高阶常微分方程

0.1 定义:n阶线性微分方程

n阶线性微分方程是形如

$$y^{(n)}(x)+p_1(x)y^{(n-1)}(x)+\cdots+p_{n-1}(x)y'(x)+p_n(x)y(x)=f(x)$$

的方程,其中$p_1,\cdots,p_n$在区间(a,b)上连续.

1.二阶线性微分方程

我们从最简单的情形,即二阶线性齐次方程入手.

1.1 二阶线性齐次方程的解

如果$y_1(x),y_2(x)$是二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的解,那么它们的任意一个线性组合

$$C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

也是该方程的解,其中$C_1,C_2\in\mathbb{R}$.

为了求出其通解,我们还需研究上述函数线性无关的条件.

1.2 函数线性无关的充要条件

设ϕ_1,ϕ_2是**1.2**所述的两个解,它们线性无关,当且仅当它们的Wronski行列式满足

$$W(x)=\begin{vmatrix}\phi_1(x) & \phi_2(x)\\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x)\end{vmatrix}\neq 0,\forall x\in(a,b)$$

其证明可以从书上找到,因此就略去.当上述的两个解线性无关时,它们的线性组合就是该方程的通解.

1.3 二阶线性齐次方程的通解

如果$\phi_1(x),\phi_2(x)$是二阶线性齐次方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

的解,且它们线性无关,则该方程的通解为

$$C_1\phi_1(x)+C_2\phi_2(x)$$

其中$C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.并且这通解包含了该方程的一切解.

1.4 二阶线性非齐次方程的通解

如果$y*(x)$是二阶线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的特解,又设$\phi_1(x), \phi_2(x)$是对应齐次方程的通解,则该非齐次方程的通解为

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + y^*(x)$$

1.5 二阶线性非齐次方程的加和性

如果$y_1(x), y_2(x)$分别是是二阶线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \text{与} y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的解,那么$y_1(x) + y_2(x)$是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解.

2.二阶线性常系数微分方程

2.1 二阶常系数齐次方程

考虑二阶线性常系数齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

设对应的二次方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

的根为λ_1, λ_2.方程的通解为以下三种情况.

1. 若λ_1, λ_2为互异实根,则方程的通解为
$$C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$$
2. 若$\lambda_1 = \lambda_2$为重根,则方程的通解为
$$(C_1 + C_2 x)\,\mathrm{e}^{\lambda x}$$
3. 若$\lambda_1, \lambda_2 = \alpha + \mathrm{i}\beta$为共轭复根,则方程的通解为
$$\mathrm{e}^{\alpha x}\left(C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x\right)$$

上面的结论可以扩展到n次,不再赘述.

对于非齐次的情况,可以通过待定系数法求出特解.

3.二阶线性非齐次方程

3.1 用常数变易法求二阶线性非齐次方程

考虑方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

如果对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有特解$\phi_1(x)$和$\phi_2(x)$,那么我们可以设

$$y = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x)$$

并令

$$\begin{cases} C_1'(x)\phi_1(x) + C_2'(x)\phi_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\phi_1'(x) + C_2'(x)\phi_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

即可得到$C_1'(x)$和$C_2'(x)$.积分后回代即可得到原非齐次方程的通解.

4.欧拉方程

4.1 定义:欧拉方程

形如

$$a_0x^ny^{(n)}(x) + a_1x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}xy'(x) + a_ny = 0$$

的方程称为**欧拉方程**.

4.2 欧拉方程的解法

做代换$x = \mathrm{e}^t$,则有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-2t}\left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)$$

等等.然后这方程就转化为线性常系数齐次方程,可以通过特征根法求解,最后回代即可.