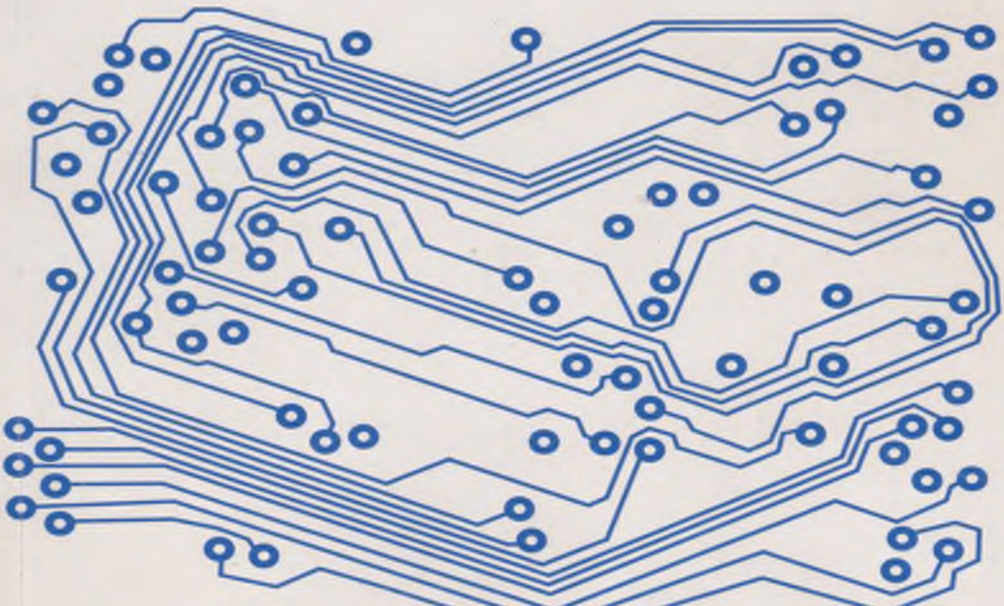
CIRCUITOS ELECTRICOS
Ejercicios resueltos y propuestos

Fabiola Araujo Céspedes



CIRCUITOS ELECTRICOS

Ejercicios resueltos y propuesto

Fabiola Araujo Céspedes

EDICIONES SAPIENTIA
Bolivia

Estimado alumno:

Un libro es el resultado de muchas horas de esfuerzo y dedicación por parte de un autor. Fotocopiar es ROBAR propiedad intelectual. Proteja el derecho de autor y diga:

NO A LA FOTOCOPIA ILEGAL

CIRCUITOS ELECTRICOS - Ejercicios resueltos y propuestos

PRIMERA EDICION

Se imprimieron 1000 ejemplares en el mes de Abril de 2009
Impreso por "Artes Graficas Israel"
Impreso en Santa Cruz, Bolivia

INDICE GENERAL

CAPITULO 1: INTRODUCCION 1

1.1 Fundamentos de la electrónica 1

1.2 Resistencia eléctrica 4

1.3 Concutores eléctricos 6

1.4 Circuito eléctrico 8

CAPITULO 2: ASOCIACION DE RESISTENCIAS 11

2.1 Resistencias en serie y paralelo 11

2.2 Resistencias equivalentes delta - triángulo 22

2.3 Ejercicios propuestos 30

CAPITULO 3: LEYES BASICAS EN LOS CIRCUITOS 32

3.1 Ley de Ohm 32

3.2 Potencia eléctrica 32

3.3 Voltajes y corrientes en serie y paralelo 33

3.4 Divisor de tensión 36

3.5 Divisor de corriente 37

3.6 Leyes de Kirchoff 38

3.7 Ejercicios resueltos 41

3.8 Ejercicios propuestos 48

CAPITULO 4: ANALISIS POR MALLAS 50

4.1 Procedimiento para análisis por mallas 50

4.2 Ejercicios resueltos 54

4.3 Ejercicios propuestos 73

CAPITULO 5: ANALISIS POR NODOS ____ **75**

5.1 Procedimiento para análisis por mallas 75

5.2 Ejercicios resueltos 78

5.3 Ejercicios propuestos 94

CAPITULO 6: OTROS METODOS ____ **96**

6.1 Teorema de Thevenin y Norton 96

6.2 Teorema de Superposición 100

6.3 Teorema de Millman 101

6.4 Ejercicios resueltos 102

6.5 Ejercicios propuestos 112

BIBLIOGRAFIA ____ **115**

1 INTRODUCCION

1.1 Fundamentos de la electrónica:

La unidad más pequeña de toda materia es el átomo. Un átomo está formado en su núcleo por protones y neutrones y en órbitas alrededor de éste, giran los electrones.

Los neutrones son partículas eléctricamente neutras, los protones son partículas con carga eléctrica positiva (1,602 x 10-19 culombios) y los electrones son partículas con carga eléctrica negativa (-1,602 x 10 -19 culombios). El átomo no tiene carga ya que la carga eléctrica del protón y la carga eléctrica del electrón se neutralizan entre sí.

El número máximo de electrones en cada órbita se determina por la siguiente fórmula:

$\boxed{2n^2}$ donde n es el número de órbita

Orbita 1 (K) tiene máximo $2(1)^2 =$ 2 electrones

Orbita 2 (L) tiene máximo $2(2)^2 =$ 8 electrones

Orbita 3 (M) tiene máximo $2(3)^2 =$ 18 electrones

Orbita 4 (N) tiene máximo $2(4)^2 =$ 32 electrones

Orbita 5 (O) tiene máximo $2(5)^2 =$ 50 electrones

Cuando en una órbita no se completa el número máximo de electrones establecidos por la fórmula anterior, el siguiente número máximo de electrones en dicha órbita es el cálculo realizado para la órbita anterior, y así sucesivamente.

La única órbita que puede tener un número de electrones no establecidos por la fórmula es la capa exterior, conocida como capa de valencia, en la cual pueden girar desde un electrón hasta un máximo de 8 electrones.

Cuando un átomo tiene completo los 8 electrones en su capa de valencia, se dice que está estable ya que dificilmente desprende un electrón y tampoco tiene lugar para adicionar cualquier otro electrón. [1][2]

La siguiente figura muestra los modelos atómico de los elementos 47 (plata) y 29 (Cobre):

Elemento 47 (plata)

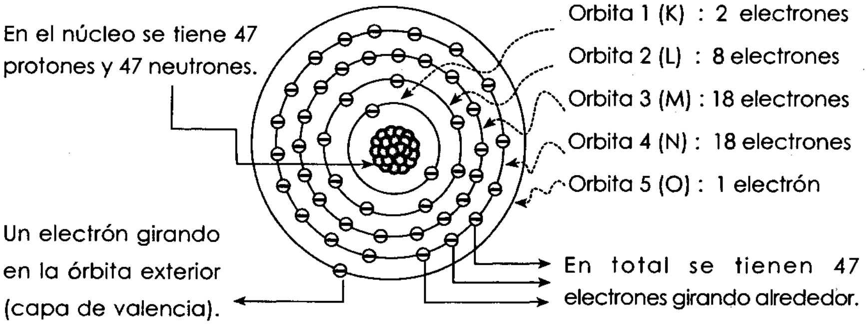


Figura 1.1: Modelo atómico elemento 47

Elemento 29 (cobre)

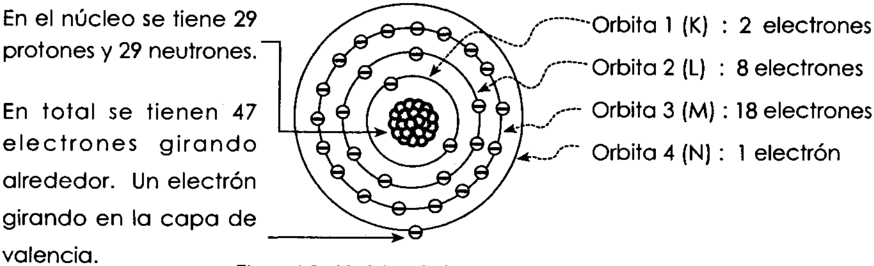
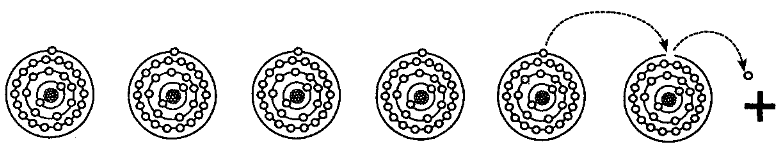
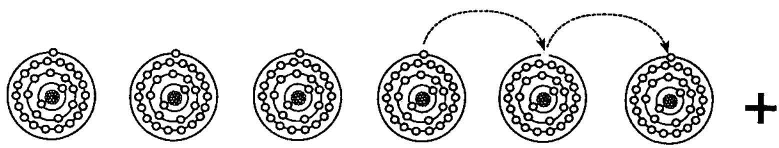


Figura 1.2: Modelo atómico elemento 29

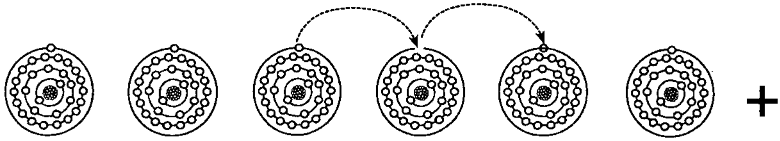
Observe que estos elementos tienen en su capa de valencia un solo electrón. Cuando se aplica diferencia de potencial entre dos terminales, éste electrón es atraído hacia el terminal positivo, dejando un "hueco" en su capa de valencia.



Otro electrón es atraído (fluye) hacia el "hueco"...



... y otro electrón es atraído (fluye) hacia el nuevo "hueco"....



Como consecuencia, se tiene un flujo de electrones a través del conductor. A este flujo de electrones en un determinado tiempo se denomina INTENSIDAD DE CORRIENTE:

$$i = \frac{q}{t}$$

q es la carga eléctrica

t es el tiempo

La unidad de medida de la intensidad de corriente es el AMPERIO O AMPERE (A), donde la carga se mide en Coulomb (C) y el tiempo se mide en segundos (s).

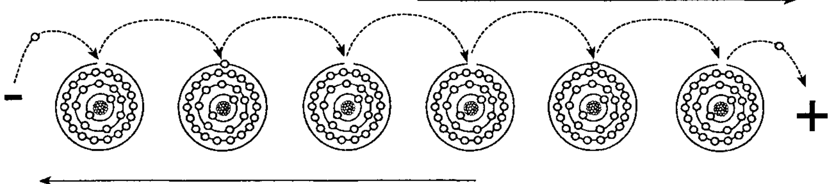
$$1A = \frac{1C}{1s}$$

NOTA:

1C = 6,24150948 x 10^{18} cargas eléctricas

Observe en la siguiente ilustración que aunque los electrones se desplazan hacia la terminal positiva, el sentido de la corriente convencional(i) se orienta en sentido opuesto. Esto se debe a que en un principio se creía que la corriente se debía al desplazamiento de cargas positivas. Por convención, se mantiene este sentido de corriente, aunque ya se ha demostrado que son las cargas negativas quienes se desplazan. [3]

sentido de desplazamiento de electrones



i (sentido de corriente convencional)

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

El sistema internacional de unidades asignó como unidad de corriente al Ampere en honor a André Marie Ampère, quien nació en Lyon, Francia el 20 de Enero deL 1775 y murió en Marsella, Francia el 10 de Junio de 1836.[4]

A la diferencia de potencial o fuerza electromotriz (F.E.M.) que causa el flujo de electrones se conoce como TENSION o VOLTAJE. Su unidad de medida es el VOLTIO (V), que se define como la diferencia de potencial entre dos puntos que causa el trabajo de 1 Joules necesario para trasladar la carga de 1 Coulomb[5]:

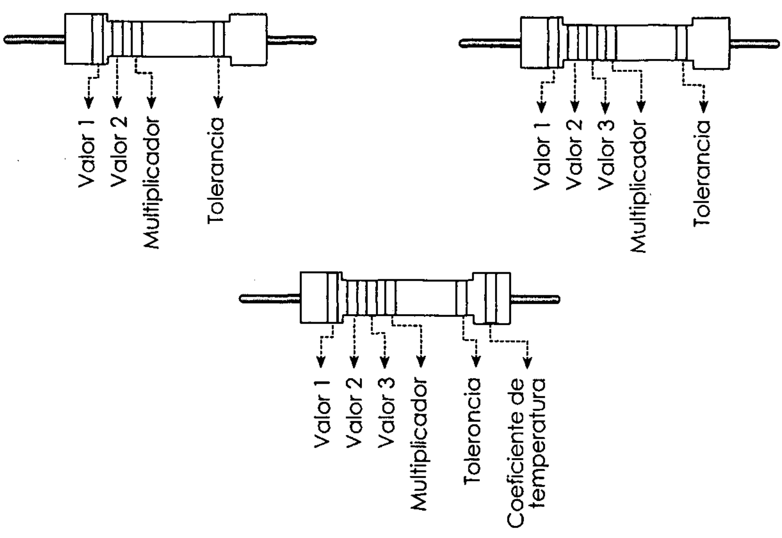
$$1V = \frac{1J}{1C}$$

1.2 Resistencia eléctrica

Se define como resistencia eléctrica a la oposición al flujo de los electrones. Se mide en ohmios (Ω), cuyo símbolo eléctrico es el siguiente:

Símbolo eléctrico de la resistencia eléctrica

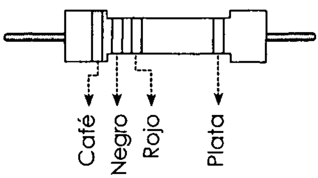
En determinados diseños electrónicos, es necesario tener una resistencia eléctrica entre dos puntos del circuito. Se han fabricado componentes electrónicos específicamente para éstas ocasiones, denominados resistores o resistencias.
Para determinar el valor de la resistencia, se emplean un código de colores, el cual se interpreta de la siguiente manera[5]:



donde:

COLOR	VALOR	Multiplicador	Tolerancia
Negro	0	x 1	
Café	1	x 10	± 1%
Rojo	2	x 100	± 2%
Naranja	3	x 1000	
Amarillo	4	x 10000	
Verde	5	x 100000	
Azul	6	x 1000000	
Violeta	7	x 10000000	
Plomo	8	x 100000000	
Blanco	9	x 1000000000	
Plata		x 0.01	± 10%
Oro		x 0.1	± 5%

Ejemplo: La siguiente resistencia es de 1000 Ω ± 10% (1 KΩ ± 10%)



Este puede tener un valor entre 900 Ω y 1100 Ω

Una consideración adicional es que no pueden encontrarse todos los valores de resistencias en el mercado, sino que vienen en valores normalizados[6]:

Tolerancia 10 %	Tolerancia 5 %	Tolerancia 2 %
1.0	1.0 , 1.1	1.0, 1.05, 1.1, 1.15
1.2	1.2, 1.3	1.21, 1.27, 1.33, 1.40, 1.47
1.5	1.5, 1.6	1.54, 1.62, 1.69, 1.78
1.8	1.8, 2.0	1.87, 1.96, 2.00, 2.05, 2.15
2.2	2.2, 2.4	2.26, 2.37, 2.49, 2.61
2.7	2.7, 3.0	2.74, 2.87, 3.01, 3.16
3.3	3.3, 3.6	3.32, 3.48, 3.65, 3.83
3.9	3.9, 4.3	4.02, 4.22, 4.42, 4.64
4.7	4.7, 5.1	4.87, 5.11, 5.36
5.6	5.6, 6.2	5.62, 5.90, 6.19, 6.49
6.8	6.8, 7.5	6.81, 7.15, 7.50, 7.87
8.2	8.2, 9.1	8.25, 8.66, 9.09, 9.53

Es decir, no existe el valor normalizado de 5 en una tolerancia del 10%. Existe de 4.7 y de 5.6. Entonces, no existen resistencia de 500Ω, 5KΩ, 50KΩ ó 5 MΩ..., pero existen de 470Ω, 4.7KΩ, 47KΩ, 4.7 MΩ y así sucesivamente.

Una tercera consideración en las resistencias es la potencia que pueden disipar. Al circular corriente por la resistencia, ésta se opone al flujo de corriente y se produce calor (potencia disipada). Los cálculos de potencia se profundizará en un siguiente capítulo. Mientras más grande es la resistencia, mayor es la potencia que puede disipar. Las potencias más comunes de las resistencias son de 2W, 1W, ½ W y ¼ W.

1.3 Conductores eléctricos

Los materiales conductores eléctricos son aquellos que permiten facilmente el flujo de electrones. Los siguientes materiales son ejemplos de buenos conductores.

ELEMENTO	No. atómico	K	L	M	N	O	P
Cobre	29	2	8	18	1		
Plata	47	2	8	18	18	1	
Oro	79	2	8	18	32	18	1

Observe que todos estos elementos tienen un solo electrón en su capa de valencia. En consecuencia, una fuerza electromotriz puede arrancar con facilidad su electrón de la capa de valencia, ocasionando un flujo de electrones (como descrito anteriormente). El oro es el mejor conductor de los tres elementos nombrados, y la plata es mejor conductor que el cobre. Esto se debe a que mientras más lejos gire el electrón de su núcleo, éste tendrá menos fuerza de atracción con el núcleo y puede desprenderse con mayor facilidad.

Aunque el oro y la plata son mejores conductores que el cobre, el cobre se emplea con mayor frecuencias por el costo del material.

Otro material ampliamente utilizado es el alumnio, cuyo elemento es el siguiente:

ELEMENTO	No. atómico	K	L	M	N	O	P
Aluminio	13	2	8	3			

Debido a que tiene 3 electrones en su capa de valencia, es más difícil desprender los tres electrones de su capa de valencia que desprender uno solo como en los anteriores para ocasionar flujo de electrones. Sin embargo, otras características como ser más ligero y de menor costo dán como consecuencia una amplia aplicación de este material.

Se dice que "no hay conductor perfecto". Si bien los materiales conductores permiten el flujo de electrones, como descrito anteriormente, algunos materiales permiten éste flujo con mayor facilidad que otros materiales. Es decir, algunos materiales tiene mayor resistencia u oposición al flujo de los electrones que otros. Se puede calcular la resistencia de un material conductor mediante la siguiente fórmula[7]:

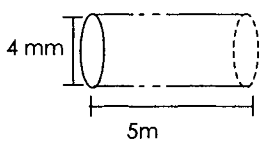
$$R = \rho \times \frac{\ell}{s}$$

ρ resistividad del material
ℓ longitud del conductor
s sección transversal del conductor

La siguiente tabla detalla la resistividad de algunos materiales es el siguiente:

Conductor	**Resistividad** Ω m)
Plata	$1{,}55 \times 10^{-8}$
Cobre	$1{,}70 \times 10^{-8}$
Oro	$2{,}22 \times 10^{-8}$
Aluminio	$2{,}82 \times 10^{-8}$
Níquel	$6{,}40 \times 10^{-8}$
Hierro	$8{,}90 \times 10^{-8}$
Platino	$10{,}60 \times 10^{-8}$
Estaño	$11{,}50 \times 10^{-8}$
Acero Inoxidable	$72{,}00 \times 10^{-8}$
Grafito	$60{,}00 \times 10^{-8}$

Ejemplo: Calcular la resistencia eléctrica de un conductor de plata que tiene un diámetro de 4 mm y una longitud de 5 metros.



$$s = \pi r^2$$
$$s = \pi (0{,}002\ m)^2$$

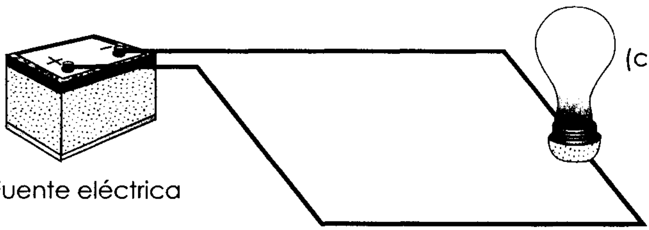
$$R = 1{,}55 \times 10^{-8}\ \Omega m \times \frac{5m}{\pi (0{,}002\ m)^2}$$

$$R = 0{,}00617\ \Omega$$

Observe que aunque existe resistencia eléctrica en materiales conductores, en la mayoría de los casos, este valor puede despreciarse por ser relativamente bajo.

1.4 Circuito Eléctrico

Se define como un circuito eléctrico a un conjunto de componentes eléctricos tales como fuentes, resistencias, bobinas y condensadores, interconectados entre sí. Para que pueda circular corriente a través del circuito eléctrico (es decir, para que exista flujo de electrones), deben cumplirse lo siguiente...



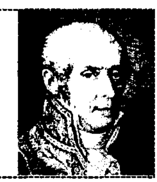
Debe existir una fuente eléctrica (fuente de corriente o tensión) que "empuje" las cargas eléctricas negativas a través de un circuito cerrado.

Debe existir un "camino" o conductor entre el polo positivo y el negativo de la fuerza electromotriz. En otras palabras, debe formar un circuito cerrado.

Debe existir una carga o consumidor de energía. Estos ofrecen resistencia al paso de la corriente eléctrica.

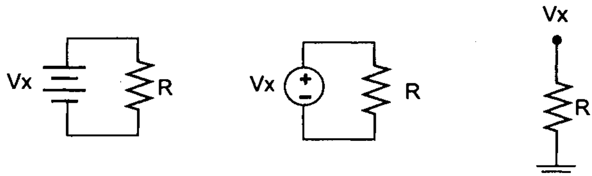
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La unidad del VOLTIO fué asignada para el potencial eléctrico, la fuerza electromotriz y el voltaje en honor a Alessandro Giuseppe Antonio Anastasio Volta (18 de Febrero de 1745 al 5 de Marzo de 1827), quien inventó la pila eléctrica.[8]



Fuente de tensión o fuente de voltaje: Es una fuente eléctrica con una diferencia de potencial eléctrico fija entre sus terminales, proporcionando una fuerza electromotriz FEM que "empuja" carga eléctrica por un conductor (intensidad de corriente). La intensidad de corriente varía dependiendo a la carga conectada en el circuito. Se simboliza de las siguientes maneras:

La siguiente figura muestra el mismo circuito de diferentes maneras:



Idealmente, una fuente de tensión proporciona una fuerza electromotriz FEM o voltaje independientemente a la carga que tenga conectada. Sin embargo, este tipo de fuente no existe en la vida real, y solo se utiliza en los cálculos para realizar análisis de circuitos. En la vida real toda fuente de tensión tiene una resistencia interna en la cual existirá una caída de tensión. El resto de la tensión o voltaje cae en la carga del circuito. Al primer caso se conoce como fuente de tensión ideal, y al segundo caso como fuente de tensión real.

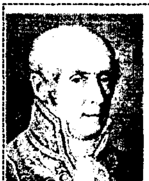
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La imagen de Alessandro Volta fue utilizado en los billetes de 10000 Lira italianos en las series de 1984.[9][10]

Fuente de corriente: La fuente de corriente se caracteriza porque genera una intensidad de corriente fija. Es decir, "empuja" la misma cantidad de flujo de carga eléctrica en un determinado tiempo. El potencial entre sus terminales varía dependiendo de la carga conectada. Puede simbolizarse de la siguiente manera:

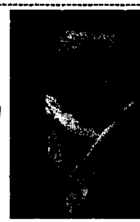
Idealmente una fuente de corriente genera la misma intensidad de corriente, independientemente a la cargaconectada. Sin embargo, este tipo de fuente no existe en la vida real, y solo se utiliza en los cálculos para realizar análisis de circuitos. En la vida real toda fuente de corriente tiene una resistencia interna por la cual se deriva parte de la corriente. El resto de la corriente circulará por el resto del circuito. Al primer caso se conoce como fuente de corriente ideal, y al segundo caso como fuente de corriente real.

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES



Alessandro Volta

En el año 1800 Alessandro Volta publicó los detalles de la construcción de la primer pila voltáica capaz de producer energía eléctrica a partir de una reacción química. John Federic Daniell mejoró el diseño de Volta empleando diferente materiales para los electrodos.[8][11][12][13]

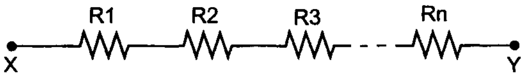


Federic Daniell

2 ASOCIACION DE RESISTENCIAS

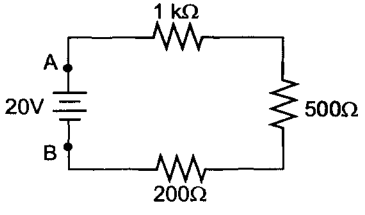
2.1 Resistencias en serie y paralelo

Resistencias en serie: Si dos o más resistencias están en serie, la resistencia total entre los puntos extremos es la sumatoria de las resistencias:



$$\boxed{R_{XY} = R_1 + R_2 + R_3 + ... + R_n}$$

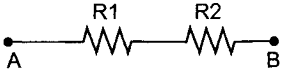
Ejemplo: Encontrar la resistencia equivalente entre A y B.



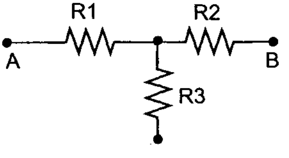
$$R_{AB} = 1K\Omega + 500\Omega + 200\Omega$$

$$R_{AB} = 1\ 700\ \Omega = 1{,}7K\Omega$$

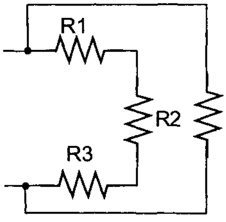
Aclaración: Para que las resistencias estén en serie, no debe existir ningúna conexión entre sus interconexiones.



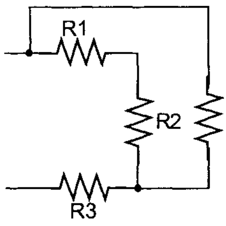
R1 y R2 están en serie



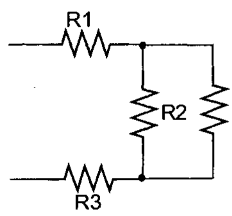
R1 y R2 no están en serie



R1, R2 y R3
están en serie

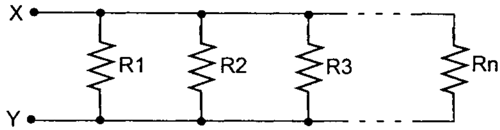


Solo R1y R2
están en serie



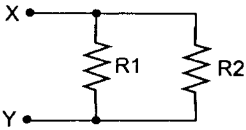
R1, R2 y R3
no están en serie

Resistencias en paralelo: Si dos o más resistencias están en paralelo, la resistencia total entre los puntos es:



$$\boxed{\frac{1}{R_{XY}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots + \frac{1}{R_n}}$$

Caso de dos resistencias en paralelo:



$$\frac{1}{R_{XY}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{R_{XY}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 \times R_2}$$

$$\boxed{R_{XY} = \frac{R_1 \times R_2}{R_2 + R_1}}$$

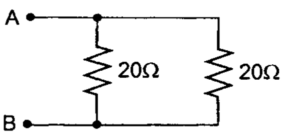
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

George Simon Ohm

(1789-1854)

Veinte años después de la muerte de Georg Simons Ohm, el Sistema Internacional de Unidades asignó el OHM como unidad de resistencia eléctrica.

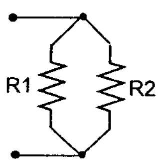
Ejemplo: Encontrar la resistencia equivalente entre A y B.



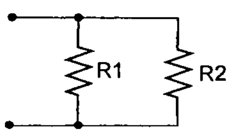
$$R_{AB} = \frac{20 \times 20}{20 + 20}$$

$$R_{AB} = \frac{400}{40} = 10\ \Omega$$

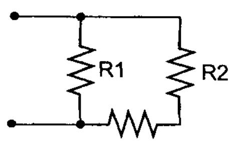
Aclaración: Para que las resistencias estén en paralelo, deben estar conectados en ambos extremos.



R1 y R2 están en paralelo



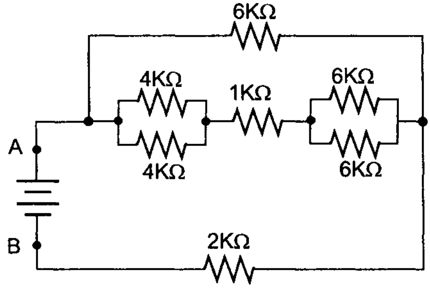
R1 y R2 están en paralelo



R1 y R2 no están en paralelo

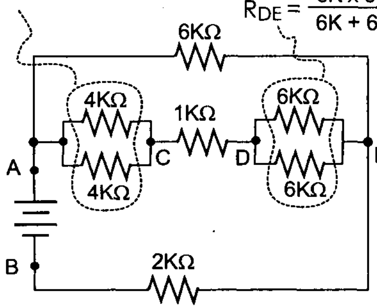
Ejercicio No. 1

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.

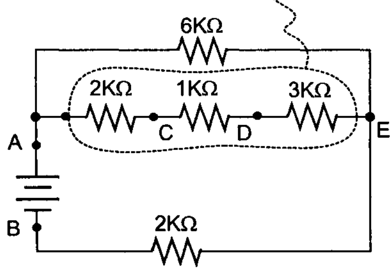


$$R_{AC} = \frac{4K \times 4K}{4K + 4K} = \frac{16K}{8} = 2K\Omega$$

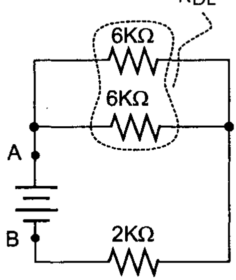
$$R_{DE} = \frac{6K \times 6K}{6K + 6K} = \frac{36K}{12} = 3K\Omega$$



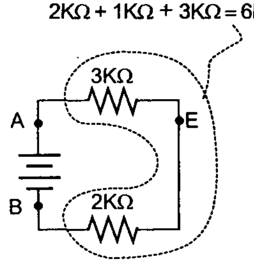
$2K\Omega + 1K\Omega + 3K\Omega = 6K\Omega$

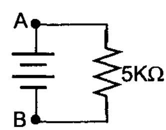


$$R_{DE} = \frac{6K \times 6K}{6K + 6K} = \frac{36K}{12} = 3K\Omega$$



$2K\Omega + 1K\Omega + 3K\Omega = 6K\Omega$





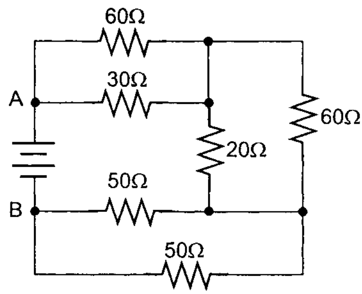
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

Como descrito anteriormente, no se fabrican todos los valores de resistencias, sino que se establecieron valores normalizados. Sin embargo, se pueden obtener valores mediante la combinación de resistencias en serie y/o en paralelo.

Por ejemplo, si se desea trabajar con una resistencia de 6KΩ, se fabrican de 5,6KΩ y 6,8KΩ, pero no de 6KΩ. Sin embargo, se puede obtener este valor con dos resistencias en serie de los valores normalizados 2,7KΩ y 3,3KΩ.

Ejercicio No. 2

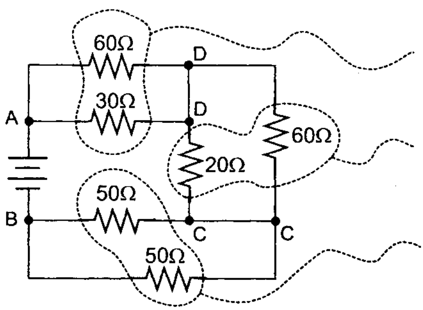
Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La conductancia eléctrica (G) es el inverso de la resistencia eléctrica. Su unidad en el sistema internacional es el Siemens (S).

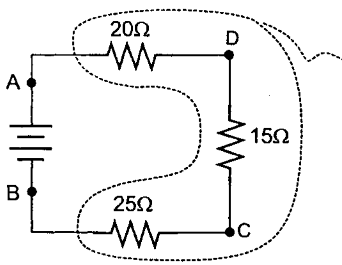
$$G = \frac{1}{R} \rightarrow S = \frac{1}{\Omega}$$



$$R_{AD} = \frac{30\Omega \times 60\Omega}{30\Omega + 60\Omega} = \frac{1800\Omega}{90\Omega} = 20\Omega$$

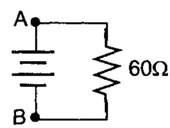
$$R_{CD} = \frac{60 \times 20}{60 + 20} = \frac{1200}{80} = 15\Omega$$

$$R_{BC} = \frac{50 \times 50}{50 + 50} = \frac{2500}{100} = 25\Omega$$



$R_{AB} = 20\Omega + 15\Omega + 25\Omega$

$R_{AB} = 60\Omega$

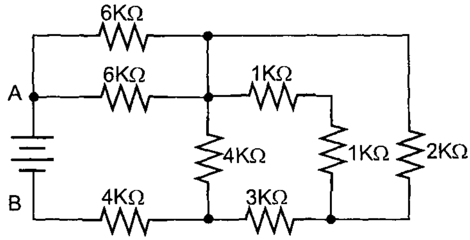


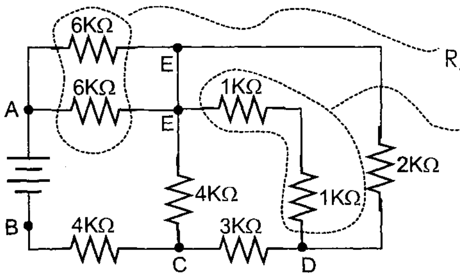
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La IEEE es una organización sin fines de lucro cuyo nombre es el acrónimo de "Institute of Electrical and Electronics Engineers" (Instituto de Ingenieros Eléctricos y Electrónicos). Anualmente, esta organización entrega premios y reconocimientos, incluyendo la medalla de honor IEEE, a ingenieros destacados en sus servicios y aportes en la rama de la electricidad y la electrónica. El 10 de Marzo del año 2009 celebró su aniversario de 125 años de existencia. Seis días después celebró sus "2 millones de artículos publicados". (14)(15)(16)

Ejercicio No. 3

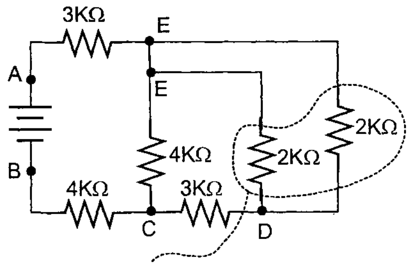
Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



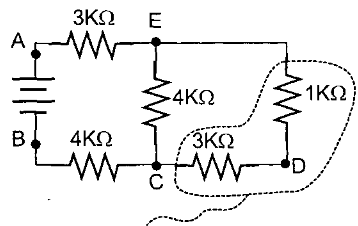


$$R_{AE} = \frac{6K\Omega \times 6K\Omega}{6K\Omega + 6K\Omega} = \frac{36K\Omega}{12} = 3K\Omega$$

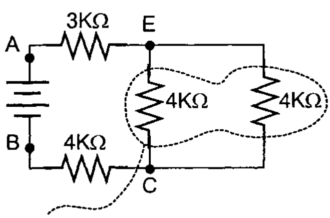
$1K\Omega + 1K\Omega = 2K\Omega$



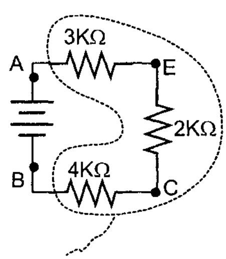
$$R_{AE} = \frac{2K \times 2K}{2K + 2K} = \frac{4K}{4} = 1K\Omega$$



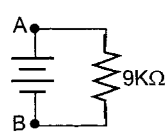
$1K\Omega + 3K\Omega = 4K\Omega$



$$R_{AE} = \frac{4K \times 4K}{4K + 4K} = \frac{16K}{8} = 2K\Omega$$

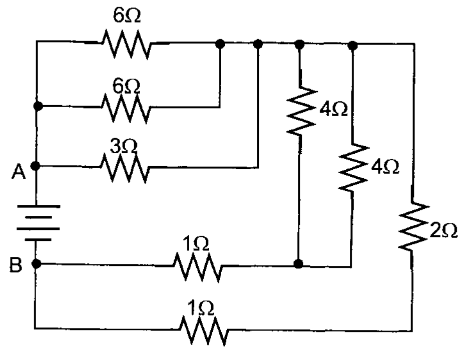


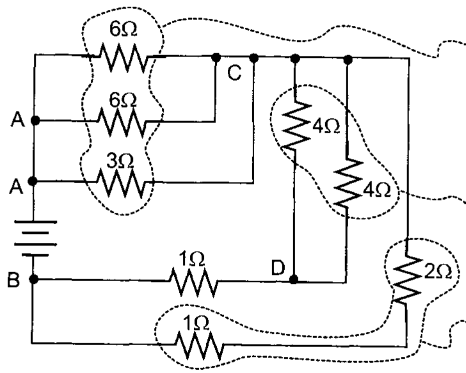
$3K\Omega + 4K\Omega + 2K\Omega = 9K\Omega$



Ejercicio No. 4

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.





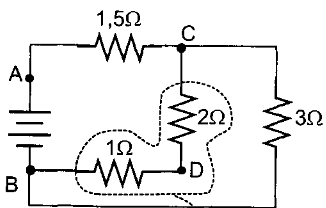
$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{3\Omega}$$

$$\frac{1}{R_{AC}} = \frac{1}{6\Omega} + \frac{1}{6\Omega} + \frac{2}{6\Omega} = \frac{4}{6\Omega}$$

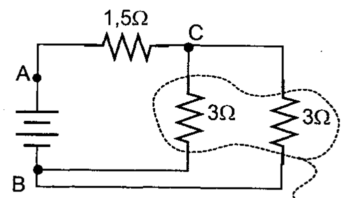
$$R_{AC} = \frac{6\Omega}{4} = 1{,}5\Omega$$

$$R_{CD} = \frac{4 \times 4}{4 + 4} = \frac{16}{8} = 2\Omega$$

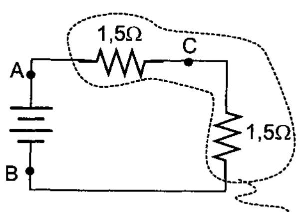
$1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$



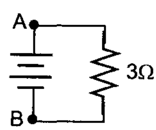
$1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$



$$R_{CD} = \frac{3 \times 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = 1{,}5\Omega$$

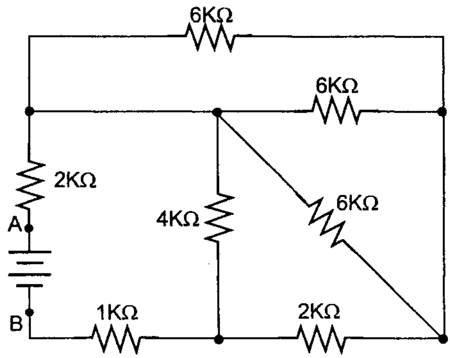


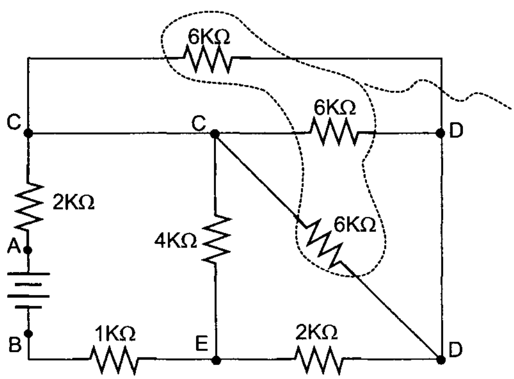
$R_{AB} = 1\Omega + 2\Omega = 3\Omega$



Ejercicio No. 5

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.

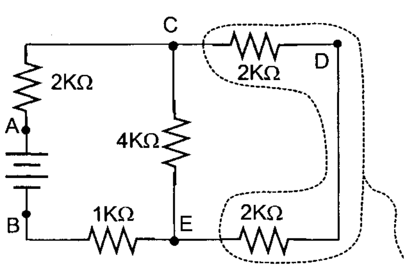




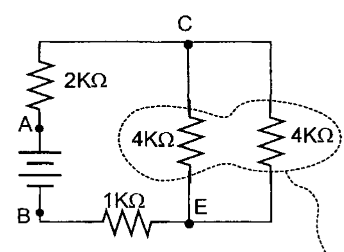
Observe que estas tres resistencias están conectadas en paralelo. (Conectados por nodos C y D).

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{6K\Omega} + \frac{1}{6K\Omega} + \frac{1}{6K\Omega} = \frac{3}{6K\Omega}$$

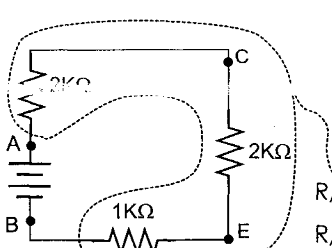
$$R_{CD} = \frac{6K\Omega}{3} = 2K\Omega$$



$2K\Omega + 2K\Omega = 4K\Omega$

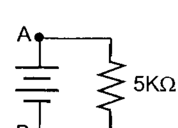


$$R_{AE} = \frac{4K \times 4K}{4K + 4K} = \frac{16K}{8} = 2K\Omega$$



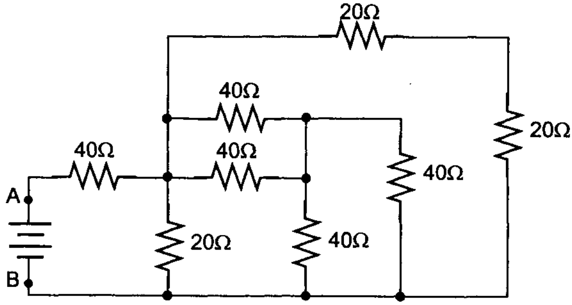
$R_{AB} = 2K\Omega + 2K\Omega + 1K\Omega$

$R_{AB} = 5K\Omega$



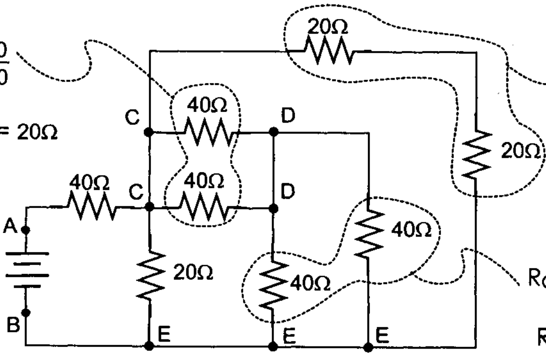
Ejercicio No. 6

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



$$R_{CD} = \frac{40 \times 40}{40 + 40}$$

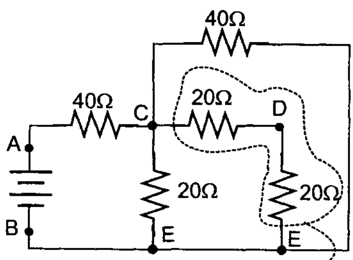
$$R_{CD} = \frac{1600}{80} = 20\Omega$$



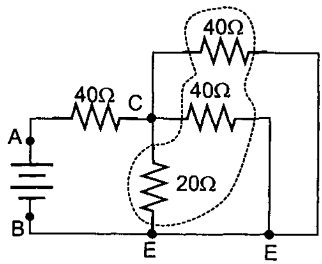
$20\Omega + 20\Omega = 40\Omega$

$$R_{CD} = \frac{40 \times 40}{40 + 40}$$

$$R_{CD} = \frac{1600}{80} = 20\Omega$$



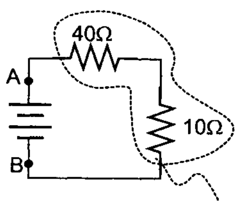
$20\Omega + 20\Omega = 40\Omega$



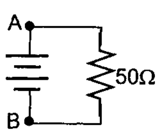
$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{20\Omega} =$$

$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{2}{40\Omega} = \frac{4}{40\Omega}$$

$$R_{CE} = \frac{40\Omega}{4} = 10\Omega$$



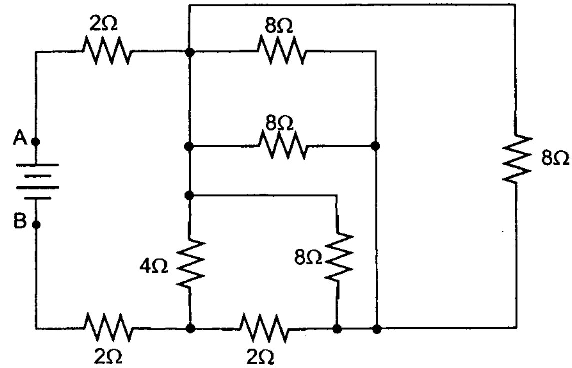
$40\Omega + 10\Omega = 50\Omega$

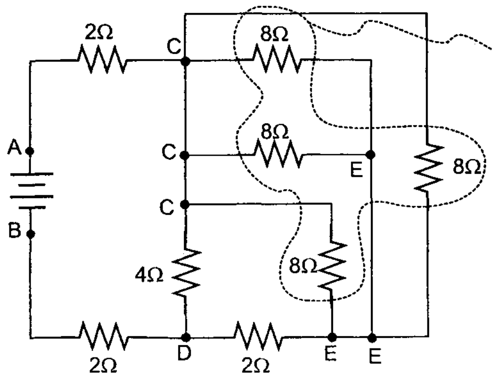


$R_{AB} = 50\Omega$

Ejercicio No. 7

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



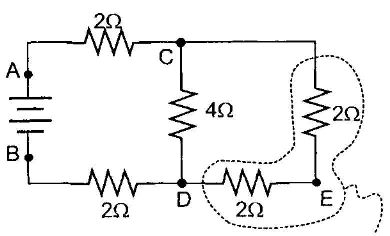


Observe que estas resistencias están conectadas en paralelo. (Conectados por nodos C y E).

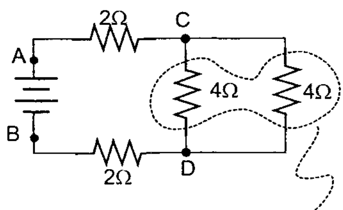
$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{8\Omega} + \frac{1}{8\Omega}$$

$$\frac{1}{R_{CE}} = \frac{4}{8\Omega}$$

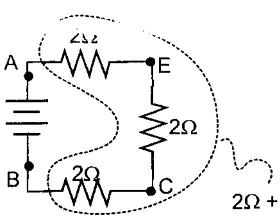
$$R_{CE} = \frac{8\Omega}{4} = 2\Omega$$



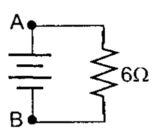
$2\Omega + 2\Omega = 4\Omega$



$$R_{CD} = \frac{4 \times 4}{4 + 4} = \frac{16\Omega}{8} = 2\Omega$$

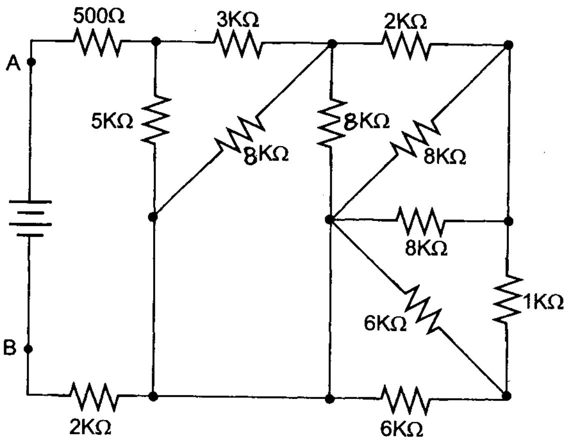


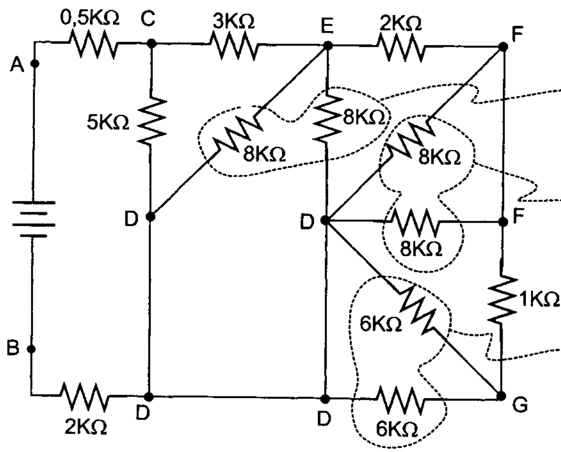
$2\Omega + 2\Omega + 2\Omega = 6\Omega$



Ejercicio No. 8

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.

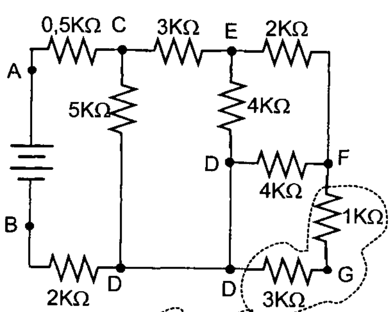




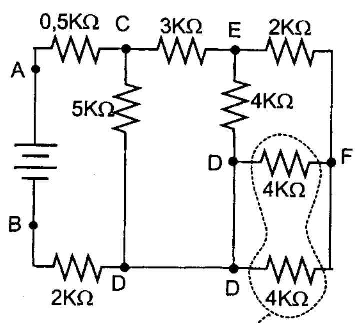
$$R_{DE} = \frac{8K \times 8K}{8K + 8K} = \frac{64K}{16} = 4K\Omega$$

$$R_{DF} = \frac{8K \times 8K}{8K + 8K} = \frac{64K}{16} = 4K\Omega$$

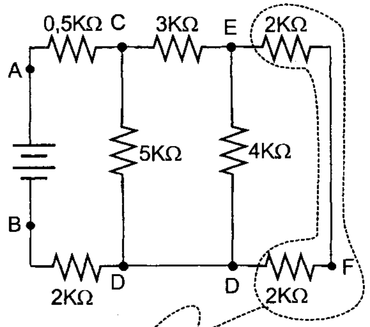
$$R_{DG} = \frac{6K \times 6K}{6K + 6K} = \frac{36K}{12} = 3K\Omega$$



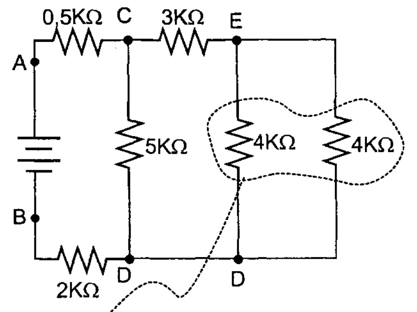
$1k\Omega + 3k\Omega = 4k\Omega$



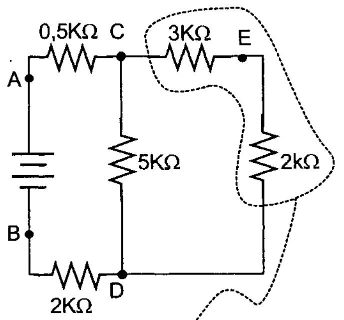
$$R_{DF} = \frac{4K \times 4K}{4K + 4K} = \frac{16K}{8} = 2K\Omega$$



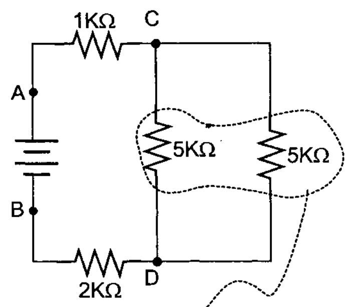
$2k\Omega + 2k\Omega = 4k\Omega$



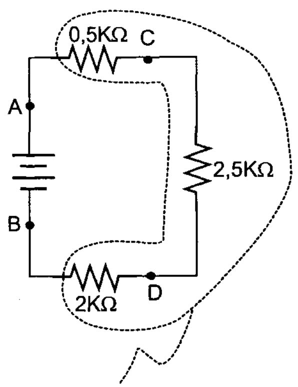
$$R_{DE} = \frac{4K \times 4K}{4K + 4K} = \frac{16K}{8} = 2K\Omega$$



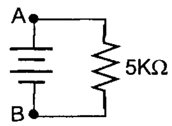
$2k\Omega + 3k\Omega = 5k\Omega$



$$R_{DC} = \frac{5K \times 5K}{5K + 5K} = \frac{25K}{10} = 2{,}5K\Omega$$

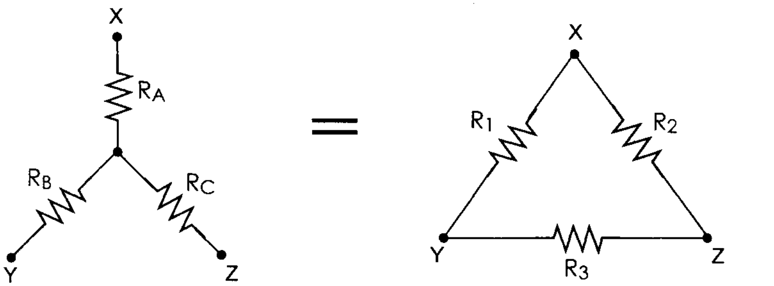


$0{,}5k\Omega + 2{,}5k\Omega + 2k\Omega = 5k\Omega$



2.2 Resistencias equivalentes delta-triángulo:

El teorema de Kennelly enuncia las siguientes equivalencias:

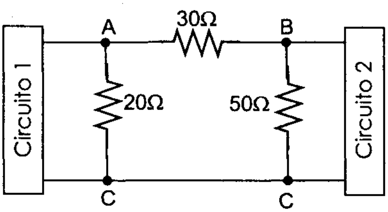


$$R_A = \frac{R1 \times R2}{R1 + R2 + R3} \qquad R_1 = \frac{R_A \times R_B + R_A \times R_C + R_B \times R_C}{R_C}$$

$$R_B = \frac{R1 \times R3}{R1 + R2 + R3} \qquad R_2 = \frac{R_A \times R_B + R_A \times R_C + R_B \times R_C}{R_B}$$

$$R_C = \frac{R2 \times R3}{R1 + R2 + R3} \qquad R_3 = \frac{R_A \times R_B + R_A \times R_C + R_B \times R_C}{R_A}$$

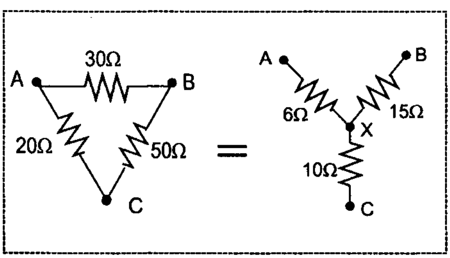
Ejemplo: Encontrar la resistencia equivalente.



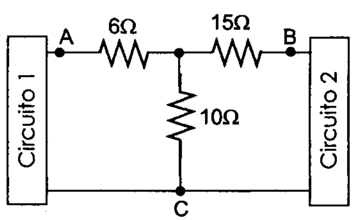
$$R_{AX} = \frac{20\Omega \times 30\Omega}{20\Omega + 30\Omega + 50\Omega} = \frac{600\Omega}{100\Omega} = 6\Omega$$

$$R_{BX} = \frac{30\Omega \times 50\Omega}{20\Omega + 30\Omega + 50\Omega} = \frac{1500\Omega}{100\Omega} = 15\Omega$$

$$R_{CX} = \frac{50\Omega \times 20\Omega}{20\Omega + 30\Omega + 50\Omega} = \frac{1000\Omega}{100\Omega} = 10\Omega$$

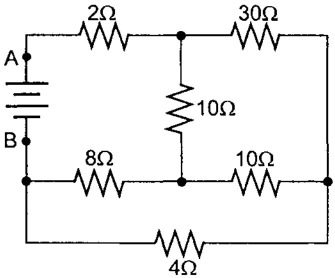


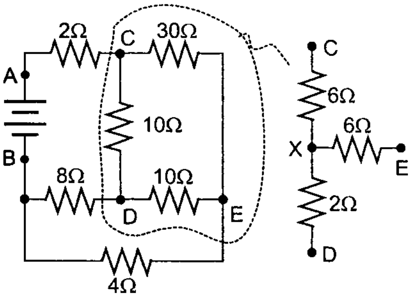
Solución:



Ejercicio No. 9

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.

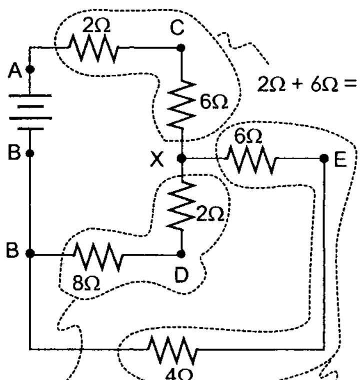




$$R_{CX} = \frac{10\Omega \times 30\Omega}{30\Omega + 10\Omega + 10\Omega} = \frac{300\Omega}{50\Omega} = 6\Omega$$

$$R_{EX} = \frac{10\Omega \times 30\Omega}{30\Omega + 10\Omega + 10\Omega} = \frac{300\Omega}{50\Omega} = 6\Omega$$

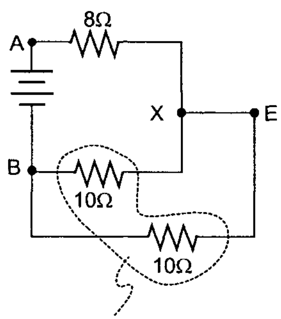
$$R_{DX} = \frac{10\Omega \times 10\Omega}{30\Omega + 10\Omega + 10\Omega} = \frac{100\Omega}{50\Omega} = 2\Omega$$



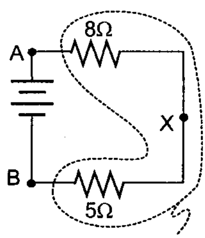
$2\Omega + 6\Omega = 8\Omega$

$8\Omega + 2\Omega = 10\Omega$

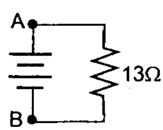
$6\Omega + 4\Omega = 10\Omega$



$$R_{BX} = \frac{10 \times 10}{10+10} = \frac{100}{20} = 5\Omega$$

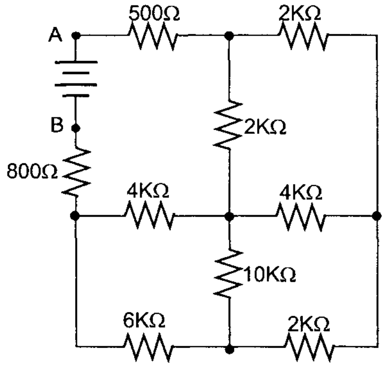


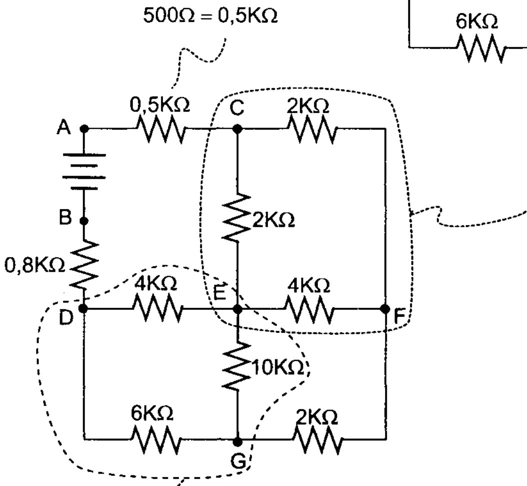
$8\Omega + 5\Omega = 13\Omega$

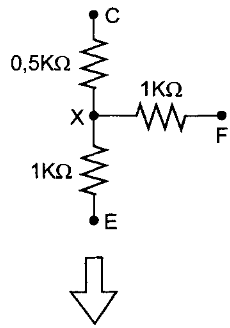


Ejercicio No. 10

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



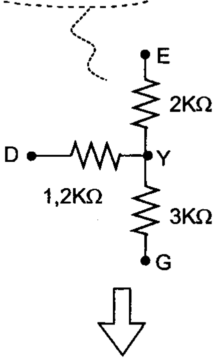




$$R_{CX} = \frac{2K\Omega \times 2K\Omega}{2K\Omega + 2K\Omega + 4K\Omega} = \frac{4K\Omega}{8K\Omega} = 0{,}5K\Omega$$

$$R_{EX} = \frac{2K\Omega \times 4K\Omega}{2K\Omega + 2K\Omega + 4K\Omega} = \frac{8K\Omega}{8K\Omega} = 1K\Omega$$

$$R_{FX} = \frac{2K\Omega \times 4K\Omega}{2K\Omega + 2K\Omega + 4K\Omega} = \frac{8K\Omega}{8K\Omega} = 1K\Omega$$



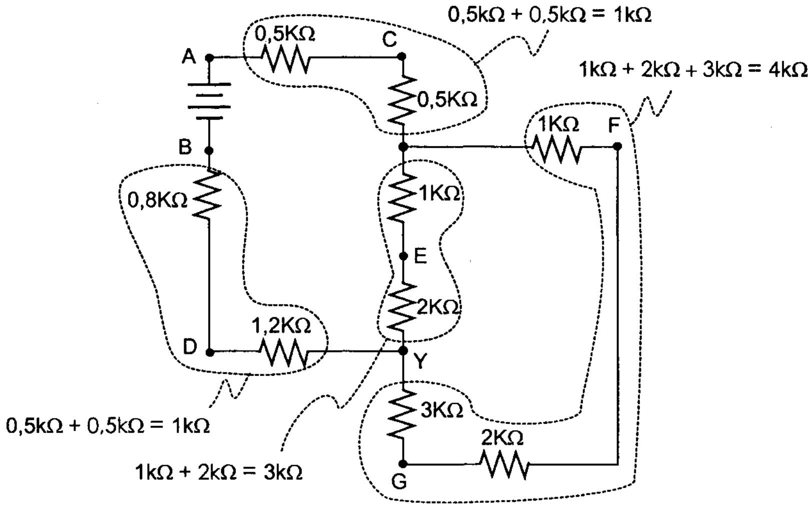
$$R_{EY} = \frac{4K\Omega \times 10K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{40K\Omega}{20K\Omega} = 2K\Omega$$

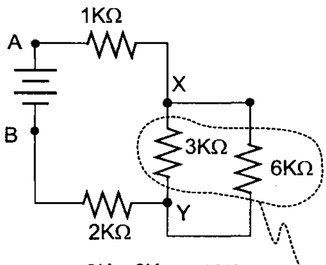
$$R_{GY} = \frac{6K\Omega \times 10K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{60K\Omega}{20K\Omega} = 3K\Omega$$

$$R_{DY} = \frac{4K\Omega \times 6K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{24K\Omega}{20K\Omega} = 1{,}2K\Omega$$

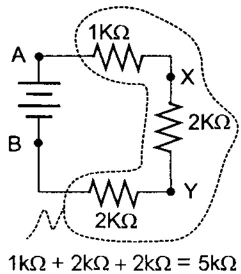
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

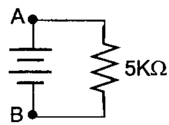
En la mayoría de los conductores, a mayor temperatura, mayor es su resistividad, y por tanto, mayor es su resistencia eléctrica.





$$R_{XY} = \frac{3K \times 6K}{3K + 6K} = \frac{18K}{9} = 2K\Omega$$





CURIOSIDADES

El nombre del teorema de Kennelly fue asignado en honor a Edwin Arthur Kennelly por sus aportes en métodos de análisis en circuitos eléctricos y electrónicos.

Fue asistente de Thomas Alva Edisson y Adwin J. Houston.[17][18]

Edwin Arthur Kennelly

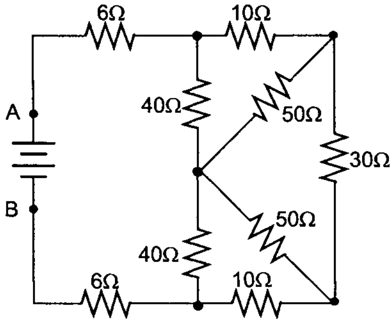
Ingeniero Eléctrico Americano.

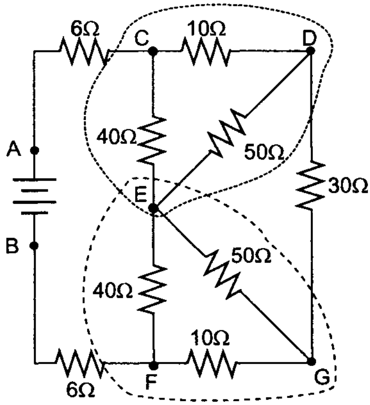
Nació en Calob en India el 17 de Diciembre de 1861

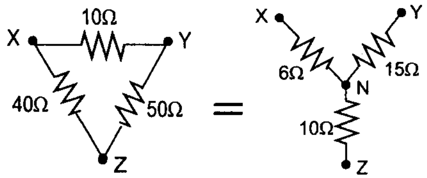
Murió en Boston, el 18 de Junio de 1939

Ejercicio No. 11

Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



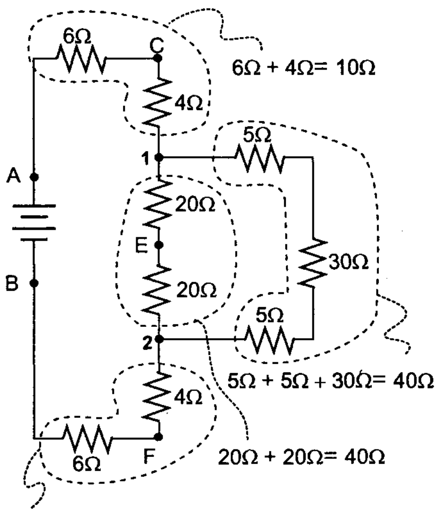




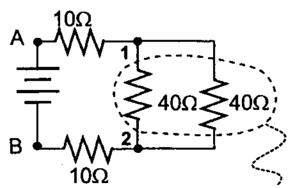
$$R_{XN} = \frac{10\Omega \times 40\Omega}{10\Omega + 40\Omega + 50\Omega} = \frac{400\Omega}{100\Omega} = 4\Omega$$

$$R_{YN} = \frac{10\Omega \times 50\Omega}{10\Omega + 40\Omega + 50\Omega} = \frac{500\Omega}{100\Omega} = 5\Omega$$

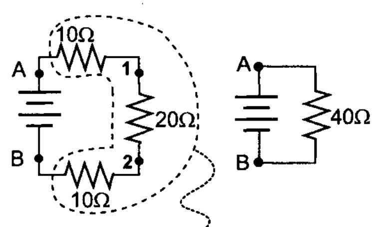
$$R_{ZN} = \frac{40\Omega \times 50\Omega}{10\Omega + 40\Omega + 50\Omega} = \frac{2000\Omega}{100\Omega} = 20\Omega$$



6Ω + 4Ω= 10Ω



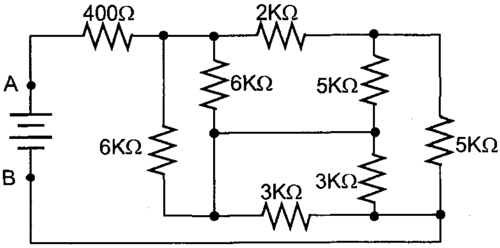
$$R_{12} = \frac{40 \times 40}{40+40} = \frac{1600}{80} = 20\Omega$$

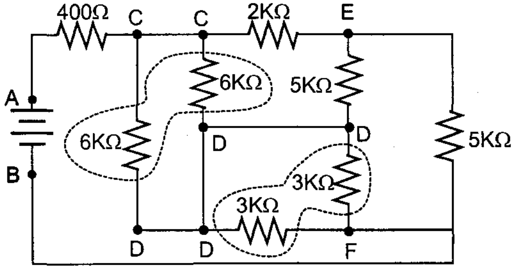


10Ω + 10Ω + 20Ω= 40Ω

Ejercicio No. 12

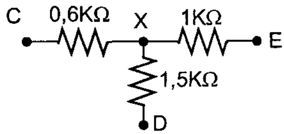
Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.

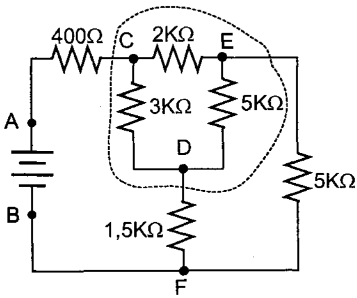




$$R_{CD} = \frac{6 \times 6}{6 + 6} = \frac{36}{12} = 3K\Omega$$

$$R_{DF} = \frac{3 \times 3}{3 + 3} = \frac{9}{6} = 1{,}5K\Omega$$

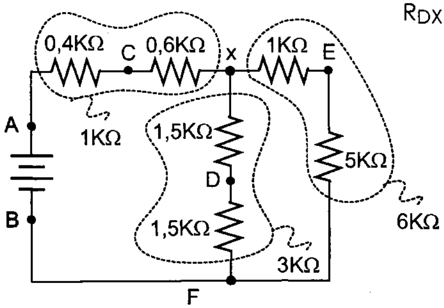


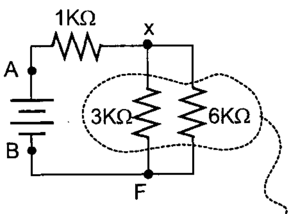


$$R_{CX} = \frac{2K\Omega \times 3K\Omega}{2K\Omega + 3K\Omega + 5K\Omega} = \frac{6K\Omega}{10K\Omega} = 0{,}6K\Omega$$

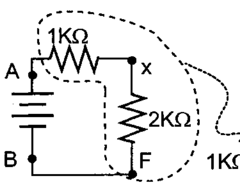
$$R_{EX} = \frac{2K\Omega \times 5K\Omega}{2K\Omega + 3K\Omega + 5K\Omega} = \frac{10K\Omega}{10K\Omega} = 1K\Omega$$

$$R_{DX} = \frac{3K\Omega \times 5K\Omega}{2K\Omega + 3K\Omega + 5K\Omega} = \frac{15K\Omega}{10K\Omega} = 1{,}5K\Omega$$

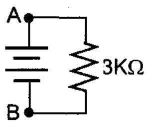




$$R_{FX} = \frac{3 \times 6}{3 + 6} = \frac{18}{9} = 2K\Omega$$

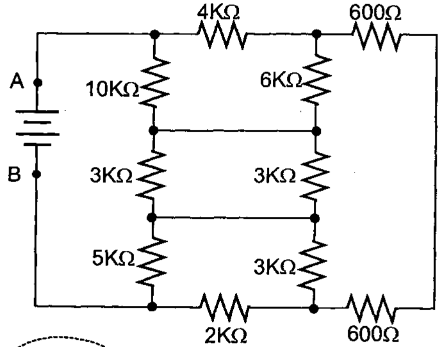


1KΩ + 2KΩ= 3KΩ

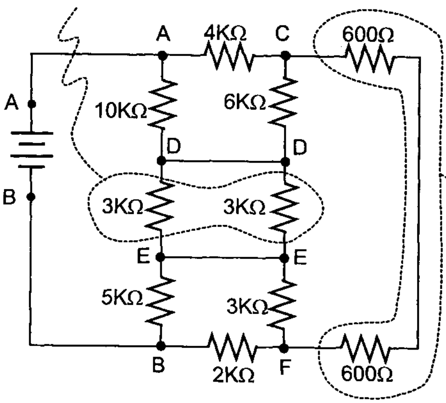


Ejercicio No. 13

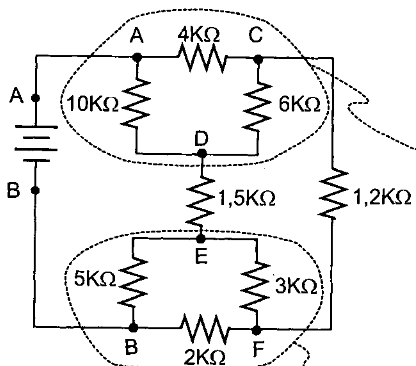
Encontrar la resistencia equivalente R_{AB}.



$$R_{DE} = \frac{3K \times 3K}{3K + 3K} = \frac{9K}{6} = 1{,}5K\Omega$$



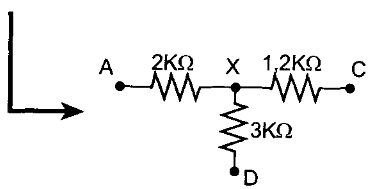
$$600\Omega + 600\Omega = 1200\Omega = 1{,}2K\Omega$$



$$R_{AX} = \frac{4K\Omega \times 10K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{40K\Omega}{20K\Omega} = 2K\Omega$$

$$R_{CX} = \frac{4K\Omega \times 6K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{24K\Omega}{20K\Omega} = 1{,}2K\Omega$$

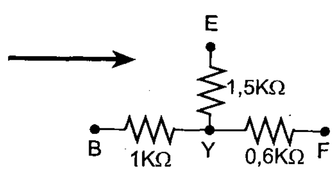
$$R_{DX} = \frac{6K\Omega \times 10K\Omega}{4K\Omega + 10K\Omega + 6K\Omega} = \frac{60K\Omega}{20K\Omega} = 3K\Omega$$



$$R_{EY} = \frac{3K\Omega \times 5K\Omega}{5K\Omega + 3K\Omega + 2K\Omega} = \frac{15K\Omega}{10K\Omega} = 1{,}5K\Omega$$

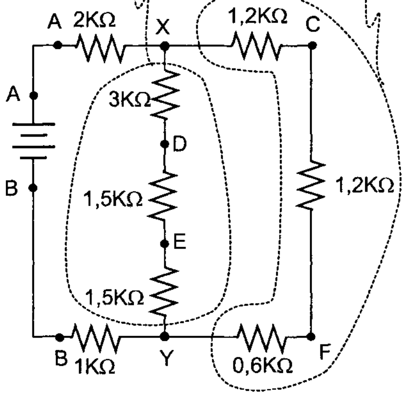
$$R_{BY} = \frac{5K\Omega \times 2K\Omega}{5K\Omega + 3K\Omega + 2K\Omega} = \frac{10K\Omega}{10K\Omega} = 1K\Omega$$

$$R_{FY} = \frac{3K\Omega \times 2K\Omega}{5K\Omega + 3K\Omega + 2K\Omega} = \frac{6K\Omega}{10K\Omega} = 0{,}6K\Omega$$

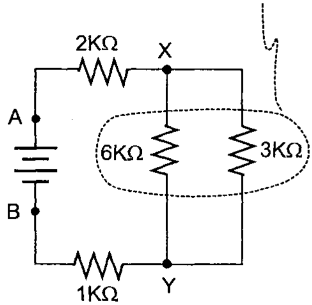


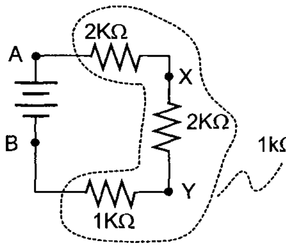
$3K\Omega + 1{,}5K\Omega + 1{,}5K\Omega = 6K\Omega$

$1{,}2K\Omega + 1{,}2K\Omega + 0{,}6K\Omega = 3K\Omega$

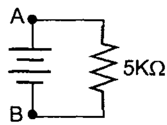


$$R_{XY} = \frac{3K \times 6K}{3K + 6K} = \frac{18K}{9} = 2K\Omega$$





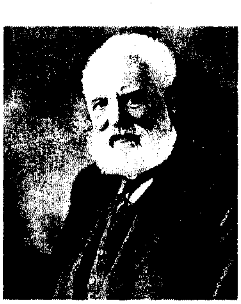
$1k\Omega + 2k\Omega + 2k\Omega = 5k\Omega$



HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La IEEE fue fundada originalmente en el año 1884 por Thomas Alva Edison, Alexander Graham Bell y Franklin Leonard Pope. No fue hasta el año 1963 que formalmente adoptó el nombre de IEEE.(14)

Thomas Alva Edison

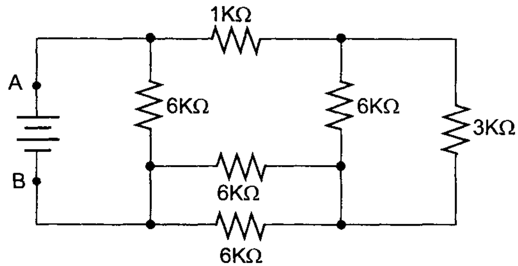


Alexander Graham Bell

Franklin Leonard Pope

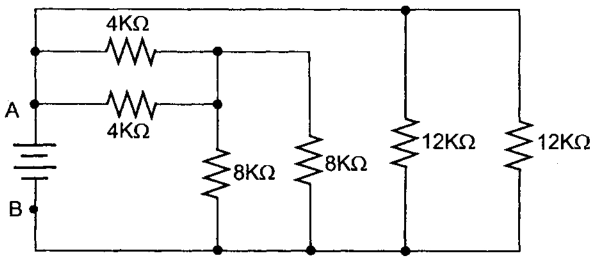
2.3 Ejercicios Propuestos

1)



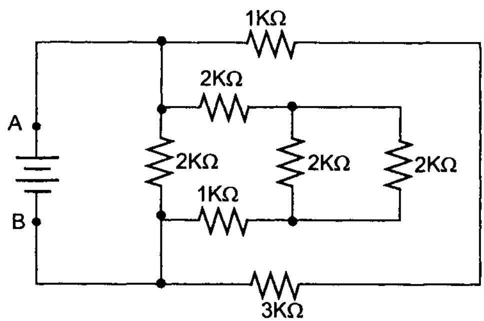
Solución:
$R_T = 3K\Omega$

2)



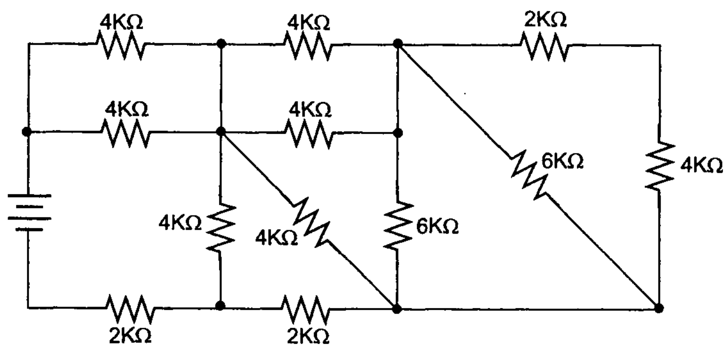
Solución:
$R_T = 3K\Omega$

3)



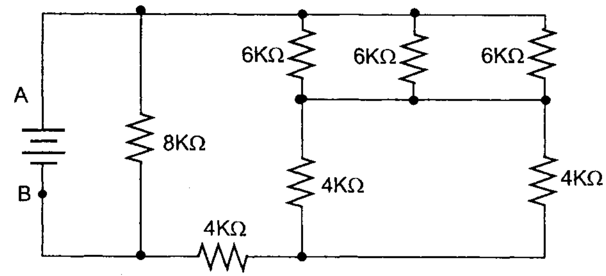
Solución:
$R_T = 1K\Omega$

4)



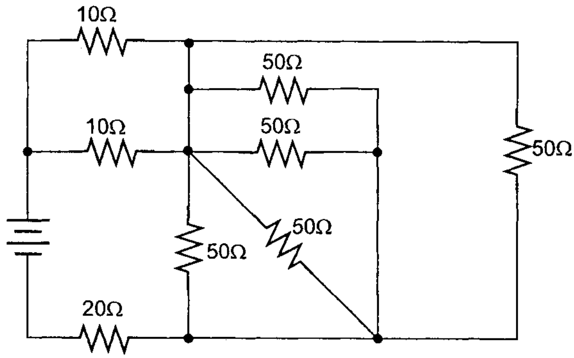
Solución:
$R_T = 6K\Omega$

5)



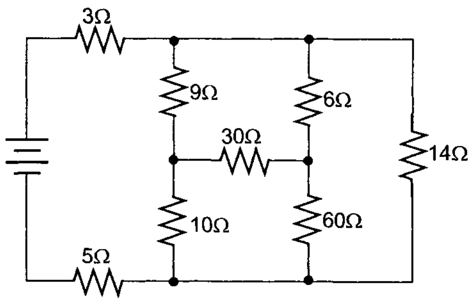
Solución:
$R_T = 4K\Omega$

6)



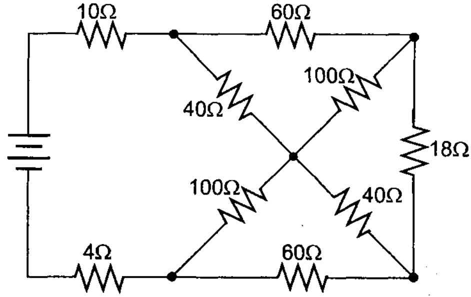
Solución:
$R_T = 35\Omega$

7)



Solución:
$R_T = 15\Omega$

8)



Solución:
$R_T = 80\Omega$

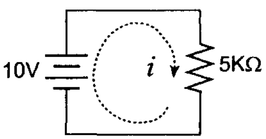
3 LEYES BASICAS EN LOS CIRCUITOS

3.1 Ley de Ohm

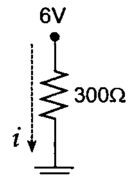
La ley de Ohm establece la relación que existe entre el voltaje, la corriente y la resistencia:

$$\boxed{V = I \times R}$$

Ejemplo: En cada circuito, encontrar la corriente que circula por la resistencia.



$$i = \frac{10V}{5K\Omega} = 2mA$$



$$i = \frac{6V}{300\Omega} = 0.02A$$

$$i = 20mA$$

3.2 Potencia Eléctrica

La potencia eléctrica disipada en una resistencia se puede calcular mediante las siguientes relaciones:

$$\boxed{P = V \times I}$$

Donde P es la potencia (watts)

V es el voltaje (volts)

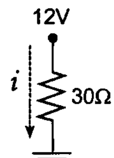
I es la corriente (Ampere)

Reemplazando la ley de ohm V=IR en la ecuación anterior se obtiene...

$$V = I \times R$$

$$P = V \times I \longrightarrow P = (I \times R) \times I \longrightarrow \boxed{P = I^2 \times R}$$

Ejemplo: Encontrar la potencias disipada en la resistencia.



$$i = \frac{12V}{30\Omega} = 0.4A$$

$P = V \times I$

$P = (12) \times (0.4)$

$P = 4.8$ Watts

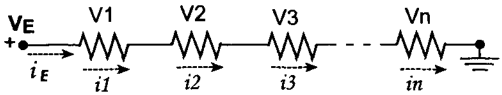
$P = I^2 \times R$

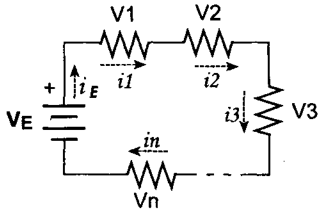
$P = (0.4)^2 \times (30)$

$P = 4.8$ Watts

3.3 Voltajes y corrientes en serie y en paralelo

3.3.1 Voltajes e intensidad de corriente en serie



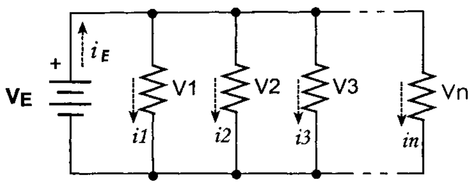


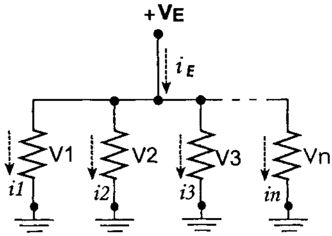
En un circuito en serie...

Las corrientes que circulan por cada resistencia individual son iguales a la corriente suministrada por la fuente: $i_E = i1 = i2 = i3 = \ldots = in$

Las suma de las caída de tensiones en cada resistencia es igual a la tensión suministrada por la fuente: $V_E = V1 + V2 + V3 + \ldots + Vn$

3.3.2 Voltajes e intensidad de corrientes en paralelo





En un circuito en paralelo...

La suma de las corrientes que circulan por cada resistencia es igual a la corriente suministrada por la fuente: $i_E = i1 + i2 + i3 + \ldots + in$

La caída de tensión en cada resistencia individual es igual a la tensión suministrada por la fuente: $V_E = V1 = V2 = V3 = \ldots = Vn$

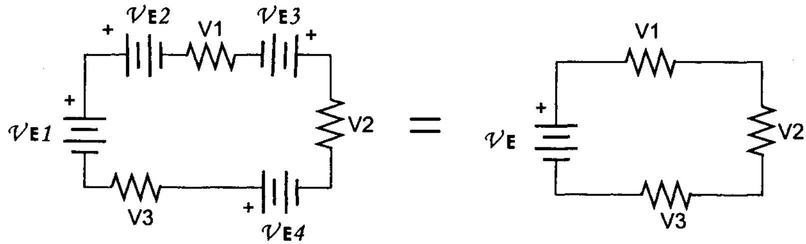
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

George Simon Ohm, nacido en Alemania (1789-1854), determinó la relación entre el voltaje, la intensidad de corriente y la resistencia (V = I x R) empleando instrumentos creados por él mismo. Publicó estos resultados en 1827.[19]

3.3.3 Asociación de fuentes de voltaje en serie

Si en un circuito se tiene dos o más fuentes de voltaje en serie, esta es equivalente una sola fuente de voltaje cuyo valor de voltaje es equivalente a la suma de las fuentes: $\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_{E1} + \mathcal{V}_{E2} + \mathcal{V}_{E3} + ... + \mathcal{V}_{En}$

Ejemplo:



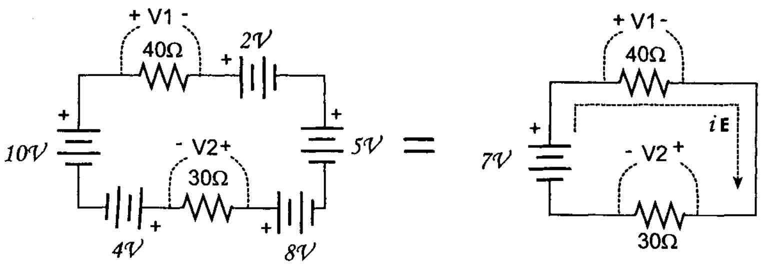
Nota: Recuerde respetar la polarización de las fuentes de voltajes.

$$\mathcal{V}_E = \mathcal{V}_{E1} - \mathcal{V}_{E2} + \mathcal{V}_{E3} - \mathcal{V}_{E4}$$

Considerando el concepto anterior: $\mathcal{V}_E = V1 + V2 + V3$

Entonces: $\mathcal{V}_{E1} - \mathcal{V}_{E2} + \mathcal{V}_{E3} - \mathcal{V}_{E4} = V1 + V2 + V3$

Ejemplo:



$\mathcal{V}_E = 10V - 2V - 5V + 8V - 4V$

$\mathcal{V}_E = 7V$

$$i_E = \frac{7\mathcal{V}}{30\Omega + 40\Omega} = \frac{7\mathcal{V}}{70\Omega}$$

$i_E = 100mA$

Por ley de ohm:

$V1 = i_E \times 40\Omega$

$V1 = 100mA \times 40\Omega$

$V1 = 4\mathcal{V}$

$V2 = i_E \times 30\Omega$

$V2 = 100mA \times 30\Omega$

$V2 = 3\mathcal{V}$

Compruebe:

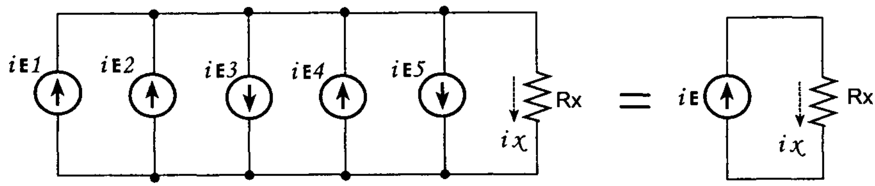
$\mathcal{V}_E = V1 + V2$

$7\mathcal{V} = 4\mathcal{V} + 3\mathcal{V}$

3.3.4 Asociación de fuentes de intensidad de corriente en paralelo

Si en un circuito se tiene dos o más fuentes de corriente en paralelo, esta es equivalente una sola fuente de corriente cuyo valor de corriente es equivalente a la suma de las fuentes: $i_E = i_{E1} + i_{E2} + i_{E3} + \ldots + i_{En}$

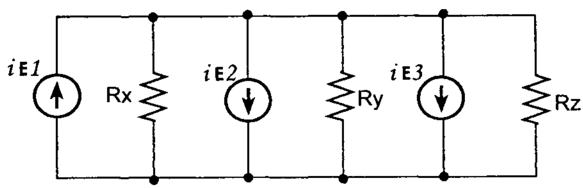
Ejemplo:



Nota: Recuerde respetar la dirección de las fuentes de corrientes:

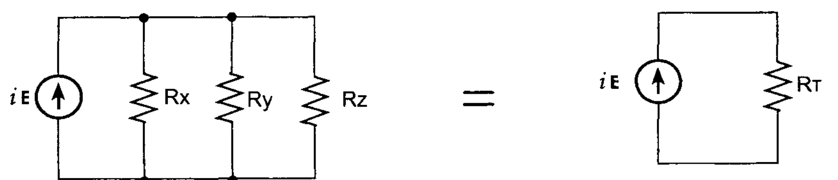
$$i_E = i_{E1} + i_{E2} - i_{E3} + i_{E4} - i_{E5}$$

Aclaración:



No interesa que existan resistencias entre medio de las fuentes de corriente, siempre y cuando estén en paralelo.

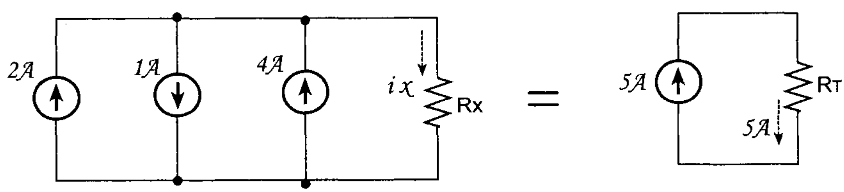
Equivalente:



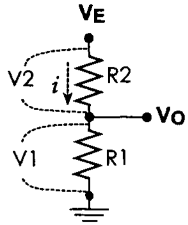
$$i_E = i_{E1} - i_{E2} - i_{E3}$$

$$\frac{1}{R_T} = \frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_y} + \frac{1}{R_z}$$

Ejemplo:



3.4 Divisor de tensión



El divisor de tensión es una configuración en la cual la tensión se divide o reparte entre las resistencias. Se puede deducir el voltaje Vo mediante la fórmula...

$$\boxed{V_O = \frac{R1}{R1 + R2} V_E}$$

Deducción de la fórmula de división de tensión:

Observe que la corriente que pasa por ambas resistencias es la misma, ya que no llega a desviarse por ninguna otra resistencia.

Por ley de kirchoff de voltaje:

$$VE = V1 + V2 \xleftarrow{\textit{reemplazando en}}$$

Por ley de kirchoff de ohm:

$$V1 = i \times R1 \qquad V2 = i \times R2$$

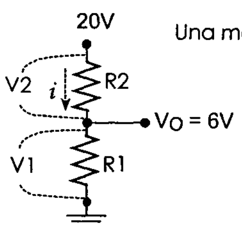
$$VE = i \times R1 + i \times R2$$

Despejando i: $i = \dfrac{VE}{R1 + R2}$

reemplazando en

Observe que $Vo = V1 = i \times R2$ ------------------→ $V_O = \dfrac{R1}{R1 + R2} V_E$

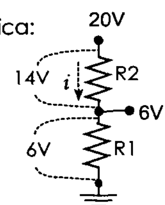
Ejemplo 1: Encontrar dos resistencias para que Vo sea igual a 6V.



Una manera fácil y rápida de resolver esto es por lógica:

Si V1 = 6V, entonces V2 = 14V
como la corriente es la misma, podemos
asumir R1 y R2 tienen la misma relación:

6 : 14



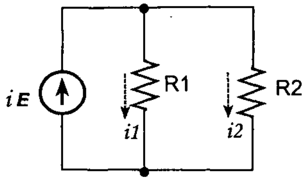
Si R1 = 6Ω, entonces R2 = 14Ω	Si R1 = 300Ω, entonces R2 = 700Ω
Si R1 = 6KΩ, entonces R2 = 14KΩ	Si R1 = 30Ω, entonces R2 = 70Ω
Si R1 = 600Ω, entonces R2 = 1.4KΩ	Si R1 = 90Ω, entonces R2 = 210Ω
Si R1 = 60Ω, entonces R2 = 140Ω	Si R1 = 180Ω, entonces R2 = 420Ω

Ejemplo 2: Si en el caso anterior se conoce que la resistencia R1 es igual a 720Ω, se puede determinar R2 despejando...

$$R2 = \frac{R1 x \, VE}{Vo} - R1 \qquad R2 = \frac{720 \times 20}{6} - 720 = 1.68K\Omega$$

3.5 Divisor de corriente

El divisor de corriente es una configuración en la cual la corriente se divide o reparte entre las resistencias. Se puede deducir la corriente i2 mediante la fórmula...



$$\boxed{i2 = \frac{R1}{R1 + R2}\, i\,E}$$

Deducción de la fórmula de división de tensión:

Observe que la corriente que pasa por ambas resistencias es la misma, ya que no llega a desviarse por ninguna otra resistencia.

Por ley de kirchoff de corriente:

$$iE = i1 + i2$$

reemplazando en

Observe que:

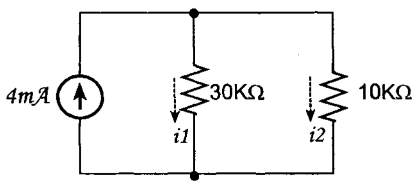
$$i1 \times R1 = i2 \times R2$$

$$i1 = \frac{i2 \times R2}{R1}$$

$$IE = \frac{i2 \times R2}{R1} + i2 \longrightarrow IE = i2\left(\frac{R2}{R1} + 1\right) \longrightarrow IE = i2\left(\frac{R2 + R1}{R1}\right)$$

Ejemplo:

Encontrar el valor de la corriente i2.



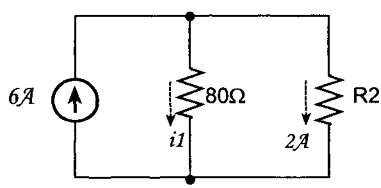
Solución:

$$i2 = 4mA\left(\frac{10K\Omega}{30K\Omega + 10K\Omega}\right)$$

$$i2 = 4mA\left(\frac{3}{4}\right) \longrightarrow i2 = 3mA$$

Ejemplo:

Encontrar el valor de la resistencia R2 para tener una corriente de 2 mA



Solución: Despejando R2:

$$R2 = \frac{IE\,(R1) - I2\,(R1)}{I2}$$

$$R2 = \frac{6A\,(80\Omega) - 2A\,(80\Omega)}{2A} \longrightarrow i2 = 160\Omega$$

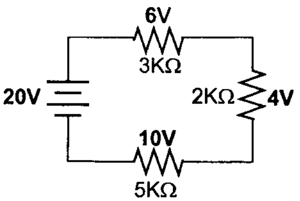
3.6 Leyes de Kirchoff

3.6.1 Ley de Kirchoff de Voltaje

La ley de kirchoff de voltaje (LKV) establece que la suma de los voltajes suministrados por las fuentes de alimentación es igual a la suma de las caídas de voltaje en las resistencias. Es decir, la suma de los voltajes alrededor de una malla es igual a cero.

A continuación se analizarán los siguientes ejemplos de diferentes maneras:

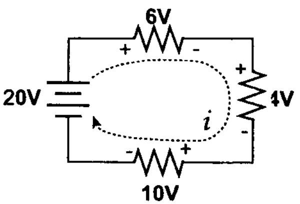
Ejemplo 1:



Puede analizarse así:

Σ *voltajes suministrados*		Σ *Caída de voltaje en las resistencias*
20V	=	6V + 4V + 10V

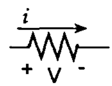
O tambien así:



La suma de los voltajes en una malla es igual a cero.

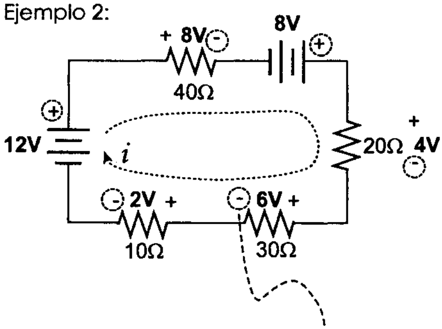
Debe considerarse la polaridad de los voltajes.

Observe en el cuadro inferior que la dirección de la corriente y la polaridad de la caída de voltaje.



0 = 20 - 6V - 4V - 10V

Ejemplo 2:



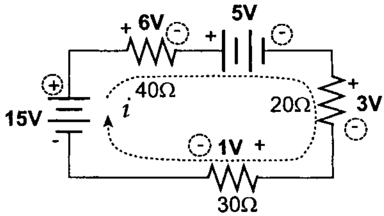
Σ *voltajes suministrados*		Σ *Caída de voltaje en las resistencias*
12V + 8V	=	8V + 4V + 6V + 2V

La suma de los voltajes alrededor de una malla es igual a cero.

0 = 12V - 8V + 8V - 4V - 6V - 2V

Observe que siguiendo la dirección de la corriente, se toma el segundo signo en la polarización de los voltajes.

Ejemplo 3:



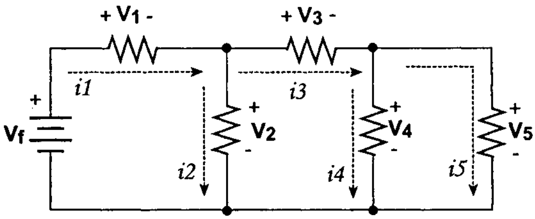
Σ voltajes suministrados		*Σ Caída de voltaje en las resistencias*
15V - 5V	=	6V + 3V + 1V

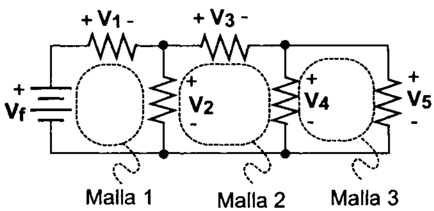
Fuentes polarizadas en sentido opuesto.

La suma de los voltajes alrededor de una malla es igual a cero.

$0 = 15V - 6V - 5V - 3V - 1V$

Ejemplo 4: En el siguiente circuito debe cumplirse lo siguiente...

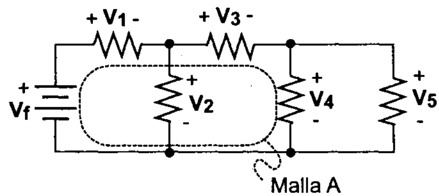


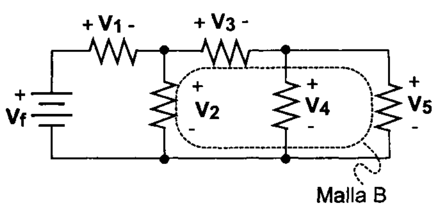


Malla 1: $0 = V_f - V_1 - V_2$

Malla 2: $0 = V_2 - V_3 - V_4$

Malla 3: $0 = V_4 - V_5$

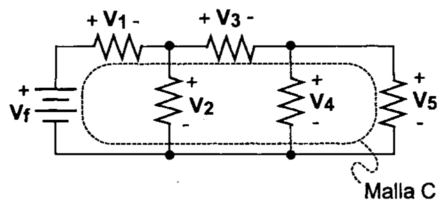




Malla A: $0 = V_f - V_1 - V_3 - V_4$

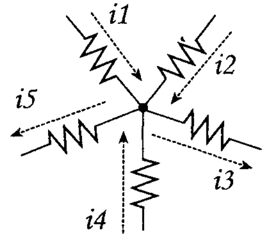
Malla B: $0 = V_2 - V_3 - V_5$

Malla C: $0 = V_f - V_1 - V_3 - V_5$



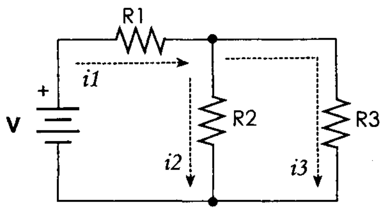
3.6.2 Ley de Kirchoff de Corriente

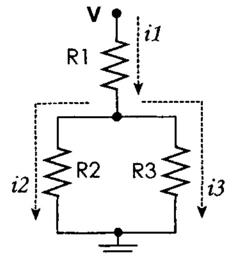
La ley de kirchoff de corriente (LKC) establece que la suma de las corrientes que ingresan a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo.



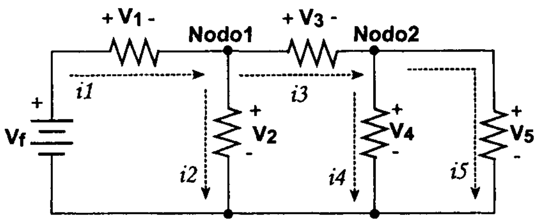
Σ *corrientes que ingresan al nodo*		Σ *corrientes que salen del nodo*
$i1 + i2 + i4$	=	$i3 + i5$

Ejemplo 1: En los siguientes circuitos, por ley de kirchoff the corriente: $i_1 = i_2 + i_3$





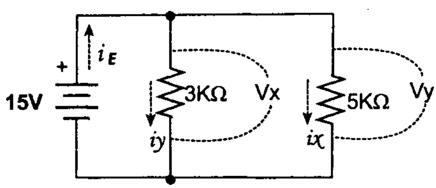
Ejemplo 2: En el siguiente circuito, debe cumplirse las siguientes ecuaciones.



Nodo 1: $i1 = i2 + i3$

Nodo 2: $i3 = i4 + i5$

Ejemplo 3: Determinar el valor de la corriente *ix, iy* e *iE*.



Vx y Vy están en paralelo con la fuente de 15V. Por tanto,

Vx = 15V Vy = 15V

Por ley de ohm...

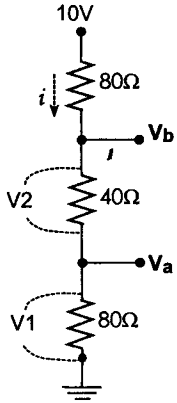
$$ix = \frac{15V}{5K\Omega} = 3mA \qquad iy = \frac{15V}{3K\Omega} = 5mA$$

Por ley de kirchoff de corriente... $iE = iy + ix \longrightarrow iE = 8mA$

3.7 Ejercicios resueltos

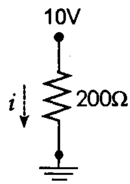
Ejercicio No. 1

Determinar el valor de los voltajes Va y Vb.



Solución:

El circuito es equivalente a...



Por ley de ohm:

$$i = \frac{10V}{200\Omega} = 0.05A = 50\ mA$$

Por ley de ohm:

$V2 = 40\Omega \times 50mA = 2V$

$V1 = 80\Omega \times 50mA = 4V$

Recuerde que Vb y Va se refieren al voltaje entre dicho nodo y tierra.

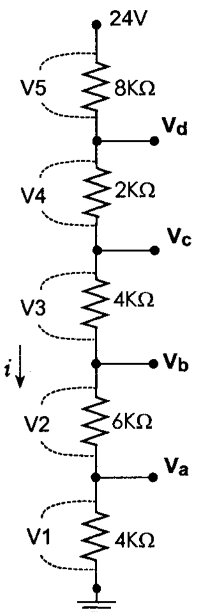
Entonces:

$Vb = V2 + V1 = 2V + 4V$

$Va = V1 = 4V$

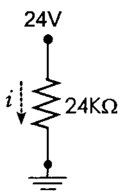
Ejercicio No. 2

Determinar el valor de los voltajes Va, Vb, Vc y Vd



Solución:

Circuito equivalente:



Por ley de ohm:

$$i = \frac{24V}{24K\Omega} = 1mA$$

$V5 = 8K\Omega \times 1mA = 8V$

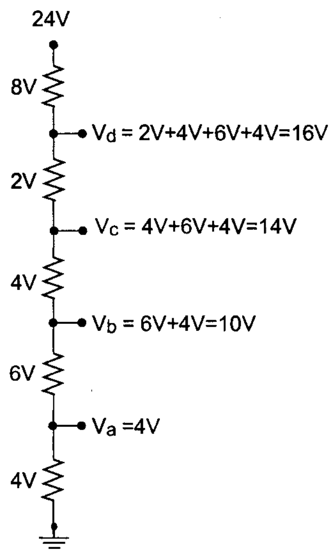
$V4 = 2K\Omega \times 1mA = 2V$

$V3 = 4K\Omega \times 1mA = 4V$

$V2 = 6K\Omega \times 1mA = 6V$

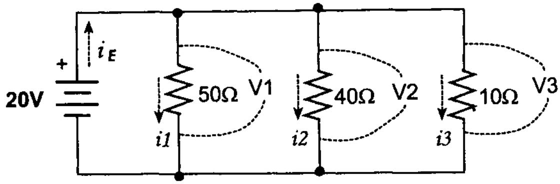
$V1 = 4K\Omega \times 1mA = 4V$

Entonces:



Ejercicio No. 3

Determinar el valor de las corrientes i_E, $i1$, $i2$ e $i3$.



Solución:

Como el voltaje V1, V2 y V3 estan en paralelo con la fuente, entonces....

$$V1 = V2 = V3 = 20V$$

Por ley de ohm...

$$i1 = \frac{20V}{50\Omega} = 0{,}4A = 400\ mA \qquad i2 = \frac{20V}{40\Omega} = 0{,}5A = 500\ mA \qquad i3 = \frac{20V}{10\Omega} = 2A$$

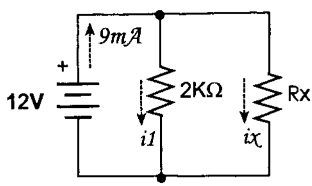
Por ley de kirchoff de corriente y por corrientes en paralelo....

$$i_E = i1 + i2 + i3$$

$$i_E = 0{,}4A + 0{,}5A + 2A \longrightarrow i_E = 0{,}4A$$

Ejercicio No. 4

Determinar el valor de la resistencia



Solución:

Por estar las resistencias en paralelo...

$$12V = V1 = Vx$$

$$9mA = i1 + ix \text{ (ec. A)}$$

Por ley de ohm...

$$i1 = \frac{12V}{2K\Omega} = 6mA$$

Reemplazando resultado de ec. B ($i1$ = 6mA) en ec. A:

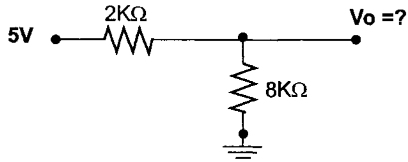
$$9mA = 6mA + ix \longrightarrow i1 = 3mA$$

Empleando el resultado anterior, por ley de ohm...

$$Rx = \frac{12V}{3mA} = 4mA$$

Ejercicio No. 5

Calcular el valor del voltaje Vo.



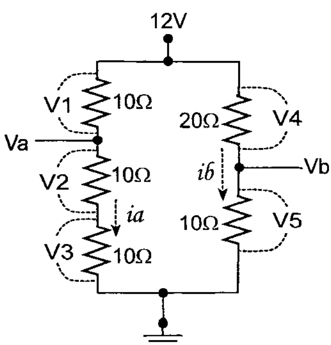
Solución:

Se puede resolver directamente con la ecuación del divisor de tensión:

$$Vo = \frac{8K\Omega}{8K\Omega + 2K\Omega} \times 5V \longrightarrow Vo = 4V$$

Ejercicio No. 6

Calcular el valor de los voltajes V1, V2, V3, V4, V5, Va y Vb.



Solución:

$$ia = \frac{12V}{10\Omega + 10\Omega + 10\Omega} \longrightarrow ia = 0,4A$$

$$ib = \frac{12V}{20\Omega + 10\Omega} \longrightarrow ib = 0,4A$$

$V1 = ia \times 10\Omega = 0,4A \times 10\Omega = 4V$

$V2 = ia \times 10\Omega = 0,4A \times 10\Omega = 4V$

$V3 = ia \times 10\Omega = 0,4A \times 10\Omega = 4V$

$V4 = ib \times 20\Omega = 0,4A \times 20\Omega = 2V$

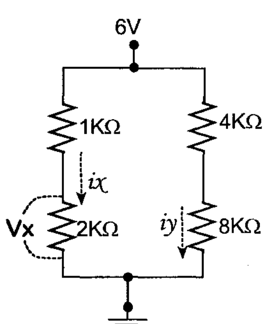
$V5 = ib \times 10\Omega = 0,4A \times 10\Omega = 4V$

$Va = V2 + V3 \longrightarrow Va = 8V$

$Vb = V5 \longrightarrow Vb = 4V$

Ejercicio No. 7

Calcular el voltaje Vx y la corriente iy.



Solución:

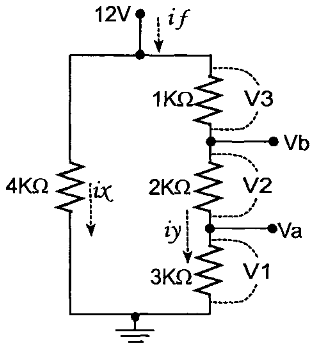
$$ix = \frac{6V}{1K\Omega + 2K\Omega} \longrightarrow ix = 2mA$$

$$iy = \frac{6V}{8K\Omega + 4K\Omega} \longrightarrow iy = 0,5mA$$

$Vx = ix\,(2K\Omega) = 2mA\,(2K\Omega) = 4V$

Ejercicio No. 8

Calcular el valor de los voltajes V1, V2, V3, V4, ix, iy, if



Observe que se cumple....

V1 + V2 + V3 = 12V

V4 = 12V

Solución:

$$iy = \frac{12V}{1K\Omega + 2K\Omega + 3K\Omega} \longrightarrow iy = 2mA$$

$$ix = \frac{12V}{4K\Omega} \longrightarrow iy = 3mA$$

$$if = ix + iy = 2\ mA + 3mA \longrightarrow if = 5mA$$

$$V1 = iy\ (3K\Omega) = 2mA\ (3K\Omega) = 6V$$

$$V2 = iy\ (2K\Omega) = 2mA\ (2K\Omega) = 4V$$

$$V3 = iy\ (1K\Omega) = 2mA\ (1K\Omega) = 2V$$

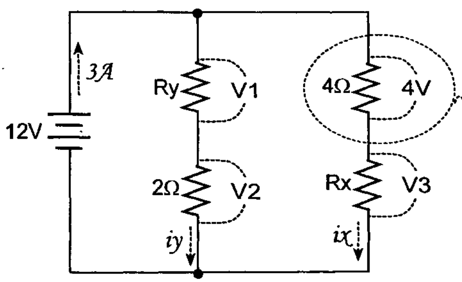
$$V4 = ix\ (4K\Omega) = 3mA\ (4K\Omega) = 12V$$

$$Vb = V1 + V2 = 6V + 4V \longrightarrow Va = 10\ V$$

$$Va = V1 \longrightarrow Va = 6V$$

Ejercicio No. 9

Calcular el valor de los voltajes Vy y la corriente ix.



Solución:

Por ley de ohm:

$$ix = \frac{4V}{4\Omega} \longrightarrow ix = 1A$$

Por ley de kirchoff de corriente:

$$3A = ix + iy$$

$$3A = 1A + iy \longrightarrow iy = 2A$$

Por ley de kirchoff de voltaje:

$$12\ V = 4V + V3 \longrightarrow V3 = 8V$$

Por ley de ohm:

$$Rx = \frac{V3}{ix} = \frac{8V}{1A} = 8\Omega$$

$$V2 = (2\Omega)(iy) = (2\Omega)(2A) = 4V$$

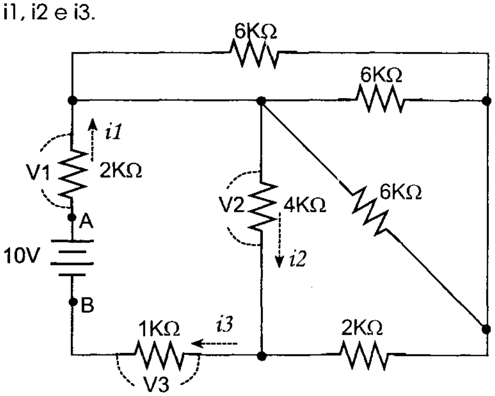
$$12\ V = V1 + V2$$

$$12\ V = V1 + 4V \longrightarrow V1 = 8V$$

$$Ry = \frac{V1}{iy} = \frac{8V}{2A} = 4\Omega$$

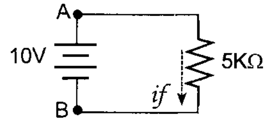
Ejercicio No. 10

Encontrar los voltajes V1, V2 y V3 y las corrientes i1, i2 e i3.



Observe que...

La resistencia equivalente R_{AB} es 5KΩ (resuelto en ejercicio 4 del capítulo anterior).



Por ley de ohm:

$$if = \frac{10V}{5K\Omega} \dashrightarrow if = 2mA$$

Observe que *i1 e i3 = if....*

i1 = 2mA   *i3* = 2mA

Por ley de ohm:

V3 = i3 (1KΩ) = 2mA (1KΩ) = 2V

V1 = i1 (2KΩ) = 2mA (2KΩ) = 4V

Por ley de kirchoff de voltaje:

10 = V1 + V2 + V3 ⟶ V2 = 10 - V1 - V3

V2 = 10 - 4 - 2

V2 = 4V

$$i2 = \frac{V2}{4K\Omega} = \frac{4V}{4K\Omega} \dashrightarrow i2 = 1mA$$

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

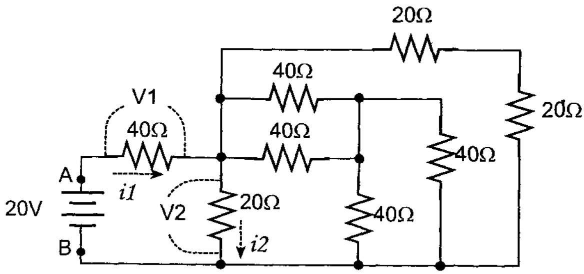
¿Sabía Ud. que...Georg Simon Ohm no fué el primer científico en determinar la ley de ohm (publicado en 1827)?

Henry Cavendish era un científico británico (1731 – 1810) que realizó muchos descubrimientos sin publicar los mismos. Varios años posteriores a su muerte, James Clerk Maxwell inspeccionó los apuntes de Henry Cavendish y descubrió que ya en 1781, cuarenta y seis años previos a la publicación de la ley de Ohm, Cavedish había determinado la relación entre voltaje, intensidad de corriente y resistencia. [19][20]

Henry Cavendish
(1731 – 1810)

Ejercicio No. 11

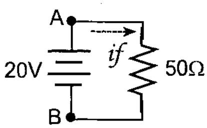
Encontrar los voltajes V1y V2
y las corrientes i1 e i2.



Observe que...

La resistencia equivalente R_{AB} es 50Ω
(resuelto en ejercicio 5 del capítulo anterior).

Por ley de ohm:



$if = \dfrac{20V}{50\Omega} \dashrightarrow$ if = 0,4A

$i1 = if =$ 0,4A

Por ley de kirchoff de voltaje:

V1 = i1 (40Ω) = 0,4A (40Ω) = 16V

20 = V1 + V2 ⟶ V2 = 20 - V1

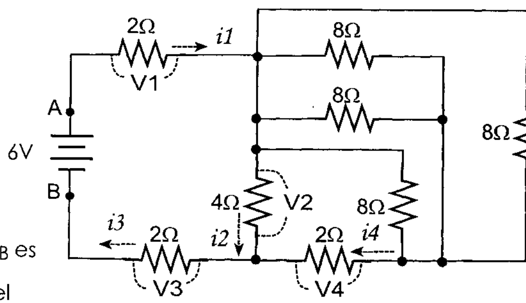
V2 = 20 - 16 = 4V

Por ley de ohm:

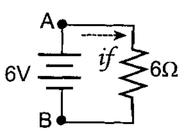
$i2 = \dfrac{V2}{20\Omega} = \dfrac{4V}{20\Omega} \longrightarrow$ i2 = 0,2A

Ejercicio No. 12

Encontrar los voltajes V1,
V2, V3 y V4 y las corrientes
i1, i2, i3 e i4.



Observe que...
La resistencia equivalente R_{AB} es
6Ω (resuelto en ejercicio 6 del
capítulo anterior).



$if = \dfrac{6V}{6\Omega} \longrightarrow$ if = 1A

$i1 = i3 = if =$1A

Por ley de ohm:

V3 = i3 (2Ω) = 1A (2Ω) = 2V

V1 = i1 (2Ω) = 1A (2Ω) = 2V

Por ley de kirchoff de voltaje:

6V = V1 + V2 + V3

V2 = 6 - V1 - V3 ⟶ V2 = 2V

Por ley de ohm:

$i2 = \dfrac{V2}{4\Omega} = \dfrac{2V}{4\Omega} \longrightarrow$ i2 = 0,5A

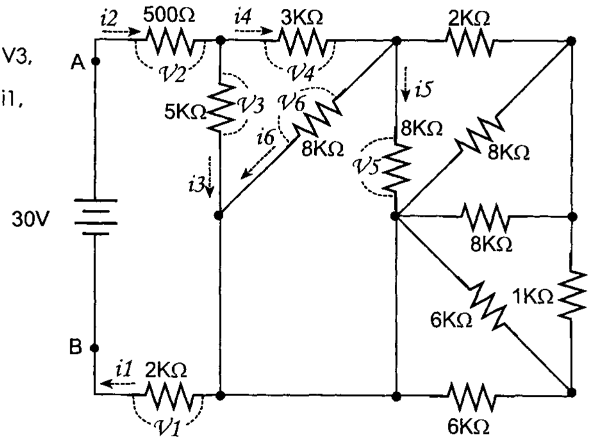
Por ley de kirchoff de corriente:

i2+ i4 = i3 ⟶ i4= 0,5A

$V4 = i4\,(2\Omega) = 1V$

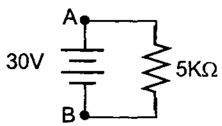
Ejercicio No. 13

Encontrar los voltajes V1, V2, V3, V4, V5 y V6, y las corrientes i1, i2, i3, i4, i5 e i6.



Observe que...

La resistencia equivalente R_{AB} es 5KΩ (resuelto en ejercicio 7 del capítulo anterior).



Por ley de ohm:

$$if = \frac{30V}{5K\Omega} \longrightarrow if = 6mA$$

Observe que *i1 e i2 = if....*

$i1 = 6mA \qquad i2 = 6mA$

Por ley de ohm:

V1 = i1 (2KΩ) = 6mA (2KΩ) = 12V

V2 = i2 (0,5KΩ) = 6mA (0,5KΩ) = 3V

Por ley de kirchoff de voltaje:

30 = V2 + V3 + V1 ⟶ V3 = 30 - V2 - V3

V3 = 30 - 12 - 3 ⟶ V3 = 15V

$$i3 = \frac{V3}{5K\Omega} = \frac{15V}{5K\Omega} \longrightarrow i3 = 3mA$$

Por ley de kirchoff de corriente:

$i2 = i3 + i4 \longrightarrow i4 = i2 - i3$

$i4 = 6mA - 3mA \longrightarrow i4 = 3mA$

V4 = i4 (3KΩ) = 3mA (3KΩ) = 9V

Por ley de kirchoff de voltaje:

0 = V3 - V6 - V4

V6 = V3 - V4 = 15V - 9V ⟶ V6 = 6V

$$i6 = \frac{V6}{8K\Omega} = \frac{6V}{8K\Omega} \longrightarrow i6 = 0{,}75mA$$

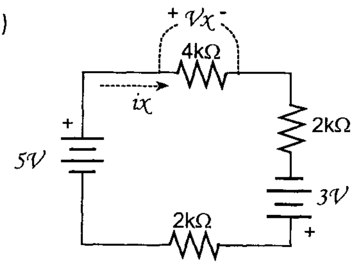
Como V6 y V5 están en paralelo:

V5 = V6 ⟶ V5 = 6V

$$i5 = \frac{V5}{8K\Omega} = \frac{6V}{8K\Omega} \longrightarrow i7 = 0{,}75mA$$

3.8 Ejercicios Propuestos

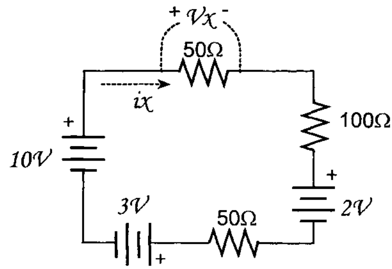
1)



Solución: $i_x = 1mA$

$V_x = 4V$

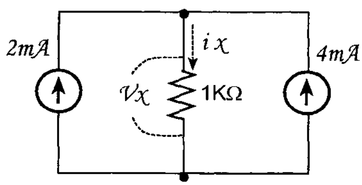
2)



Solución: $i_x = 25mA$

$V_x = 1{,}25V$

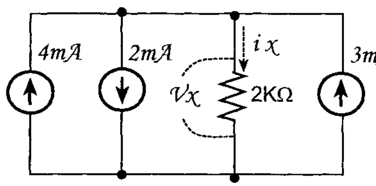
3)



Solución: $i_x = 6mA$

$V_x = 6V$

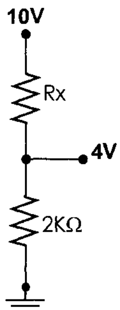
4)



Solución: $i_x = 5mA$

$V_x = 10V$

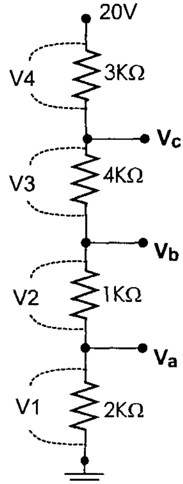
5)



Solución:

Rx = 3KΩ

6)



Solución:

$V_a = 4V$

$V_b = 6V$

$V_c = 14V$

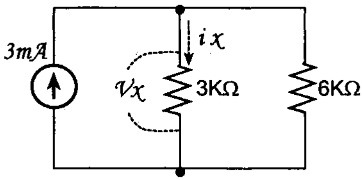
$V_1 = 4V$

$V_2 = 2V$

$V_3 = 8V$

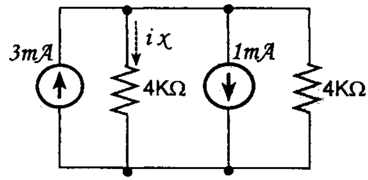
$V_4 = 6V$

7)



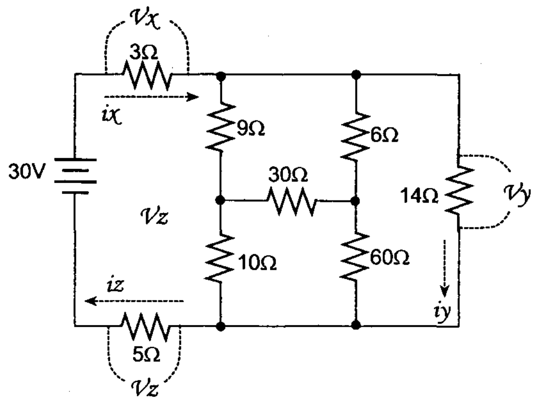
Solución: $i_x = 2mA$
$V_x = 6V$

8)



Solución: $i_x = 1mA$

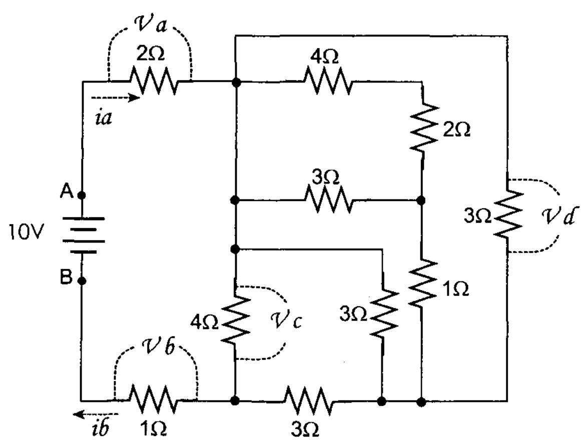
9) Encontrar la resistencia equivalente. En base al resultado, determinar los voltajes Vx, Vy y Vz y las corrientes ix, iy e iz.



Solución:
$R_T = 15\Omega$

Vx = 6V	ix = 2mA
Vy = 14V	iy = 1mA
Vz = 10V	iz = 2mA

10) Encontrar la resistencia equivalente. En base al resultado, determinar los voltajes Va, Vb, Vc y Vd y las corrientes ia, ib e ic.



Solución:
$R_T = 5\Omega$

Va = 4V	ia = 2mA
Vb = 2V	ib = 2mA
Vc = 4V	ic = 1mA
Vd = 1V	

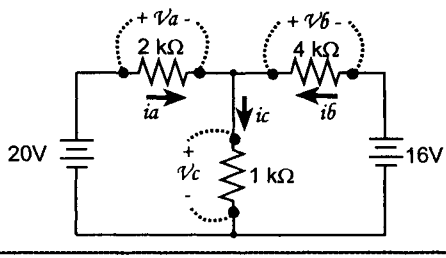
4 ANALISIS POR MALLAS

4.1 Procedimiento para análisis por mallas

El método de análisis por mallas está basado en la ley de kirchoff de voltaje (LKV) que enuncia:

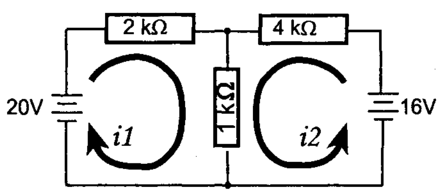
"La sumatoria de los voltajes entregados y absorbidos alrededor de una malla cerrada es igual a 0"

En resumen, el método consiste en trazar corrientes independientes en cada malla. La corriente que pasa por cualquier resistencia dada es la sumatoria de las corrientes independientes. Como por ley de ohm, cada resistencia tiene un voltaje equivalente la corriente por la resistencia, entonces este método calcula la sumatoria de las tensiones basado en las corrientes trazadas.
A continuación, se resuelve el siguiente ejercicio paso a paso:



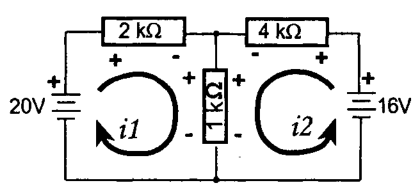
Paso 1:

Trazar la trayectoria de las corrientes en cada malla.



Paso 2:

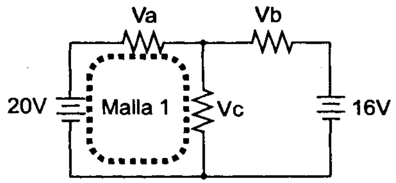
Tomar en cuenta la polaridad de las caídas de tensiones en cada resistencias de acuerdo a la dirección de la corriente trazada en el paso 1.



Paso 3:

Plantear la ecuación de cada malla. Analizar la tensión en cada componente de acuerdo a la polarización realizada en el paso 2.

Ecuación malla 1:



$$20 - 2i1 - i1 - i2 = 0$$

Análisis de la ecuación de la malla 1:

La ley de kirchoff de voltaje indica que la suma de las tensiones alrededor de una malla es igual a 0. Es decir,

$$20 - Va - Vc = 0 \text{ (Ecuación 4.0.1)}$$

donde por ley de ohm:

Va es la corriente que pasa por la resistencia de 2KW x el valor de esta resistencia.

Vc es la corriente que pasa por la resistencia de 1KW x el valor de esta resistencia.

Observe en la figura 4.0-b que...

La corriente que pasa por la resistencia de 2KΩ es I1. Es decir:

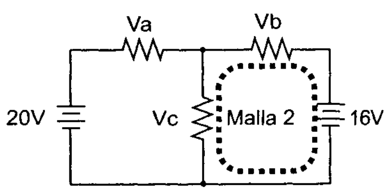
$$Va = i1 \times 2\,K\Omega. \text{ (Ecuación 4.0.2)}$$

Las corrientes que pasan por la resistencia de 4KΩ son I1 e I2.

$$V6 = (i1+i2) \times 1\,K\Omega. \text{ (Ecuación 4.0.3)}$$

La ecuación de la malla indicada se obtiene reemplazando las ecuaciones 4.0.2 y 4.0.3 en ecuación 4.0.1, se obtiene: $20 - 2i1 - 1\,(i1 + i2) = 0$

Ecuación malla 2:



Realizando el mismo análisis anterior, se puede comprobar la ecuación planteada de la malla 2.

$$16 - 4i2 - i1 - i2 = 0$$

Paso 4:

Resolver las ecuaciones:

$20 - 2i1 - i1 - i2 = 0$ | $16 - 4i2 - i1 - i2 = 0$

$20 = 3i1 + i2$ *(ecuación 1)* | $16 = i1 + 5i2$

x(-3)

$$\begin{array}{rcl} 20 & = & 3i1 + i2 \\ -48 & = & -3i1 - 15i2 \\ \hline -28 & = & -14\,i2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad i2 = 2mA$$

Observe en las figura 4.0a y 4.0c que ib e $i2$ se orientan en la misma dirección. Por tanto, $ib = i2$ ⟶ $ib = 2mA$

Reemplazando $i2 = 2mA$ en la ecuación 1:

$$20 = 3i1 + (2)$$
$$18 = 3i1 \quad \longrightarrow \quad i1 = 6mA$$

Observe en las figura 4.0a y 4.0c que ia e $i1$ se orientan en la misma dirección. Por tanto, $ia = i1$ ⟶ $ia = 6mA$

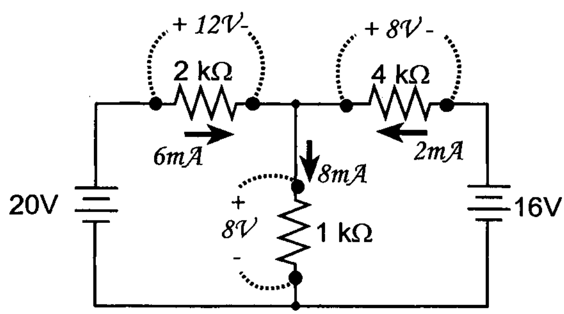
Observe en las figura 4.0a y 4.0b que $ic = i1+i2$.

$$ic = 6mA + 2\,mA \quad \longrightarrow \quad ic = 8mA$$

Utilice la ley de ohm para calcular los voltajes:

$Va = ia \times 2K\Omega$	$Vb = ib \times 4K\Omega$	$Vc = ic \times 1K\Omega$
$Va = (6mA)(2K\Omega)$	$Vb = (2mA)(4K\Omega)$	$Vc = (8mA)(1K\Omega)$
$Va = 12V$	$Vb = 8V$	$Vc = 8V$

Resultado:



Nota aclaratoria:

Si en el paso 2, se hubiese planteado la trayectoria de la corriente i2 en sentido contrario, el resultado final igual debe ser el mismo. Observe en el procedimiento los cambios de signos.

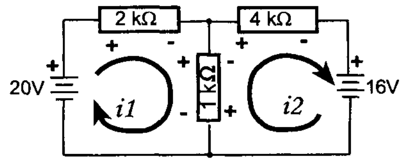


Figura 4.0-e

Ecuación malla 1:

$20 - 2i1 - i1 + i2 = 0$

$20 = 3i1 - i2$ *(ecuación 1)*

Ecuación malla 2:

$-16 - i2 + i1 - 4i2 = 0$

$16 = i1 - 5i2$

x(-3)

$$\begin{array}{rcl} 20 & = & 3i1 - i2 \\ -48 & = & -3i1 + 15i2 \\ \hline -28 & = & -14\,i2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad i2 = -2mA$$

Observe en las figura 4.0-a y 4.0-e que ib e $i2$ se orientan en dirección opuesta. Por tanto, $ib = -i2 = -(-2mA)$ ⟶ $ib = 2mA$

Reemplazando $i2 = -2mA$ en la ecuación 1:

$20 = 3i1 - i2$
$20 = 3i1 -(-2)$
$18 = 3i1$ ⟶ $i1 = 6mA$

Observe en las figura 4.0a y 4.0e que ia e $i1$ se orientan en la misma dirección. Por tanto, $ia = i1$ ⟶ $ia = 6mA$

Observe en las figura 4.0-a y 4.0-e que $ic = i1 - i2$.

$ic = 6mA - (-2\ mA)$ ⟶ $ic = 8mA$

Aunque en el procedimiento de la nota aclaratoria se planteó la trayectoria de la corriente i2 en sentido inverso, los resultados son los mismos.

4.2 Ejercicios resueltos

Ejercicio No. 1

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic y los voltajes Va, Vb y Vc.

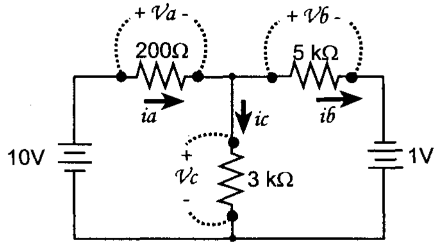


Figura 4.1a

Solución:

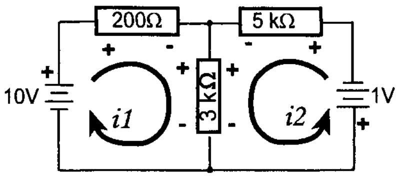


Figura 4.1b

Malla 1:

$10 - 0.2i1 - 3i1 - 3i2 = 0$

$10 = 3.2i1 + 3i2$ *(ecuación 1)*

x(8)

Malla 2:

$-1 - 5i2 - 3i1 - 3i2 = 0$

$1 = -3i1 - 8\,i2$

x(3)

$$\begin{array}{rcl} 80 &=& 25.6i1 + 24i2 \\ 3 &=& -9\,i1 - 24i2 \\ \hline 83 &=& 16.6i1 \end{array}$$

→ $i1 = 5mA$

Observe en las figura 4.1a y 4.1b que ia e $i1$ se orientan en la misma dirección. Por tanto, $ia = i1$ → $ia = 5mA$

Reemplazando $i1 = 5mA$ en la ecuación 1:

$10 = 3.2(5)+3i2$
$10 = 16 + 3i2$
$-6 = 3\,i2$ → $i2 = -2mA$

Observe en las figura 4.1a y 4.1b que ib e $i2$ se orientan en dirección opuesta. Por tanto, $ib = -i2$ → $ib = 2mA$

Observe en las figura 4.1a y 4.1b que $ic = i1 + i2$.

$ic = 5mA + (-2\,mA)$ → $ic = 3mA$

$Va = ia \times 200\,\Omega$	$Vb = ib \times 5K\Omega$	$Vc = ic \times 3K\Omega$
$Va = (5mA)(200\Omega)$	$Vb = (2mA)(5K\Omega)$	$Vc = (3mA)(3K\Omega)$
$Va = 1\,V$	$Vb = 10\,V$	$Vc = 9\,V$

Ejercicio No. 2

Determinar el valor de las corrientes ix e iy, y los voltajes Vx y Vy.

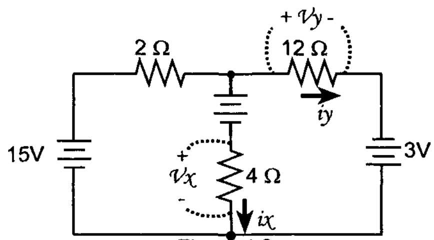


Figura 4.2a

Solución:

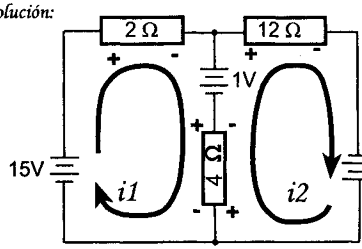


Figura 4.2b

Recordatorio:

$1V = 1A \times 1\,\Omega$

$1V = 1mA \times 1K\Omega$

$\dfrac{1\,V}{1\,\Omega} = 1A$

$\dfrac{1\,V}{1\,K\Omega} = 1mA$

Malla 1:

$15 - 2i1 - 1 - 4i1 + 4i2 = 0$

$14 = 6i1 - 4i2$ *(ecuación 1)*

x(4)

Malla 2:

$3 - 4i2 + 4i1 + 1 - 12i2 = 0$

$4 = -4i1 + 16i2$

$$
\begin{array}{rcl}
56 & = & 24i1 - 16i2 \\
4 & = & -4i1 + 16i2 \\
\hline
60 & = & 20i1
\end{array}
$$

$i1 = 3A$

Reemplazando $i1 = 3mA$ en la ecuación 1:

$14 = 6(3) - 4i2$
$14 = 18 - 4i2$
$-4 = -4\,i2$ $i2 = 1A$

Observe en las figura 4.2a y 4.2b que iy e $i2$ se orientan en la misma dirección. Por tanto, $iy = i2$ $iy = 1A$

Observe en las figura 4.2a y 4.2b que $ix = i1 - i2$.

$ic = 3A - (1\,A)$ $ix = 2A$

Utilice la ley de ohm para calcular los voltajes:

$Vx = ix \times 4\,\Omega$	$Vy = iy \times 12\,\Omega$
$Vx = (2A)(4\,\Omega)$	$Vy = (1A)(12\,\Omega)$
$Vx = 8\,V$	$Vy = 12\,V$

Ejercicio No. 3

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic.

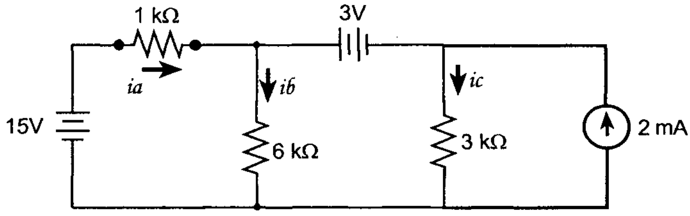


Figura 4.3a

Solución:

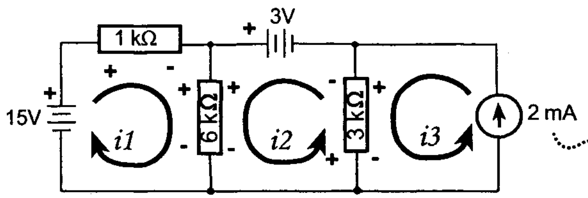


Figura 4.3b

$i3 = 2mA$

Malla 1:

$15 - i1 - 6i1 - 6i2 = 0$

$15 = 7i1 + 6i2$ *(ecuación 1)*

x(3)

Malla 2:

$3 - 6i2 - 6i1 - 3i2 + 3i3 = 0$

$3 - 6i2 - 6i1 - 3i2 + 3(2) = 0$

$9 = 6i1 + 9i2$

x(-2)

$$\begin{array}{r} 45 = 21i1 + 18i2 \\ -18 = -12i1 - 18i2 \\ \hline 27 = 9\,i1 \end{array} \quad \longrightarrow \quad i1 = 3mA$$

Reemplazando $i1 = 3mA$ en la ecuación 1:

$15 = 7(3) + 6i2$

$15 = 21 + 6i2$

$-6 = 6\,i2 \quad \longrightarrow \quad i2 = -1mA$

Observe en las figura 4.3a y 4.3b que *ia* e *i1* se orientan en la misma dirección. Por tanto, $ia = i1$ $\longrightarrow$ $ia = 3mA$

Observe en las figura 4.3a y 4.3b que $ib = i1 + i2$.

$ib = 3mA + (-1\ mA) \quad \longrightarrow \quad ib = 2mA$

Observe en las figura 4.3a y 4.3b que $ic = i3 - i2$.

$ic = 2mA - (-1\ mA) \quad \longrightarrow \quad ic = 3mA$

Ejercicio No. 4

Determinar el valor de las corrientes ia, ib y el voltaje

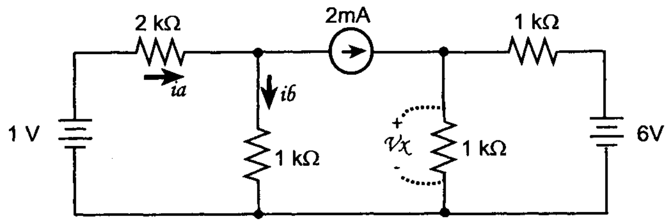


Figura 4.4a

Solución:

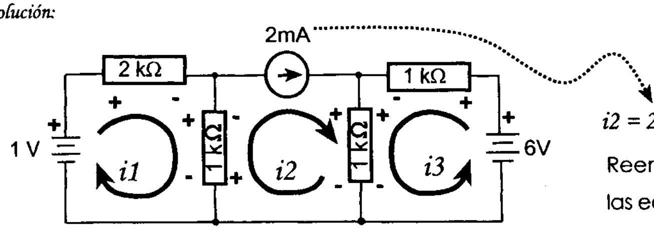


Figura 4.4b

$i2 = 2mA$

Reemplace i2 en las ecuaciones de las mallas 1 y 3

Malla 1:

$1 - 2i1 - 1i1 + 1i2 = 0$

$1 - 2i1 - 1i1 + 1(2) = 0$

$3 = 3\ i1$

$i1 = 1mA$

Malla 3:

$6 - 1\ i3 - 1\ i3 - 1\ i2 = 0$

$6 - 1\ i3 -1\ i3 - 1(2) = 0$

$4 = 2\ i3$

$i3 = 2\ mA$

Observe en las figura 4.4a y 4.4b que....

$ia = i1$

$ia = 1mA$

$ib = i1 - i2$

$ib = 1mA - 2mA$

$ib = -1\ mA$

El resultado ib negativo. indica que la corriente fluye de sentido contrario al planteado en la pregunta.

Para obtener el voltaje Vx, se debe calcular la corriente ix tomando en cuenta la polaridad del voltaje. Es decir...

$ix = i2 + i3$

$ix = 2mA + 2mA$

$ix = 4mA$

$Vx = ix(1\ K\Omega)$

$Vx = (4mA)(1\ K\Omega)$

$Vx = 4V$

Ejercicio No. 5

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic.

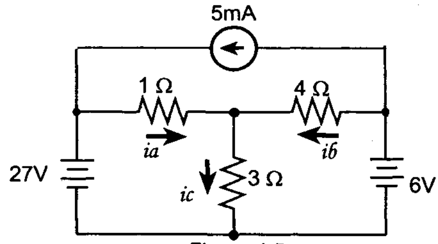


Figura 4.5a

Solución:

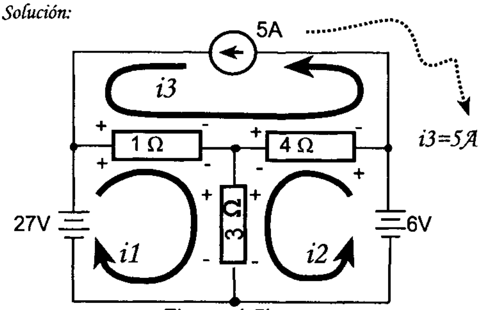


Figura 4.5b

> **NOTA:**
>
> Observe el resultado *ib* es negativo. Esto indica que la corriente fluye de sentido contrario al planteado en la pregunta.

Malla 1:

$27 - i1 - 1i3 - 3i1 - 3i2 = 0$

$27 - i1 - 1(5) - 3i1 - 3i2 = 0$

$22 = 4\,i1 + 3\,i2$ *(ecuación 1)*

Malla 2:

$6 - 4\,i2 + 4\,i3 - 3i2 - 3i1 = 0$

$6 - 4\,i2 + 4(5) - 3i2 - 3i1 = 0$

$26 = 3i1 + 7i2$

x(3)   x(-4)

$$\begin{array}{r} 66 = 12i1 + 9i2 \\ -104 = -12i1 - 28i2 \\ \hline -38 = -19i2 \end{array} \longrightarrow i2 = 2A$$

Reemplazando $i2 = 2mA$ en la ecuación 1:

$22 = 4i1 + 3(2)$

$16 = 4i1$

$i1 = 16/4 \longrightarrow i1 = 4A$

Observe en las figura 4.3a y 4.3b que....

$ia = i1 + i3$	$ib = i2 - i3$	$ic = i1 + i2$
$ia = (4A) + (5A)$	$ib = (2A) - (5A)$	$ic = (4A) + (2A)$
$ia = 9A$	$ib = -3A$	$ic = 6A$

Ejercicio No. 6

Determinar el valor de las corrientes ia, ib, ic e id, y los voltajes Va, Vb, Vc e Vd.

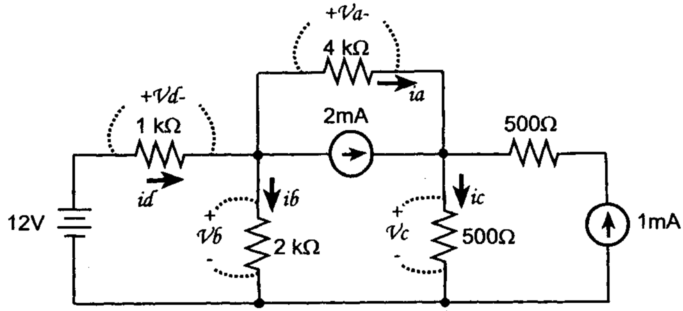


Figura 4.6a

Para resolver el siguient ejercicio, se lo realizará de dos diferentes maneras.

PROCEDIMIENTO 1:

En el primer procedimiento, se trazan las corrientes de cada malla.

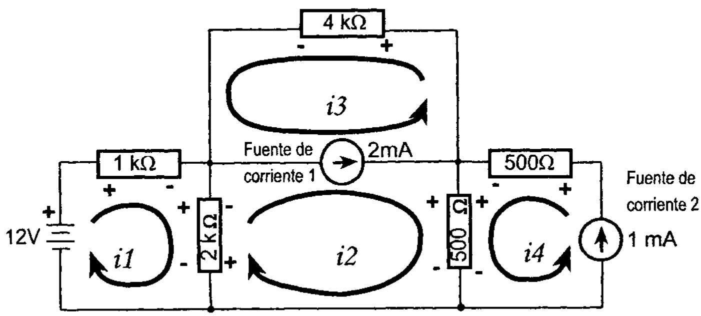


Figura 4.6b

Sin embargo, debe tomarse en cuenta que no se puede realizar el análisis por mallas cruzando una fuente de corriente debido a que la fuente de corriente tiene un voltaje entre sus terminales que se desconoce. Entonces, se tomará en cuenta las siguientes mallas:

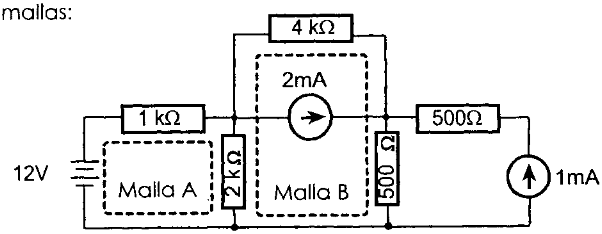


Figura 4.6c

Observe en la figura 4.6b que

Fuente 1:

$i2 + i3 = 2$

$i3 = 2 - i2$ (ec. 1)

Fuente 2:

$i4 = 1$

Reemplazando en ec.3

Planteando y resolviendo las mallas A y B:

Malla A:

$12 - 1i1 - 2\,i1 + 2\,i2 = 0$

$12 = 3\,i1 - 2i2$ (ec.2)

x(4)

$48 = 12\,i1 - 8\,i2$

Malla B:

$2i1 - 2i2 + 4i3 - 0.5\,i2 - 0.5\,i4 = 0$

$2i1 - 2.5\,i2 + 4\,i3 - 0.5\,i4 = 0$ (ec. 3)

$2i1 - 2.5\,i2 + 4\,(2 - i2) - 0.5\,(1) = 0$

$2i1 - 2.5\,i2 + 8 - 4\,i2 - 0.5 = 0$

$7.5 = -2i1 + 6.5\,i2$

x(6)

$45 = -12\,i1 + 39\,i2$

$93 = \quad 31\,i2$

$i2 = 3mA$

Reemplazando $i2 = 3mA$ en ec. 2 y ec. 1:

ec. 2:

$12 = 3i1 - 2i2$

$12 = 3i1 - 2(3)$

$18 = 3i1$

$i1 = 6mA$

ec. 1:

$i3 = 2 - i2$

$i3 = 2 - (3)$

$i3 = -1mA$

Observe en las figura 4.6a y 4.6b que....

$ia = -i3$

$ia = -(-1mA)$

$ia = 1mA$

$ib = i1 - i2$

$ib = 6mA - 3mA$

$ib = 3mA$

$ic = i2 + i4$

$ic = 3mA + 1mA$

$ic = 4mA$

$id = i1$

$id = 6mA$

Por ley de ohm:

$Va = ia\,(4\,K\Omega)$

$Va = (1mA)(4\,K\Omega)$

$Va = 4V$

$Vb = ib\,(2\,K\Omega)$

$Vb = (3mA)(2\,K\Omega)$

$Vb = 6V$

$Vc = ic\,(500\Omega)$

$Vc = (4mA)(0.5\,K\Omega)$

$Vc = 2V$

$Vd = id\,(1\,K\Omega)$

$Vd = (6mA)(1\,K\Omega)$

$Vd = 6V$

PROCEDIMIENTO 2:

Una segunda manera es trazar por cada fuente de corriente una sola trayectoria de corriente, y trazar las otras corrientes por donde no exista una fuente de corriente. Observe en el ejemplo realizado la trayectoria sugerida para la corriente i2.

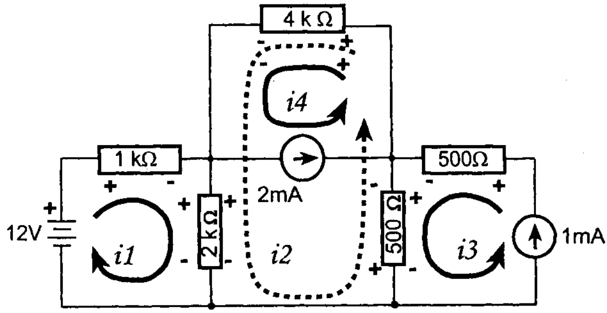


Figura 4.6d

$i4 = 2mA$

$i3 = 1mA$

Malla A:

$12 - 1i1 - 2\,i1 - 2\,i2 = 0$

$12 = 3\,i1 + 2i2$ *(ecuación 1)*

x(2)

Malla B:

$-4i2 - 4i4 - 2i2 - 2i1 - 0.5\,i2 + 0.5\,i3 = 0$

$-4i2 - 4(2) - 2i2 - 2i1 - 0.5\,i2 + 0.5(1) = 0$

$7.5 = -2\,i1 - 6.5\,i2$

x(3)

$$\begin{array}{rcl} 24 &=& 61i1 + 4i2 \\ 22.5 &=& -6i1 - 19.5i2 \\ \hline 46.5 &=& -15.5\,i2 \end{array}$$

$i2 = -3mA$

Reemplazando $i2 = -3mA$ en la ecuación 1:

$12 = 3i1 + 2(-3)$

$18 = 3i1$ $\longrightarrow$ $i1 = 6mA$

Observe en las figuras 4.6 a y 4.6 d que...

$ia = -\,i2 - i4$	$ib = i1 + i2$	$ic = -\,i2 + i3$	$id = i1$
$ia = -(-3) - 2$	$ib = 6 + (-3)$	$ic = -(-3) + 1$	$id = 6mA$
$ia = 1mA$	$ib = 3mA$	$ic = 4mA$	

Como se observa, los resultados de las corrientes son las mismas, y por tanto, los resultados de los voltajes.

Ejercicio No. 7

Determinar el valor de las corrientes *iw, ix, iy e iz* y de las caídas de tensiones *Vw, Vx, Vy y Vz.*

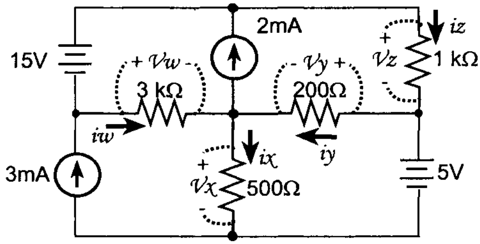


Figura 4.7a

OPCION 1:

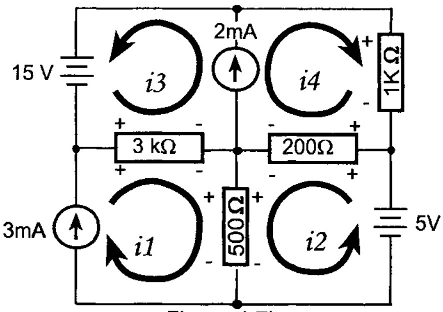


Figura 4.7b

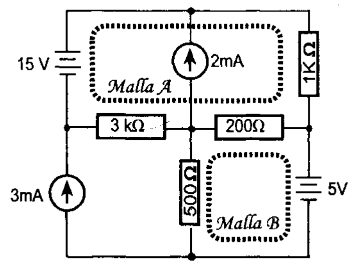


Figura 4.7c

Analizando las fuentes de corrientes se obtiene:

Fuente 2mA:

$i3 + i\,4 = 2mA$

$i3 = 2 - i4$ *(ecuación 1)*

Fuente 3mA:

$i1 = 3mA$

Analizando las mallas A y B planteadas en la figura 4.7c en base a la trayectoria planteada en la figura 4.7b, se obtiene:

Malla A :

$15 - 1\,i4 - 0.2\,i4 - 0.2\,i2 + 3\,i3 + 3\,i1 = 0$

Reemplazando $i3 = 2\text{-}i4$ e $i1 = 3$...

$15 - 1\,i4 - 0.2i4 - 0.2i2 + 3(2 - i4) + 3\,(3) = 0$

$15 - 1\,.2\,i4 - 0.2\,i2 + 6 - 3i4 + 9 = 0$

$30 = 0.2i2 + 4.2\,i4$ *(ecuación 2)*

x(3.5)

Malla B:

$5 - 0.2i2 - 0.2i4 - 0.5i2 - 0.5i1 = 0$

Reemplazando $i1 = 3$...

$5 - 0.2i2 - 0.2i4 - 0.5i2 - 0.5(3) = 0$

$3.5 = 0.7\,i2 + 0.2\,i4$

x(-1)

$105 = 0.7\,i2 + 14.7i4$

$-3.5 = -0.7\,i2\ -\ 0.2\,i4$

$101.5 = \quad 14.5\,i4$ → $i4 = 7mA$

Reemplazando i4 = 7 mA :   en la ecuación 1

$i3 = 2mA - 7\ mA$ .... ➤ $i3 = -5mA$

en la ecuación 2

$30 = 0.2\ i2 + 4.2\ (7)$

$0.6 = 0.2\ i2$ .... ➤ $i2 = 3mA$

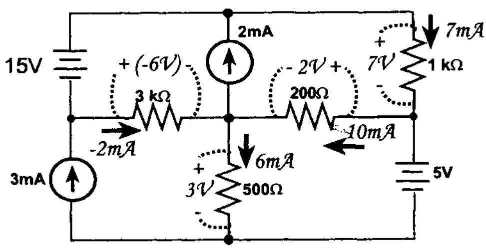
Observe en las figura 4.7a y 4.7b que....

$iw = i3 + i1$	$ix = i1 + i2$	$iy = i4 + i2$	$iz = i4$
$iw = -5mA + 3mA$	$ix = 3mA + 3mA$	$iy = 7mA + 3mA$	$iz = 7mA$
$iw = -2mA$	$ix = 6\ mA$	$iy = 10mA$	

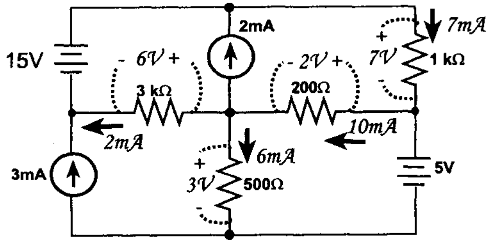
Por ley de ohm, las caídas de tensiones Vw, Vx, Vy y Vz ....

$Vw = iw\ (3\,k\Omega)$	$Vx = ix\ (0.5\,k\Omega)$	$Vy = iy\ (0.2\,k\Omega)$	$Vz = iz\ (1\,k\Omega)$
$Vw = (-2mA)(3k\Omega)$	$Vx = (6mA)(0.5k\Omega)$	$Vy = 10mA(0.2k\Omega)$	$Vz = (7mA)(1k\Omega)$
$Vw = -6V$	$Vx = 3V$	$Vy = 2V$	$Vz = 7V$

Resultado:



El negativo de iw y Vw nos indica que el resultado esta polarizado de lado contrario al planteado. Por tanto, el resultado anterior es equivalente al siguiente:



OPCION 2:

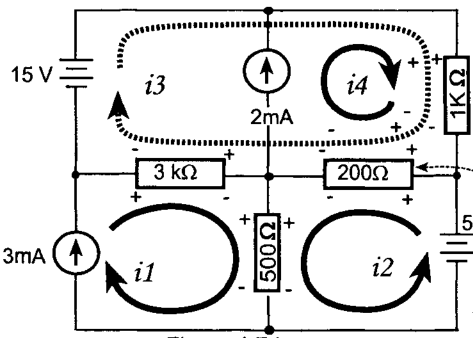


Figura 4.7d

En este segundo caso, por cada fuente de corriente solo se ha trazado una corriente:

Fuente de 3mA cruza i1

$i1 = 3$

Fuente de 2mA cruza i4

$i4 = 2$

OJO: En algunas resistencias, cruzan tres corrientes trazadas. Tener cuidado al plantear las mallas. Ejemplo resaltado.

Malla A:

$15 - 1i3 - 1i4 - 0.2\,i3 - 0.2\,i4 - 0.2\,i2 - 3\,i3 + 3\,i1 = 0$

$15 + 3\,i1 - 0.2\,i2 - 4.2\,i3 - 1.2\,i4 = 0$

Reemplazando $i1 = 3$ e $i4 = 2...$

$15 + 3(3) - 0.2\,i2 - 4.2\,i3 - 1.2\,(2) = 0$

$21.6 = 0.2\,i2 + 4.2\,i3$ *(ecuación 1)*

Malla B:

$5 - 0.2\,i2 - 0.2\,i4 - 0.2\,i3 - 0.5\,i2 - 0.5\,i1 = 0$

$5 - 0.5\,i1 - 0.7\,i2 - 0.2\,i3 - 0.2\,i4 = 0$

Reemplazando $i1 = 3$ e $i4 = 2...$

$5 - 0.5\,(3) - 0.7\,i2 - 0.2\,i3 - 0.2\,(2) = 0$

$3.1 = 0.7\,i2 + 0.2\,i3$

x(-21)

$$\begin{array}{rl} 21.6 = & 0.2\,i2 + 4.2\,i3 \\ -65.1 = & -14.7\,i2 - 4.2\,i3 \\ \hline -43.5 = & -14.5\,i2 \end{array} \longrightarrow i2 = 3mA$$

Reemplazando i2 = 3 mA en la ecuación 1 del procedimiento 2:

$21.6 = 0.2\,i2 + 4.2\,i3$

$21.6 = 0.2\,(3) + 4.2\,i3$

$21 = 4.2\,i3 \longrightarrow i3 = 5mA$

Observe en las figura 4.7a y 4.7d las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$iw = i1 - i3$	$ix = i1 + i2$	$iy = i3 + i4 + i2$	$iz = i3 + i4$
$iw = 3 - 5$	$ix = 3 + 3$	$iy = 5 + 2 + 3$	$iz = 5 + 2$
$iw = -2\ mA$	$ix = 6\ mA$	$iy = 10\ mA$	$iz = 7\ mA$

El resultado de las corrientes por este segundo procedimiento fueron las mismas que con el procedimiento anterior. Por tanto, por ley de ohm, el resultado de los voltajes son los mismos.

Ejercicio No. 8

Determinar el valor de las corrientes

iw, ix, iy e iz.

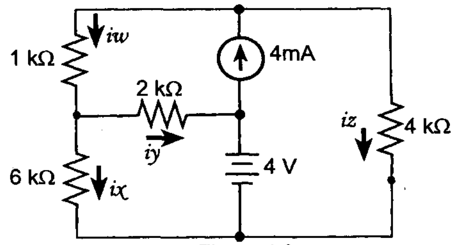


Figura 4.8a

En este problema puede plantearse las mallas como la figura 4.8b o como la figura 4.8c. Simplemente recuerde que al plantear las mallas, se realizará análisis por ley de kirchoff de voltaje. Por tanto, no realice ningún análisis a través de una fuente de corriente.

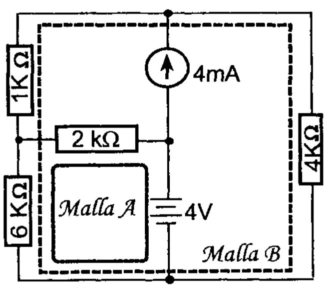


Figura 4.8b

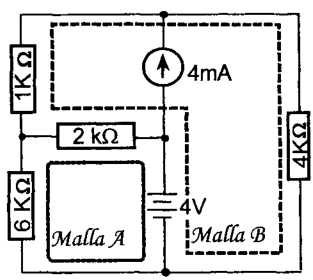


Figura 4.8c

Realizaremos este mismo ejercicio de distintas maneras, recordandole que no existe una sola manera de plantearlo. Al final, los resultados son los mismos.

OPCION 1a:

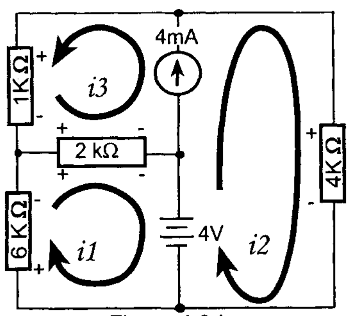


Figura 4.8d

Analizando las fuentes de corrientes se obtiene:

$$i3 + i2 = 4mA$$
$$i3 = 4 - i2 \text{ (ec. 1)}$$

Analizando las mallas A y B como planteado en la figura 4.8b, se obtiene:

Malla A :

$-2i3 -2i1 -4 - 6i1 = 0$

$4 = -8i1 - 2i3$

Reemplazando $i3 = 4 - i2$...

$4 = - 8\,i1 - 2\,(4 - i2)$

$4 = - 8i1 - 8 + 2\,i2$

$12 = - 8i1 + 2\,i2$ (ecuación 2)

Malla B:

$4 + 2i3 + 2\,i1 + 1\,i3 - 4\,i2 = 0$

$4 + 2\,i1 - 4\,i2 + 3\,i3 = 0$

Reemplazando $i3 = 4 - i2$...

$4 + 2\,i1 - 4\,i2 + 3\,(4 - i2) = 0$

$4 + 2i1 - 4i2 + 12 - 3\,i2 = 0$

$16 = - 2i1 + 7\,i2$

x(-4)

$$\begin{array}{rl} 12 = & -8\,i1 + 2\,i2 \\ -64 = & 8\,i1 - 28\,i2 \\ \hline -52 = & -26\,i2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad i2 = 2mA$$

Reemplazando $i2 = 2mA$ en la ecuación 1: $i3 = 4 - (2)$ $\longrightarrow$ $i3 = 2mA$

Reemplazando $i2 = 2mA$ en la ecuación 2: $12 = - 8i1 + 2\,(2)$

$8 = - 8\,i1$ $\longrightarrow$ $i1 = -1mA$

Observe en las figura 4.8a y 4.8d las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$iw = i3$	$ix = - i1$	$iy = i3 + i1$	$iz = i2$
$iw = 2mA$	$ix = -(-1)$	$iy = 2 + (-1)$	$iz = 2mA$
	$ix = 1mA$	$iy = 1\,mA$	

OPCION 1b:

Si para el mismo planteamiento de la figura 4.8d, analizando las mallas de acuerdo a la figura 4.8 c, se obtiene...

Malla A :

(Mismo que el procedimiento anterior)

$12 = - 8i1 + 2\,i2$ (ecuación 2)

x(3)

Malla B:

$-6\,i1 + 1\,i3 - 4\,i2 = 0$

Reemplazando $i3 = 4 - i2$...

$-6\,i1 + 1\,(4 - i2) - 4\,i2 = 0$

$- 6\,i1 + 4 - i2 - 4i2 = 0$

$4 = 6\,i1 + 5\,i2$

x(4)

$$\begin{array}{rl} 36 = & -24\,i1 + 6\,i2 \\ 16 = & 24\,i1 + 20\,i2 \\ \hline 52 = & 26\,i2 \end{array} \quad \longrightarrow \quad i2 = 2mA$$

Observe que se obtendrán los mismos resultados en las otras corrientes y el resultado **final** será el mismo.

OPCION 2:

Ahora se analizará realizando las trayectorias de corriente para que coincidan con el recorrido de las mallas planteadas en la figura 4.8c. (Ver figura 4.8 e)

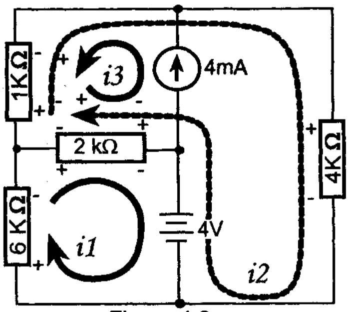


Figura 4.8e

Por la fuente de corriente solo se tiene trazada la corriente i3:

$$i3 = 4mA$$

Malla A :

$-2\,i1 + 2\,i2 - 2\,i3 - 4 - 6\,i1 = 0$

Reemplazando $i3 = 4$

$-2\,i1 + 2i2 - 2(4) - 4 - 6i1 = 0$

$12 = -8i1 + 2\,i2$ *(ecuación 3)*

Malla B:

$-1i2 + 1\,i3 - 4i2 + 4 - 2\,i2 + 2\,i3 + 2\,i1 = 0$

Reemplazando $i3 = 4$

$-1i2 + 1\,(4) - 4i2 + 4 - 2\,i2 + 2(4) + 2\,i1 = 0$

$16 = -2i1 + 7\,i2$

x(-4)

$$\begin{array}{rcl} 12 &=& -8\,i1 + 2\,i2 \\ -64 &=& 8\,i1 - 28\,i2 \\ \hline -52 &=& -26\,i2 \end{array} \longrightarrow i2 = 2mA$$

Reemplazando $i2 = 2mA$ en la ecuación 3:

$$12 = -8i1 + 2\,(2)$$

$$8 = -8\,i1 \longrightarrow i1 = -1mA$$

Observe en las figura 4.8a y 4.8e las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$iw = i3 - i2$	$ix = -i1$	$iy = i1 + i3 - i2$	$iz = i2$
$iw = 4mA - 2mA$	$ix = -(-1)$	$iy = -1 + 4 - 2$	$iz = 2mA$
$iw = 2mA$	$ix = 1mA$	$iy = 1\ mA$	

Estos son los mismos resultados finales que con el planteamiento anterior.

OPCION 3:

Ahora se analizará realizando las trayectorias de corriente para que coincidan con el recorrido de las mallas planteadas en la figura 4.8b. (Ver figura 4.8 f)

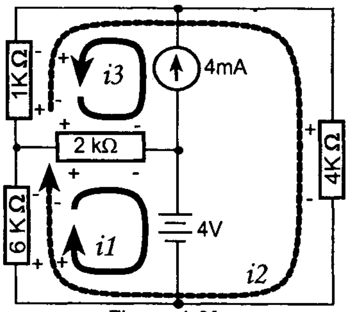


Figura 4.8f

Por la fuente de corriente solo se tiene trazada la corriente i3:

$$i3 = 4m\mathcal{A}$$

Malla A :

$4 + 2i3 + 2i1 + 6\,i2 + 6\,i1 = 0$

Reemplazando $i3 = 4$

$4 + 2(4) + 2i1 + 6i2 + 6i1 = 0$

$12 = -\,8i1 - 6i2$ *(ecuación 4)*

Malla B:

$-6i1 - 6i2 - 1\,i2 + 1\,i3 - 4\,i2 = 0$

Reemplazando $i3 = 4$

$-6i1 - 6i2 - 1\,i2 + 1(4) - 4i2 = 0$

$4 = 6\,i1 + 11\,i2$

x(3) → $36 = -24\,i1 - 18\,i2$

x(4) → $16 = 24\,i1 + 44\,i2$

$52 = \quad 26\,i2$ → $i2 = 2m\mathcal{A}$

Reemplazando $i2 = 2m\mathcal{A}$ en la ecuación 4:

$$12 = -\,8i1 - 6\,(2)$$

$$24 = -\,8\,i1$$ → $i1 = -3m\mathcal{A}$

Observe en las figura 4.8a y 4.8f las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$iw = i3 - i2$	$ix = -\,i1 - i2$	$iy = i1 + i3$	$iz = i2$
$iw = 4 - 2$	$ix = -(-3) - 2$	$iy = -3 + 4$	$iz = 2m\mathcal{A}$
$iw = 2m\mathcal{A}$	$ix = 1m\mathcal{A}$	$iy = 1\,m\mathcal{A}$	

Observe que nuevamente los resultados son los mismos. Existe incluso varias otras maneras en las que se podría plantear. Recuerde: No existe una sola manera de resolver un problema pero el resultado siempre es el mismo.

Ejercicio No. 9

Determinar el valor de las corrientes *ia, ib, ic, id, ie.*

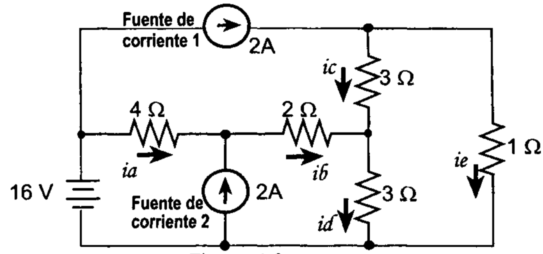


Figura 4.9a

Solución:

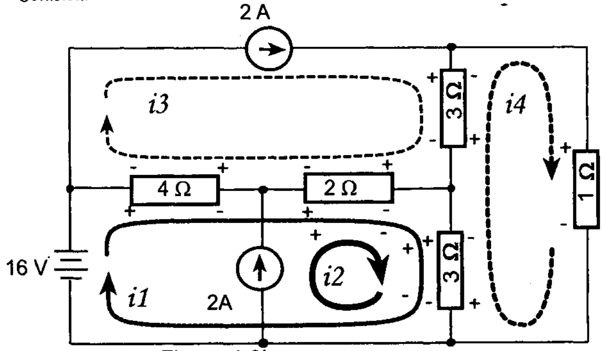


Figura 4.9b

Fuente de corriente 1:

$$i3 = 2A$$

Fuente de corriente 2:

$$i2 = 2A$$

Malla A :

$16 - 4i1 + 4i3 - 2i1 - 2i2 + 2i3 - 3i1 - 3i2 + 3i4 = 0$

$16 - 9i1 - 5i2 + 6i3 + 3i4 = 0$

Reemplazando $i3 = 2$ e $i2 = 2$

$16 - 9i1 - 5(2) + 6(2) + 3i4 = 0$

$18 = 9i1 - 3i4$ *(ecuación 1)*

Malla B:

$-3\,i4 + 3i2 + 3\,i1 - 3i4 + 3i3 - 1i4 = 0$

$3i1 + 3i2 + 3i3 - 7i4 = 0$

Reemplazando $i3 = 2$ e $i2 = 2$

$3i1 + 3(2) + 3(2) - 7i4 = 0$

$12 = -3i1 + 7i4$

$36 = -9\,i1 + 21\,i4$ ← x(3)

$18 = 9\,i1 - 3\,i4$

$54 = 18\,i4$ → $i4 = 3A$

Reemplazando $i4 = 3mA$ en la ecuación 1:

$18 = 9i1 - 3(3)$

$27 = 9\,i1$ → $i1 = 3A$

Observe en las figura 4.8a y 4.8f las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$ia = i1 - i3$	$ib = i1 + i2 - i3$	$ic = i3 - i4$	$id = i1 + i2 - i4$	$ie = i4$
$ia = 3-2$	$ib = 3+2-2$	$ic = 2 - 3$	$id = 3 + 2 - 3$	$ie = 3A$
$ia = 1A$	$ib = 3A$	$ic = -1A$	$id = 2A$	

Ejercicio No. 10

Determinar el valor de las corrientes *ix, iy, ia, ib e ic* y los voltajes *Vx, Vy, Va, Vb* y

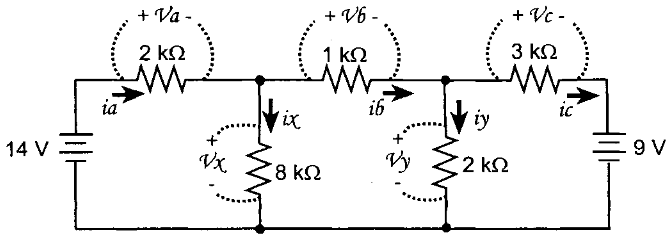


Figura 4.10 a

Solución:

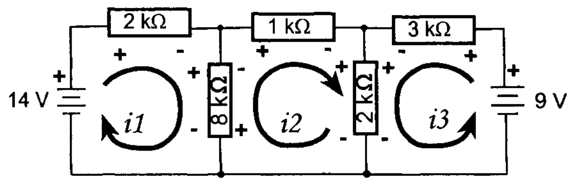


Figura 4.10b

Resolviendo las mallas:

Malla 1:

$14 - 2i1 - 8i1 + 8\,i2 = 0$

$10\,i1 - 8\,i2 + 0\,i3 = 14$

Malla 2:

$8i1 - 8i2 - 1i2 - 2i2 - 2i3 = 0$

$8\,i1 - 11\,i2 - 2i3 = 0$

Malla 3:

$9 - 3i3 - 2i3 - 2i2 = 0$

$0i1 + 2i2 + 5i3 = 9$

Se tiene 3 ecuaciones con tres Incógnitas.

$$10\,i1 - 8\,i2 + 0\,i3 = 14$$

$$8\,i1 - 11i2 - 2\,i3 = 0$$

$$0\,i1 + 2i2 + 5i3 = 9$$

Resolviendo por matrices, primero, se debe calcular la determinante:

$$\left|\begin{matrix} 10 & -8 & 0 \\ 8 & -11 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 10 & -8 \\ 8 & -11 \\ 0 & 2 \end{matrix}$$

$=(10)(-11)(5) + (-8)(-2)(0)+(0)(8)(2) -(0)(-11)(0) - (10)(-2)(2) - (-8)(8)(5)$

$= -550 + 0 + 0 - 0 + 40 + 320$

$= -190$

Después se puede encontrar cada corriente:

Se sustituye el resultado en la posición i1

$$i1 = \frac{\begin{vmatrix} 14 & -8 & 0 \\ 0 & -11 & -2 \\ 9 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{-190}$$

Se sustituye el resultado en la posición i2

$$i2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 14 & 0 \\ 8 & 0 & -2 \\ 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}}{-190}$$

Se sustituye el resultado en la posición i3

$$i3 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & -8 & 14 \\ 8 & -11 & 0 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}}{-190}$$

Para encontrar corriente i1:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 14 & -8 & 0 & 14 & -8 \\ 0 & -11 & -2 & 0 & -11 \\ 9 & 2 & 5 & 9 & 2 \end{array}\right. \begin{aligned} &=(14)(-11)(5) + (-8)(-2)(9)+(0)(0)(2) -(9)(-11)(0) - (14)(-2)(2) - (-8)(0)(5) \\ &= -770 + 144 + 0 - 0 -(-56) - 0 \\ &= -570 \end{aligned}$$

$$i1 = \frac{-570}{-190} = 3m\mathcal{A}$$

Para encontrar corriente i2:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 10 & 14 & 0 & 10 & 14 \\ 8 & 0 & -2 & 8 & 0 \\ 0 & 9 & 5 & 0 & 9 \end{array}\right. \begin{aligned} &=(10)(0)(5) + (14)(-2)(0)+(0)(8)(9) -(0)(0)(0) - (10)(-2)(9) - (14)(8)(5) \\ &= 0+ 0 + 0 - 0 -(-180) - 560 \\ &= -380 \end{aligned}$$

$$i2 = \frac{-380}{-190} = 2m\mathcal{A}$$

Para encontrar corriente i3:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 10 & -8 & 14 & 10 & -8 \\ 8 & -11 & 0 & 8 & -11 \\ 0 & 2 & 9 & 0 & 2 \end{array}\right. \begin{aligned} &= (10)(-11)(9) + (-8)(0)(0)+(14)(8)(2) -(14)(-11)(0) - (10)(0)(2) - (-8)(8)(9) \\ &= -990 + 0 + 224 - 0 - 0 - (-576) \\ &= -190 \end{aligned}$$

$$i3 = \frac{-190}{-190} = 1m\mathcal{A}$$

Observe en las figura 4.10a y 4.10b las direcciones de las corrientes. De acuerdo a esto se obtiene:

$$ix = i1 - i2 \qquad iy = i2 + i3$$
$$ix = 3mA - 2mA \qquad iy = 2mA + 1mA$$
$$ix = 1mA \qquad iy = 3\ mA$$

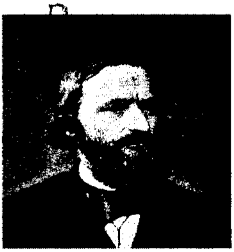
$$ia = i1 \qquad ib = i2 \qquad ic = -i3$$
$$ia = 3mA \qquad ib = 2mA \qquad ic = -1mA$$

Por ley de ohm se obtiene:

$$Vx = 8\,K\Omega\ (ix) \qquad Vy = 2\,K\Omega\,(iy)$$
$$Vx = 8\,K\Omega\ (1mA) \qquad Vy = 2\,K\Omega\,(3mA)$$
$$Vx = 8V \qquad Vy = 6\ V$$

$$Va = 2\,K\Omega\ (ia) \qquad Vb = 1\,K\Omega\,(ib) \qquad Vc = 3\,K\Omega\,(ic)$$
$$Va = 2\,K\Omega\ (3mA) \qquad Vb = 1\,K\Omega\,(2mA) \qquad Vc = 3\,K\Omega\,(-1\ mA)$$
$$Va = 6V \qquad Vb = 2V \qquad Vc = -3V$$

HOMENAJÊ HISTORICO Y CURIOSIDADES



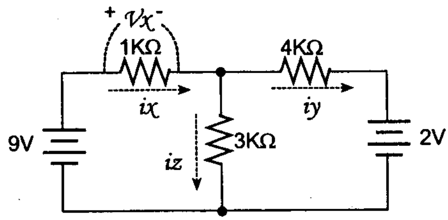
Gustav Robert Kirchoff
1824 – 1887

Las Leyes de Kirchoff se denominaron en honor a Gustav Robert Kirchoff, físico Alemán, por su formulación de éstas leyes en 1845. Cuando Gustav Kirchoff formuló las leyes, tenía solo 21 años de edad, y era todavía un estudiante. Contribuyó además con sus conocimientos y publicaciones en otras áreas, tales como la óptica, la espectroscopia, la emisión de radicación de cuerpo negro y teoría de placas. [21]

En Alemania se fabricaron dos tipos de estampas con su imagen:

4.3 Ejercicios propuestos

1)



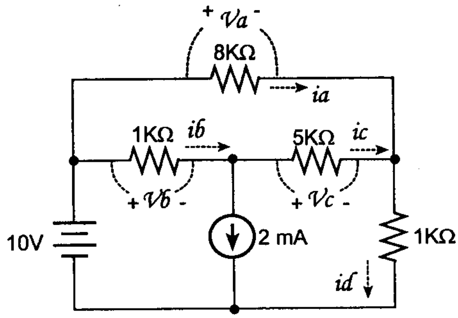
Solución: ix = 3mA

iy = 1mA

iz = 2mA

Vx = 3V

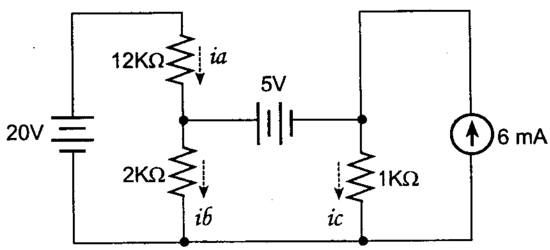
2)



Solución:

Va = 8V	ia = 1mA
Vb = 3V	ib = 3mA
Vc = 5V	ic = 1mA
	id = 2mA

3)

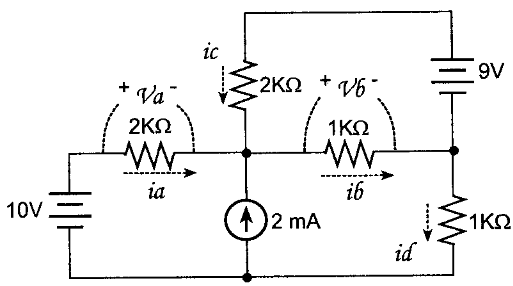


Solución: ia = 1mA

ib = 4mA

ic = 3mA

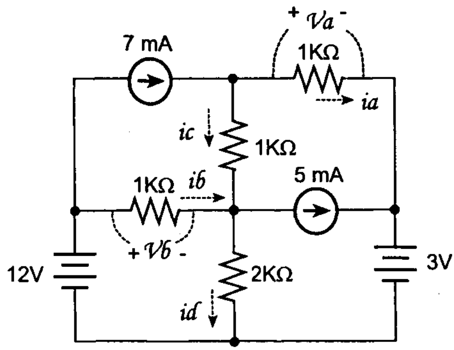
4)



Solución:

ia = 1mA	Va = 2V
ib = 5mA	Vb = 5V
ic = 2mA	
id = 3mA	

5)



Solución:

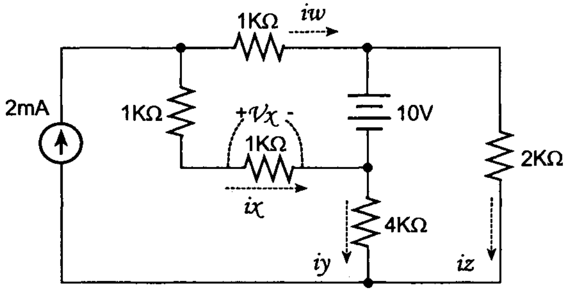
$i_a = 5mA$

$i_b = 6mA$ $\quad V_a = 5V$

$i_c = 2mA$ $\quad V_b = 6V$

$i_d = 3mA$

6)



Solución:

$i_w = -2mA$

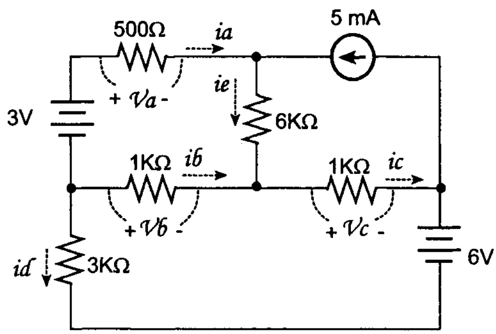
$i_x = 4mA$

$i_y = -1mA$

$i_z = 3mA$

$V_x = 4V$

7)



Solución:

$i_a = -4mA$ $\quad V_a = -2V$

$i_b = 1mA$ $\quad V_b = 1V$

$i_c = 2mA$ $\quad V_c = 2V$

$i_d = 3mA$

$i_e = 1mA$

8) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 1 del capítulo 5.3.

9) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 2 del capítulo 5.3.

10) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 3 del capítulo 5.3.

11) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 4 del capítulo 5.3.

12) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 5 del capítulo 5.3.

13) Resolver por análisis de mallas el ejercicio propuesto 6 del capítulo 5.3.

5 ANALISIS POR NODOS

5.1 Procedimiento para análisis por nodos

El método de análisis por mallas está basado en la ley de kirchoff de corriente que enuncia:

"La suma de las corrientes que ingresan a un nodo es igual a la suma de las corrientes que salen del nodo."

En resumen, el método consiste en trazar corrientes de nodo a nodo. El valor de la corriente de acuerdo a la ley de ohm es el valor del voltaje dividido entre la resistencia. El voltaje en cada resistencia es igual a la diferencia de potencial entre los extremos de las resistencias. A continuación, se resuelve el mismo primer ejercicio del capítulo anterior paso a paso mediante este otro método:

Paso 1: Colocar tierra.

Paso 2: Trazar la trayectoria de las corrientes de nodo a nodo. Figura 5.0a

Paso 3:

Analizar en cada nodo las corrientes que entran son iguales a las corrientes que salen. En la figura 5.0a:

$$ia + ib = ic$$

(ecuacion 5.0.1)

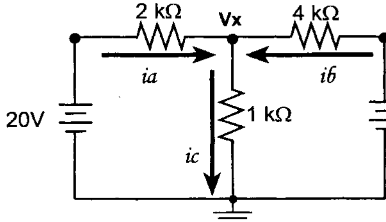


Figura 5.0a

Paso 4:

Definir los voltajes de cada nodo respecto a tierra. Ver figura 5.0.b.

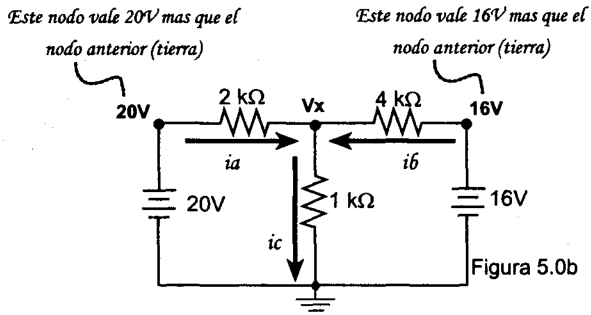
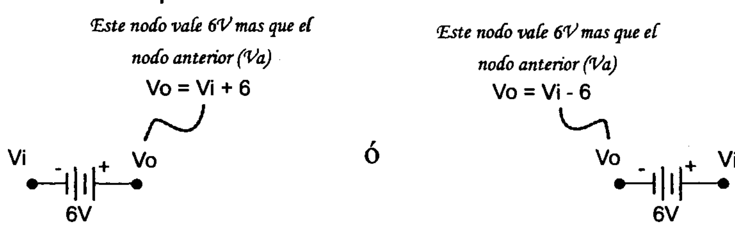


Figura 5.0b

Nota aclaratoria paso 4:



Ejemplo:

Paso 5:

Analice las corrientes de la figura 5.0a:

$$ia = \frac{20 - Vx}{2\,K\Omega} \qquad ib = \frac{16 - Vx}{4\,K\Omega} \qquad ic = \frac{Vx - 0}{1\,K\Omega}$$

Nota aclaratoria para el paso 5:

Recuerde que por ley de ohm: $i = \dfrac{V}{R}$

Por definición, el voltaje es la diferencia de potencial entre dos puntos. Es decir, en la figura 5.0.c:

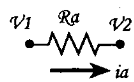


Figura 5.0.c

Voltaje que cae en la resistencia Ra es V1 - V2.

Entonces, la corriente de la figura 5.0b es:

$$ia = \frac{V1 - V2}{R}$$

Paso 6:

Reemplace las corrientes del paso cinco en la ecuación del paso 2.

$$ia + ib = ic$$

$$\frac{20 - Vx}{2} + \frac{16 - Vx}{4} = \frac{Vx - 0}{1}$$

Paso 7:

Resuelva el planteamiento anterior.

Encuentre el denominador común y simplifique:

$$\frac{20 - Vx}{2} \times \frac{2}{2} + \frac{16 - Vx}{4} = \frac{Vx - 0}{1} \times \frac{4}{4}$$

$$\frac{40 - 2Vx}{4} + \frac{16 - Vx}{4} = \frac{4Vx - 0}{4}$$

$$40 - 2Vx + 16 - Vx = 4\,Vx$$

$$56 = 7\,Vx$$

$$Vx = 8V$$

Paso 8:

Con el resultado anterior, encontrar las corrientes.

$$ia = \frac{20 - Vx}{2K} \qquad ib = \frac{16 - Vx}{4K} \qquad ic = \frac{Vx - 0}{1K}$$

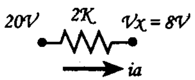
$$ia = \frac{20 - 8}{2K} \qquad ib = \frac{16 - 8}{4K} \qquad ic = \frac{8}{1K}$$

$$ia = \frac{12}{2K} \qquad ib = \frac{8}{4K} \qquad ic = 8\,mA$$

$$ia = 6\,mA \qquad ib = 2\,mA$$

Con el resultado anterior, encontrar el voltaje que cae en cada resistencia.

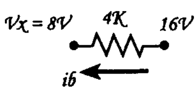
voltaje en R de 2 KΩ



$$Va = 20V - 8V$$

$$Va = 12V$$

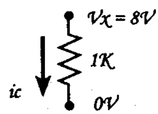
voltaje en R de 4 KΩ



$$Vb = 16V - 8V$$

$$Vb = 8V$$

voltaje en R de 1 KΩ



$$Vc = 8V - 0V$$

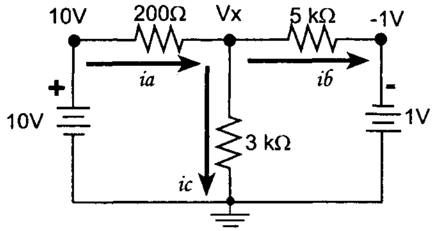
$$Vc = 8V$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

5.2 Ejercicios resueltos

Ejercicio No. 1

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic y los voltajes Va, Vb y Vc del ejercicio No. 1 del capítulo anterior.



Analizando las corrientes que ingresan y salen del nodo Vx: $ia = ib + ic$

Donde: $ia = \dfrac{10 - Vx}{200\Omega}$ $\qquad ib = \dfrac{Vx - (-1)}{5\,K\Omega}$ $\qquad ic = \dfrac{Vx - 0}{3\,K\Omega}$

Reemplazando y resolviendo:

$$\frac{10 - Vx}{0,2} = \frac{Vx - (-1)}{5} + \frac{Vx - 0}{3}$$

$$\frac{10 - Vx}{0,2} \times \frac{75}{75} = \frac{Vx + 1}{5} \times \frac{3}{3} + \frac{Vx - 0}{3} \times \frac{5}{5}$$

$$\frac{750 - 75\,Vx}{15} = \frac{3Vx + 3}{15} + \frac{5Vx - 0}{15}$$

$$750 - 75Vx = 3 + 3Vx + 5\,Vx$$

$$747 = 83\,Vx$$

$$Vx = 9V$$

Con el resultado anterior, encontrar las corrientes y los voltajes:

$$ia = \frac{10 - Vx}{0,2K} \qquad ib = \frac{Vx - (-1)}{5K} \qquad ic = \frac{Vx - 0}{3K}$$

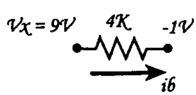
$$ia = \frac{10 - 9}{0,2K} \qquad ib = \frac{9 + 1}{5K} \qquad ic = \frac{9}{3K}$$

$$ia = \frac{1}{0,2K} \qquad ib = \frac{10}{5K} \qquad ic = 3\,mA$$

$$ia = 5\,mA \qquad ib = 2\,mA$$

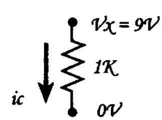
$Va = 10\,V - 9\,V$

$Va = 1V$



$Vb = 9V - (-1V)$

$Vb = 10V$



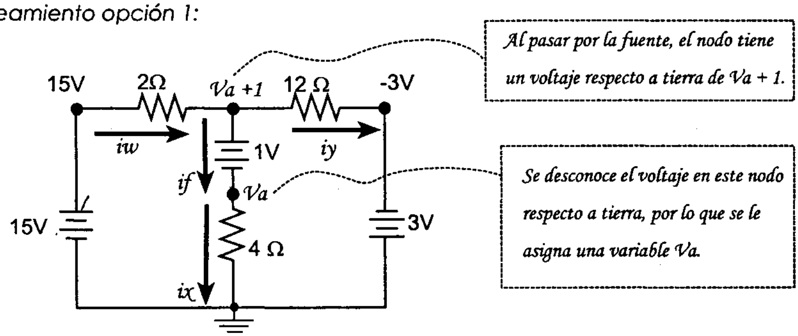
$Vc = 9V - 0V$

$Vc = 9V$

Ejercicio No. 2

Determinar el valor de las corrientes ix e iy y los voltajes Vx y Vy del ejercicio No. 2 del capítulo anterior.

Planteamiento opción 1:



Analizando las corrientes que ingresan y salen del nodo (*Va + 1*)

$iw = if + iy$ *(ec. 1)*

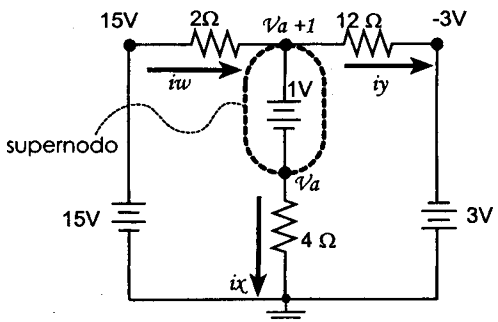
Analizando las corrientes que ingresan y salen del nodo *Va*

$if = ix$

Reemplazando en ec. 1:

$iw = ix + iy$ *(ec. corrientes)*

Planteamiento opción 2:



Siempre, las corrientes que ingresan a una fuente es equivalente a las corrientes que salen de la fuente. De tal manera, se puede agrupar y realizar un solo análisis en un "supernodo".

Observe que directamente se obtiene a misma ecuación de corrientes que en el planteamiento anterior.

Σ corrientes que ingresan al supernodo		Σ corrientes que salen del supernodo	
iw	=	$ix + iy$	*(ec. nodo)*

Analizando las corrientes:

$$i_w = \frac{15 - (V_a+1)}{2\,\Omega} \qquad i_x = \frac{V_a - 0}{4\,\Omega} \qquad i_y = \frac{(V_a+1) - (-3)}{12\,\Omega}$$

Reemplazando i_w, i_x e i_y en la ecuación de nodos $i_w = i_x + i_y$ y resolviendo:

$$\frac{15 - (V_a+1)}{2\,\Omega} = \frac{V_a - 0}{4\,\Omega} + \frac{(V_a+1) - (-3)}{12\,\Omega}$$

$$\frac{14 - V_a}{2\,\Omega} \times \frac{6}{6} = \frac{V_a}{4\,\Omega} \times \frac{3}{3} + \frac{V_a + 4}{12\,\Omega}$$

$$\frac{84 - 6V_a}{12\,\Omega} = \frac{3V_a}{12\,\Omega} + \frac{V_a + 4}{12\,\Omega}$$

$$84 - 6V_a = 3V_a + V_a + 4$$

$$10V_a = 80$$

$$V_a = 8V$$

Con el resultado anterior, encontrar las corrientes ix e iy:

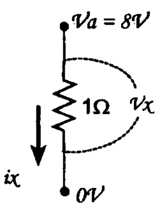
$$i_x = \frac{V_a - 0}{4} \qquad i_y = \frac{(V_a + 1) - (-3)}{12}$$

$$i_x = \frac{8 - 0}{4} \qquad i_y = \frac{V_a + 4}{12}$$

$$i_x = \frac{8}{4} \qquad i_y = \frac{8 + 4}{12}$$

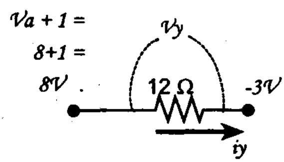
$$i_x = 2A \qquad i_y = 1A$$

Con el resultado anterior, encontrar las corrientes ix e iy:



$$V_x = 8V - 0V$$

$$V_x = 8V$$



$$V_y = (V_a + 1) - (-3)$$

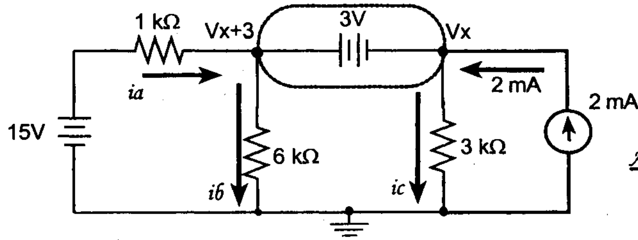
$$V_y = 9 + 3$$

$$V_y = 12V$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 3

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic del ejercicio 3 del capítulo anterior.



Analizando el supernodonodo:

$\Sigma\ i$ *ingresan* $\quad \Sigma\ i$ *salen*

$$ia + 2 = ib + ic$$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{15 - (Vx+3)}{1K\Omega} \qquad ib = \frac{(Vx+3) - 0}{6\,K\Omega} \qquad ic = \frac{(Vx) - (0)}{3\,K\Omega}$$

Reemplazando *ia, ib* e *ic* en la ecuación del supernodo y resolviendo:

$$\left[\frac{15 - (Vx+3)}{1K\Omega} + \mathbf{2mA} = \frac{(Vx+3) - 0}{6\,K\Omega} + \frac{(Vx) - (0)}{3\,K\Omega}\right] \times 1K$$

$$\frac{15 - (Vx+3)}{1} \times \frac{6}{6} + 2 \times \frac{6}{6} = \frac{(Vx+3) - 0}{6} + \frac{(Vx) - (0)}{3} \times \frac{2}{2}$$

$$\frac{72 - 6Vx}{6} + \frac{12}{6} = \frac{Vx + 3}{6} + \frac{2Vx}{6}$$

$$72 - 6\,Vx + 12 = Vx + 3 + 2\,Vx$$

$$81 = 9Vx \longrightarrow Vx = 9V$$

Con el resultado anterior, encontrar las corrientes ia, ib e ic:

$$ia = \frac{15 - (Vx+3)}{1K\Omega} \qquad ib = \frac{(Vx+3) - 0}{6\,K\Omega} \qquad ic = \frac{(Vx - (0)}{3\,K\Omega}$$

$$ia = \frac{12 - Vx}{1\,K} \qquad ib = \frac{9 + 3}{6K} \qquad ic = \frac{9}{3K}$$

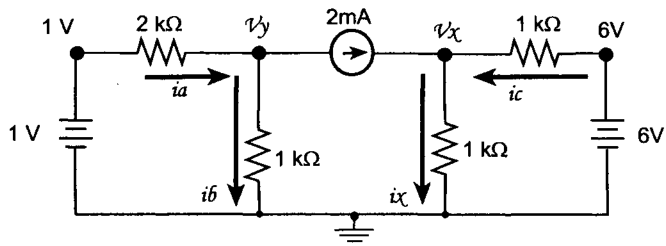
$$ia = \frac{12 - 9}{1K} \qquad ib = \frac{12}{6K} \qquad ic = 3\ mA$$

$$ia = 3\ mA \qquad ib = 2\ mA$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 4

Determinar el valor de las corrientes ia e ib del ejercicio 4 del capítulo anterior.



Analizando el nodo Vy:

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$ia = ib + 2mA$$

Analizando el nodo Vx:

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$ic + 2mA = ix$$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{1 - (Vy)}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{(Vy) - 0}{1\,K\Omega} \qquad ic = \frac{6 - Vx}{1\,K\Omega} \qquad ix = \frac{Vx - 0}{1\,K\Omega}$$

Reemplazando en la ec. del nodo Vy:

$$\left[\frac{1 - (Vy)}{2K\Omega} = \frac{(Vy) - 0}{1\,K\Omega} + 2mA\right] \times 1K$$

$$\frac{1 - Vy}{2} = \frac{Vy}{1} \times \frac{2}{2} + 2 \times \frac{2}{2}$$

$$\frac{1 - Vy}{2} = \frac{2Vy}{2} + \frac{4}{2}$$

$$1 - Vy = 2Vy + 4$$

$$-3Vy = 3 \longrightarrow Vy = -1V$$

$$ia = \frac{1 - (Vy)}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{Vy}{1\,K\Omega}$$

$$ia = \frac{1 - (-1)}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{Vy}{1\,K\Omega}$$

$$ia = \frac{2V}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{-1V}{1K\Omega}$$

$$ia = 1mA \qquad ib = -1mA$$

Reemplazando en la ec. del nodo

$$\left[\frac{6 - Vx}{1\,K\Omega} + 2mA = \frac{Vx - 0}{1\,K\Omega}\right] \times 1K$$

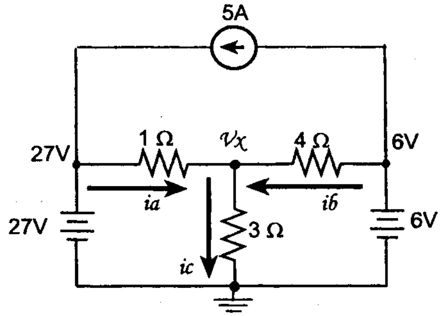
$$6 - Vx + 2 = Vx$$

$$8 = 2\,Vx \longrightarrow Vx = 4V$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 5

Determinar el valor de las corrientes ia, ib e ic del ejercicio 5 del capítulo



Analizando el nodo Vx:

Σ *i ingresan* $\quad\quad$ Σ *i salen*

$$ia + ib = ic$$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{27 - (Vx)}{1\,\Omega} \qquad ib = \frac{6 - Vx}{4\,\Omega} \qquad ic = \frac{Vx - 0}{3\,\Omega}$$

Reemplazando en la ec. del nodo Vx:

$$\frac{27 - (Vx)}{1\,\Omega} + \frac{6 - Vx}{4\,\Omega} = \frac{Vx - 0}{3\,\Omega}$$

$$\frac{27 - Vx}{1} \times \frac{12}{12} + \frac{6 - Vx}{4} \times \frac{3}{3} = \frac{Vx}{3} \times \frac{4}{4}$$

$$\frac{324 - 12\,Vx}{12} + \frac{18 - 3Vx}{12} = \frac{4\,Vx}{12}$$

$$324 - 12\,Vx + 18 - 3Vx = 4Vx$$

$$-19\,Vx = -342$$

$$Vx = 18\,V$$

Recordatorio:

$1V = 1A \times 1\,\Omega$

$1V = 1mA \times 1K\Omega$

$\dfrac{1\,V}{1\,\Omega} = 1A$

$\dfrac{1\,V}{1\,K\Omega} = 1mA$

Reemplazando Vx en ia, ib e ic.

$$ia = \frac{27 - (Vx)}{1\Omega} \qquad ib = \frac{6 - Vx}{4\,\Omega} \qquad ic = \frac{Vx - 0}{3\,\Omega}$$

$$ia = \frac{27 - 18}{1\Omega} \qquad ib = \frac{6 - 18}{4\,\Omega} \qquad ic = \frac{Vx}{3\,\Omega}$$

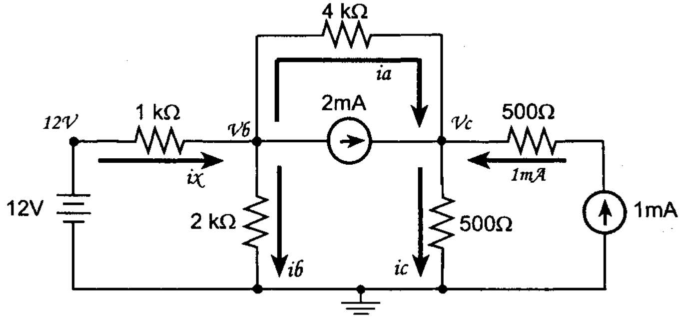
$$ia = \frac{9\,V}{1\,\Omega} \qquad ib = \frac{-12\,V}{4\,\Omega} \qquad ic = \frac{18V}{3\,\Omega}$$

$$ia = 9\,A \qquad ib = -3\,A \qquad ic = 6A$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 6

Determinar el valor de las corrientes ia, ib, ic, e id y los voltajes Va, Vb, Vc y Vd del ejercicio No. 6 del capítulo anterior.



Analizando el nodo Vb:

Σ *i ingresan* $\quad$ Σ *i salen*

$$id = ia + ib + 2mA$$

Analizando el nodo Vc:

Σ *i ingresan* $\quad$ Σ *i salen*

$$1mA + 2mA + ia = ic$$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{V_b - V_c}{4K\Omega} \qquad ib = \frac{V_b - 0}{2K\Omega} \qquad ic = \frac{V_c - 0}{500\Omega} \qquad id = \frac{12 - V_b}{1K\Omega}$$

Reemplazando en ec. del nodo Vb:

$$\left[\frac{12 - V_b}{1K\Omega} = \frac{V_b - V_c}{4K\Omega} + \frac{V_b - 0}{2K\Omega} + 2mA\right] x1K$$

$$\frac{12 - V_b}{1} x\frac{4}{4} = \frac{V_b - V_c}{4} + \frac{V_b - 0}{2} x\frac{2}{2} + 2 x\frac{4}{4}$$

$$\frac{48 - 4V_b}{4} = \frac{V_b - V_c}{4} + \frac{2V_b}{4} + \frac{8}{4}$$

$$48 - 4V_b = V_b - V_c + 2V_b + 8$$

$$40 = 7V_b - V_c \text{ (ecuación 1)}$$

Reemplazando en ec. del nodo Vc:

$$\left[1mA + 2mA + \frac{V_b - V_c}{4K\Omega} = \frac{V_c - 0}{500\Omega}\right] x1K$$

$$(1+2)\, x\frac{4}{4} + \frac{V_b - V_c}{4} = \frac{V_c}{0,5} x\frac{8}{8}$$

$$\frac{12}{4} + \frac{V_b - V_c}{4} = \frac{8V_c}{4}$$

$$12 + V_b - V_c = 8V_c$$

$$12 = -V_b + 9V_c$$

x(7)

$$40 = 7V_b - V_c$$

$$\underline{84 = -7V_b + 63V_c}$$

$$124 = \quad -62V_c \quad \longrightarrow \quad V_c = 2V$$

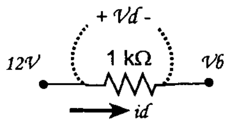
Reemplazando $V_c = 2V$ en la ecuación 1:

$$40 = 7\,V_b - V_c$$

$$40 = 7\,V_b - 2$$

$$42 = 7\,V_b \;\cdots\cdots\cdots\longrightarrow\; V_b = 6V$$

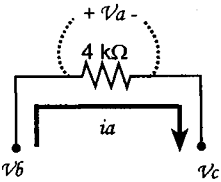
Con los resultados anteriores $(V_b = 6V$ y $V_c = 2V)$, encontrar los voltajes V_a y V_d:



$$V_d = 12 - V_b$$

$$V_d = 12 - 6$$

$$V_d = 6\ V$$



$$V_a = V_b - V_c$$

$$V_a = 6V - 2V$$

$$V_a = 4V$$

Con los resultados anteriores $(V_b = 6V$ y $V_c = 2V)$, encontrar las corrientes ia, ib, ic, id:

$$i_a = \frac{V_b - V_c}{4K\Omega} \qquad i_b = \frac{V_b - 0}{2\,K\Omega} \qquad i_c = \frac{V_c - 0}{500\,\Omega} \qquad i_d = \frac{12 - V_b}{1\,K\Omega}$$

$$i_a = \frac{6V - 2V}{4K\Omega} \qquad i_b = \frac{6V - 0}{2\,K\Omega} \qquad i_c = \frac{2V - 0}{500\,\Omega} \qquad i_d = \frac{12 - 6}{1\,K\Omega}$$

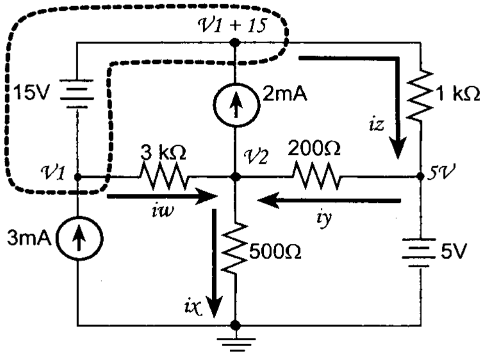
$$i_a = \frac{4V}{4K\Omega} \qquad i_b = \frac{6V}{2\,K\Omega} \qquad i_c = \frac{2V}{500\,\Omega} \qquad i_d = \frac{6V}{1\,K\Omega}$$

$$i_a = 1\ mA \qquad i_b = 3\ mA \qquad i_c = 4\ mA \qquad i_d = 6\ mA$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 7

Determinar el valor de las corrientes *iw, ix, iy e iz* y de las caídas de tensiones Vw, Vx, Vy y Vz del ejercicio No. 7 del capítulo anterior.



<u>*Analizando el supernodo:*</u>

Σ *i ingresan* $\quad$ Σ *i salen*

$$3mA + 2mA = iw + iz$$

<u>*Analizando el nodo V2:*</u>

Σ *i ingresan* $\quad$ Σ *i salen*

$$iw + iy = ix + 2mA$$

Analizando las corrientes:

$$ix = \frac{V2 - 0}{500\,\Omega} \qquad iy = \frac{5 - V2}{200\,\Omega} \qquad iz = \frac{(V1+15) - 5}{1\,K\Omega} \qquad iw = \frac{V1 - V2}{3\,K\Omega}$$

Reemplazando en ec. supernodo:

$$\left[3mA+2mA = \frac{V1 - V2}{3\,K\Omega} + \frac{(V1+15) - 5}{1\,K\Omega}\right] \text{x1K}$$

$$(3+2)\,\text{x}\frac{3}{3} = \frac{V1 - V2}{3} + \frac{(V1+15) - 5}{1}\,\text{x}\frac{3}{3}$$

$$\frac{15}{3} = \frac{V1 - V2}{3} + \frac{3V1 + 30}{3}$$

$$15 = V1 - V2 + 3V1 + 30$$

$$-15 = 4V1 - V2 \text{ (ecuación 1)}$$

Reemplazando en ec. del nodo V2:

$$\left[\frac{V1 - V2}{3\,K\Omega} + \frac{5 - V2}{200\,\Omega} = \frac{V2 - 0}{500\,\Omega} + 2mA\right] \text{x1K}$$

$$\frac{V1 - V2}{3} + \frac{5 - V2}{0{,}2}\,\text{x}\frac{15}{15} = \frac{V2}{0{,}5}\,\text{x}\frac{6}{6} + 2\,\text{x}\frac{3}{3}$$

$$\frac{V1 - V2}{3} + \frac{75 - 15V2}{3} = \frac{6V2}{3} + \frac{6}{3}$$

$$V1 - V2 + 75 - 15V2 = 6V2 + 6$$

$$69 = -V1 + 22\,V2$$

x(4)

$$-15 = 4\,V1 - V2$$

$$276 = -4\,V1 + 88\,V2$$

$$261 = \qquad + 87\,V2 \longrightarrow V2 = 3\,V$$

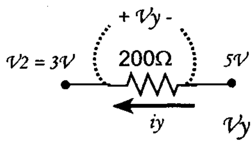
Reemplazando $V2 = 3V$ en la ecuación 1:

$$-15 = 4\,V1 - V2$$

$$-15 = 4\,V1 - 3$$

$$-12 = 4\,V1 \;\cdots\cdots\rightarrow\; V1 = -3V$$

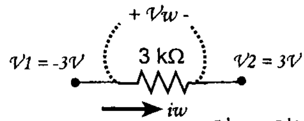
Con los resultados anteriores ($V1 = -3V$ y $V2 = 3V$), encontrar los voltajes Vw, Vx, Vy y Vz.



$$Vy = 5V - V2$$

$$Vy = 5V - 3V$$

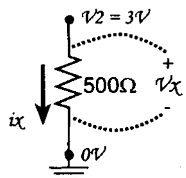
$$Vy = 2V$$



$$Vw = V1 - V2$$

$$Vw = -3V - 3V$$

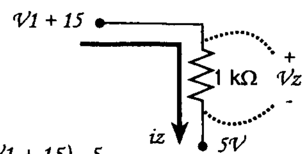
$$Vw = -6V$$



$$Vx = V2 - 0V$$

$$Vx = 3V - 0V$$

$$Vx = 3V$$



$$Vz = (V1 + 15) - 5$$

$$Vz = (-3 + 15) - 5$$

$$Vz = 7V$$

Con los resultados anteriores ($V1 = -3V$ y $V2 = 3V$), encontrar las corrientes iw, ix, iy e iz.

$$iw = \frac{V1 - V2}{3K\Omega} \qquad ix = \frac{V2 - 0V}{500\,\Omega} \qquad iy = \frac{5 - V2}{200\,\Omega} \qquad iz = \frac{V1 + 15 - 5}{1\,K\Omega}$$

$$iw = \frac{-3V - 3V}{3K\Omega} \qquad ix = \frac{3 - 0V}{500\,\Omega} \qquad iy = \frac{5 - 3}{200\,\Omega} \qquad iz = \frac{V1 + 10}{1\,K\Omega}$$

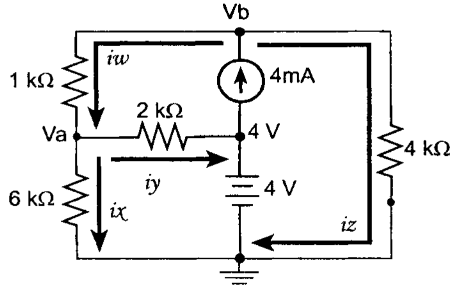
$$iw = \frac{-6V}{3K\Omega} \qquad ix = 6\,mA \qquad iy = \frac{2}{200\,\Omega} \qquad iz = \frac{-3 + 10}{1\,K\Omega}$$

$$iw = 2mA \qquad iy = 10\,mA \qquad iz = 7\,mA$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 8

Determinar el valor de las corrientes *iw, ix, iy* e *iz* del ejercicio No. 8 del capítulo anterior.



Analizando el nodo Va:

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$iw = ix + iy$$

Analizando el nodo Vb:

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$4mA = iw + iz$$

Analizando las corrientes:

$$iw = \frac{Vb - Va}{1\,K\Omega} \qquad ix = \frac{Va - 0}{6\,K\Omega} \qquad iy = \frac{Va - 4}{2\,K\Omega} \qquad iz = \frac{Vb - 0}{4\,K\Omega}$$

Reemplazando en ec. del nodo Va:

$$\left[\frac{Vb - Va}{1\,K\Omega} = \frac{Va - 0}{6\,K\Omega} + \frac{Va - 4}{2\,K\Omega}\right] \text{x1K}$$

$$\frac{Vb - Va}{1} \text{x} \frac{6}{6} = \frac{Va - 0}{6} + \frac{Va - 4}{2} \text{x} \frac{3}{3}$$

$$\frac{6Vb - 6Va}{6} = \frac{Va}{6} + \frac{3Va - 12}{6}$$

$$6Vb - 6Va = Va + 3Va - 12$$

$$12 = 10\,Va - 6Vb \text{ (ecuación 1)}$$

Reemplazando en ec. del nodo Vb:

$$\left[4mA = \frac{Vb - Va}{1\,K\Omega} + \frac{Vb - 0}{4\,K\Omega}\right] \text{x1K}$$

$$4 \text{x} \frac{4}{4} = \frac{Vb - Va}{1} \text{x} \frac{4}{4} + \frac{Vb}{4}$$

$$\frac{16}{4} = \frac{4Vb - 4Va}{4} + \frac{Vb}{4}$$

$$16 = 4Vb - 4Va + Vb$$

$$16 = -4Va + 5Vb$$

x(5) $\qquad$ x(6)

$$60 = 50Va - 30\,Vb$$
$$96 = -24Va + 30\,Vb$$
$$156 = 26\,Va \quad \longrightarrow \quad Va = 6\,V$$

Reemplazando $Va = 6V$ en la ecuación 1:

$$12 = 10\,Va - 6Vb$$

$$12 = 10\,(6) - 6Vb$$

$$12 = 60 - 6Vb$$

$$-48 = -6Vb \;\cdots\cdots\longrightarrow\; Vb = 8V$$

Con los resultados anteriores ($Va = 6V$ y $Vb = 8V$), encontrar las corrientes iw, ix, iy e iz.

$$iw = \frac{Vb - Va}{1\,K\Omega} \qquad ix = \frac{Va - 0}{6\,K\Omega} \qquad iy = \frac{Va - 4}{2\,K\Omega} \qquad iz = \frac{Vb - 0}{4\,K\Omega}$$

$$iw = \frac{8V - 6V}{1\,K\Omega} \qquad ix = \frac{6V - 0}{6\,K\Omega} \qquad iy = \frac{6 - 4}{2\,K\Omega} \qquad iz = \frac{8V - 0}{4\,K\Omega}$$

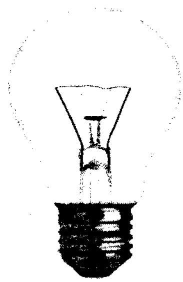
$$iw = \frac{2V}{1\,K\Omega} \qquad ix = 1\ mA \qquad iy = \frac{2}{2\,K\Omega} \qquad iz = 2\ mA$$

$$iw = 2mA \qquad iy = 1\ mA$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La lámpara incandescente consiste en un fino filamento de tungsteno el cual se encuentra enrollado para reducir espacio. Para explicar su funcionamiento, recordemos la siguiente formula:

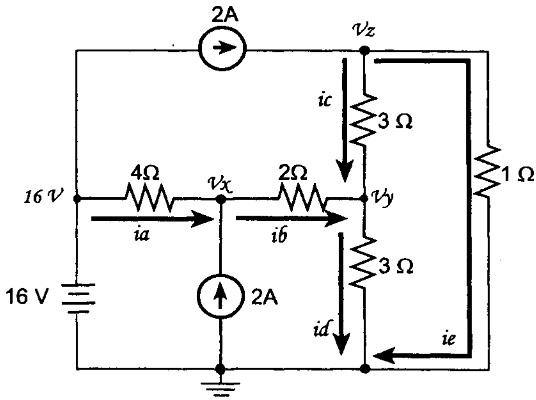


$$R = \rho \times \frac{l}{s}$$

Mientras la sección del conductor disminuye, su resistencia eléctrica incrementa. A mayor resistencia eléctrica, más energía se disipará en forma de calor. Si la temperatura se eleva lo suficiente, la energía se disipará en forma de calor y luz. Sin embargo, si la temperatura se eleva demasiado, puede fundirse un sector de conductor, ocasionando un circuito abierto. El grosor del filamento de tungsteno es tema fundamental en la construcción de las lámparas incandescentes. [22]

Ejercicio No. 9

Determinar el valor de las corrientes *ia, ib, ic, id, ie* del ejercicio No. 9 del capítulo anterior.



Analizando el nodo Va:		*Analizando el nodo Vb:*		*Analizando el nodo Vc:*	
Σ *i ingresan*	Σ *i salen*	Σ *i ingresan*	Σ *i salen*	Σ *i ingresan*	Σ *i salen*
$ia + 2A$ =	ib	$ib + ic$ =	id	$2A$ =	$ic + ie$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{16 - Vx}{4\,\Omega} \qquad ib = \frac{Vx - Vy}{2\,\Omega} \qquad ic = \frac{Vz - Vy}{3\,\Omega} \qquad id = \frac{Vy - 0}{3\,\Omega} \qquad ie = \frac{Vz - 0}{1\,\Omega}$$

Reemplazando las corrientes en las ecuaciones de nodo Va, Vb y Vc:

Ec. Nodo Va:

$$\frac{16 - Vx}{4\,\Omega} + 2A = \frac{Vx - Vy}{2\,\Omega}$$

$$\frac{16 - Vx}{4} + 2 \times \frac{4}{4} = \frac{Vx - Vy}{2} \times \frac{2}{2}$$

$$\frac{16 - Vx}{4} + \frac{8}{4} = \frac{2Vx - 2Vy}{4}$$

$16 - Vx + 8 = 2Vx - 2Vy$

$24 = 3Vx - 2Vy$

$24 = 3Vx - 2Vy$ (Ec.1)

Ec. Nodo Vb:

$$\frac{Vx - Vy}{2\,\Omega} + \frac{Vz - Vy}{3\,\Omega} = \frac{Vy - 0}{3\,\Omega}$$

$$\frac{Vx - Vy}{2\,\Omega} \times \frac{3}{3} + \frac{Vz - Vy}{3\,\Omega} \times \frac{2}{2} = \frac{Vy}{3\,\Omega} \times \frac{2}{2}$$

$$\frac{3Vx - 3Vy}{6} + \frac{2Vz - 2Vy}{6} = \frac{2Vy}{6}$$

$3Vx - 3Vy + 2Vz - 2Vy = 2Vy$

$0 = -3\,Vx + 7\,Vy - 2\,Vz$ (Ec. 2)

Ec. Nodo Vc:

$$2A = \frac{Vz - Vy}{3\Omega} + \frac{Vz - 0}{1\Omega}$$

$$2 \times \frac{3}{3} = \frac{Vz - Vy}{3} + \frac{Vz - 0}{1} \times \frac{3}{3}$$

$$\frac{6}{3} = \frac{Vz - Vy}{3} + \frac{3Vz}{3}$$

$$6 = Vz - Vy + 3Vz$$

$$6 + Vy = 4Vz$$

$$Vz = 1,5 + 0,25Vy \quad (Ec.\ 3)$$

Reemplazando Ec. 3 en Ec. 2:

$$0 = -3\,Vx + 7\,Vy - 2\,(1,5 + 0,25\,Vy)$$

$$0 = -3\,Vx + 7\,Vy - 3 - 0,5Vy$$

$$3 = -3\,Vx + 6,5\,Vy \quad (Ec.\ 4)$$

Resolviendo Ec. 1 y Ec. 4:

$$\begin{array}{rrrl} & 24 = & 3\,Vx - 2\,Vy & (Ec.1) \\ + & 3 = & -3\,Vx + 6,5\,Vy & (Ec.\ 4) \\ \hline & 27 = & 4,5\,Vy & \longrightarrow Vy = 6V \end{array}$$

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La unidad de Trabajo en el sistema internacional es el Julio en honor a James Prescott Joule, quien en 1840 publicó que el calor que origina un conductor por el paso de la corriente eléctrica es proporcional al producto de la resistencia del conductor por el cuadrado de la intensidad de corriente.[23]

James Prescott Joule
Físico Británico
1818 - 1889

Reemplazando Vy = 6V en Ec. 1:

$$24 = 3\,Vx - 2\,(6)$$

$$24 = 3Vx - 12$$

$$36 = 3Vx \longrightarrow Vx = 12V$$

Reemplazando Vy = 6V en Ec. 3:

$$Vz = 1,5 + 0,25(6) \longrightarrow Vz = 3V$$

Con los resultados ($Vx=12V$, $Vy = 6V$ y $Vz = 3V$), encontrar las corrientes ia, ib, ic, id e ie.

$$ia = \frac{16 - Vx}{4\Omega} \qquad ib = \frac{Vx - Vy}{2\Omega} \qquad ic = \frac{Vz - Vy}{3\Omega} \qquad id = \frac{Vy - 0}{3\Omega} \qquad ie = \frac{Vz - 0}{1\Omega}$$

$$ia = \frac{16 - 12}{4\Omega} \qquad ib = \frac{12V - 6V}{2\Omega} \qquad ic = \frac{3V - 6V}{3\Omega} \qquad id = \frac{6V - 0}{3\Omega} \qquad ie = \frac{3V - 0}{1\Omega}$$

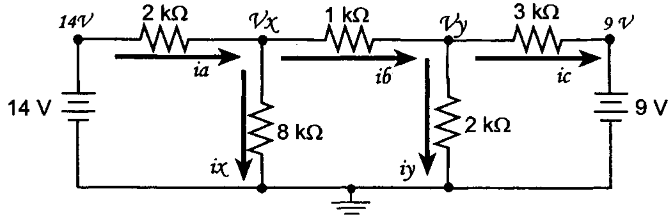
$$ia = \frac{4V}{4\Omega} \qquad ib = \frac{6V}{2\Omega} \qquad ic = \frac{-3V}{3\Omega} \qquad id = \frac{6V}{3\Omega} \qquad ie = \frac{3V}{1\Omega}$$

$$ia = 1A \qquad ib = 3A \qquad ic = -1A \qquad id = 2A \qquad ie = 3A$$

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

Ejercicio No. 10

Determinar el valor de las corrientes *ix, iy, ia, ib e ic* y los voltajes *Vx ,Vy, Va, Vb* y *Vc* del ejercicio 10 del capítulo anterior.



Analizando el nodo Vx:

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$ia = ib + ix$$

Analizando el nodo Vy

Σ *i ingresan* $\quad \Sigma$ *i salen*

$$ib = iy + ic$$

Analizando las corrientes:

$$ia = \frac{14 - Vx}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{Vx - Vy}{1\,K\Omega} \qquad ic = \frac{Vy - 9}{3\,K\Omega}$$

$$ix = \frac{Vx - 0}{8\,K\Omega} \qquad iy = \frac{Vy - 0}{2\,K\Omega}$$

Reemplazando en ec. del nodo Vx:

$$\left[\frac{14 - Vx}{2K\Omega} = \frac{Vx - Vy}{1\,K\Omega} + \frac{Vx - 0}{8\,K\Omega}\right] \times 1K$$

$$\frac{14 - Vx}{2} \times \frac{4}{4} = \frac{Vx - Vy}{1} \times \frac{8}{8} + \frac{Vx}{8}$$

$$\frac{56 - 4Vx}{8} = \frac{8\,Vx - 8\,Vy}{8} + \frac{Vx}{8}$$

$$56 - 4\,Vx = 8\,Vx - 8\,Vy + Vx$$

$$56 = 13\,Vx - 8\,Vy \text{ (ecuación 1)}$$

x(11)

Reemplazando en ec. del nodo Vy:

$$\left[\frac{Vx - Vy}{1\,K\Omega} = \frac{Vy - 0}{2\,K\Omega} + \frac{Vy - 9}{3\,K\Omega}\right] \times 1K$$

$$\frac{Vx - Vy}{1} \times \frac{6}{6} = \frac{Vy}{2} \times \frac{3}{3} + \frac{Vy - 9}{3} \times \frac{2}{2}$$

$$\frac{6Vx - 6\,Vy}{6} = \frac{3Vy}{6} + \frac{2Vy - 18}{6}$$

$$6\,Vx - 6Vy = 3Vy + 2Vy - 18$$

$$18 = -6\,Vx + 11\,Vy$$

x(8)

$$\begin{array}{r} 616 = 143\,Vx - 88\,Vy \\ 144 = -48\,Vx + 88Vy \\ \hline 760 = 95\,Vx \end{array} \longrightarrow Vx = 8V$$

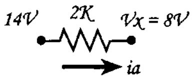
Reemplazando $Vx = 8$ en la ecuación 1:

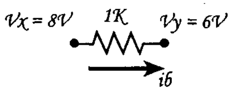
$$56 = 13\,Vx - 8\,Vy$$

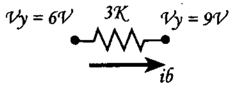
$$56 = 13\,(8) - 8\,Vy$$

$$8Vy = 48 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \rightarrow \quad Vy = 6V$$

Con los resultados anteriores $(Vx=8V$ y $Vy=6V)$, encontrar los voltajes Va, Vb y Vc:







$$Va = 14 - Vx \qquad Vb = Vx - Vy \qquad Vc = Vy - 9$$

$$Va = 14 - 8 \qquad Vb = 8 - 6 \qquad Vc = 6 - 9$$

$$Va = 6V \qquad Vb = 2V \qquad Vc = -3V$$

Con los resultados anteriores $(Vx=8V$ y $Vy=6V)$, encontrar las corrientes ia, ib, ic, ix e iy:

$$ia = \frac{14 - Vx}{2K\Omega} \qquad ib = \frac{Vx - Vy}{1\,K\Omega} \qquad ic = \frac{Vy - 9}{3\,K\Omega}$$

$$ia = \frac{14 - 8}{2K} \qquad ib = \frac{8 - 6}{1K} \qquad ic = \frac{6 - 9}{3\,K}$$

$$ia = \frac{6}{2K} \qquad ib = \frac{2}{1K} \qquad ic = \frac{-3}{3\,K}$$

$$ia = 3\,mA \qquad ib = 2\,mA \qquad ic = -1\,mA$$

$$ix = \frac{Vx - 0}{8\,K\Omega} \qquad iy = \frac{Vy - 0}{2\,K\Omega}$$

$$ix = \frac{8}{8\,K} \qquad iy = \frac{6}{2\,K}$$

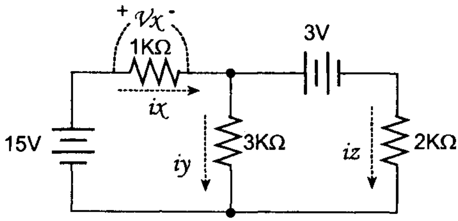
$$ix = 1\,mA \qquad ix = 3\,mA$$

> Recuerde que el signo negativo en ic indica que la corriente fluye en dirección contraria al planteado.
> El voltaje negative en Vc indica que el voltaje está polarizado de manera contraria al planteado.

Observe que son los mismos resultados que se obtuvieron en el capítulo anterior.

5.3 Ejercicios propuestos

1)



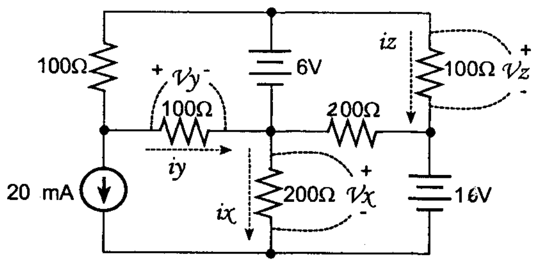
Solución: $ix = 6mA$

$iy = 3mA$

$iz = 3mA$

$Vx = 6V$

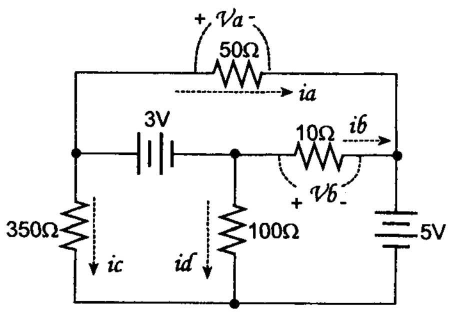
2)



Solución:

$ix = 40mA$	$Vx = 8V$
$iy = 20mA$	$Vy = 2V$
$iz = -20mA$	$Vz = -2V$

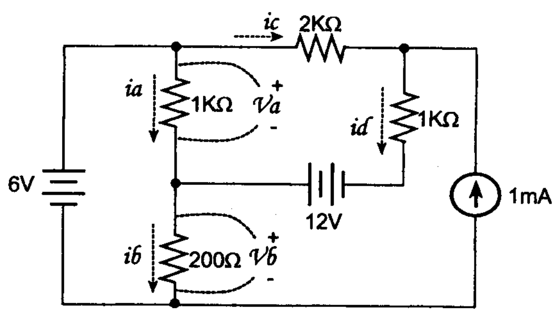
3)



Solución:

$ia = 40mA$	$Va = 2V$
$ib = -100mA$	$Vb = -1V$
$ic = 20mA$	
$id = 40mA$	

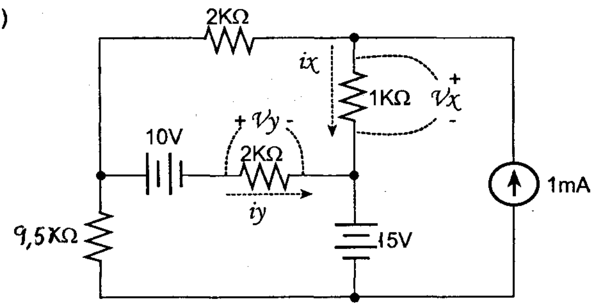
4)



Solución:

$ia = 4mA$	$Va = 4V$
$ib = 10mA$	$Vb = 2V$
$ic = 5mA$	
$id = 6mA$	

5)



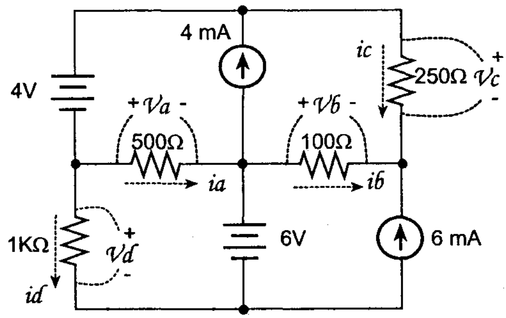
Solución: $i_x = 2mA$

$i_y = -3mA$

$V_x = 2V$

$V_y = -6V$

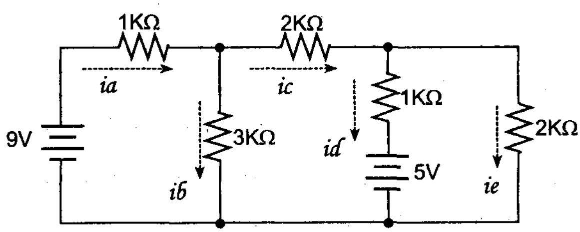
6)



Solución:

$i_a = -4mA$	$V_a = -2V$
$i_b = -10mA$	$V_b = -1V$
$i_c = 4mA$	$V_c = 1V$
$i_d = 4mA$	$V_d = 4V$

7)



Solución: $i_a = 3mA$

$i_b = 2mA$

$i_c = 1mA$

$i_d = -1mA$

$i_e = 2mA$

8) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 1 del capítulo 4.3.

9) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 2 del capítulo 4.3.

10) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 3 del capítulo 4.3.

11) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 4 del capítulo 4.3.

12) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 5 del capítulo 4.3.

13) Resolver por análisis de nodos el ejercicio propuesto 6 del capítulo 4.3.

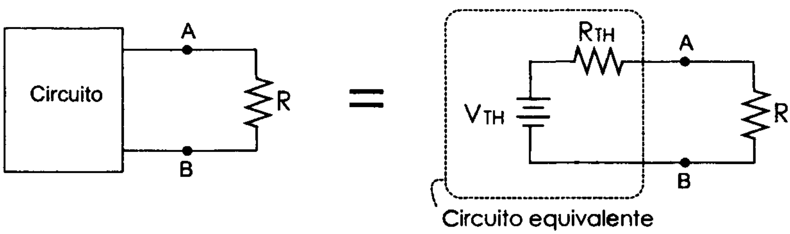
6 OTROS METODOS

6.1 Teoremas de Thevenin y Norton

Dos teoremas que pueden ayudar a simplificar un circuito son los teoremas de thevenin y norton.

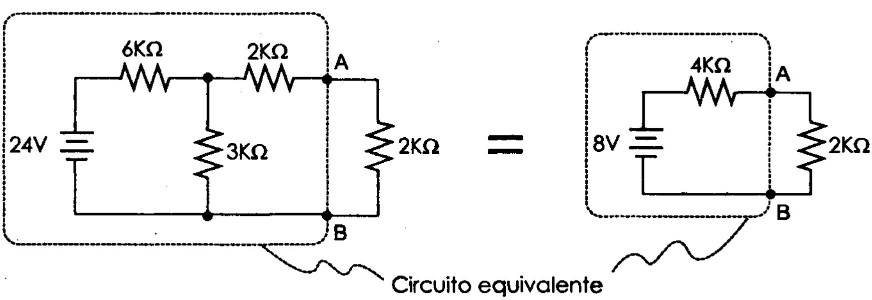
6.1.1 Teorema de Thevenin

Si se desea realizar un análisis parcial del voltaje y la corriente que circula por una resistencia en un circuito dado, se puede reemplazar el resto del circuito por un voltaje equivalente (voltaje de thevenin) en serie con una resistencia (resistencia de thevenin).



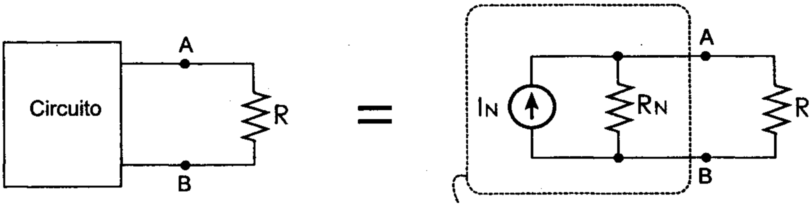
Ya que toda fuente de tensión real está formado por un circuito, esta fuente es equivalente a un voltaje de thevenin en serie con una resistencia de thevenin.

En el siguiente ejemplo, el sector del circuito seleccionado es equivalente a un voltaje de thevenin de 8V en serie con una resistencia de thevenin de 4KΩ.



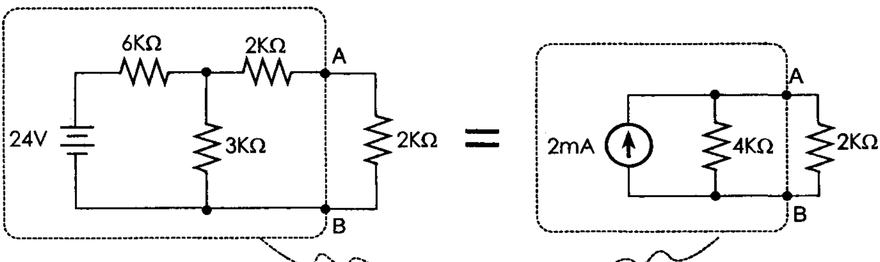
6.1.2 Teorema de Norton

Si se desea realizar un análisis parcial del voltaje y la corriente que circula por una resistencia en un circuito dado, se puede reemplazar el resto del circuito por una corriente equivalente (corriente de Norton) en paralelo con una resistencia (resistencia de Norton).



Circuito equivalente

En el siguiente ejemplo, el sector del circuito seleccionado es equivalente a una corriente de Norton de 2mA en paralelo con una resistencia de Norton de 4KΩ.



Circuito equivalente

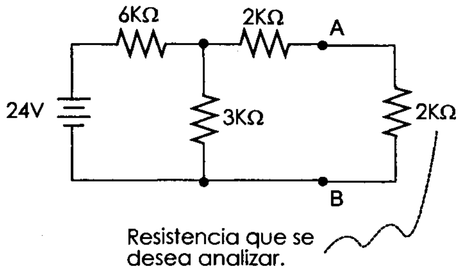
HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

La equivalencia de la fuente de voltaje fue planteada y publicada en 1853 por Herman Ludwig Ferdinand Von Helmholtz cuatro años antes de que Léon Charles Thévenin naciera. Sin embargo, el crédito del teorema recibe el nombre de Thévenin por ser éste quien profundizó el planteamiento del teorema. Cuando Thévenin realizó su investigación, no tenía conocimiento de las publicaciones de Herman Von Helmholtz. (24)

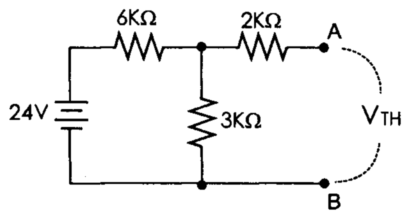
Herman Ludwig Von Helmholtz
Médico y Físico Alemán
1821 – 1894

6.1.3 Medición experimental para configuraciones Thevenin y Norton

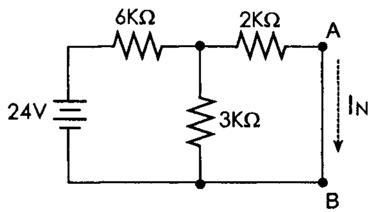
El voltaje de Thevenin, la corriente de Norton y las resistencias de Thevenin/Norton pueden encontrarse de forma experimental mediante el siguiente procedimiento:



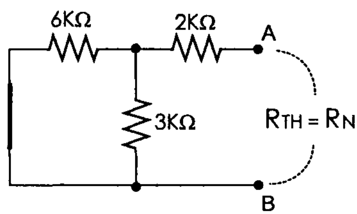
Se desconecta la resistencia que se desea analizar del resto del circuito. Se mide el voltaje entre las terminales. Este voltaje es el voltaje de thevenin.



Se cortocircuita la resistencia que se desea analizar. La corriente que circula entre las terminales es la corriente de Norton.



Se suprime las fuentes voltaje mediante un corto circuito y las fuentes de corriente mediante un circuito abierto.



La resistencia equivalente entre los extremos a medir es la resistencia de Thevenin/ resistencia de Norton. Se puede medir o calcular dicha resistencia.

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

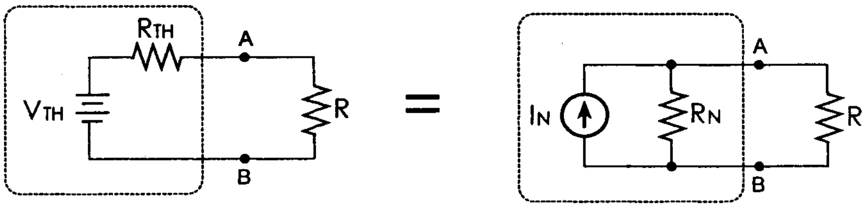
En el año 2003, la IEEE estableció el premio "IEEE Gustav Robert Kirchoff Award" para quienes contribuyan en el área de los circuitos eléctricos. [25]

6.1.4 Equivalencia entre configuraciones Thevenin y Norton

Todo circuito con configuración Thevenin tiene un circuito equivalente con configuración Norton, donde:

$$V_{TH} = I_N \times R_N \qquad I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}}$$

$$R_{TH} = R_N \qquad R_N = R_{TH}$$



De tal manera que puede simplificarse un circuito mediante configuraciones Thevenin a configuraciones Norton y configuraciones Norton a configuraciones Thevenin.

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

Hans Ferdinand Mayer
Físico y Matemático Alemán
1895 - 1980

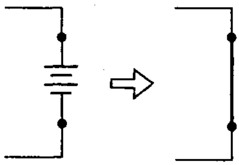
En 1926 Hans Ferdinand Mayer, investigador de Hause Siemens, publicó un documento que describe la conversion del equivalente de una fuente de voltaje en una fuente de corriente en paralelo con una impedancia equivalente.

Edward Lawry Norton
Ingeniero en electrónica
1898 - 1983

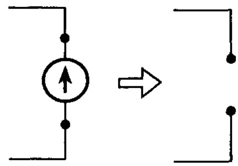
En el mismo año, sin conocimientos de los experimentos de Mayer, Edward Lawry Norton publica dentro de la empresa de laboratorio Bell el mismo planteamiento anterior, teorema que posteriormente recibe su nombre. [24][26]

6.2 Teorema de Superposición

El teorema de superposición enuncia que el voltaje que cae en una resistencia, y la corriente que circula por ella es el resultado de la sumatoria del aporte de cada fuente de tensión y fuente de corriente conectado en el circuito.
Para hacer el análisis del aporte de cada fuente, debe eliminarse las demás fuentes de la siguiente manera:

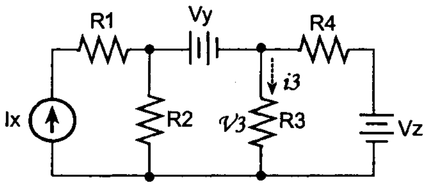


Las fuentes de voltaje se cortocircuitan.

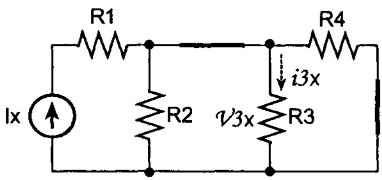


Las fuentes de corriente se abren (circuito abierto).

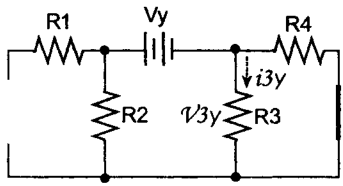
Por ejemplo, para el siguiente circuito, para encontrar V3 e i3 se debe realizar lo siguiente:



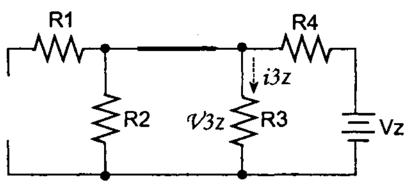
Analizar la fuente Ix:



Analizar la fuente Vy:



Analizar la fuente Vz:



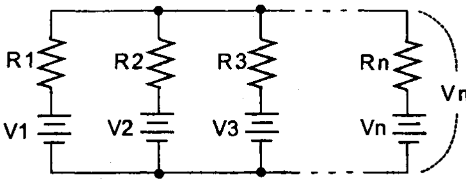
El voltaje V3 y la corriente i3 se obtiene sumando cada resultado...

$$V3 = V3x + V3y + V3z$$

$$i3 = i3x + i3y + i3z$$

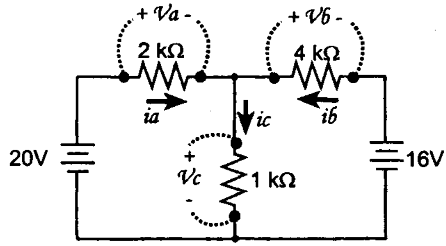
6.3 Teorema de Millman

El teorema de Millman permite directamente encontrar el voltaje entre configuraciones en serie interconectadas en paralelo mediante la siguiente fórmula:

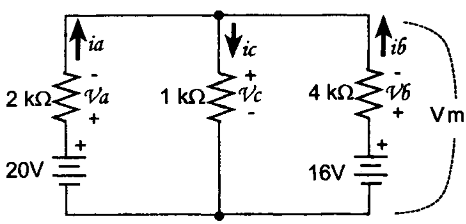


$$Vm = \frac{\frac{V1}{R1} + \frac{V2}{R2} + \frac{V3}{R3} + \bullet\bullet\bullet + \frac{Vn}{Rn}}{\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2} + \frac{1}{R3} + \bullet\bullet\bullet + \frac{1}{Rn}}$$

Ejemplo: Encontrar el voltaje Va, Vb y Vc, y ia, ib e ic.



Este circuito puede reorganizarse de la siguiente manera:



$$Vm = \frac{\frac{20V}{2\,k\Omega} + \frac{0V}{1\,k\Omega} + \frac{16V}{4\,k\Omega}}{\frac{1}{2\,k\Omega} + \frac{1}{1\,k\Omega} + \frac{1}{4\,k\Omega}}$$

$$Vm = \frac{10mA + 0mA + 4mA}{\frac{1}{2\,k\Omega} + \frac{1}{1\,k\Omega} + \frac{1}{4\,k\Omega}}$$

$$Vm = \frac{14mA}{\frac{2}{4\,k\Omega} + \frac{4}{4\,k\Omega} + \frac{1}{4\,k\Omega}}$$

$$Vm = \frac{14mA}{\frac{7}{4\,k\Omega}} = 8V$$

Vm = - Va + 20V	Vm = -Vb + 16V	Vm = Vc
Va = 20V - Vm	Vb = 16V - Vm	Vc = 8V
Va = 20V - 8V	Vb = 16V - 8V	
Va = 12 V	Vb = 8V	

$$ia = \frac{12\,V}{2\,K\Omega} \longrightarrow ia = 6\,mA$$

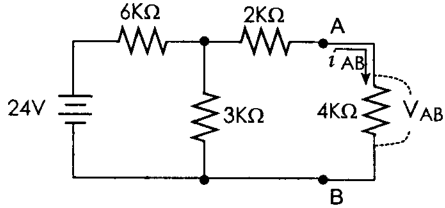
$$ib = \frac{8\,V}{4\,K\Omega} \longrightarrow ia = 2\,mA$$

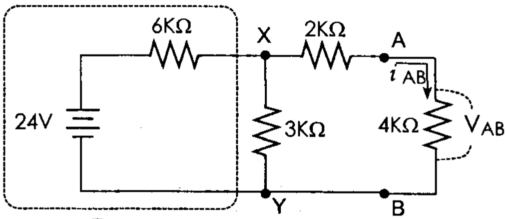
$$ic = \frac{8\,V}{1\,K\Omega} \longrightarrow ia = 8\,mA$$

6.4 Ejercicios resueltos

Ejercicio No. 1

Encontrar la corriente i_{AB} y el voltaje V_{AB} reduciendo el circuito mediante equivalencias Thevenin y Norton.



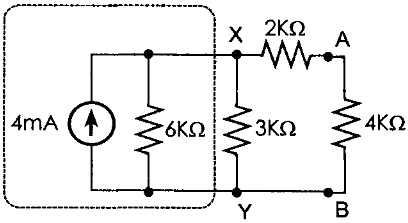


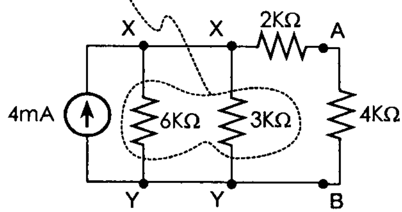
$$I_N = \frac{V_{TH}}{R_{TH}} = \frac{24V}{6K\Omega} \longrightarrow I_N = 4mA$$

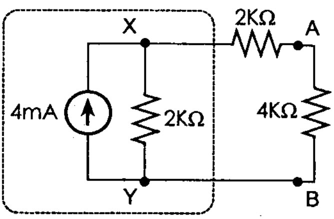
$$R_N = R_{TH} \longrightarrow R_N = 6K\Omega$$

Equivalencia en configuración Norton

$$R_{XY} = \frac{3K \times 6K}{3K + 6K} = \frac{18K}{9} = 2K\Omega$$





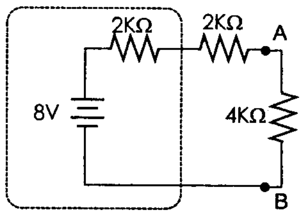


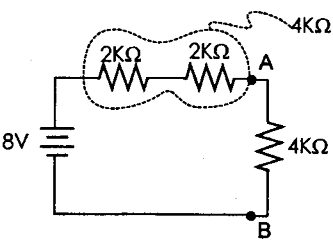
Equivalencia en configuración Thevenin

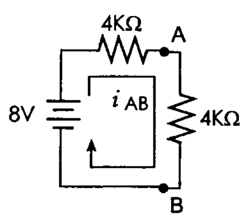
$$V_{TH} = 4mA\ (2K\Omega)$$

$$V_{TH} = 8V$$

$$R_{TH} = 2K\Omega$$







$$i_{AB} = \frac{8V}{8K\Omega} = 1\ mA$$

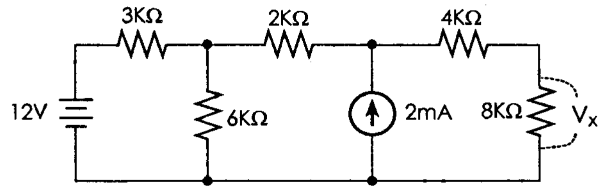
$$V_{AB} = i_{AB}\ (4K\Omega)$$

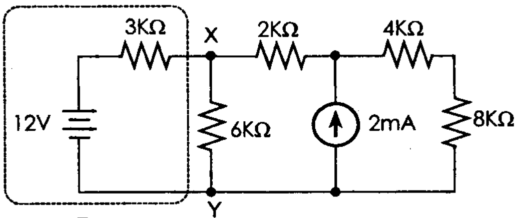
$$V_{AB} = 1\ mA\ (4K\Omega)$$

$$V_{AB} = 4V$$

Ejercicio No. 2

Encontrar el voltaje V_X reduciendo el circuito mediante equivalencias Thevenin y Norton.

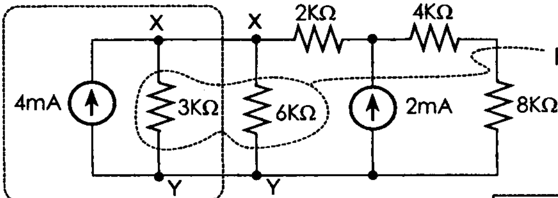




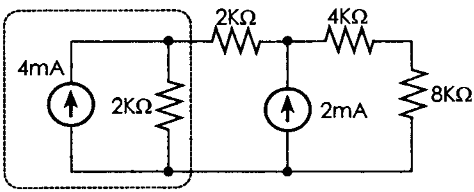
$$I_N = \frac{12V}{3K\Omega} \longrightarrow I_N = 4mA$$

$$R_N = R_{TH} \longrightarrow R_N = 3K\Omega$$

Equivalencia en configuración Norton



$$R_{XY} = \frac{3K \times 6K}{3K + 6K} = \frac{18K}{9} = 2K\Omega$$

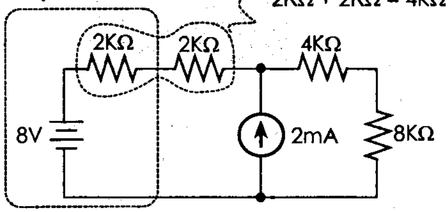


Equivalencia en configuración Thevenin

$$V_{TH} = (4mA)(2K\Omega) \longrightarrow V_{TH} = 8V$$

$$R_{TH} = R_N \longrightarrow R_{TH} = 2K\Omega$$

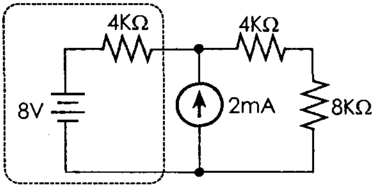
$2K\Omega + 2K\Omega = 4K\Omega$



HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

Ingeniero en telegrafía que formuló el teorema que lleva su nombre.

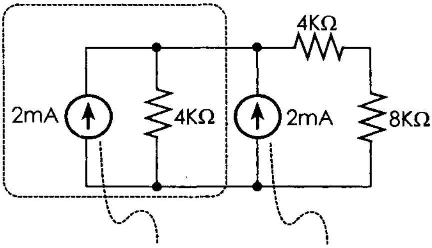
Léon Charles Thévenin
Ingeniero en Telegrafía Francés
1857 - 1926



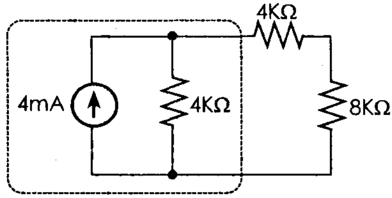
$$I_N = \frac{8V}{4K\Omega} \dashrightarrow I_N = 2mA$$

$$R_N = R_{TH} \dashrightarrow R_N = 4K\Omega$$

Equivalencia en configuración Norton



Estas dos fuentes de corrientes están en paralelo.



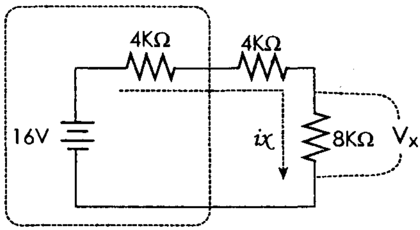
Equivalencia en configuración Thevenin

$$i_X = \frac{16V}{16K\Omega} = 1mA$$

$$V_X = i_X\,(8K\Omega)$$

$$V_X = (1mA)(8K\Omega)$$

$$V_X = 8V$$



HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

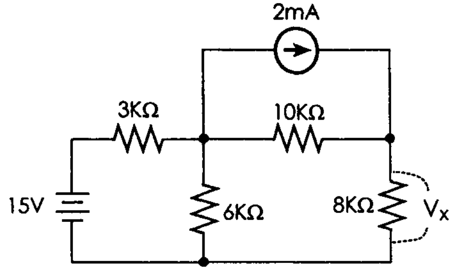
El teorema de la superposición fue planteado por Herman Von Helmholtz, acreditando a su amigo Emil du Bois-Reymond.[24]

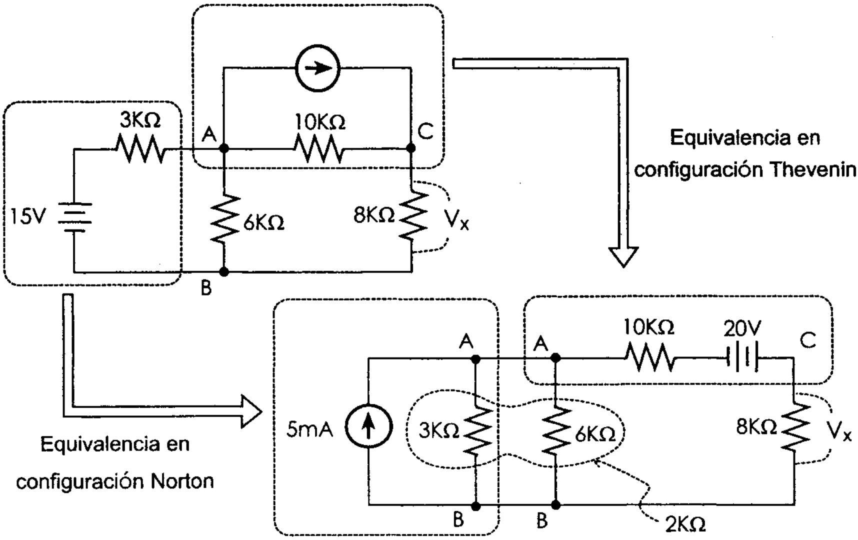
El descubrimiento remonta a partir de las investigaciones de Emil du Bois-Reymond en la bioelectricidad. Helmholtz se interesó en sus investigaciones bioeléctricas y se unió a éstas. Basado en los experimentos, publicó en 1853 los siguientes tres principios: El principio de la reciprocidad, el principio de la superposición y el principio de superficie electromotriz.[28]

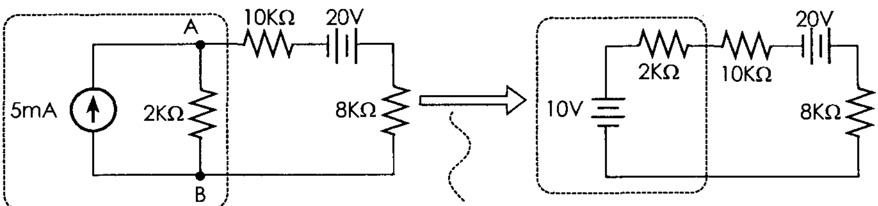
Emil du Bois-Reymond
Físico y fisiólogo Alemán
1818 -1896

Ejercicio No. 3

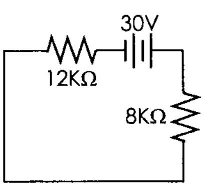
Encontrar el voltaje V_X reduciendo el circuito mediante equivalencias Thevenin y Norton.







Equivalencia en configuración Thevenin



$$i_X = \frac{30V}{20K\Omega} = 1,5mA$$

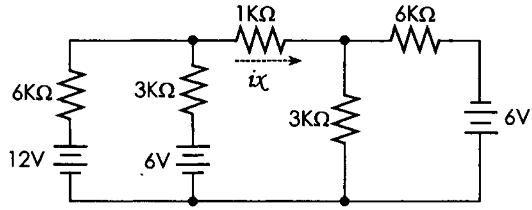
$$V_X = i_X\ (8K\Omega)$$

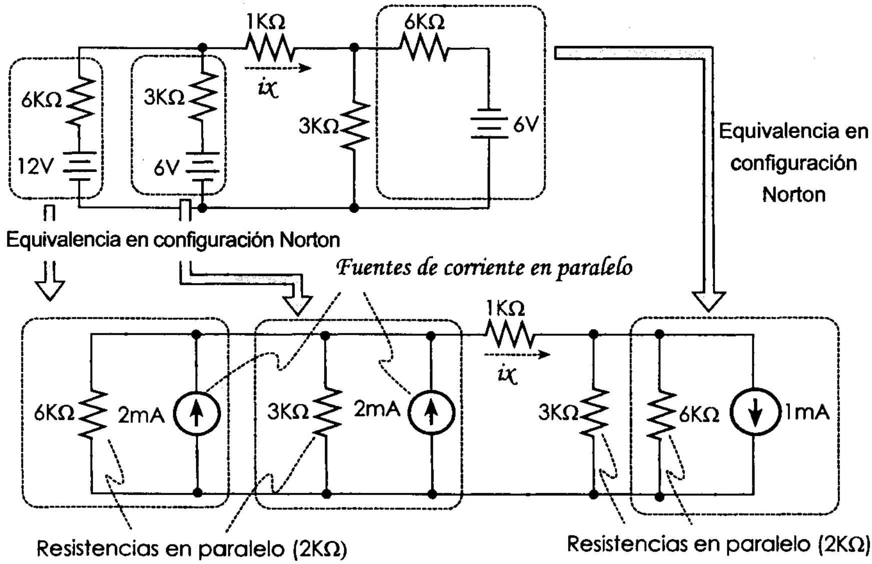
$$V_X = (1.5mA)(8K\Omega)$$

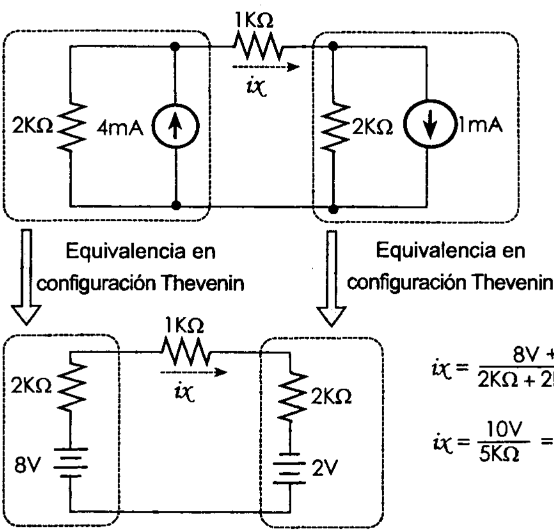
$$V_X = 12\ V$$

Ejercicio No. 4

Encontrar la corriente i_x y el voltaje Vx reduciendo el circuito mediante equivalencias Thevenin y Norton.







$$i_x = \frac{8V + 2V}{2K\Omega + 2K\Omega + 1K\Omega}$$

$$i_x = \frac{10V}{5K\Omega} = 2\ mA$$

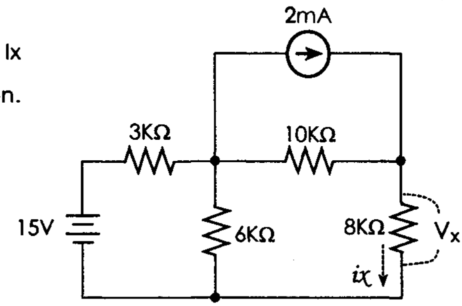
$$V_x = i_x\ (1\,K\Omega)$$

$$V_x = (2mA)(1\,K\Omega)$$

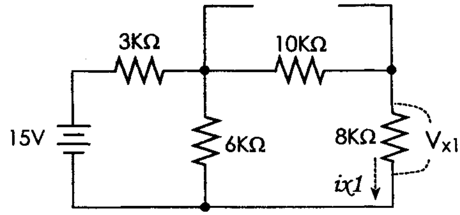
$$V_x = 2V$$

Ejercicio No. 5

Encontrar el voltaje Vx y la corriente Ix mediante el método de superposición.



Analizando la fuente 15V:

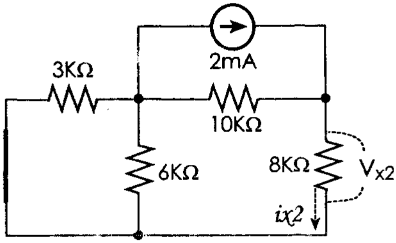


Resolviendo se obtiene:

$V_{x1} = 4V$

$i_{x1} = 0{,}5mA$

Analizando la fuente 2mA:



Resolviendo se obtiene:

$V_{x2} = 8V$

$i_{x2} = 1mA$

El voltaje Vx es la suma del aporte individual de cada fuente:

$$V_x = V_{x1} + V_{x2}$$

$$V_x = 4V + 8V \longrightarrow V_x = 12V$$

El voltaje i_x es la suma del aporte individual de cada fuente:

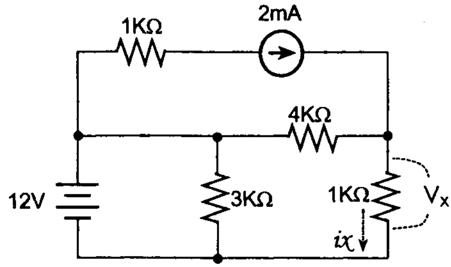
$$i_x = i_{x1} + i_{x2}$$

$$i_x = 0{,}5mA + 1mA \longrightarrow i_x = 1{,}5mA$$

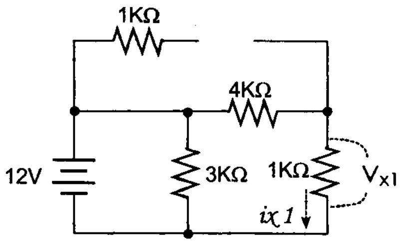
Observe que este es el mismo resultado que obtuvimos en el ejercicio 3 de este capítulo.

Ejercicio No. 6

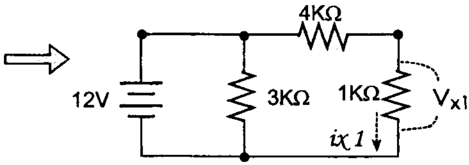
Encontrar el voltaje Vx y la corriente Ix mediante el método de superposición.



Analizando la fuente 12V:



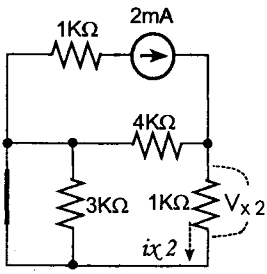
Observe que al ser circuito abierto, la resistencia de 1KΩ no completa una conexión.



Resolviendo se obtiene: $V_{x1} = 2{,}4$ V

$i_{x1} = 2{,}4$ mA

Analizando la fuente 2mA:

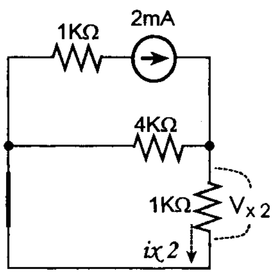


Debido al corto circuito, no circula corriente por la resistencia de 1KΩ. Esta puede eliminarse.

Resolviendo se obtiene:

$V_{x2} = 1{,}6$V

$i_{x2} = 1{,}6$ mA



El voltaje Vx es la suma del aporte individual de cada fuente:

$$V_x = V_{x1} + V_{x2}$$

$$V_x = 2{,}4V + 1{,}6V \longrightarrow V_x = 4V$$

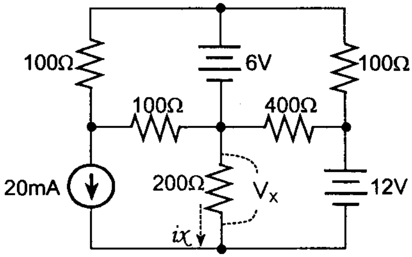
El voltaje i_x es la suma del aporte individual de cada fuente:

$$i_x = i_{x1} + i_{x2}$$

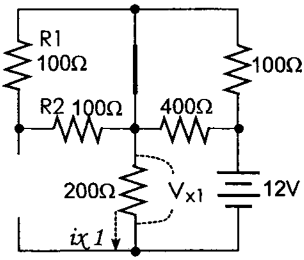
$$i_x = 2{,}4\,mA + 1{,}6\,mA \longrightarrow i_x = 4\ mA$$

Ejercicio No. 7

Encontrar el voltaje Vx y la corriente Ix mediante el método de superposición.



Analizando la fuente 12V:

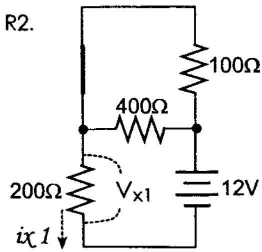


No circula corriente por R1 y R2. Estas pueden eliminarse.

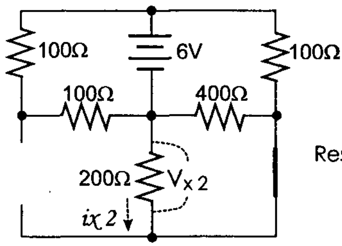
Resolviendo se obtiene:

i_{x1} = 42,86 mA

V_{x1} = 8,57 V



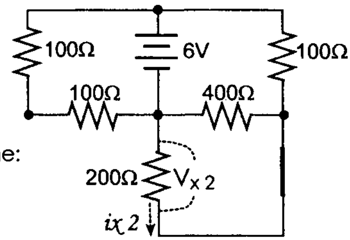
Analizando la fuente 6V:



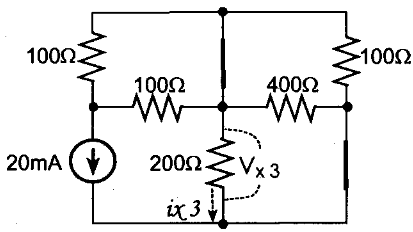
Resolviendo se obtiene:

i_{x2} = 17,14 mA

V_{x2} = 3,43 V



Analizando la fuente 20mA:



Debido al corto circuito de la fuente de 12V, no circula corriente por *ix 3*.

i_{x2} = 0 mA

V_{x2} = 0V

Resultado:

$V_x = V_{x1} + V_{x2} + V_{x3}$

Vx = 8,57V + 3,43V + 0 V

Vx = 12V

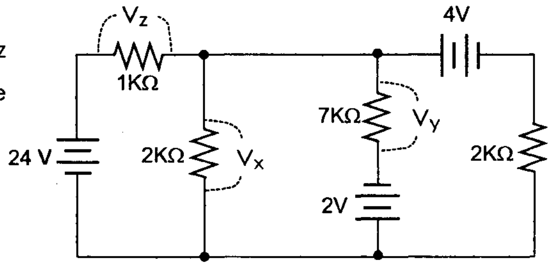
$i_x = i_{x1} + i_{x2} + i_{x3}$

i_x = 42,86mA + 17,14 mA + 0 mA

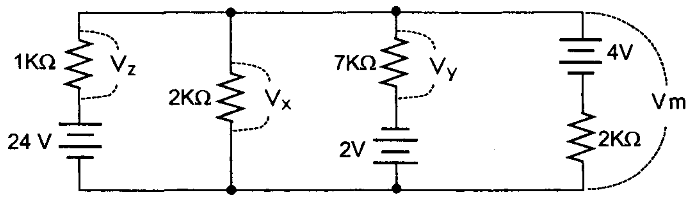
i_x = 60mA

Ejercicio No. 8

Encontrar los voltaje Vx, Vy y Vz mediante el teorema de Millman.



El mismo circuito puede re-diagramarse de la siguiente manera:



Aplicando el teorema de Millman:

$$Vm = \frac{\frac{24V}{1\,k\Omega} + \frac{0V}{2\,k\Omega} + \frac{-2V}{7\,k\Omega} + \frac{4V}{2\,k\Omega}}{\frac{1}{1\,k\Omega} + \frac{1}{2\,k\Omega} + \frac{1}{7\,k\Omega} + \frac{1}{2\,k\Omega}}$$

$$Vm = \frac{\frac{336V + 0V - 4V + 28V}{14\,k\Omega}}{\frac{14 + 7 + 2 + 7}{14\,k\Omega}}$$

$Vm = 12V$

$Vx = Vm \longrightarrow Vx = 12V$

$Vy - 2 = Vm$

$Vy = Vm + 2 \longrightarrow Vy = 14V$

$Vz + 24 = Vm$

$Vz = Vm - 24 \longrightarrow Vy = -12V$

HOMENAJE HISTORICO Y CURIOSIDADES

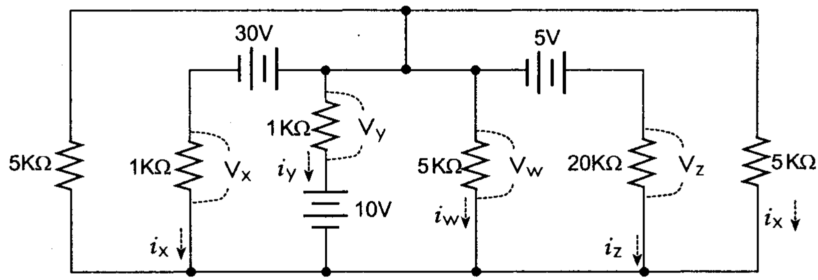
Jacob Millman, 1911 - 1991

El teorema de Millman, conocido también como teorema del generado paralelo, fue nombrado en honor al profesor Jacob Millman, Ph.D. graduado de MIT. Durante sus años como profesor en la universidad Columbia University, publicó ocho textos relacionados a circuitos eléctricos y microelectrónica.

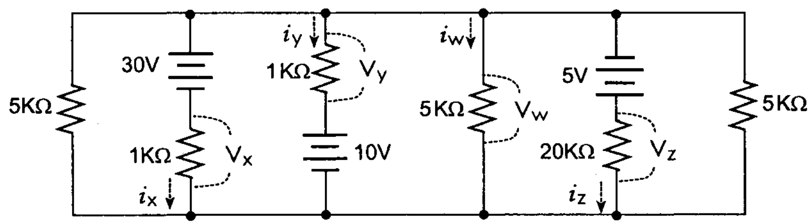
La IEEE Education Society (sociedad de educación IEEE) extiende el premio nominado IEEE ES McGraw-Hill / Jacob Millman Award a autores relacionada a los circuitos eléctricos.[27]

Ejercicio No. 9

Encontrar los voltaje Vx, Vy, Vz y Vw y las corrientes ix, iy, iz e iw mediante el teorema de Millman.



Observe que este circuito es equivalente al siguiente:



Aplicando el teorema de Millman:

$$Vm = \frac{\dfrac{0V}{5\ k\Omega} + \dfrac{30V}{1\ k\Omega} + \dfrac{10V}{1\ k\Omega} + \dfrac{0V}{5\ k\Omega} + \dfrac{-5V}{20\ k\Omega} + \dfrac{0V}{5\ k\Omega}}{\dfrac{1}{5\ k\Omega} + \dfrac{1}{1\ k\Omega} + \dfrac{1}{1\ k\Omega} + \dfrac{1}{5\ k\Omega} + \dfrac{1}{20\ k\Omega} + \dfrac{1}{5\ k\Omega}}$$

$$Vm = \frac{\dfrac{0V + 600V + 200V + 0V - 5V + 0V}{20\ k\Omega}}{\dfrac{4 + 20 + 20 + 4 + 1 + 4}{20\ k\Omega}} \dashrightarrow Vm = 15V$$

$Vw = Vm \dashrightarrow Vw = 15V$ $\qquad iw = \dfrac{15V}{5K\Omega} = 3mA$

$30 + Vx = Vm$

$30 + Vx = 15 \dashrightarrow Vx = -15V$ $\qquad ix = \dfrac{-15V}{1K\Omega} = -15mA$

$Vy + 10 = Vm$

$Vy + 10 = 15 \dashrightarrow Vy = 5V$ $\qquad iy = \dfrac{5V}{1K\Omega} = 5mA$

$Vz - 5 = Vm$

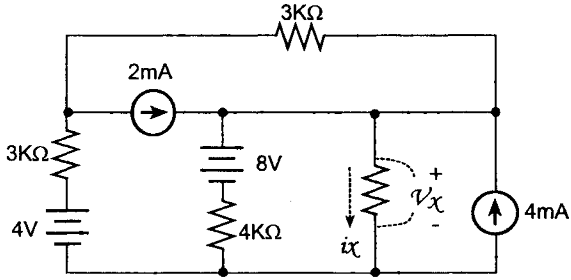
$Vz - 5 = 15 \dashrightarrow Vz = 20V$ $\qquad iz = \dfrac{20V}{20K\Omega} = 1mA$

6.5 Ejercicios propuestos

6.5.1.- Thevenin y Norton

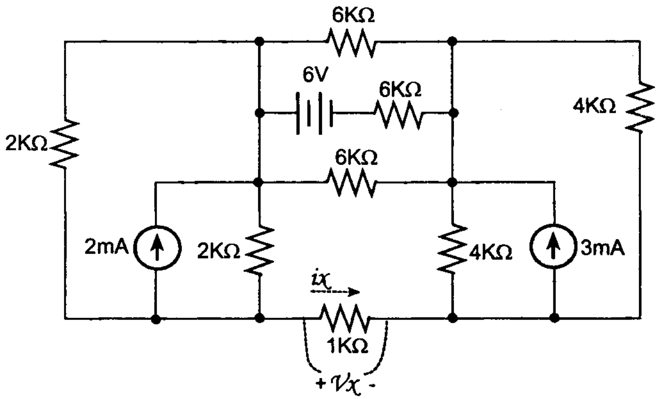
Encontrar ix y Vx por conversiones entre configuraciones Thevenin y Norton.

1)



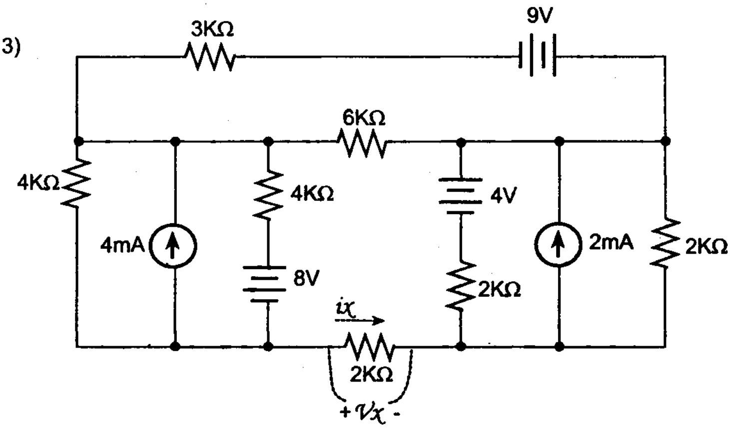
Solución:
$ix = 0{,}5mA$
$Vx = 0{,}5V$

2)



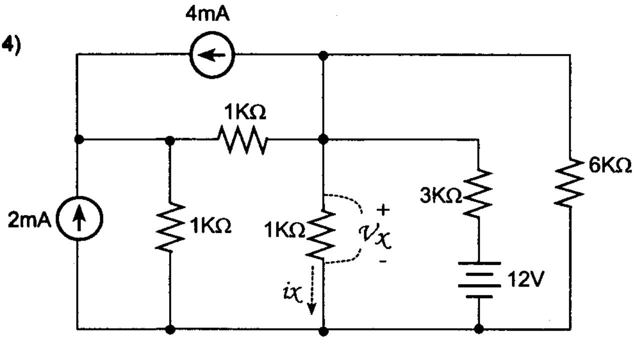
Solución:
$ix = 1mA$
$Vx = 1V$

3)



Solución:
$ix = 2mA$
$Vx = 4V$

4)



Solución:

$ix = 1mA$

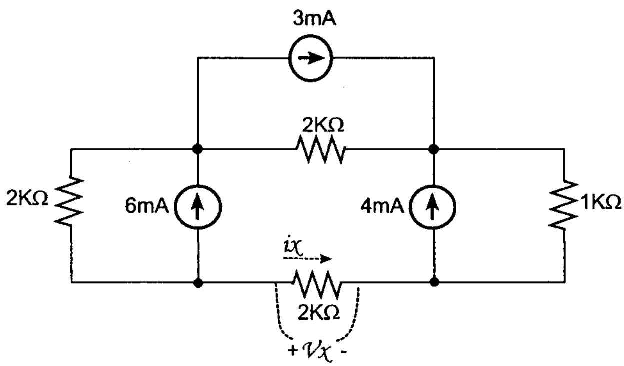
$Vx = 1V$

5) Resolver los ejercicios 1, 2 y 3 de la sección 6.5.3 por conversiones entre configuraciones Thevenin y Norton.

6.5.2.- Superposición

Encontrar ix y Vx por superposición

1)

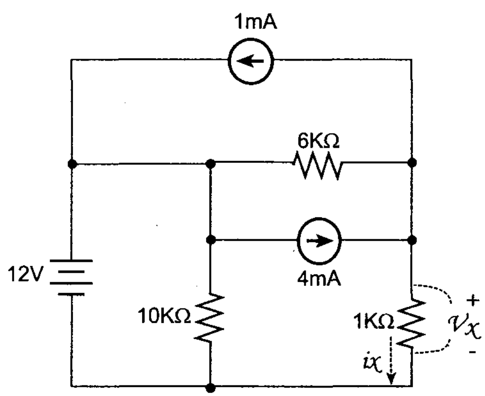


Solución:

$ix = 2mA$

$Vx = 4V$

2)



Solución:

$ix = 4mA$

$Vx = 4V$

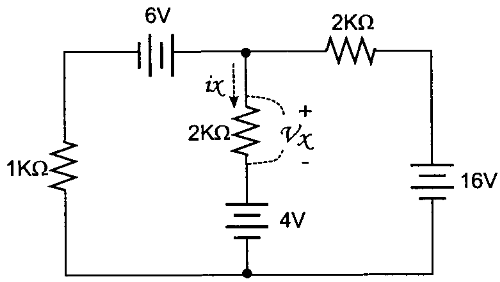
3) Resolver el ejercicio 1 de la sección 6.5.3 por superposición.

4) Resolver el ejercicio 4 de la sección 6.5.1 por superposición.

6.5.2.- Teorema de Millman

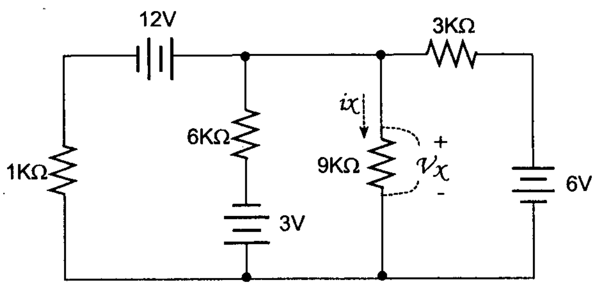
Encontrar ix y Vx utilizando el teorema de Millman.

1)



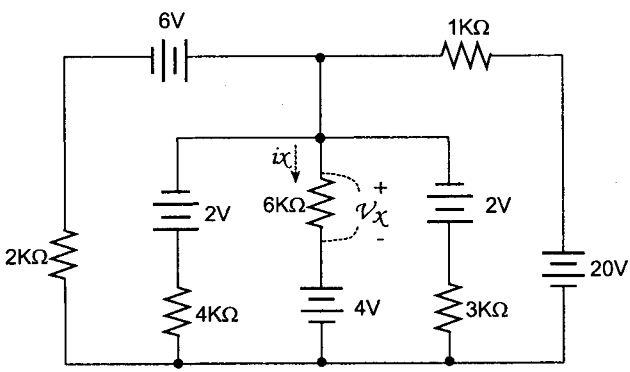
Solución:
ix = 2mA
Vx = 4V

2)



Solución:
ix = 1mA
Vx = 9V

3)



Solución:
ix = 1mA
Vx = 6V

BIBLIOGRAFIA

(1) Seymour Rosen. Chemistry: Atoms and Elements. Science Workshop. Nov. 2000.

(2) Electrotecnia - Estructura de la materia. Natureduca. http://www.natureduca.com

(3) José Antonio E. García Alvarez. "¿Qué es la corriente eléctrica? Así Funciona.

(4) André Marie-Ampère. Catholic Encyclopedia. New York: Robert Appleton Company.

(5) Delton T. Horn. Electronic Components. A complete Reference for Project Builders. Tab Books. Blue Ridge Summit, PA. Printed in the United States of America, 1992

(6) Tolerancia y valores de resistencias. Electrónica Unicrom.

(7) Tabla de Valores Eléctricos Normalizados.

(8) Sergios Barros. Historia de los Inventos. Capítulo 5: La Electricidad. Libros Maravillosos.

(9) Jacob Lewis Bourjaily. "Scientists and Mathematicians on Money". Banknotes featuring Scientists and Mathematicians. http://www-personal.umich.edu/~jbourj/images/money/

(10) Banknotes. 10000 Italian Lire. http://www.ikipmr.com/banknotes/

(11) M.A. Gomez. 200 años de la pila de Volta. El rincón de la ciencia. No. 5. 5 de Marzo, 2000.

(12) Las baterías. http://www.blogcurioso.com/baterias/

(13) Biografías y vidas. http://www.biografiasyvidas.com/biografia/o/ohm.htm

(14) IEEE. http://www.ieee.org/portal/site

(15) IEEE Celebrates its Two Millionth Article on IEEE Xplore. IEEE News Releases. http://www.ieee.org/web/aboutus/news/2009/16march.html

(16) IEEE Celebrates 125th Anniversary Presenting Emerging, World Changing Technologies During Its "Embracing Human Technology Interactions" Media Event. IEEE News Releases. http://www.ieee.org/web/aboutus/news/2009/11march.html