

北京大学数学科学学院2024-25高等数学A1期中考试

1. (16分) 解答下列各题.

(1) (8分) 若

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + ax + b}{\sin(x^2 - 1)} = \frac{4}{9}$$

求参数 a, b 的值.

(2) (8分) 设函数 $f(x)$ 在开区间 (c, d) 上连续. 试证明: 对于任意 $x_1, x_2, \dots, x_n \in (c, d)$, 存在 $\xi \in (c, d)$ 使得 $f(\xi) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i)$.

2. (16分) 解答下列各题.

(1) (8分) 设函数

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \arctan x - \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

求 $df(x)$.

(2) (8分) 求函数

$$y = \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{x^2 + \sqrt{2}x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} - \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan \frac{\sqrt{2}x}{x^2 - 1}$$

的一阶导数 y' .

3. (18分) 设函数

$$f(x) = (x^2 - 3x + 2)^{100} \cos \frac{\pi x^2}{4}$$

(1) (5分) 设函数 $u(x), v(x)$ 任意阶可导. 对于正整数 n , 写出函数 $y = u(x)v(x)$ 的 n 阶导数的Leibniz公式.

(2) (10分) 对于正整数 n 满足 $1 \leq n \leq 100$, 求 $f^{(n)}(1)$.

(3) (3分) 求 $f^{(101)}(2)$.

4. (16分) 计算下列积分.

(1) (5分) $A = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| dx.$

(2) (3分) $B = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \sin 2x} dx.$

(3) (5分) $I = \int \sqrt{e^x - 1} dx.$

(4) (3分) $J = \int \frac{xe^x}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$

5. (14分) 解答下列各题.

(1) (5分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导, 试证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h} = 2f'(a)$$

(2) (2分) 举例说明:即使 $f(x)$ 在 $x = a$ 处连续且 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}$ 存在,也不能保证 $f'(a)$ 存在.

(3) (5分) 设函数 $f(x)$ 在 $x = a$ 可导,对于常数 $k \neq 0, 1$,试证明

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+kh) - f(a-h)}{h} = (k-1)f'(a)$$

(4) (2分) 举例说明:对于常数 $k \neq 0, 1$,即使 $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+kh) - f(a-h)}{h}$ 存在,也不能保证 $f'(a)$ 存在.

6. (20分) 证明下列各题.

(1) (10分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.试用序列极限的定义证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a$$

(2) (6分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} = a$$

(3) (4分) 设序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a$,又有 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - x_{n-1}) = 0$.试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$.