# UNIDAD 2

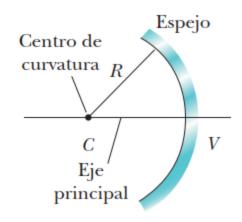
Óptica geométrica: Espejos esféricos

Prof. Ing. Natalia Montalván

## Reflexión en una superficie esférica

## Espejos cóncavos

Si la superficie reflectora se encuentra en la **superficie interna de la esfera**, éste tipo de superficie reflectora se llama **espejo cóncavo**. La siguiente figura muestra que el espejo tiene un **radio de curvatura R**, y su **centro** de curvatura es el punto **C**. Tanto el radio como el centro están ubicados sobre eje principal. El punto **V** se denomina **vértice** del espejo.



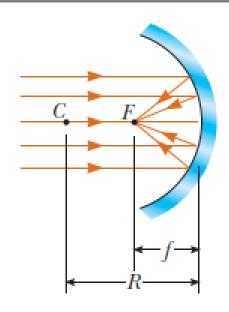
- Eje óptico: línea que corta al espejo en dos partes simétricas e iguales.
- Centro de curvatura C: Es el centro de la superficie esférica que constituye el espejo.
- Radio de curvatura R: Es la distancia entre C y el vértice.
- Vértice del espejo V: Es donde se intercepta la superficie del espejo con el eje óptico.

## Foco de un espejo cóncavo

Si hacemos incidir sobre el espejo una serie de rayos luminosos paralelos entre si observamos que todos ellos se reflejan pasando por un mismo punto llamado foco F.

De esta manera, el punto focal F de un espejo esférico tiene las siguientes propiedades:

- 1) Todo rayo entrante paralelo al eje óptico se refleja a través del punto focal
- 2) Todo rayo entrante que pasa por el punto focal se refleja paralelamente al eje óptico.



La distancia del vértice al punto focal, que se denota con f, recibe el nombre de **distancia focal**. Vemos que f está relacionada con el radio de curvatura R como sigue:

$$f = \frac{R}{2}$$

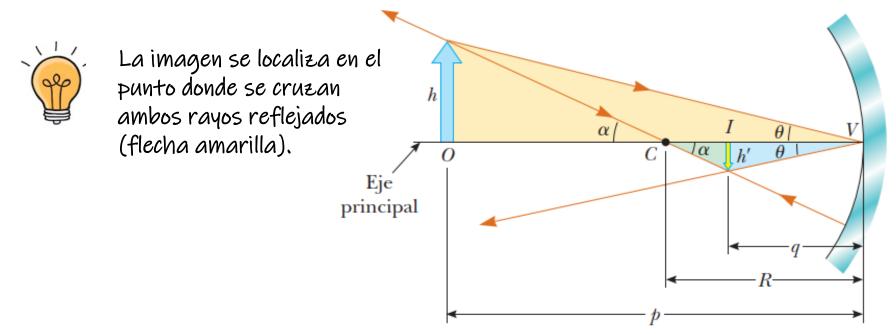
El foco no es el punto en el cual los rayos luminosos se enfocan para formar una imagen. El foco **está determinado sólo por la curvatura del espejo**, no depende de la posición del objeto. Por lo común, la imagen se forma en un punto distinto del foco de un espejo. La única excepción es cuando el objeto está localizado infinitamente lejos del espejo.

## Formación de imágenes en espejos cóncavos

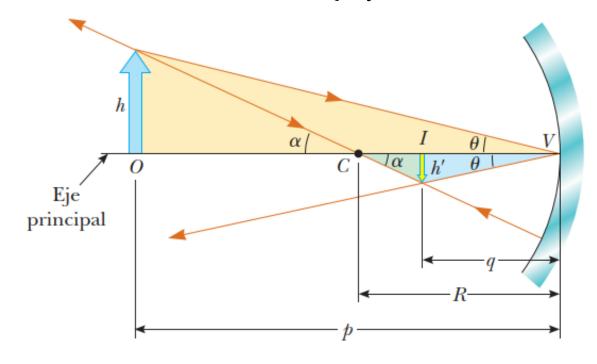
Si se conocen la distancia objeto p y el radio de curvatura R podemos determinar la posición q y la naturaleza (características) de la imagen. Estas distancias siempre se determinan a partir del punto V.

La siguiente figura muestra dos **rayos notables** que salen de la punta del objeto (flecha celeste):

- Uno de estos rayos **pasa a través del centro de curvatura** C del espejo e incide en el espejo, **reflejándose** de regreso **sobre sí mismo**.
- El segundo rayo incide en el espejo en su vértice y se refleja como se muestra, en cumplimiento con la ley de la reflexión.



## Aumento lineal o aumento lateral (M)



- En el triángulo rectángulo color naranja de la figura, observamos que tan  $\theta = h/p$
- En el triángulo rectángulo celeste vemos que tan  $\theta = h'/q$ .
- Se introduce el **signo negativo** para indicar que la **imagen está invertida**, por lo que h´ se considera negativa.

En consecuencia, definimos un nuevo parámetro denominado **aumento lineal M** de la imagen:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

## Ecuación de los espejos

Además, del triángulo recto celeste y del triángulo rectángulo amarillo más pequeño se puede observar que:

$$\tan \alpha = \frac{-h'}{R - q}$$
 y  $\tan \alpha = \frac{h}{p - R}$ 

De donde surge:  $\frac{h'}{h} = -\frac{R-q}{p-R}$ 

Dado que h'/h = - q/p: 
$$\frac{R-q}{b-R} = \frac{q}{b}$$

Por simple álgebra, lo anterior se reduce a:  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$ 

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{2}{R}$$

Que se denomina ecuación del espejo. Si recordamos que f = R/2, podemos reescribir la ecuación anterior como:

## Naturaleza de la imagen

Si se conocen la distancia objeto p y la distancia focal, a partir de la ecuación de los espejos se puede determinar la ubicación de la imagen q. El signo de q nos dará información del tipo de imagen formada:

- Si q es positiva: la imagen es real, se forma fuera del espejo y podemos "capturarla" en una pantalla.
- Si **q es negativa**: la imagen es **virtual**, la imagen "pareciera" encontrarse dentro del espejo.

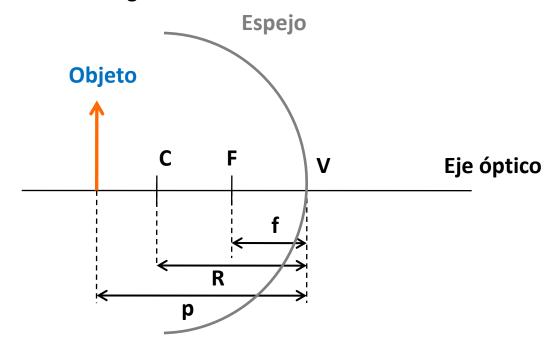
Conociendo los valores de p y q podemos determinar el aumento lineal M:

$$M = -\frac{q}{p}$$

El valor de M nos da la siguiente información:

- Si el valor absoluto IMI >1 la imagen está amplificada (es de mayor tamaño que el objeto).
- Si el valor absoluto IMI <1 la imagen está reducida (es de menor tamaño que el objeto).
- Si M es positivo la imagen estará derecha.
- Si M es negativo la imagen estará invertida.

Consideremos un espejo esférico con radio de curvatura R, con su lado cóncavo hacia el objeto, lo representamos de la siguiente manera:



- Eje óptico: línea que corta al espejo en dos partes simétricas e iguales.
- Centro de curvatura C: Es el centro de la superficie esférica que constituye el espejo.
- Radio de curvatura R: Es la distancia entre C y el vértice.
- **Vértice del espejo V:** Es donde se intercepta la superficie del espejo con el eje óptico.
- Foco F: Es el punto donde convergen los rayos paralelos al eje óptico en un espejo cóncavo. El foco se encuentra a la mitad de la recta CV, o sea f = + R/2.
- **Distancia focal f:** Es la distancia entre el foco F y el vértice V.
- **Distancia objeto p:** Es la distancia entre el objeto y y el vértice.

Ejercicio 3. Una varilla se coloca a 60 cm de un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal. Determinar la posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen. Trace rayos principales para localizar la imagen.

#### Datos:

Distancia objeto **p = 60 cm** 

Distancia focal **f = 20 cm** 

#### Ecuaciones:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad (1)$$

$$M = -\frac{q}{q} \qquad (2)$$

Para despejar q elevamos ambos términos de la ecuación a la -1 para invertir las fracciones

# Calculamos la posición de la imagen (q) de la ecuación (1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{20 \ cm} = \frac{1}{60 \ cm} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{20 \ cm} - \frac{1}{60 \ cm} = \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{30 \ cm} = \frac{1}{q}$$

$$\left(\frac{1}{30\ cm}\right)^{-1} = \left(\frac{1}{q}\right)^{-1}$$

$$30 cm = q$$

Elercicio 3. Una varilla se coloca a 60 cm de un espejo cóncavo de 20 cm de distancia focal. Determinar la posición, el tamaño y la naturaleza de la imagen. Trace rayos principales para localizar la imagen.

#### Datos:

Calculamos el aumento lineal M de (2):

Distancia objeto p = 60 cm

Distancia focal f = 20 cm

$$M = -\frac{q}{p}$$

#### Ecuaciones:

$$M = -\frac{30 \ cm}{60 \ cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad (1)$$

$$M = -\frac{q}{m} \qquad (2)$$

$$M = -0.5$$

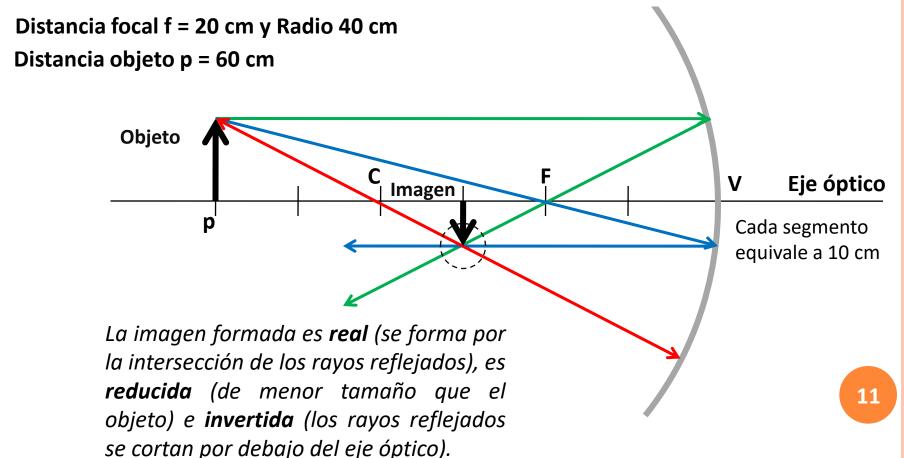
$$M=-rac{q}{p}$$
 (2)

Con q y M calculados podemos definir la naturaleza de la imagen:

La imagen formada es **real** (a positiva), **reducida** (IMI<1) e **invertida** (M negativo)

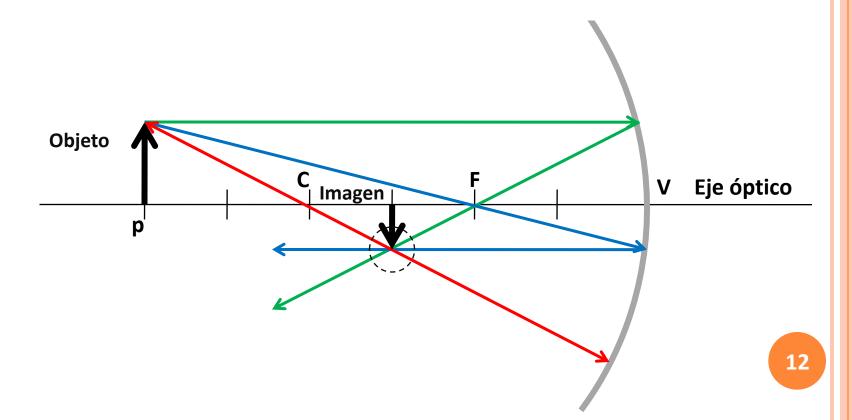
## Diagrama de rayos notables

La posición y el tamaño de las imágenes formadas por los espejos se determinan convenientemente mediante diagramas de rayos. Estas construcciones gráficas revelan la naturaleza de la imagen y sirven para verificar resultados calculados a partir de las representaciones matemáticas utilizando las ecuaciones del espejo y del aumento. Para dibujar el diagrama de un rayo, es necesario conocer la posición del objeto y la localización del foco, así como el centro de curvatura del espejo.



## Diagrama de rayos notables

- Rayo notable 1 (verde): incide de manera paralela al eje óptico y al llegar al espejo se refleja pasando por el foco.
- Rayo notable 2 (azul): incide pasando por el foco y al llegar al espejo se refleja paralelo al eje óptico.
- Rayo notable 3 (rojo): incide pasando por el centro del espejo y se refleja volviendo por la misma trayectoria.



Elemplo 1. ¿Dónde se debe colocar un objeto respecto a un espejo esférico cóncavo de radio 180 cm para que se forme una imagen virtual del doble de tamaño del objeto?

#### Datos:

Distancia focal f = R/2 = 90 cm

Aumento Lineal **M** = **2**(si la imagen es virtual q es negativa y por lo tanto M debe ser positivo)

#### Ecuaciones:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \quad (1)$$

$$M = -\frac{q}{p} \quad (2)$$

$$M=-\frac{q}{p} \qquad (2)$$

#### Despejo q de la ecuación (2):

$$M = -\frac{q}{p}$$
$$2 = -\frac{q}{p}$$
$$-2 \cdot p = q$$

#### Reemplazo q en la ecuación (1):

$$\frac{1}{90cm} = \frac{1}{p} - \frac{1}{2 \cdot p}$$

$$\frac{1}{90cm} = \frac{2 - 1}{2 \cdot p}$$

$$\frac{1}{90cm} = \frac{1}{2 \cdot p}$$

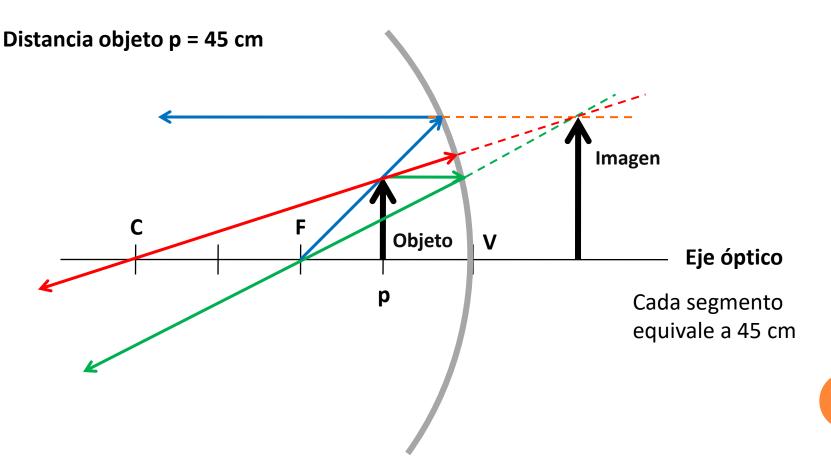
$$\frac{90cm}{1} = \frac{2 \cdot p}{1}$$

p = 45cm

**Ejemplo 1.** ¿Dónde se debe colocar un objeto respecto a un espejo esférico cóncavo de radio 180 cm para que se forme una imagen virtual del doble de tamaño del objeto?

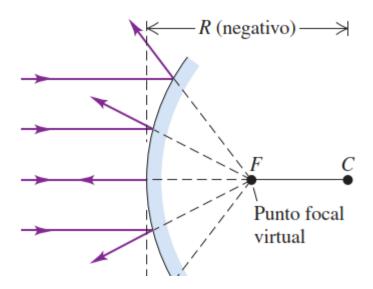
## Graficamos:

Radio 180 cm y Distancia focal f = 90 cm

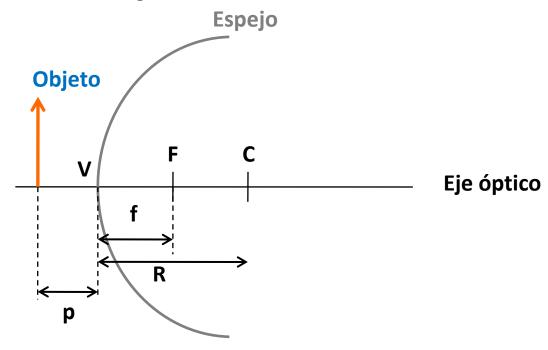


La superficie reflectora se encuentra en la **superficie externa de la esfera**. A veces éste se conoce como espejo divergente porque los rayos de cualquier punto de un objeto divergen después de haberse reflejado, como si vinieran de algún punto de detrás del espejo.

Si hacemos incidir sobre el espejo una serie de rayos luminosos paralelos entre si observamos que todos ellos se reflejan alejándose entre sí, pero al proyectarlos hacia el lado virtual todos los rayos parecen provenir de un mismo punto llamado foco F.



Consideremos un espejo esférico con radio de curvatura R, con su lado convexo hacia el objeto, lo representamos de la siguiente manera:



- Eje óptico: línea que corta al espejo en dos partes simétricas e iguales.
- Centro de curvatura C: Es el centro de la superficie esférica que constituye el espejo.
- Radio de curvatura R: Es la distancia entre C y el vértice.
- **Vértice del espejo V:** Es donde se intercepta la superficie del espejo con el eje óptico.
- Foco F: El foco es virtual y se encuentra a la mitad de la recta CV, o sea f = R/2.
- Distancia focal f: Es la distancia entre el foco F y el vértice V, para espejos convexos es siempre negativa.
- **Distancia objeto p:** Es la distancia entre el objeto y y el vértice.

## Formación de imágenes en espejos convexos

No deducirán ecuaciones para los espejos esféricos convexos, porque pueden utilizar la ecuación del aumento lineal y la ecuación de los espejos tanto para espejos cóncavos como convexos:

• Si se conoce la distancia objeto p y el radio de curvatura R es posible determinar la posición q y la naturaleza (características) de la imagen de forma analítica mediante la ecuación de los espejos:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

De esta ecuación podremos despejar la **distancia imagen q** (distancia a la cual se formará la imagen, **medida desde el vértice del espejo**).

• El aumento lineal valor de M está dado por:

$$M = -\frac{q}{p}$$

## Naturaleza de la imagen

#### En un espejo convexo:

- La distancia imagen q siempre es negativa: la imagen es virtual, la imagen "pareciera" encontrarse dentro del espejo.
- El valor absoluto es **siempre IMI <1** por lo que la imagen está reducida (es de menor tamaño que el objeto).
- M siempre es positivo, por lo tanto la imagen estará derecha.

Los espejos convexos siempre producen el mismo tipo de imagen: Virtual (q Negativa)

Derecha (M Positivo)

Reducida (valor absoluto de M menor a 1)



Ejemplo 1. ¿Qué clase de espejo esférico se debe usar y cuál tiene que ser su distancia focal para que forme una imagen derecha de una quinta parte de la altura de un objeto colocado a 15 cm en frente de él?

Si la imagen es derecha M es positivo, y por lo tanto q será negativa. Para producir una imagen virtual reducida se debe usar un espejo convexo

#### Datos:

Distancia objeto **p = 15 cm** 

Aumento Lineal M = 1/5 = 0,2 (imagen derecha por lo tanto M debe ser positivo)

#### Ecuaciones:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad (1)$$

$$M=-\frac{q}{p} \qquad \qquad \textbf{(2)}$$

#### Despejo q de la ecuación (2):

$$M = -\frac{q}{p}$$

$$\frac{1}{5} = -\frac{q}{15cm}$$

$$-\frac{15cm}{5} = q \longrightarrow q = -3 cm$$

#### Reemplazo q en la ecuación (1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{15cm} - \frac{1}{3cm}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{-4}{15cm}$$

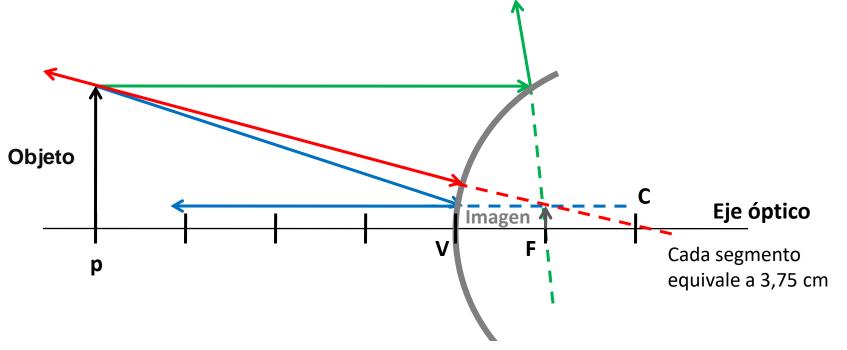
$$f = -\frac{15cm}{4}$$

f = -3.75 cm

## Graficamos:

Distancia objeto p = 15 cm Distancia focal f = - 3,75 cm Radio R = 7,5 cm

- Rayo notable 1 (verde): incide de manera paralela al eje óptico y al llegar al espejo se refleja como si viniera del foco.
- Rayo notable 2 (azul): se dirige hacia el foco y al llegar al espejo se refleja paralelo al eje óptico.
- Rayo notable 3 (rojo): se dirige hacia el centro del espejo y se refleja volviendo por la misma trayectoria.



Los rayos reflejados no se cortan, por el contrario, se alejan entre sí, pero si los proyectamos al lado virtual (líneas de punto) todos los rayos se unen en el mismo punto, y allí se forma la imagen. La imagen se forma por la intersección de la proyección los rayos reflejados, por lo tanto es virtual. Es una imagen reducida y derecha.

## Reglas de los signos para los espejos

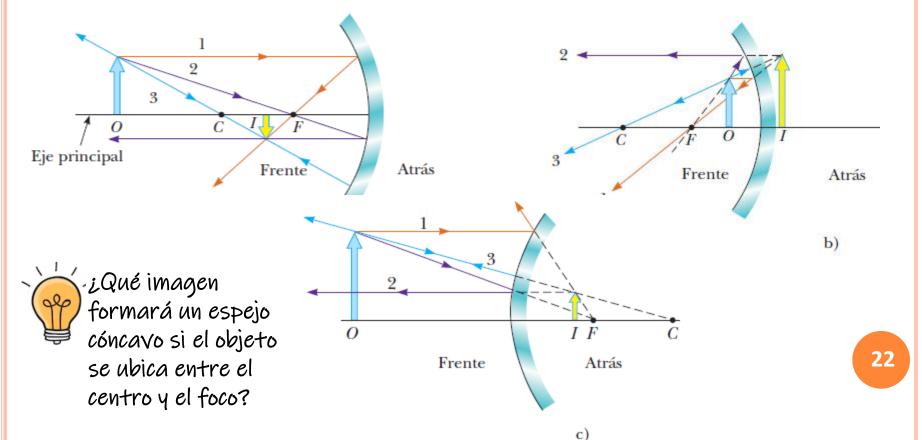
El éxito en la solución de problemas de espejos depende de la correcta elección de signos al sustituir en las ecuaciones:

Magnitud	Positiva cuando	Negativa cuando
Distancia objeto p	El objeto está delante del espejo (objeto real)	El objeto esta detrás del <i>espejo (objeto</i> <i>virtual)</i>
Distancia imagen q	La imagen está delante del espejo (imagen real)	La imagen está detrás del espejo (imagen virtual)
Altura de la imagen h´	La imagen está derecha	La imagen está invertida
Distancia focal f y radio R	El espejo es cóncavo	El espejo es convexo
Aumento lineal M	La imagen está derecha	La imagen está invertida

## Diagramas de rayos (ejemplos)

Diagramas de rayos para espejos esféricos con distintas ubicaciones del objeto:

- a) Cuando el objeto esta localizado detrás del centro de curvatura del espejo cóncavo, la imagen es real, invertida y de tamaño reducido.
- b) Cuando el objeto esta localizado entre el foco y la superficie de un espejo cóncavo, la imagen es virtual, derecha y ampliada.
- c) Cuando el objeto esta frente a un espejo convexo, la imagen es virtual, derecha y de tamaño reducido



# UNIDAD 2

Óptica geométrica: Lentes delgadas

Prof. Ing. Natalia Montalván

Una lente es un sistema óptico con dos superficies refractivas. La lente más simple tiene dos superficies esféricas lo suficientemente próximas entre sí como para que podamos despreciar la distancia entre ellas (el espesor de la lente); a este dispositivo se le llama lente delgada. Una lente convergente es más gruesa en su parte central que en los bordes, mientras que una lente divergente es más delgada en el centro que en los bordes.

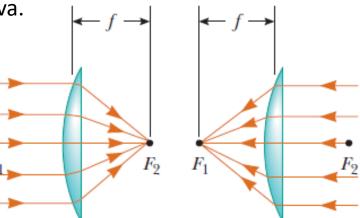
## Lentes convergentes

Una lente de la forma que se muestra en la figura tiene la propiedad de que, cuando un haz de rayos paralelos al eje atraviesa la lente, los rayos convergen en un mismo punto. Las lentes de este tipo se llaman **lentes convergentes**.

Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  se denominan puntos focales, y la distancia f (medida desde el centro de la lente) es la distancia focal.

Como en el caso de los espejos cóncavos, la distancia focal de una lente convergente se

define como una cantidad positiva.



#### **Lentes convergentes**

## Formación de imágenes en lentes convergentes

La posición de la imagen q y sus características dependerán de dónde se coloque el objeto con respecto al foco. Si conocemos la distancia objeto y la distancia focal podemos calcular q a partir de la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

El signo de q nos dará información del tipo de imagen formada:

- Si q es positiva: la imagen es real.
- Si q es negativa: la imagen es virtual.

Al igual que con los espejos, la construcción geométrica demuestra que el aumento lateral de la imagen es igual a:

$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

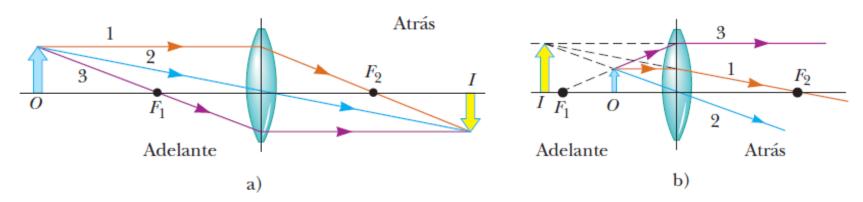
- Cuando M es positivo, la imagen es vertical y se ubica del mismo lado de la lente que el objeto. Cuando M es negativo, la imagen aparece invertida y del lado de la lente opuesta al objeto.
- Si el valor absoluto IMI >1 la imagen está amplificada (es de mayor tamaño que el objeto). Si el valor absoluto IMI <1 la imagen está reducida (es de menor tamaño que el objeto).

#### Lentes convergentes

## Diagramas de rayos para lentes convergentes

Los diagramas de rayos resultan convenientes para localizar las imágenes formadas por lentes delgadas. Para localizar la imagen de una lente convergente se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto:

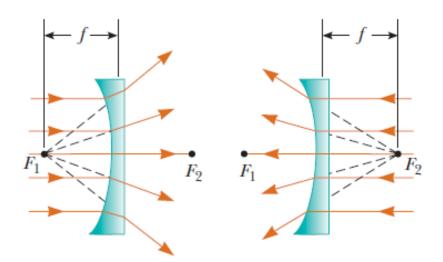
- El rayo 1, se dibuja paralelo al eje principal. Una vez refractado por la lente, este rayo pasa a través del foco en la cara posterior de la lente.
- El rayo 2, se dibuja a través del centro de la lente y sigue en línea recta.
- El rayo 3, se dibuja a través del foco en la cara frontal de la lente y emerge de ésta paralelo al eje principal.



Ejemplos: a) Cuando el objeto está por detrás del foco de una lente convergente, la imagen es real, invertida y se forma del otro lado del objeto, atrás de la lente.
b) Cuando el objeto está entre el foco y la lente convergente, la imagen es virtual, derecha y mayor que el objeto, se forma del mismo lado del objeto, delante de la lente.

## Lentes divergentes

La **distancia focal** de una lente divergente es una cantidad **negativa**, y las lentes de este tipo se conocen también como lentes negativas. Los puntos  $F_1$  y  $F_2$  se denominan puntos focales, y la distancia f (medida desde el centro de la lente) es la distancia focal. Todos los rayos paralelos que inciden sobre la lente divergen luego de atravesarla (se separan). Al atravesar la lente, los rayos parecen provenir de un mismo punto, anterior a la lente (foco virtual).



## Formación de imágenes en lentes divergentes

Si conocemos la distancia objeto y la distancia focal podemos calcular q a partir de la ecuación de las lentes delgadas:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$$

El aumento lateral de la imagen es igual a:

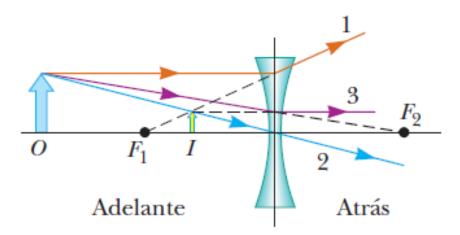
$$M = \frac{h'}{h} = -\frac{q}{p}$$

Estas lentes siempre producen imágenes virtuales (q negativa), reducidas (IMI < 1) y derechas (M positivo).

## Diagramas de rayos para lentes divergentes

Para localizar la imagen de una lente divergente, se trazan los tres rayos siguientes a partir de la parte superior del objeto:

- El rayo 1, se dibuja paralelo al eje principal. Después de ser refractado por la lente, emerge alejándose desde el foco en la cara frontal de la lente.
- El rayo 2, se dibuja a través del centro de la lente y continúa en línea recta.
- El rayo 3, se dibuja en la dirección hacia el foco en la cara posterior de la lente y emerge de ésta paralelo al eje principal.

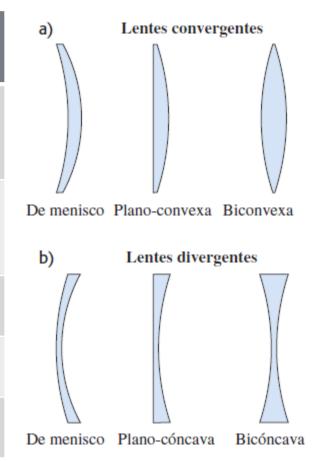


Cuando un objeto está en cualquier sitio por delante de una lente divergente, la imagen es virtual, derecha y menor que el objeto y se localiza en la cara frontal de la lente.

#### Resumiendo:

Toda lente que sea más gruesa en su centro que en sus bordes es una lente **convergente con f positiva**, y toda lente que sea más gruesa en sus bordes que en su centro es una lente **divergente con f negativa**.

Magnitud	Positiva cuando	Negativa cuando
Distancia objeto p	El objeto está delante de la lente (objeto real)	El objeto esta detrás de la lente (objeto virtual)
Distancia imagen q	La imagen está detrás de la lente (imagen real)	La imagen está delante de la lente (imagen virtual)
Altura de la imagen h'	La imagen está derecha	La imagen está invertida
Distancia focal f	La dente es convergente	La lente es divergente
Aumento lineal M	La imagen está derecha	La imagen está invertida



Elemplo 1. Una lente convergente con 50 cm de distancia focal forma una imagen real que es 2,5 veces mas grande que el objeto. ¿Qué tan lejos se encuentra el objeto de la imagen?

#### Datos:

Distancia focal f = 50 cm

Aumento Lineal M = -2.5 (si la imagen es real q es positiva y por lo tanto M debe ser negativo)

#### Ecuaciones:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad \textbf{(1)}$$

$$M = -\frac{q}{p} \qquad \textbf{(2)}$$

$$M = -\frac{q}{p} \qquad (2)$$

# **Despejo q de la ecuación (2):** $M = -\frac{q}{p}$ $-2,5 = -\frac{q}{p} \longrightarrow 2,5 \cdot p = q$

Reemplazo q en la ecuación (1): 
$$\frac{1}{50 \text{ cm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2,5 \cdot p}$$
$$\frac{1}{50 \text{ cm}} = \frac{2,5+1}{2,5 \cdot p}$$
$$\frac{1}{50 \text{ cm}} = \frac{3,5}{2,5 \cdot p}$$
$$2,5 \cdot p = 3,5 \cdot 50 \text{ cm}$$
$$p = \frac{3,5 \cdot 50 \text{ cm}}{2,5}$$

$$2,5 \cdot p = q \qquad \longleftarrow \quad p = 70 \text{ cm}$$

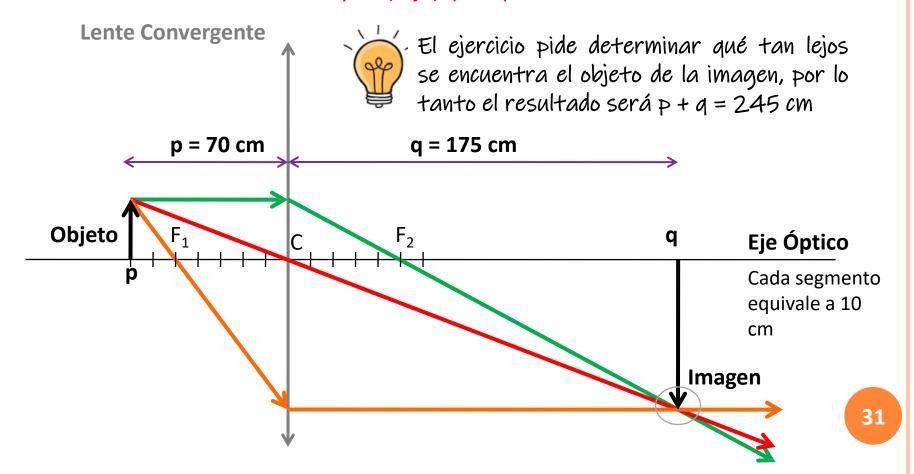
$$175 \text{ cm} = q$$

## Graficamos:

Distancia focal **f = 50 cm** 

Distancia objeto **p = 70 cm** 

- Rayo 1 (verde): incide paralelo al eje óptico y se refracta pasando por el foco  $F_2$ .
- Rayo 2 (naranja): incide pasando por el foco  $F_1$  y se refracta paralelo al eje óptico.
- Rayo 3 (rojo): pasa por el centro sin desviarse.



Ejemplo 2. Un objeto se coloca a 27 cm enfrente de una lente divergente de distancia focal -18 cm. Determinar la posición y naturaleza de la imagen de manera analítica y grafica.

#### Datos:

Distancia focal f = - 18 cm

Distancia objeto p = 27 cm

#### Ecuaciones:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

$$\frac{1}{-18 cm} = \frac{1}{27 cm} + \frac{1}{q}$$

$$-\frac{1}{18 cm} - \frac{1}{27 cm} = \frac{1}{q}$$

$$-\frac{5}{54 cm} = \frac{1}{q}$$

$$-\frac{54 cm}{5} = q$$

-10.8 cm = q

Aumento lateral: 
$$M = -\frac{q}{p}$$

$$M = -\frac{(-10.8 \ cm)}{27 \ cm}$$

$$M = \frac{2}{5}$$

$$M = 0.4$$

## Naturaleza de la imagen

Las lentes divergentes siempre producen este tipo de imágenes

- Imagen VIRTUAL (q negativa)
- Imagen DERECHA (M positivo)
- Imagen REDUCIDA (IMI menor a 1)

## Graficamos:

Distancia focal **f = - 18 cm**Distancia objeto **p = 27 cm** 

- Rayo 1 (verde): incide paralelo al eje óptico y se refracta como si viniera del foco F<sub>1</sub>.
- Rayo 2 (naranja): se dirige hacia el foco  $F_2$  y se refracta paralelo al eje óptico.
- Rayo 3 (rojo): pasa por el centro sin desviarse.

