

## 北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期末考试

1.(10分) 求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}}$$

在 $x = 0$ 处的幂级数展开式,并指出此幂级数的收敛域.

2.(15分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 $e^x$ .求 $f(x)$ 的傅里叶级数,以及此傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的收敛值.

3.(10分) 求无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx$$

和瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$$

的值.

4.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

的收敛区间,以及此幂级数的和函数.

5.(10分) 任意给定常数 $r > 0$ ,试证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛.

6.(15分) 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + 2n}$$

的收敛域,全体绝对收敛点,全体条件收敛点.

7.(15分) 定义函数 $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} dt$$

试证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx$$

收敛. 本题要求写出详细过程和依据.

8.(15分) 设 $n$ 是正整数.

(1) (5分) 任意给定 $a > 0$ , 试证明含参变量 $t$ 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) (10分) 对每个 $t \in (0, +\infty)$ , 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

的值.

本题要求写出详细过程和依据.