# 数项级数

## 1.Cauchy收敛准则

迄今为止,我们所学的知识都只能帮助我们判断序列 $\{a_n\}$ 是否以某个特定的数A为极限,而不能判断 $\{a_n\}$ 是否有极限(除非它是单调有界序列).下面的Cauchy收敛准则给出了一个序列有极限的充要条件.

## 1.1 Cauchy收敛准则

序列 $\{a_n\}$ 有极限的充要条件是对于任意给定的 $\varepsilon>0$ ,都存在N使得对任意的 $m,n\geqslant N$ 都有 $|a_n-a_m|<\varepsilon$ .

证明Cauchy收敛准则的必要性是简单的,而充分性则需要用到实数的完备性.因此,略去上述命题的证明. 对于函数极限的情况也是一样的.

## 1.2 Cauchy收敛准则

设y=f(x)在a的一个去心邻域内有定义,则 $x\to a$ 时 f(x)的极限存在的充要条件是对于任意给定的 $\varepsilon>0$ ,都存在 $\delta>0$ 使得对任意 $x_1,x_2$ 满足 $|x_1-a|<\delta$ 且 $|x_2-a|<\delta$ 都有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$ .

#### 2.数项级数及其敛散性

# 2.1 定义:无穷级数及其敛散性

一个形如

$$a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

的式子被称作无穷级数.这里的一般项 $a_k$ 被称作级数的通项.

对于给定的级数 $\sum_{k=1} a_k$ ,我们把级数的前n项和

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

称作级数的部分和.

当 $n \to \infty$ 时,若部分和序列 $\{S_n\}$ 有极限S,则称级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ **收敛**,且称S为这个级数的**和**,记作

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

如果部分和序列 $\{S_n\}$ 没有极限,我们就称级数是**发散的**.

## 2.2 无穷级数收敛则通项趋于0

如果无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛,那么有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .

# 2.3 任意长度和收敛于0则无穷级数收敛

如果无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 满足对任意给定的 $\varepsilon > 0$ 和 $p \in \mathbb{N}$ ,都存在 $N \in N$ 使得对任意n > N有 $\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$ ,那么该级数收敛.

# 2.4 修改级数的有限项不改变其敛散性

在级数前添上或删去有限项,所得到的新的级数与原来的级数同时收敛或发散.