

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1. (15分) 下面的函数极限存在吗?如果存在,请求出其值;如果不存在,请说明理由.

(1) (5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) \frac{1}{\tan 2x}.$

(2) (5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{(\ln(1+x))^2}.$

(3) (5分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (e^y - 1)^2}.$

2. (10分) 设欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的平面 Ω 过直线 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$,且与平面 $3x-y-10z=4$ 垂直.

(1) (5分) 求 Ω 的标准方程.

(2) (5分) 已知以原点为球心的球面 S 与 Ω 相切,求 S 的方程.

3. (10分) 回答下列问题.

(1) (5分) 设正整数 $n \geq 3$, n 元函数 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$u(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{2-n}{2}}$$

其中 $\sum_{k=1}^n x_k^2 \neq 0$. 试求 $\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k}.$

(2) (5分) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 设 $h(x, t) = f(x+at) + g(x-at)$, 其中 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均有连续的二阶导函数. 试求 $h_{tt} - a^2 h_{xx}.$

4. (10分) 求函数 $f(x, y) = x\sqrt{y}$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式.

5. (10分) 设 $t \in [0, 2\pi], R > 0, a > 0$. 求螺旋线 $S: \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = at \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 的切线和法平面的方程.

6. (10分) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$. 试证明: 方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的互异实根不超过三个.

7. (10分) 证明: 对于任意给定的 $k \in \mathbb{R}$, 存在1的开邻域 U 和 W , 存在唯一的函数 $y = f(x), x \in U, y \in W$ 满足方程 $x^k - 3x^2y + 3xy^2 - y^k = 0$.

8. (15分) 求函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz$ 在 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

9. (10分) 设函数 f 在 $[0, 1]$ 二阶可微, 且 $f(0) = f(1) = 0, \min_{x \in [0, 1]} f(x) = -1$. 试证明: 存在 $\epsilon \in (0, 1)$ 使得 $f''(\epsilon) \geq 8$.