曲线积分

1.第一型曲线积分

在考虑曲线的质量,质心,转动惯量等问题时,都要用到第一型曲线积分.

1.1 物质曲线的质量

设有一不均匀的物质曲线L,设L上一点$M(x,y,z)$的密度为$\rho(x,y,z)$,求L的质量m.

Solution.

我们仍然用分割,近似代替,求和,取极限的方法求m的值.

将曲线L分成n段,第i段的弧长为Δs_i.任取第i段上的一点$M_i(x_i,y_i,z_i)$.

当分割的足够精细时,可以用M_i处的密度近似代替第i段的密度.于是第i段的质量为

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

对Δm_i求和,即可得到曲线质量m的近似值

$$m=\sum_{i=1}^{n}\Delta m_i \approx \sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$.类比定积分的定义,若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

存在,我们就认为这极限值是L的质量m,即

$$m=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\rho(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

实际问题中不只是物质曲线的质量需要计算上面形式的极限,还有很多问题也是类似的.

于是,我们着手定义第一型曲线积分.

1.2 定义:第一型曲线积分

设函数$f(x,y,z)$在分段光滑的曲线段L上有定义.将曲线L任意分成n段,第i段的弧长为Δs_i,在其上任取一点$M_i(x_i,y_i,z_i)$.令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(x_i,y_i,z_i)\Delta s_i$$

对于曲线L的任意分割方法和各中间点M_i的任意取法都存在,则称此极限为$f(x,y,z)$沿曲线L的**第一型曲线**

积分,也称为对**弧长的曲线积分**,记作

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

如果上述极限存在,我们就称函数$f(x,y,z)$在L上可积.

第一型曲线积分不依赖曲线的走向.例如,对于曲线L和它的端点A,B,积分路径从A到B和从B到A不改变结果,即

$$\int_{\widehat{AB}} f(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_{\widehat{BA}} f(x,y,z)\mathrm{d}s$$

其余的性质,例如可加性等,在此略去.

我们现在来讨论第一型曲线积分的计算.为了简单起见,我们先讨论平面第一型曲线积分的计算.

1.3 平面第一型曲线积分的计算I

设L是Oxy平面上的一条曲线,其方程由函数$y=\mathbf{y}(x), a\leqslant x\leqslant b$给出,并假定$y=\mathbf{y}(x)$在$[a,b]$上有连续的导数.设$f(x,y)$是在$L$上定义的连续函数,试计算积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

Solution.

根据第一型曲线积分的定义有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i$$

在这种情况下,对L的任意分割都相当于对区间$[a,b]$的分割.于是上述和式可以改写为

$$\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x_i,\mathbf{y}(x_i))\Delta s_i$$

另一方面,在分割地足够精细的情形下,又有

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [\mathbf{y}'(x_i)\Delta x_i]^2} = \sqrt{1+[\mathbf{y}'(x_i)]^2}\Delta x_i$$

其中$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.又因为$\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}\to 0$时,$\lambda' = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}\to 0$,于是根据Riemann积分的定义有

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s &= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i \\ &= \lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,\mathbf{y}(x_i))\sqrt{1+[\mathbf{y}'(x_i)]^2}\Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x,\mathbf{y}(x))\sqrt{1+[\mathbf{y}'(x)]^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,\mathbf{y}(x))\sqrt{1+[\mathbf{y}'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

上述结果的得出是十分符合直觉的,因为L由$y=\mathbf{y}(x)$确定,自然可以将$f(x,y)$写成$f(x,\mathbf{y}(x))$.
我们已经知道,弧微分$\mathrm{d}s=\sqrt{1+[\mathbf{y}'(x)]^2}\mathrm{d}x$,两者结合自然可以得到上面的公式.

1.4 平面第一型曲线积分的计算II

设L是Oxy平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha\leqslant t\leqslant\beta)$$

确定,其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导数.设$f(x,y)$是在L上定义的连续函数,试计算积分$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$.

Solution.

我们采取相似的方法计算之.对曲线L的任意分割都相当于对区间$[\alpha,\beta]$的分割

$$\alpha=t_0<t_1<\cdots<t_{n-1}<t_n=\beta$$

点$M_n(\varphi(t_i),\psi(t_i))(0\leqslant i\leqslant n)$构成了$L$的分割点.可以证明,第$i$段的弧长$\Delta s_i$有如下近似

$$\Delta s_i\approx\sqrt{[\varphi'(t_i)]^2+[\psi'(t_i)]^2}\Delta t_i$$

其中$\Delta t_i=t_i-t_{i-1}$.令$\lambda'=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta t_i\}$,于是$\lambda'\to 0$时上述近似的误差是高阶无穷小量.因此

$$\begin{aligned}\int_L f(x,y)\mathrm{d}s&=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(x_i,y_i)\Delta s_i\\&=\lim_{\lambda'\to 0}\sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i),\psi(t_i))\sqrt{[\varphi'(t_i)]^2+[\psi'(t_i)]^2}\Delta t_i\\&=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

观察上述式子,也可以与参数方程的弧微分对应.总结来说,我们有如下定理.

1.5 平面第一型曲线积分的计算

我们按曲线的解析式分为如下两类.

a. 设L是Oxy平面上的一条曲线,其方程由函数$y=\mathbf{y}(x),a\leqslant x\leqslant b$给出,并假定$y=\mathbf{y}(x)$在$[a,b]$上有连续的导数.设$f(x,y)$是在$L$上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_a^b f(x,\mathbf{y}(x))\sqrt{1+[\mathbf{y}'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

b. 设L是Oxy平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

确定,其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导数.设$f(x,y)$是在L上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

总的来说,考虑对应情形下的弧微分即可得到相应的计算公式.

类似地,我们也可以给出三维空间中的第一型曲线积分的计算公式.

1.6 空间第一型曲线积分的计算

设L是$\mathbb{R}^3$空间中的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x=\mathbf{x}(t) \\ y=\mathbf{y}(t) \\ z=\mathbf{z}(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

确定,其中$\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t)$和$\mathbf{z}(t)$在$[\alpha,\beta]$上有连续的一阶导数.设$f(x,y,z)$是在$L$上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{y}(t),\mathbf{z}(t)\right)\sqrt{[\mathbf{x}'(t)]^2+[\mathbf{y}'(t)]^2+[\mathbf{z}'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

定理的证明与在平面中是完全相似的,在此就不再赘述.

2.第二型曲线积分

计算一个受力的质点沿曲线运动的功需要用到第二型曲线积分.

2.1 质点沿曲线运动所做的功

设平面上有一光滑的曲线L和L的一个走向,其起点为A,终点为B.设想一质点沿L运动,它在点$(x,y)\in L$受到的力为

$$\mathbf{F}(x,y)=(P(x,y),Q(x,y))$$

试计算该质点从A运动到B时外力$\mathbf{F}$所做的功W.

Solution.

我们将$\overset{\frown}{AB}$以分点$A=M_0.M_1.\cdots,M_{n-1},M_n=B$分成$n$段弧$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}(i=1,\cdots,n)$.

设第i段弧$\overset{\frown}{M_{i-1}M_i}$的弧长为$\Delta s_i$.

当分割的足够精细时,外力$\mathbf{F}$在$\widehat{M_{i-1}M_i}$上变化不大,可以近似看作常力$\mathbf{F}(x_i,y_i)$,其中(x_i,y_i)为这弧上任意取定的一点.同理,质点的运动路径也可以近似看作从M_{i-1}到M_i的线段,于是$\mathbf{F}$在这弧上做的功ΔW_i近似为

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

对$\mathbf{F}$做正交分解,有$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$.对有向线段$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$做正交分解,有$\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\Delta x_i\mathbf{i}+\Delta y_i\mathbf{j}$.其中$\Delta x_i,\Delta y_i$为这有向线段在$x,y$方向上对应的的位移.于是我们有

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(x_i,y_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i$$

于是所求的总功W近似为

$$W\approx\sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i]$$

令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$,当分割的足够精细时有$\lambda\to 0$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(x_i,y_i)\Delta x_i+Q(x_i,y_i)\Delta y_i]$$

存在,这极限就是所求的功.

于是我们可以对第二型曲线积分做如下定义.

2.2 定义:第二型曲线积分

设L是从A到B的分段光滑有向曲线,向量函数$\mathbf{F}(x,y)=P(x,y)\mathbf{i}+Q(x,y)\mathbf{j}$在$L$上有定义.按照$L$的方向,依次用分点$A=M_0.M_1.\cdots,M_{n-1},M_n=B$将$L$分成$n$条有向弧$\widehat{M_{i-1}M_i}(i=1,\cdots,n)$,$\widehat{M_{i-1}M_i}$的弧长记为$\Delta s_i$,并令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta s_i\}$.在$\widehat{M_{i-1}M_i}$上任取一点$(\xi_i,\eta_i)$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}[P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i]$$

存在(不依赖于分割方法和中间点的取法),则称此极限为向量函数$\mathbf{F}(x,y)$沿曲线L从A到B的**第二型曲线积分**,也称作**对坐标的曲线积分**,记作

$$\int_{\widehat{AB}}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\qquad\text{或}\qquad\int_{\widehat{AB}}\mathbf{F}(x,y)\mathrm{d}\mathbf{r}$$

其中$\mathrm{d}\mathbf{r}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$.

与第一型曲线积分类似,我们可以通过计算定积分的一般方法计算第二型积分曲线,只不过现在要注意曲线的走向.

2.3 第二型曲线积分的计算

设L是Oxy平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$$

确定,其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上有连续的一阶导数.

当t单调地由α变化至β时,曲线上的点由A变化至B.设$P(x,y), Q(x,y)$是在L上定义的连续函数,则有

$$\int_{\widehat{AB}} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)\right] \mathrm{d}t$$

Proof.

我们略去详细的证明过程(需要用到Lagrange中值定理),而给出一个理解此式的方法.

根据参数方程可知$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t, \mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t$.将$x, y, \mathrm{d}x, \mathrm{d}y$代入定义式中即可得到答案.

应特别强调的是,第二型曲线积分与给定曲线的方向有关,于是在所求的定积分中可能出现下限大于上限的情形.不管怎样,都需要注意下限对应起点,上限对应终点.

在空间中的第二型曲线积分也是完全类似的,在此也不再赘述.

3.两种曲线积分间的联系

首先,我们来回顾一下方向余弦的概念.

3.1 向量的方向余弦

以平面向量$\mathbf{a}$为例,我们用$\cos(\mathbf{a}, x)$和$\cos(\mathbf{a}, y)$表示$\mathbf{a}$与两个坐标轴的夹角的余弦,称为向量$\mathbf{a}$的**方向余弦**.方向余弦的基本性质如下

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\cos(\mathbf{a}, x)\cos(\mathbf{a}, y))$$

换言之,向量$(\cos(\mathbf{a}, x), \cos(\mathbf{a}, y))$即为$\mathbf{a}$方向的单位法向量.

我们有如下定理.

3.2 第一型和第二型曲线积分的联系

设函数$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z)$,则有

$$\int_{\widehat{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\widehat{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

其中$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$为$\widehat{AB}$上各点的切线的方向余弦.

Proof.

由之前的讨论可知,当曲线L用参数方程

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(t) \\ y = \mathbf{y}(t) \quad ,\alpha \leqslant t \leqslant \beta \\ z = \mathbf{z}(t) \end{cases}$$

表出时,$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)$即为曲线的切向量,因而

$$\mathrm{d}\mathbf{r} = (\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z) = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

又$\mathrm{d}\mathbf{r}$的模恰为$\mathrm{d}s$,即

$$|\mathrm{d}\mathbf{r}| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2 + (\mathrm{d}z)^2} = \mathrm{d}s$$

设$\mathrm{d}\mathbf{r}$的方向余弦为$\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$,则有

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{|\mathrm{d}\mathbf{r}|} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)$$

由此可得

$$\mathrm{d}x = \cos\alpha\mathrm{d}s, \mathrm{d}y = \cos\beta\mathrm{d}s, \mathrm{d}z = \cos\gamma\mathrm{d}s$$

于是

$$\int_{\overset{\frown}{AB}} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \int_{\overset{\frown}{AB}} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

上述转化在之后将非常有用.