Operador Nabla ∇

El operador nabla, es un operador vectorial que se usa para expresar derivadas parciales en el espacio tridimensional. Es una notación compacta que permite definir varias operaciones en análisis vectorial. En coordenadas cartesianas, se expresa como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

Donde $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$ son los vectores unitarios en las direcciones "x", "y" y "z".

Gradiente (∇f)

El gradiente de una función escalar $f(x, y, z)$ es un campo vectorial que señala la dirección en la que la función aumenta más rápidamente. Matemáticamente, se define como:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$

El gradiente de f proporciona la tasa de cambio más pronunciada de la función y es perpendicular a las superficies de nivel de f. El resultado es un vector.

Divergencia ($\nabla \cdot \boldsymbol{F}$)

La divergencia de un campo vectorial $F = F_x\hat{\imath} + F_y\hat{\jmath} + F_z\hat{k}$ mide la tasa neta de expansión o contracción en un punto del campo. Se calcula como:

$$\nabla \cdot F = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

La divergencia es un valor escalar y actúa como "fuentes" (contractor) o "sumideros" (expansor). Un campo con divergencia positiva en un punto actúa como una fuente en ese punto, es decir, atrae a los demás vectores del campo, de modo que todos apuntan a ese punto. Un campo con divergencia negativa en un punto actúa como un sumidero en ese punto, es decir, expande a los vectores del campo, de modo que todos apuntan contrario al punto.

Rotor ($\nabla \times \boldsymbol{F}$)

El rotor de un campo vectorial F describe la tendencia del campo a girar alrededor de un punto. Se define como:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\imath} - \left(\frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}\right)\hat{\jmath} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{k}$$

El rotor mide la rotación o circulación del campo vectorial alrededor de un punto. Un rotor igual a cero indica que el campo es conservativo y no tiene circulación local.

Propiedades e identidades vectoriales

- **Divergencia**
  1. Divergencia de la suma de vectores:

$$\nabla \cdot (A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$$

  2. Divergencia del producto de un escalar por un vector:

$$\nabla \cdot (fA) = \nabla f \cdot A + A \cdot \Delta f$$

  3. Divergencia del producto vectorial de dos vectores:

$$\nabla \cdot (A \times B) = (\nabla \times A) \cdot B - (\nabla \times B) \cdot A$$

- **Rotor**
  1. Rotor de la suma de vectores:

$$\nabla \times (A + B) = \nabla \times A + \nabla \times B$$

  2. Rotor del producto de un escalar por un vector:

$$\nabla \times (fA) = f(\nabla \times A) - (A \times \nabla)f = f(\nabla \times A) + (\nabla f) \times A$$

  3. Rotor del producto vectorial de dos vectores:

$$\nabla \times (A \times B) = A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B$$

- **Segundas derivadas**
  1. Divergencia del rotor:

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

  2. Rotor del gradiente:

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

  3. Divergencia del gradiente (se obtiene el Laplaciano):

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \nabla^2 f$$

4. Rotor del rotor:

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

Ecuaciones de Maxwell

1. **Ley de Gauss para Campos Eléctricos**

$$\boxed{\oint_{\partial V} E \,.\, dA = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}}$$

Donde Q_{enc} es la carga encerrada en la superficie gaussiana, y ϵ_0 es la permitividad del vacío, y vale $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\ [F.m^{-1}]$, y ∂V es la superficie cerrada.

Esta ley establece que el flujo eléctrico total a través de una superficie cerrada es igual a la carga encerrada en el volumen delimitado por la superficie, sobre la permitividad del vacío.

Aplicando el teorema de Gauss (o teorema de la divergencia), tenemos:

$$\oint_{\partial V} E \,.\, dA = \int_V (\nabla . E)\, dV$$

Recordando de la definición de carga eléctrica:

$$Q_{enc} = \int_V \rho \,.\, dV$$

Entonces:

$$\int_V (\nabla . E)\, dV = \frac{1}{\epsilon_0}\int_V \rho \,.\, dV$$

Simplificando:

$$\boxed{\nabla . E = \frac{\rho}{\epsilon_0}}$$

Donde ρ es la densidad de la carga.

2. **Ley de Gauss para el Campo Magnético**

$$\oint_{\partial V} B . dA = 0$$

Esta ley implica que no hay "fuentes" o "sumideros" de campo magnético. El flujo magnético total a través de una superficie cerrada es siempre cero. Esto indica que los monopolos magnéticos no existen.

Usando el teorema de Gauss de la divergencia:

$$\boxed{\oint_{\partial V} B . dA = \int_V (\nabla . B)\, dV}$$

Dado que el flujo magnético es cero, tenemos:

$$\int_V (\nabla . B)\, dV = 0$$

Entonces:

$$\boxed{\nabla . B = 0}$$

3. **Ley de Faraday para la Inducción**

$$\boxed{\oint_{\partial S} E . dl = -\frac{d}{dt}\int_S B . dA}$$

Esta ley describe como un campo eléctrico es inducido por un campo magnético variable en el tiempo. El trabajo realizado por el campo eléctrico a lo largo de una curva cerrada es igual al negativo de la tasa de cambio del flujo magnético a través de una superficie delimitada por ese lazo.

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S} E . dl = \int_S (\nabla \times E) . dA$$

Por lo tanto:

$$\int_S (\nabla \times E) . dA = -\frac{d}{dt}\int_S B . dA$$

Simplificando:

$$\boxed{\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}}$$

4. **Ley de Ampere-Maxwell**

$$\boxed{\oint_{\partial S} B.dl = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S E\,.dA}$$

La ley de Ampere original dice que el campo magnético alrededor de una curva cerrada es proporcional a la corriente eléctrica que pasa a través del área delimitada por la curva. Maxwell agregó el término de desplazamiento eléctrico (amarillo) para tener en cuenta los campos eléctricos cambiantes.

Aplicando el teorema de Stokes:

$$\oint_{\partial S} B.dl = \int_S (\nabla \times B)\,.dA$$

Entonces:

$$\int_S (\nabla \times B)\,.dA = \mu_0 I_{enc} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S E\,.dA$$

Recordando la definición de la corriente sobre una superficie cerrada:

$$I_{enc} = \int_S J\,.dA$$

Donde J es la densidad de corriente. Entonces, al reemplazar esto en la expresión anterior:

$$\int_S (\nabla \times B)\,.dA = \mu_0 \int_S J\,.dA + \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt}\int_S E\,.dA$$

Simplificando términos:

$$\boxed{\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}$$

Podemos expresar también a esta ecuación como:

$$\boxed{\nabla \times H = J + \frac{\partial D}{\partial t}}$$

Donde H es la intensidad de campo magnético y se define como:

$$H = \frac{B}{\mu_0}$$

Y D es el desplazamiento eléctrico y se define como:

$$D = \epsilon_0 E$$

Ecuación de la Onda Electromagnética

Para hallar la ecuación de la onda electromagnética, vamos a utilizar las ecuaciones de Maxwell en el vacío, suponiendo ausencia de cargas libres ($\rho = 0$) y corrientes libres ($J = 0$). Las ecuaciones de Maxwell en el vacío son:

$$\nabla . E = 0$$

$$\nabla . B = 0$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$$

$$\nabla \times B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$$

1. **Obtención de la ecuación de onda para el Campo Eléctrico**

   Comenzamos tomando el rotor de la ley de Faraday:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times B)$$

   Ahora sustituimos $\nabla \times B$ por su expresión de la ley de Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}\right)$$

   Simplificamos el lado derecho:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

   Usando la identidad vectorial del rotor de un rotor:

$$\nabla \times (\nabla \times E) = \nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E$$

   Entonces:

$$\nabla(\nabla \cdot E) - \nabla^2 E = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Como estamos en ausencia de cargas libres, $\nabla \cdot E = 0$. Lo que resulta:

$$\nabla^2 E = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}$$

Esta es la ecuación de la onda para el campo eléctrico, donde $\mu_0 \epsilon_0$ es el inverso del cuadrado de la velocidad de la luz en el vacío:

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$$

Entonces podemos escribir a la ecuación de la onda electromagnética como:

$$\boxed{\nabla^2 E = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2}}$$

2. **Obtención de la ecuación de onda para el Campo Magnético**

Similarmente, comenzamos tomando el rotor de la ley de Ampere-Maxwell:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times E)$$

Sustituimos $\nabla \times E$ por su expresión de la ley de Faraday:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(- \frac{\partial B}{\partial t} \right)$$

Simplificando:

$$\nabla \times (\nabla \times B) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

De nuevo, aplicamos la identidad del rotor y utilizamos el hecho de que $\nabla \cdot B = 0$

$$-\nabla^2 B = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 B = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B}{\partial t^2}$$

Haciendo la sustitución de la velocidad de la luz, finalmente:

$$\boxed{\nabla^2 B = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 B}{\partial t^2}}$$

Velocidad de la densidad de energía de la Onda

1. **Densidad de energía de una onda electromagnética**

   La energía de una onda electromagnética se almacena tanto en el campo eléctrico E como en el campo magnético B. La densidad de energía total (u) en una onda es la suma de las densidades de energía de ambos campos.

- **Densidad de energía del campo eléctrico:**

  La energía almacenada en el campo eléctrico por unidad de volumen está dada por:

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E|^2$$

  Donde ϵ_0 es la permitividad del vacío, y $|E|$ es la magnitud del campo eléctrico.

- **Densidad de energía del campo magnético:**

  La energía almacenada en el campo magnético por unidad de volumen es:

$$u_B = \frac{1}{2}\frac{|B|^2}{\mu_0}$$

  Donde μ_0 es la permeabilidad del vacío y $|B|$ es la magnitud del campo magnético.

- **Densidad de energía total:**

  Como habíamos dicho anteriormente, la densidad de energía total de una onda electromagnética, viene dada por la suma de ambas componentes de densidades, esto es:

$$\boxed{u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{2}\frac{|B|^2}{\mu_0}}$$

2. **Relación entre los campos eléctricos y magnéticos**

En una onda electromagnética que se propaga en el vacío, los campos eléctricos y magnéticos están relacionados de la siguiente manera:

$$|B| = \frac{|E|}{c}$$

Donde c es la velocidad de la luz en el vacío, y está dada por:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Usando esta relación, podemos expresar la densidad de energía magnética u_B en términos del campo eléctrico E:

$$u_B = \frac{1}{2} \frac{|E|^2}{\mu_0 c^2}$$

Dado que $c^2 = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0}$, podemos simplificar esto a:

$$u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2$$

Esto demuestra que las densidades de energía en los campos eléctrico y magnético son iguales en una onda electromagnética en el vacío:

$$u_E = u_B = \frac{1}{2} \epsilon_0 |E|^2$$

Por lo tanto, la densidad de energía total es:

$$u = u_E + u_B = \epsilon_0 |E|^2$$

3. **Vector de Poynting y flujo de energía**

El vector de Poynting describe el flujo de energía en una onda electromagnética, es decir, la tasa a la cual la energía fluye a través de una unidad de área perpendicular a la dirección de propagación de la onda. Este vector está dado por:

$$\boxed{S = E \times H} \quad \text{ó} \quad \boxed{S = \frac{1}{\mu_0}(E \times B)}$$

La magnitud de este vector representa la densidad de potencia o flujo de energía por unidad de área. Utilizando la relación:

$$|B| = \frac{|E|}{c}$$

Podemos escribir:

$$|S| = |E||B| = \frac{|E|^2}{c}$$

4. **Velocidad de propagación de la densidad de energía**

El flujo de energía se relaciona con la densidad de energía a través de la velocidad de propagación de la onda electromagnética, que es la velocidad de la luz c. Esto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\boxed{|S| = uc}$$

Donde u es la densidad de energía total y c la velocidad de la luz.

Dado que ya hemos calculado la densidad de energía total como:

$$u = \epsilon_0 |E|^2$$

Podemos verificar que:

$$|S| = \epsilon_0 |E|^2 c$$

Esto muestra que el flujo de energía (representado por el vector de Poynting) está relacionado directamente con la densidad de energía y la velocidad de la onda.

Desarrollo del Teorema de Poynting

Para realizar el desarrollo de este teorema, partimos de las dos ecuaciones de Maxwell que relacionan los campos eléctricos y magnéticos de forma diferencial:

$$\boxed{\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}} \qquad \boxed{\nabla \times B = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}}$$

Partimos multiplicando la Ley de Ampere-Maxwell por el campo eléctrico:

$$E \cdot (\nabla \times B) = \mu_0 \, E \cdot J + \mu_0 \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

Utilizando la identidad vectorial:

$$E \cdot (\nabla \times B) = \nabla \cdot (E \times B) - B \cdot (\nabla \times E)$$

Tenemos entonces:

$$\nabla \cdot (E \times B) - B \cdot (\nabla \times E) = \mu_0 \, E \cdot J + \mu_0 \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

Reemplazando la Ley de Faraday $\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$, además, sabiendo que el término $\nabla \cdot (E \times B)$ representa la divergencia del vector de Poynting, es decir, $S = \frac{1}{\mu_0}(E \times B)$, entonces:

$$\nabla \cdot S - \frac{B}{\mu_0} \cdot \left(-\frac{\partial B}{\partial t}\right) = E \cdot J + \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot S + \frac{B}{\mu_0} \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = E \cdot J + \epsilon_0 E \cdot \frac{\partial E}{\partial t}$$

Simplificando los términos:

$$B \cdot \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |B|^2$$

$$E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |E|^2$$

La ecuación se convierte en:

$$\nabla \cdot S + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\epsilon_0 |E|^2 + \frac{1}{\mu_0} |B|^2\right) = E \cdot J$$

Vemos que el término resaltado en amarillo es la definición de la densidad de energía total de la onda, por lo tanto, la ecuación se simplifica a:

$$\nabla \cdot S + \frac{\partial u}{\partial t} = E \cdot J$$

$$\boxed{\nabla \cdot S = -\frac{\partial u}{\partial t} - E \cdot J}$$

El cambio de signo en el término $E \cdot J$ es para expresar correctamente la conservación de la energía. Este signo refleja que la energía electromagnética se transfiere desde el campo hacia otro sistema (como una corriente o una resistencia), lo que implica una pérdida de energía electromagnética en la región de estudio.