

## 任意项级数

### 1. 交错级数

#### 1.1 定义: 交错级数

所谓交错级数指的是这样的级数, 它的项是一正一负交错着排列的, 即可以写成

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

其中  $u_n > 0 (n = 1, 2, \cdots)$ .

判断交错级数的敛散性, 可以用以下的判断方法.

#### 1.2 莱布尼茨判别法

若交错级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$  满足对任意  $n \in \mathbb{N}^*$  都有  $u_n \geq u_{n+1}$  且  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ , 则该级数收敛.

### 2. 绝对收敛与条件收敛

#### 2.1 绝对值收敛推出收敛

考虑任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  收敛, 那么  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  也收敛.

反过来, 收敛不一定推出取绝对值后收敛. 例如,  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$  收敛, 而  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$  发散. 为此, 我们可以做如下定义.

#### 2.2 绝对收敛与条件收敛

考虑收敛的任意项级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ . 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  也收敛, 那么称该级数绝对收敛. 反之, 如果  $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$  发散, 那么称该级数条件收敛.

绝对收敛和条件收敛的级数亦有明显的差别. 例如, 对绝对收敛的级数任意重排(交换顺序)后不改变其和, 而对条件收敛的级数则不然. 我们下面对此进行说明.

#### 2.3 绝对收敛的级数的和

绝对收敛的级数的和等于其中所有正项组成的级数的和加上其中所有负项组成的级数的和.

**Proof.**

设级数  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  绝对收敛. 令

$$v_n = \frac{|u_n| + u_n}{2} = \max \{u_n, 0\}$$

$$w_n = \frac{|u_n| - u_n}{2} = -\min\{u_n, 0\}$$

这样,显然有

$$0 \leq v_n, w_n \leq |u_n|$$

由于 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛以及比较审敛法可知 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 都收敛.令

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \quad \sum_{n=1}^{\infty} v_n = P \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n = Q$$

根据 $v_n, w_n$ 的定义可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中所有正项构成的级数收敛到 $P$ ,所有负项构成的级数收敛到 $-Q$ .  
注意到 $u_n = v_n - w_n$ ,于是

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n = P - Q = P + (-Q)$$

于是原命题得证.

## 2.4 收敛的正项级数重排后仍收敛

收敛的正项级数经过重排后仍收敛且其和不变.

**Proof.**

设正项级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛到 $S$ .又设将这个级数中的各项重新排序后得到的级数为

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n + \cdots$$

令 $S_n = \sum_{k=1}^n u_k, T_n = \sum_{k=1}^n v_k$ .由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 中的各项都来自级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,于是对于任意取定的 $n$ ,都可取足够大的 $m$ ,使得

$$\{v_1, \cdots, v_n\} \subseteq \{u_1, \cdots, u_m\}$$

于是

$$T_n \leq S_m \leq S$$

这说明单调递增序列 $\{T_n\}$ 有上界 $S$ ,设其收敛到 $T$ ,则有

$$T \leq S$$

一方面,又可以将 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 视作由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 重排得到,于是交换上述证明中 $u$ 和 $v$ 的位置可得

$$S \leq T$$

于是 $T = S$ ,命题得证.

绝对收敛的数列也有相似的性质.

## 2.5 绝对收敛的级数重排后仍收敛

绝对收敛的级数经过重排后仍收敛且其和不变.

**Proof.**

设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.根据2.3将其表示为两正项级数之差

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

其中 $v_n, w_n$ 的定义同2.3.我们将 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的各项重排为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ .同样地,将其表示为两正项级数之差

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*$$

其中 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n^*, \sum_{n=1}^{\infty} w_n^*$ 分别由 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n, \sum_{n=1}^{\infty} w_n$ 相应地改变各项次序而得.由2.4可知它们也收敛,并且有

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad \sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} w_n$$

从而

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* |u_n^*| &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n^* - \sum_{n=1}^{\infty} w_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} v_n - \sum_{n=1}^{\infty} w_n = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \end{aligned}$$

于是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^*$ 也绝对收敛,且其和保持不变.

对于条件收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ,黎曼证明了一个更为一般的结论:对任意给定的 $A$ ,总是可以调整 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中各项的顺序使得级数收敛于 $A$ .

## 3.狄利克雷判别法和阿贝尔判别法

狄利克雷判别法和阿贝尔判别法在判断任意项级数的收敛性上是很有效的.我们先介绍阿贝尔变换.

### 3.1 阿贝尔变换

设有两组数

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_m \quad \beta_1, \cdots, \beta_m$$

令

$$B_k = \sum_{i=1}^k \beta_i$$

则有

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_k = \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_k - \alpha_{k+1}) B_k + \alpha_m B_m$$

### 3.2 阿贝尔引理

若数组  $\{\alpha_k\} (k = 1, 2, \cdots, m)$  是单调的, 又设数组  $\{\beta_k\} (k = 1, 2, \cdots, m)$  的部分和  $B_n$  满足

$$|B_n| = \left| \sum_{k=1}^n \beta_k \right| \quad n = 1, 2, \cdots, m$$

其中  $M > 0$ , 则有

$$\left| \sum_{k=1}^m \alpha_k \beta_k \right| \leq M (|\alpha_1| + 2\alpha_m|)$$

### 3.3 狄利克雷判别法

考虑级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$ . 若序列  $\{\alpha_n\}$  单调且  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ , 又级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  的部分和有界, 即存在常数  $M > 0$  使得

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n \right| \leq M \quad n = 1, 2, \cdots$$

则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  收敛.

### 3.4 阿贝尔判别法

若无穷数列  $\{\alpha_n\}$  单调有界, 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \beta_n$  收敛, 则级数  $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \beta_n$  收敛.