



# Resumen Segundo Parcial

## Física Electrónica

Autor: Facundo Perlo

Legajo: 85507

Curso: 2R4

Año: 2023

# Índice

<b>1. Introducción.</b>	<b>2</b>
<b>2. Ondas de De Broglie.</b>	<b>3</b>
2.1. Velocidad de Onda de De Broglie . . . . .	4
2.2. Velocidad de fase y de grupo . . . . .	4
<b>3. Principio de Incertidumbre de Heisenberg</b>	<b>7</b>
<b>4. Átomo de Bohr</b>	<b>8</b>
4.1. Niveles de Energía . . . . .	9
4.2. Espectros del Hidrógeno . . . . .	10
<b>5. Mecánica Cuántica</b>	<b>11</b>
5.1. Ecuación de Schrödinger: Forma dependiente del tiempo . . . . .	11
5.2. Ecuación de Schrödinger: Estado estacionario . . . . .	12
<b>6. Mecánica Estadística</b>	<b>13</b>
6.1. Fórmula de Stirling . . . . .	13
6.2. Distribuciones de Probabilidad . . . . .	14
6.3. Ley de Distribución Maxwell-Boltzman . . . . .	14
6.4. Ley de Distribución Bose-Einstein . . . . .	15
6.5. Ley de Distribución Fermi-Dirac . . . . .	15
6.6. Comparación de Resultados . . . . .	16

# 1. Introducción.

Resumen del segundo parcial de Física Electrónica. Desde ondas de De Broglie hasta Mecánica Estadística. No incluye:

- Efecto Fotoeléctrico
- Efecto Compton
- Rayos X
- Radiación de cuerpo negro
- Conductores
- Semiconductores
- Teoría de bandas.

## 2. Ondas de De Broglie.

El momento de un fotón queda definido por la siguiente ecuación:

$$p = \frac{hf}{c} \quad \text{ó} \quad p = \frac{hc}{c\lambda} = \frac{h}{\lambda} \quad (1)$$

Por lo tanto la longitud de onda de un fotón es:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2)$$

De Broglie, propuso que esta ultima podría usarse como una formula general, que se aplica tanto a fotones como a partículas. De este modo ya que el momento de una partícula es  $p = mv$ , tenemos:

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad \text{Ondas de De Broglie.} \quad (3)$$

Cuanto mayor es el momento, menor es su longitud de onda y mayor su frecuencia. En la formula 3, 'm' es la masa relativista.

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4)$$

La cantidad que representa las ondas de De Broglie se conoce con el nombre de **función de onda** y se representa con la letra griega mayúscula psi ("Ψ"). El valor de la función de onda de una partícula en movimiento en un punto (x, y, z) del espacio y en un instante t, esta relacionada con la probabilidad de encontrar a la partícula en ese punto y en ese instante.

Ψ no tiene un sentido físico. Ψ es una función de probabilidad, y estas varían entre 0 (para ausencia total de la partícula) y 1 (para la certeza total de su presencia). Sin embargo Ψ es una onda y la amplitud de estas varían entre valores positivos y negativos, pero las probabilidades negativas no existen, de aquí que Ψ no tenga un sentido físico concreto.

Esta objeción desaparece para  $|\Psi|^2$ , el cuadrado del valor absoluto de la función de onda.  $|\Psi|^2$  se conoce como densidad de probabilidad. "La probabilidad de encontrar experimentalmente el cuerpo descrito por Ψ en un punto (x, y, z) y un instante t, es proporcional al valor de  $|\Psi|^2$  en ese punto y ese instante".

Un valor grande de  $|\Psi|^2$  significa que hay mucha probabilidad de encontrar a la partícula, mientras que si es chico hay menor probabilidad de encontrarla. Interpretación de Max Born, 1926.

$$|\Psi|^2 = \Psi \cdot \Psi^* \quad (5)$$

$$|\Psi|^2 = (A + jB) \cdot (A - jB) = A^2 - jAB + jAB - (j^2 B^2) \quad (6)$$

$$|\Psi|^2 = A^2 + B^2 \quad (7)$$

$\Psi \cdot \Psi^*$  es siempre una cantidad Real y positiva.

## 2.1. Velocidad de Onda de De Broglie

Definiremos a ' $w$ ' como la velocidad de onda de De Broglie.

Como  $c = \lambda f$ , podemos proponer entonces que la velocidad  $w = \lambda f$ , siendo  $\lambda$  la longitud de onda de De Broglie de una partícula cualquiera y  $f$  su frecuencia.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad y \quad f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} \quad (8)$$

Por lo tanto  $w$  nos queda...

$$w = \lambda f \quad (9)$$

$$w = \frac{h}{mv} \cdot \frac{mc^2}{h} \quad (10)$$

$$w = \frac{c^2}{v} \quad (11)$$

$v$  es la velocidad de la partícula, la cual sabemos que es siempre menor que la velocidad de la luz, por lo tanto  $w$  sería siempre mayor que ' $c$ ', y esto es un sin sentido, nada en el universo viaja mas rápido que la luz. Con el fin de entender este resultado inesperado, se abarcan dos nuevo conceptos, **Velocidad de fase o de onda** y **Velocidad de Grupo**.

## 2.2. Velocidad de fase y de grupo

Partimos de una función de onda.

$$y = A \cos(\omega t - kx) \quad (12)$$

Es evidente que no podemos representar las ondas de De Broglie con una formula similar a esta, que describe una serie indefinida de ondas con la misma amplitud. Esperamos que la representación de la misma corresponda a un paquete o grupo de ondas, las cuales tengan amplitudes diferentes de las que dependa la probabilidad de detectar la partícula. Una manera de describir matemáticamente una onda es hacerlo con la superposición de dos ondas de diferente longitud, que al interferir dan por resultado una variación en la amplitud del grupo. Si la velocidad individual de cada onda son iguales entonces la velocidad del grupo es igual al de las dos ondas que la conforman. Sin embargo, si cada onda tiene longitud y velocidad diferentes, significa que cada onda se desplaza diferente y por lo tanto el grupo tiene una velocidad diferente que la de las ondas que lo componen. Vamos a calcular la velocidad del grupo ' $u$ ' formada por dos ondas de igual amplitud y de diferente longitud y velocidad.

$$y_1 = A \cos(\omega t - kx) \quad (13)$$

$$y_2 = A \cos[(\omega + d\omega)t - (k + dk)x] \quad (14)$$

Y con ayuda de estas dos identidades matemáticas 15 y 16,

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (15)$$

$$\cos(-\Theta) = \cos \Theta \quad (16)$$

podemos realizar la suma de nuestras dos ondas. La suma nos queda...

$$y = 2A \cos \frac{1}{2}[(2\omega + d\omega)t - (2k + dk)x] \cos \frac{1}{2}(d\omega t - dkx) \quad (17)$$

Como las expresiones  $(2\omega + d\omega \approx 2\omega)$  y  $(2k + dk \approx 2k)$  podemos transformar la ecuación, quedando de esta forma...

$$y = 2A \cos(\omega t - kx) \cos\left(\frac{d\omega}{2}t - \frac{dk}{2}x\right) \quad (18)$$

En este punto es necesario definir a ' $\omega$ ', también conocida como **frecuencia temporal (angular)** y ' $k$ ', también llamada **frecuencia espacial (angular)**.

$$\omega = 2\pi f \quad \text{y} \quad f = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h} \quad (19)$$

$$\omega = \frac{2\pi mc^2}{h} \quad (20)$$

$$\omega = \frac{2\pi m_0 c^2}{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (21)$$

Ya que ' $m$ ' es la masa relativista.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{h}{mv} \quad (22)$$

$$k = \frac{2\pi m_0 v}{h\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (23)$$

Una vez definidos  $\omega$  y  $k$ , y volviendo a la ecuación (18) podemos definir a la **velocidad de fase o de onda** ' $w$ ' como

$$w = \frac{\omega}{k} \quad (24)$$

Reemplazando 21 y 23 en la ecuación 24, nos queda

$$\omega = \frac{c^2}{v} \quad (25)$$

El mismo resultado obtenido en la subsección anterior.

La **velocidad de grupo**  $'u'$  queda definida como

$$u = \frac{d\omega}{dk} \quad (26)$$

Tanto  $\omega$  como  $k$  son funciones de la velocidad, por lo tanto derivando ambas expresiones con respecto a  $v$  (21 y 23) y realizando el respectivo cociente, obtenemos

$$u = \frac{\frac{d\omega}{dv}}{\frac{dk}{dv}} \quad (27)$$

$$u = v \quad (28)$$

La ecuación 28 es el resultado final luego de derivar y realizar el cociente, por tanto podemos concluir que el grupo de ondas asociado a un cuerpo, se desplaza a la misma velocidad de este. La velocidad de fase no tiene en si un sentido físico concreto.

### 3. Principio de Incertidumbre de Heisenberg

El hecho de que un cuerpo se pueda representar como un grupo de ondas de De Broglie, sugiere que existe un limite fundamental para la precisión con que podemos medir sus propiedades corpusculares. Si el grupo es muy estrecho, la posición de la partícula ( $\Delta x$ ) se determina con facilidad, pero no así su longitud de onda. Por el contrario, si el grupo es ancho, permite un calculo satisfactorio de su longitud de onda, pero no de su posición.

Evidentemente, la extensión de cada grupo de ondas es igual a la mitad de su longitud de onda, por lo tanto  $\Delta x \approx \frac{1}{2}\lambda_m$ , donde  $\Delta x$  representa la incertidumbre en su posición.

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_m} \quad \text{por lo tanto} \quad \lambda_m = \frac{2\pi}{k_m} \quad (29)$$

$$k_m = \frac{1}{2}\Delta k \quad \text{entonces} \quad \lambda_m = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}\Delta k} \quad (30)$$

Como vimos anteriormente  $\Delta x \approx \frac{1}{2}\lambda_m$ , si en la ultima ecuación obtenida, pasamos multiplicando el  $\frac{1}{2}$ , nos queda  $\frac{1}{2}\lambda_m \approx \frac{2\pi}{\Delta k}$ .

Reemplazamos por  $\Delta x$  y pasamos multiplicando  $\Delta k$ , nos queda...

$$\Delta x \Delta k \approx 2\pi \quad (31)$$

Hasta acá ya tenemos una buena forma en nuestro principio de incertidumbre, el próximo paso es ponerlo en función del momento  $p$ .

La longitud de onda de De Broglie para una partícula de momento  $p$  es

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad \text{y la cte. de propagacion} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (32)$$

$$k = \frac{2\pi p}{h} \quad \text{y finalmente para} \quad \Delta p = \frac{h\Delta k}{2\pi} \quad (33)$$

Se tiene el valor mínimo de  $\Delta x \Delta k$  cuando el grupo presenta la forma de una función de Gauss, por esto en general se tiene  $\Delta x \Delta k \approx 1$ .

Finalmente entonces, si  $\Delta x \Delta k \approx 1$  y  $\Delta k = \frac{1}{\Delta x}$  nos queda

$$\Delta p = \frac{h}{2\pi\Delta x} \quad (34)$$

$$\Delta p \Delta x = \frac{h}{2\pi} \quad (35)$$

La expresión  $\frac{h}{2\pi}$  es una constante conocida como **"hache barra"** y se denota con el símbolo **" $\hbar$ "**.

$$\Delta p \Delta x = \hbar \quad \textbf{Principio de Incertidumbre.} \quad (36)$$



## 4. Átomo de Bohr

Hacia finales de 1800, Thomson propone su modelo atómico conocido como modelo de "pastel de pasas", que consistía en una esfera cargada positivamente y los electrones incrustados a modo de 'pasas' con carga negativa, dándole de esta forma una carga total neutra al átomo. El experimento para comprobar la efectividad de este modelo atómico lo llevo a cabo Rutherford. Éste llego a la conclusión de que el átomo debía estar formado por una carga positiva en el centro, y a su alrededor, girando, debían estar los electrones, y así nació el modelo planetario del átomo, debido a su similitud con el sistema solar.

Este modelo planetario fracasa, debido a que no coincidía con un principio del electromagnetismo, que afirma que una carga (positiva o negativa) en movimiento irradia potencia, y esto haría que el electrón a medida que se mueve pierda energía, girando en espiral y llevándolo a colisionar con el núcleo atómico. Si hay algo que sabemos y que podemos afirmar es que la materia y por ende los átomos, son estables.

Esto sugería necesariamente un replanteamiento del modelo atómico. El que llevo a cabo las siguientes propuestas para el átomo de hidrógeno, debido a su simplicidad, fue Niels Bohr.

Onda de De Broglie para el electrón

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (37)$$

Siendo  $m$ , la masa del electrón y  $v$ , su velocidad.

Formula de velocidad de Rutherford para el electrón.

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 mr}} \quad (38)$$

$e$  - carga del electrón =  $1,6 \times 10^{-19} C$

$\epsilon_0$  - permisividad del vacío =  $8,85 \times 10^{-12} \frac{F}{m}$

$m$  - masa del electrón =  $9,1 \times 10^{-31} kg$

$r$  - radio de orbita de Rutherford del electrón =  $5,3 \times 10^{-11} m$

Reemplazando (38) en (37), obtenemos

$$\lambda = \frac{h}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r}{m}} \quad (39)$$

Y colocando el valor del radio de Rutherford en esta ultima expresión, obtenemos

$$\lambda = 33 \times 10^{-11} m \quad (40)$$

Esta longitud de onda tiene exactamente el mismo valor que la circunferencia de orbita del electrón, por lo tanto podemos proponer, sabiendo que la circunferencia del circulo es  $2\pi r$ .

$$2\pi r = 33 \times 10^{-11} m \quad (41)$$

De esta forma, afirmamos que un electrón puede girar indefinidamente alrededor de su núcleo sin irradiar energía con tal que su orbita contenga un numero entero de longitudes de onda de De Broglie.

Condición de estabilidad orbital...

$$n\lambda = 2\pi r_n \quad n = 1, 2, 3... \quad (42)$$

$r_n$  - Numero de radio de orbita que contiene 'n' longitudes de onda.

$n$  - Numero cuántico de orbita.

Reemplazando (39) en (42)

$$\frac{nh}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r_n}{m}} = 2\pi r_n \quad (43)$$

$$\left(\frac{nh}{e} \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 r_n}{m}}\right)^2 = (2\pi r_n)^2 \quad (44)$$

$$r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{e^2 \pi m} \quad n = 1, 2, 3... \quad (45)$$

Las orbitas estables del electrón son aquellas cuyos radios vienen dadas por esta ecuación.

El radio de la orbita mas intensa recibe el nombre de **Radio de Bohr** del átomo de Hidrógeno y se designa  $a_0 = r_1 = 5,3 \times 10^{-11} m$ .

## 4.1. Niveles de Energía

Las diversas orbitas permitidas implican diferentes niveles de energía.

Usando la formula de energía de Rutherford

$$E_n = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \quad (46)$$

y sustituyendo el valor de  $r_n$

$$E_n = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n^2}\right) \quad n = 1, 2, 3... \quad \text{Niveles de Energia} \quad (47)$$

Los niveles son todos negativos, lo que significa que el electrón no tiene la energía suficiente para poder abandonar el átomo.

Al nivel mas bajo,  $E_1$  se le llama **Estado fundamental** y a los mas altos, **Estados excitados**.

Al aumentar el numero cuántico 'n', la energía  $E_n$  se aproxima a cero, en el limite, para  $n = \infty$ ,  $E_\infty = 0$ . Y el electrón no esta lo suficientemente ligado al núcleo para constituir el átomo.

Una energía positiva para un conjunto núcleo-electrón significa que el electrón no esta unido al núcleo.

## 4.2. Espectros del Hidrógeno

Es necesario confrontar ahora las ecuaciones que se han obtenido con los resultados experimentales. Un resultado experimental especialmente notable es que los átomos muestran líneas en los espectros de emisión y absorción, **¿Están de acuerdo estos espectros con nuestro modelo atómico?**

La presencia de saltos discretos de energía en el átomo de hidrógeno sugiere que si.

Cuando un electrón en un estado excitado cae a un estado inferior, la energía perdida se emite en forma de fotón de luz. Según nuestro modelo, los electrones no pueden existir en un átomo, excepto en ciertos niveles energéticos determinados. El salto discreto del electrón de un nivel a otro, cediendo energía a un fotón, en lugar de hacerlo de forma gradual, encaja perfectamente con este modelo.

Si el  $n$  de mayor energía es  $n_i$  y el de menor energía  $n_f$ , tenemos

$$hf = E_i - E_f \quad (48)$$

$$hf = -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_i^2} \right) - \left( -\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} \right) \right) \quad (49)$$

$$hf = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad (50)$$

Dividimos ambos miembros por  $hc$  para que la expresión nos quede en función del inverso de la longitud de onda.

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3} \left( \frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2} \right) \quad \text{Espectro del Hidrógeno} \quad (51)$$

Acabamos de hallar una formula general obtenida a partir del modelo atómico de Bohr, para las series espectrales del Hidrógeno, la cual había sido obtenida a través de resultados experimentales por Lyman, Balmer, Paschen, Brackett y Pfund.

Mientras que la constante que obtuvimos es igual a la constante de Rydberg ( $R = 1,097 \times 10^7 m^{-1}$ ).

$$\frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3} = 1,097 \times 10^7 m^{-1} \quad \text{Cte. de Rydberg} \quad (52)$$

## 5. Mecánica Cuántica

### 5.1. Ecuación de Schrödinger: Forma dependiente del tiempo

Partimos de una función de onda  $\Psi$  de la forma

$$\Psi = Ae^{-j\omega(t-x/v)} \quad (53)$$

Sustituyendo  $\omega$  por  $2\pi f$  y  $v$  por  $\lambda f$  nos queda

$$\Psi = Ae^{-j2\pi(f t - x/\lambda)} \quad (54)$$

Buscamos alguna estrategia para que  $\Psi$  sea función de la Energía y del momento lineal.

$$E = hf = 2\pi\hbar f \quad \text{y} \quad \lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p} \quad (55)$$

Hacemos el reemplazo correspondiente y llegamos a la función  $\Psi(E, p)$ .

$$\Psi = Ae^{-(j/\hbar)(Et - px)} \quad (56)$$

Una vez que tenemos la expresión adecuada de la función de onda, tenemos que derivarla (56) dos veces con respecto a  $x$  y una vez con respecto a  $t$ .

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi \quad (57)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{jE}{\hbar} \Psi \quad (58)$$

A velocidades pequeñas comparadas con la de la luz, la energía total  $E$  es igual a la suma de su energía cinética mas su energía potencial  $V$ , que es también una función de  $x$  y de  $t$ .

$$E = \frac{p^2}{2m} + V \quad (59)$$

Multiplicando ambos miembros por la función de onda.

$$E\Psi = \frac{p^2\Psi}{2m} + V\Psi \quad (60)$$

De las ecuaciones 57 y 58, despejamos las expresiones  $E\Psi$  y  $p^2\Psi$ .

$$E\Psi = -\frac{j\hbar}{j} \frac{\partial \Psi}{\partial t} \quad \text{y} \quad p^2\Psi = -\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \quad (61)$$

Reemplazando estas ultimas dos en la expresión 60 llegamos a la ecuación de Schrödinger.

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi \quad (62)$$

**Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en una dimensión.**

$$j\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) + V\Psi \quad (63)$$

**Ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en tres dimensiones.**

## 5.2. Ecuación de Schrödinger: Estado estacionario

Para obtener la ecuación en su forma estacionaria, es decir, sin depender del tiempo partimos de la misma expresión (56).

$$\Psi = Ae^{-(j/\hbar)(Et - px)} \quad (64)$$

$$\Psi = Ae^{-(jE/\hbar)t} e^{+(jp/\hbar)x} \quad (65)$$

Hasta ahora lo único que hicimos fue separar estratégicamente para conseguir dos expresiones de ondas diferentes, una dependiente del tiempo y la otra del espacio. Con el fin de evitar hacer cálculos engorrosos, a la expresión dependiente del espacio la llamaremos  $\psi$  (psi minúscula), mientras que a la expresión dependiente del tiempo la llamaremos  $\Phi$  (phi mayúscula). De forma tal que podemos escribir a nuestra expresión 65 como el producto

$$\Psi = \psi \cdot \Phi \quad (66)$$

El próximo paso sera reemplazar esta ultima expresión en la ecuación dependiente del tiempo y a su vez dividir en ambos miembros por  $\Phi$ .

$$E\psi \frac{\Phi}{\Phi} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\Phi}{\Phi} + V\psi \frac{\Phi}{\Phi} \quad (67)$$

Simplificamos las funciones  $\Phi$  y acomodamos la expresión.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi = 0 \quad (68)$$

**Ecuación de Schrödinger en estado estacionario en una dimensión.**

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V)\psi = 0 \quad (69)$$

**Ecuación de Schrödinger en estado estacionario en tres dimensiones.**

## 6. Mecánica Estadística

Buscamos conocer la distribución mas probable de moléculas entre las diferentes energías posibles.

Consideramos para esto a  $'W'$ , un numero que representa las diferentes maneras que se pueden disponer las moléculas para una distribución particular entre los diferentes niveles de energía. Mientras mayor es  $W$ , mas probable es la distribución. Por lo tanto, la distribución mas probable es aquella para la cual  $W$  es máximo. Nuestro primer paso sera hallar  $W$ .

### 6.1. Fórmula de Stirling

Antes de presentar la formulas de probabilidad para hallar nuestro numero  $W$ , presentamos una fórmula conocida como formula de Stirling, la cual nos ayudará a resolver en los pasos próximos.

$$\ln n! = \ln 2 + \ln 3 + \ln 4 + \dots \quad (70)$$

$$\ln n! = \int_1^n \ln n dn \quad (71)$$

Resolviendo esta integral por partes  $\int y dx = xy - \int x dy$  nos queda

$$y = \ln n \quad dx = dn \quad (72)$$

$$dy = \frac{1}{n} dn \quad x = n \quad (73)$$

Aplicando la formula de integral por partes

$$\ln n! = n \ln n - \int_1^n n \cdot \frac{1}{n} dn \quad (74)$$

Aplicando regla de Barrow

$$\ln n! = n \ln n - n + 1 \quad \text{con } n \gg 1 \quad (75)$$

Ya que  $n \gg 1$  se considera despreciable por lo tanto

$$\ln n! = n \ln n - n \quad \text{Fórmula de Stirling} \quad (76)$$

## 6.2. Distribuciones de Probabilidad

Ahora estamos en condiciones de presentar a las tres ecuaciones de probabilidad que nos brindan como obtener la distribución mas probable de moléculas para poder determinar nuestro  $W$  en cada una.

$$W = \frac{N!}{\sum n_i!} \sum g_i^{n_i} \quad \text{Distribución de moléculas para Maxwell-Boltzman} \quad (77)$$

$$W = \prod \frac{(n_i + g_i - 1)}{n_i!(g_i - 1)!} \quad \text{Distribución de moléculas para Bose-Einstein} \quad (78)$$

$$W = \prod \frac{g_i!}{n_i!(g_i - n_i)!} \quad \text{Distribución de moléculas para Fermi-Dirac} \quad (79)$$

## 6.3. Ley de Distribución Maxwell-Boltzman

Partimos de la ecuación de distribución (77), aplicando  $\ln$  en ambos miembros.

$$\ln W = (N \ln N - N) - \sum n_i \ln n_i - n_i + \sum n_i \ln g_i \quad (80)$$

$$\ln W = (N \ln N - N) - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i + \sum n_i \ln g_i \quad (81)$$

Como  $\sum n_i = N$ , la expresión queda

$$\ln W = N \ln N - \sum n_i \ln n_i + \sum n_i \ln g_i \quad (82)$$

Diferenciamos en ambos miembros.  $N \ln N = 0$  por que es constante.

$$d \ln W = - \sum n_i d \ln n_i - \sum \ln n_i dn_i + \sum \ln g_i dn_i \quad (83)$$

$$d \ln n_i = \frac{1}{n_i} dn_i \quad (84)$$

$$\sum n_i d \ln n_i = \sum dn_i \quad (85)$$

Puesto que la cantidad de moléculas es constante, implica que  $\sum dn_i = 0$ , por lo tanto  $\sum n_i d \ln n_i = 0$ .

Volvemos al planteo general y lo igualamos a cero. Quedando

$$- \sum \ln n_i dn_i + \sum \ln g_i dn_i = 0 \quad (86)$$

En este punto usamos el método de los multiplicadores indeterminados de Lagrange.

$$\sum (-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta \epsilon_i) dn_i = 0 \quad (87)$$

Para que la ecuación sea válida, la cantidad entre paréntesis debe ser igual a cero. Planteamos

$$-\ln n_i + \ln g_i - \alpha - \beta \epsilon_i = 0 \quad (88)$$

$$\ln \frac{g_i}{n_i} - \alpha - \beta \epsilon_i = 0 \quad (89)$$

$$e^{(\ln \frac{g_i}{n_i} - \alpha - \beta \epsilon_i)} = e^0 \quad (90)$$

$$\frac{g_i}{n_i e^\alpha e^{\beta \epsilon_i}} = 1 \quad (91)$$

Finalmente despejamos  $n_i$  y reemplazamos  $\beta = \frac{1}{KT}$ , quedando de esta forma

$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha e^{\epsilon_i/KT}} \quad (92)$$

#### **Ley de Distribución de Maxwell-Boltzman**

Aplicable a partículas distinguibles de cualquier spin y que obedecen al principio de exclusión de Pauli. Gases.

### **6.4. Ley de Distribución Bose-Einstein**

Para esta distribución partimos de la ecuación (78), y resolviendo de la misma manera que Maxwell-Boltzman, finalmente llegamos a la siguiente expresión.

$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha e^{\epsilon_i/KT} - 1} \quad (93)$$

#### **Ley de Distribución Bose-Einstein**

Aplicable a partículas indistinguibles de spin entero que no cumplen con el principio de exclusión de Pauli. Bosones. Fotones.

### **6.5. Ley de Distribución Fermi-Dirac**

De la misma manera que las dos anteriores, partiendo de la ecuación (79) y siguiendo los mismos pasos que Maxwell-Boltzman, llegamos a la siguiente distribución.

$$n_i = \frac{g_i}{e^\alpha e^{\epsilon_i/KT} + 1} \quad (94)$$

#### **Ley de Distribución Fermi-Dirac**

Aplicada a partículas indistinguibles de spin fraccionario, que obedecen el principio de exclusión de Pauli. Fermiones. Electrones.



De esta ultima distribución se obtiene la **Energía de Fermi**, que es la energía mas alta ocupada por un sistema de fermiones a  $T = 0^\circ$ . Viene dada por la siguiente formula.

$$\epsilon_f = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3N}{8\pi V} \right)^{2/3} \quad (95)$$

## 6.6. Comparación de Resultados

Es evidente que las tres distribuciones son bastante parecidas, de hecho, solamente difieren en un solo factor al cual llamaremos  $f$ . Quedando de esta manera

$$n_i = \frac{g_i}{e^{\alpha} e^{\epsilon_i/KT} + f} \quad (96)$$

- $f = 0$     **Maxwell-Boltzman**
- $f = -1$     **Bose-Einstein**
- $f = +1$     **Fermi-Dirac**