含参变量的广义积分

1.含参变量的无穷积分

仿照正常的无穷积分,我们可以定义含参变量的无穷积分.

1.1 含参变量的无穷积分

设二元函数$f(x,y)$在$[a,+\infty)\times[c,d]$上有定义.如果对于任意$y\in[c,d]$,无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

都收敛,这就在$[c,d]$上确定了y的函数

$$g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

该函数称为**含参变量的无穷积分**.

上述定义只是保证$g(y)$在$[c,d]$上逐点收敛.我们还要进一步研究其一致收敛性.

1.2 含参变量无穷积分的一致收敛性

设无穷积分

$$g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间Y上逐点收敛.如果对于任意$\varepsilon>0$,存在一个与y无关的$N>a$,使得当$A>N$时对任意$y\in Y$都有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

则称$g(y)$在Y上一致收敛.

由此可以得到含参变量无穷积分的Cauchy判别法.

1.3 Cauchy判别法

设无穷积分

$$g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在区间Y上逐点收敛.如果对于任意$\varepsilon>0$,存在一个与y无关的$N>a$,使得当$A>N,A'>N$时对任意$y\in Y$都有

$$\left|\int_A^{A'} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$$

则$g(y)$在Y上一致收敛.

由此又可以导出M判别法.

1.4 M判别法

设当$y \in Y$时,对任意$A > a$,函数$f(x,y)$关于x在区间$[a,A]$上可积.又当$x \geqslant a$时,对任意$y \in Y$有

$$|f(x,y)| \leqslant \phi(x)$$

且无穷积分

$$\int_a^{+\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$$

收敛,则含参变量的积分

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在Y上一致收敛.

M判别法事实上和比较判别法的原理一致.将含参的被积函数$f(x,y)$通过放缩得到绝对值更大的$\phi(x)$,如果$\phi(x)$的无穷积分收敛,那么原含参积分一定也收敛.

对于非绝对一致收敛的无穷积分,需要用狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

1.5 Dirichlet判别法

如果二元函数$f(x,y),g(x,y)$满足

(1) 当x充分大后$g(x,y)$对任意$y \in Y$都是x的单调函数,且$x \to +\infty$时对任意$y \in Y$,$g(x,y)$一致趋于0.

(2) 对任意$A > a$,积分

$$\int_a^{A} f(x,y)\mathrm{d}x$$

存在且对任意$y \in Y$一致有界.

那么含参变量的积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

在Y上一致收敛.

1.5 Abel判别法

如果二元函数$f(x,y),g(x,y)$满足

(1) 当x充分大后$g(x,y)$对任意$y \in Y$都是x的单调函数,且$x \to +\infty$时对任意$y \in Y$,$g(x,y)$一致有界.

(2) 含参变量的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

在Y上一致收敛.

那么含参变量的无穷积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

在Y上一致收敛.

与含参变量的正常积分一样,无穷积分也可以进行求导操作.

1.6 含参变量无穷积分的可微性

设函数$f(x,y)$和其对y的偏导函数$f_y(x,y)$在$[a,+\infty)\times[c,d]$上连续,并且积分

$$I(y)=\int_a^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上点点收敛.又设积分

$$\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上一致收敛,那么$I(y)$在$[c,d]$上可导,且

$$I'(y)=\int_a^{+\infty}f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

瑕积分的相关定理与性质和无穷积分是类似的,在这里不再叙述.

2.Γ函数和B函数

Γ函数和B函数是Euler积分中的两个重要函数.其定义如下.

2.1 Γ函数和B函数

Γ函数定义为

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

B函数定义为

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\mathrm{d}x$$

两者的性质与关系如下.

2.2 Γ函数和B函数的关系

Γ函数满足

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$$

并且$\Gamma(1)=1$.因此Γ函数可看作是阶乘延拓至实数域的结果,即

$$\Gamma(\alpha+1)=\alpha!$$

常用的Γ函数值为$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$.
B函数与Γ函数满足如下关系.

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$