含参变量的正常积分

连续性

假定二元函数$f(x,y)$在闭矩形域$[a,b]\times[c,d]$上连续,那么含参变量积分

$$g(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上连续.特别地,对于任意$y_0\in[c,d]$,都有

$$\lim_{y\to y_0} g(y)=g(y_0)=\int_a^b f(x,y_0)\mathrm{d}y$$

可积性

假定二元函数$f(x,y)$在闭矩形域$[a,b]\times[c,d]$上连续,那么含参变量积分

$$g(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上可积,且

$$\int_c^d g(y)\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

即积分顺序可以交换.

可微性

假定二元函数$f(x,y)$在闭矩形域$[a,b]\times[c,d]$上连续,那么含参变量积分

$$g(y)=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上可微,且

$$g'(y)=\int_a^b f_y(x,y)\mathrm{d}x$$

即求导和积分的顺序可以交换.

对于变上下限的积分,可以通过多元函数的求导法则确定其导函数.

变上限含参积分的求导方法

假定二元函数$f(x,y)$在闭矩形域$[a,b]\times[u,v]$上连续,其中u,v均是y的函数,那么含参变量积分

$$g(y)=\int_u^v f(x,y)\mathrm{d}x$$

的导函数为

$$g'(y) = -f(u, y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + f(v, y)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + \int_u^v f_y(x, y)\mathrm{d}x$$