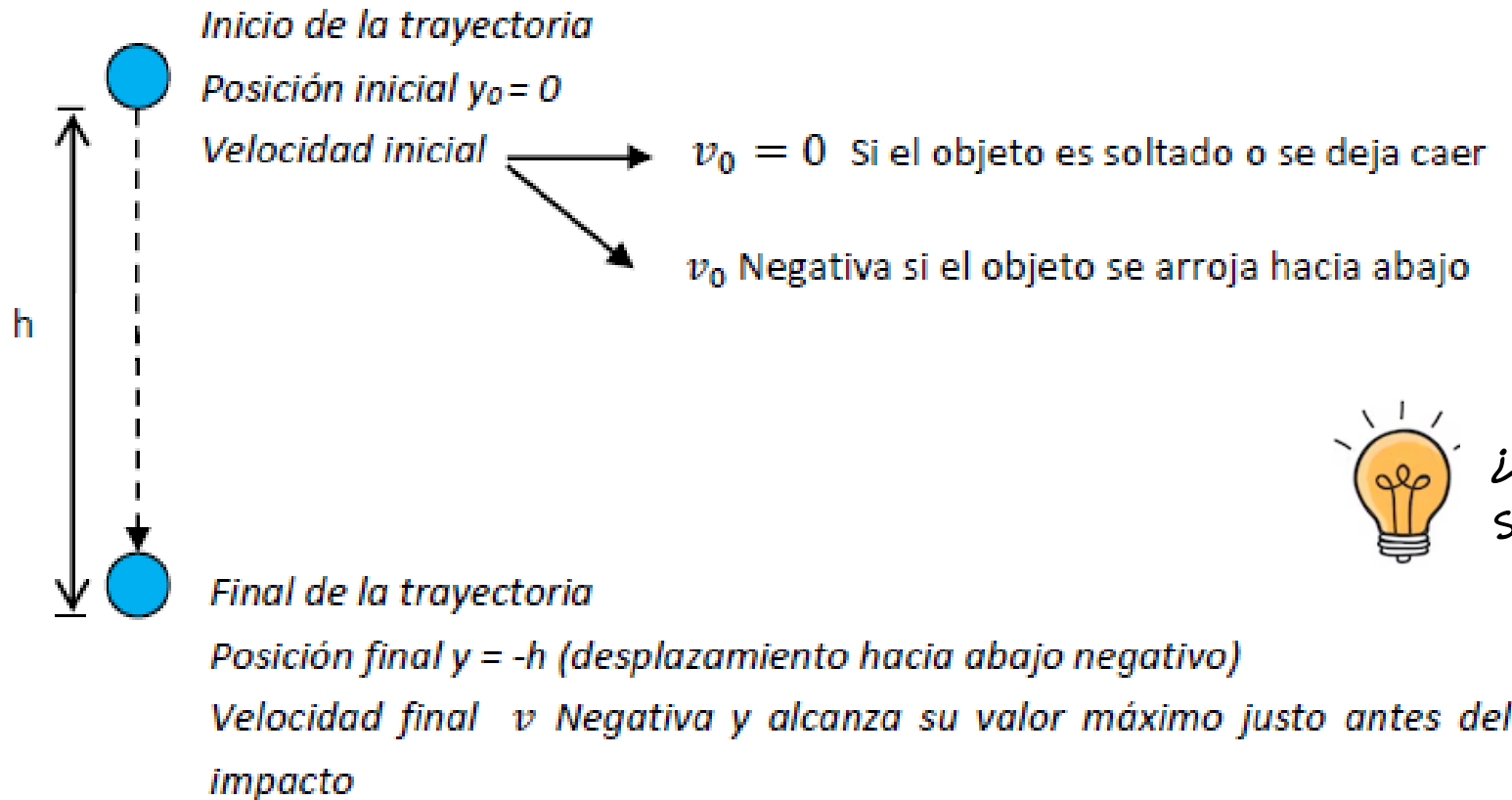
En ambos casos el módulo de la velocidad aumenta a medida que el objeto cae.



Caída libre

Sistema de referencia

- Debemos establecer un **sistema de referencia**, consideraremos **negativo** a cualquier vector dirigido **hacia abajo**.
- Es importante establecer en qué punto de la trayectoria colocaremos la posición o el **nivel cero** de nuestro sistema de referencia:

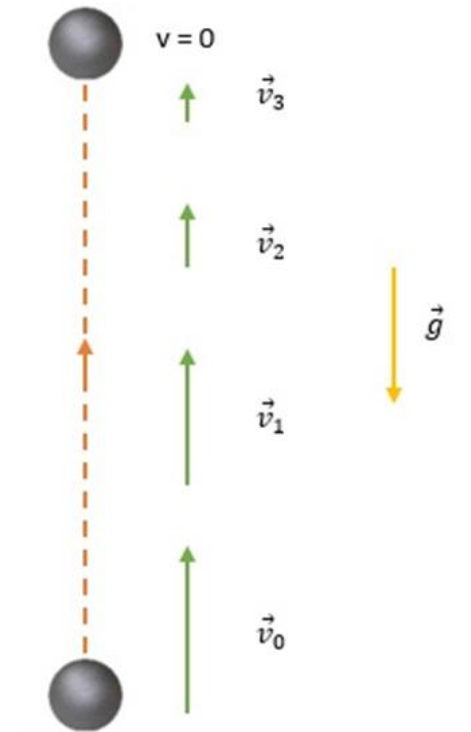
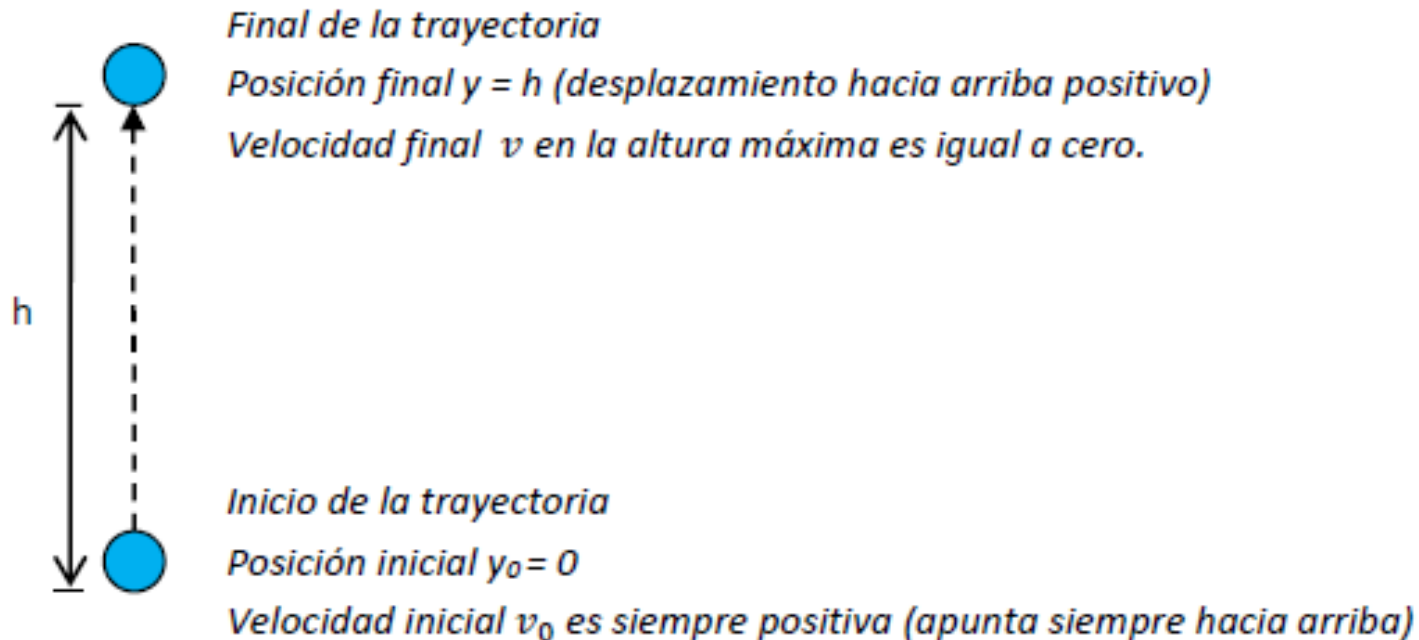


¿Es posible definir otro sistema de referencia?

Tiro vertical

- También es un movimiento rectilíneo, vertical y acelerado (**MRUV**).
- Un objeto se lanza verticalmente a lo largo del eje y con aceleración $\mathbf{a} = -\mathbf{g}$.
- La velocidad inicial de un objeto en tiro vertical no puede ser igual a cero.
- El módulo de la velocidad del objeto disminuye a medida que éste sube.
- En el punto más alto de la trayectoria, el módulo de la velocidad es igual a cero.

Sistema de referencia



Ecuaciones: caída libre y tiro vertical

- Serán las mismas que utilizamos en MRUV, solo que cambiaremos x por y para indicar que el movimiento es sobre el eje vertical, y tomaremos la aceleración $a = -g$:

$$v = v_0 - g \cdot t$$

$$y = y_0 + v_0 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$

- v_0 : Velocidad inicial del objeto. Su unidad en el Sistema Internacional (SI) es el metro por segundo (m/s).
- v : Velocidad del objeto en un instante t. Su unidad en el SI es el metro por segundo (m/s).
- g : El valor de la aceleración de la gravedad que, en la superficie terrestre puede considerarse igual a $9,8 \text{ m/s}^2$ (Importante: el signo negativo de g **ya está incluido en las ecuaciones**, por lo que al reemplazar su valor en la fórmula tomamos $g = 9,8 \text{ m/s}^2$).
- t : Tiempo. Su unidad en el SI es el segundo (s).
- y : Posición del objeto. Su unidad en el SI es el metro (m).

Ejemplo: Se deja caer una piedra a 45 m del nivel del suelo. Calcule **su velocidad antes del impacto**, considerar $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Como no conocemos el tiempo podemos calcular la velocidad final con la ecuación:

$$v^2 = v_0^2 - 2 \cdot g \cdot (y - y_0)$$
$$v^2 = 0 - 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (-45 \text{ m} - 0)$$

$$v = \sqrt{900 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}$$

$$v = -30 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

La raíz cuadrada admite dos soluciones, tomamos el valor negativo porque el vector velocidad está dirigido hacia abajo.

