Hardy-Littlewood引理

函数在无穷远点有极限是否说明导数在无穷远点也有极限?下面我们来看一个相关的命题.

Hardy-Littlewood引理

对于函数$f(x)$,存在$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$使得$f(x)$在$[a,+\infty)$上有$n$阶导,且满足$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$和$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x)$存在有限.那么对于任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(k)}(x) = 0$.

Proof.

取$x_0 \in [a,+\infty)$.将$f(x)$在$x = x_0$处泰勒展开有

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f^{(1)}(x_0) + \cdots + \frac{(x-x_0)^{n-1}f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + \frac{(x-x_0)^n f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

即

$$f(x) - f(x_0) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x-x_0)^i f^{(i)(x_0)}}{i!} + \frac{(x-x_0)^n f^{(n)}(\xi)}{n!}$$

其中$x_0 < \xi < x$.现在,分别令$x = x_0+1, \cdots, x_0+n$.于是

$$\begin{cases} f(x_0+1) - f(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{1^i f^{(i)}(x_0)}{i!} + \frac{f^{(n)}(\xi_1)}{n!} \\ \vdots \\ f(x_0+n) - f(x_0) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \frac{n^i f^{(i)}(x_0)}{i!} + \frac{n^n f^{(n)}(\xi_n)}{n!} \end{cases}$$

假定这是关于$f^{(1)}(x_0), \cdots, f^{(n-1)}(x_0), f^{(n)}(\xi)$的线性方程组.(我们暂且将各$f^{(n)}(\xi_i)$视作一项).

由于矩阵$A = \begin{pmatrix} \frac{1^1}{1!} & \cdots & \frac{1^n}{n!} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{n^1}{1!} & \cdots & \frac{n^n}{n!} \end{pmatrix}$的各列线性无关,于是上述方程组总能转化成以下形式.

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{k,i}\left(f(x_0+i) - f(x_0)\right) = f^{(k)}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} f^{(n)}(\xi_i), 1 \leqslant k \leqslant n-1 \text{且} \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} = 0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\left(f(x_0+i) - f(x_0)\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i} f^{(n)}(\xi_i) \end{cases}$$

设$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L_0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(x) = L_n$.

于是对于任意$1 \leqslant i \leqslant n$都有$\lim\limits_{x_0\to+\infty} f(x_0+i) = L_0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f^{(n)}(\xi_i) = L_n$.

我们对上面的各个方程组分别取极限,有

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{k,i}\left(L_0 - L_0\right) = \lim_{x_0\to+\infty} f^{(k)}(x_0) + \sum_{i=1}^{n} p_{k,i} L_n, 1 \leqslant k \leqslant n-1 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} c_{n,i}\left(L_0 - L_0\right) = \sum_{i=1}^{n} p_{n,i} L_n \end{cases}$$

> 于是$\forall 1 \leqslant k \leqslant n, \lim\limits_{x \to +\infty} f^{(k)}(x) = 0$.命题得证.

需要注意的是,在各阶导数极限均不明存在性的情况下,只有通过将其约束在一个其余极限已知的等式中才可说明其极限.事实上,如果题设中给出各阶导数极限存在,那么证明难度将大大下降.
另外,通过Lagrange中值定理求得的余项ξ仅当整个函数的极限存在时,我们才可通过Henie定理说明$\lim_{x \to +\infty} f(\xi)$的极限.反过来,我们不能通过$\xi$所代表的序列求得整个函数的极限,因为$\xi$的取值很有可能是离散的,我们不能从离散的序列极限简单地推知函数极限(这极限有可能不存在).
关于上面的内容,更详细的可见函数极限定理.