北京大学数学科学学院2024-25高等数学A1期末考试

1. (11分) 求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^{x^2}$$

2. (11分) 求极限

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

3. (11分) 求函数

$$f(x)=\cos(2x)\cdot\ln(1+x)$$

在$x=0$处的四阶泰勒多项式.

4. (12分) 设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导,满足$f(a)=f(b)=0$且存在$c\in(a,b)$使得$f(c)>0$.试证明:存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

5. (10分) 回答下列问题.本题只需给出结果,无需证明.

(1) (5分) 设平面Σ过点P_0,其法向量为$\vec{n}$.点P_1是平面Σ之外的一点.试用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{n}$表示P_1到Σ的距离.

(2) (3分) 设直线L过点P_0,其方向向量为$\vec{\tau}$.点P_1是直线L之外的一点.试用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{\tau}$表示P_1到L的距离.

(3) (2分) 设异面直线L_1,L_2的方向向量分别为$\vec{\tau_1},\vec{\tau_2}$.点$P_1,P_2$分别是$L_1,L_2$上的点.试用$\overrightarrow{P_1P_2}$和$\vec{\tau_1},\vec{\tau_2}$表示$L_1$和$L_2$间的距离.

6. (10分) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处是否可微.

7. (10分) 回答下列问题.

(1) (5分) 设二元函数

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

计算方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_{(0,0)}$.其中单位向量$\mathbf{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,$\alpha\in[0,2\pi)$.

(2) (3分) 若二元函数$g(x,y)$在(x_0,y_0)处取到极小值,那么对于某一$\alpha\in[0,2\pi)$,$t=0$是否一定是$h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点?说明理由.

(3) (2分) 若对于任意$\alpha\in[0,2\pi)$,$t=0$是是$h(t)=g(x_0+t\cos\alpha,y_0+t\sin\alpha)$的极小值点,那么$(x_0,y_0)$是否一定是$g(x,y)$的极小值点?说明理由.

8. (15分) 设二元函数$z = z(x, y)$是由方程

$$(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$$

确定的隐函数,试求$z = z(x, y)$的极值.

9. (10分) 设函数$f : [a, b] \to \mathbb{R}$在闭区间$[a, b]$上二阶可导,满足$f(a) = f(b) = f'(a) = f'(b) = 0$,且对于任意$x \in [a, b]$都有$|f''(x)| \leqslant M$.试证明:对于任意$x \in [a, b]$,都有$|f(x)| \leqslant \dfrac{M}{16}(b - a)^2$.