

中值定理

也许您在高等数学的学习过程中见到了各种各样的中值定理(Mean Value Theorem),它们也构成了微积分的重要组成部分. 下面我们就来列举并证明这些中值定理.

一.微分中值定理

(1).Rolle's Mean Value Theorem(罗尔中值定理)

Rolle's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 满足

- (a) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.
- (b) $f(x)$ 在 (a, b) 可导.
- (c) $f(x)$ 在端点的函数值满足 $f(a) = f(b)$.

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = 0$.

Proof.

首先,由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

若最大值和最小值均在端点处取得,又 $f(a) = f(b)$,则 $\forall \xi \in [a, b]$, $f(x) = f(a)$.

从而 $f(x)$ 为常函数, $\forall \xi \in [a, b]$, $f'(\xi) = 0$.

若最大值在 (a, b) 上取到,设最大值点为 ξ ,下面证明 $f'(\xi) = 0$.

由题意

$$\forall x \in (a, \xi), \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

$$\forall x \in (\xi, b), \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

则

$$f'(\xi - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'(\xi + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$$

又 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处可导,则 $f'(\xi - 0) = f'(\xi + 0) = 0$,从而 $f'(\xi) = 0$.

若最小值在 (a, b) 上取到,可以通过类似的方法证明之.

综上所述,原定理得证.

(2).Lagrange's Mean Value Theorem(拉格朗日中值定理)

Lagrange's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 满足

- (a) $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.
- (b) $f(x)$ 在 (a, b) 可导.

则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Proof.

$$\text{令 } g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) - f(x)$$

显然, $g(x)$ 满足 Rolle's Theorem 的条件, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $g'(\xi) = 0$

$$\text{即 } g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0$$

$$\text{即 } f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \text{ 从而原定理得证.}$$

(3). Cauchy's Mean Value Theorem (柯西中值定理)

Cauchy's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(a) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(b) $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 (a, b) 可导.

(c) $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$.

$$\text{则 } \exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Proof.

$$\text{令 } h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$$

显然, $h(x)$ 满足 Rolle's Theorem 的条件, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $h'(\xi) = 0$

$$\text{即 } h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$$

$$\text{即 } \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \text{ 从而原定理得证.}$$

我们可以发现, 上述定理是逐渐推广的, 但不管形式如何, 都可以通过构造辅助函数, 进而利用 Rolle's Theorem 进行证明.

二. 积分中值定理

(1). 积分第一中值定理

积分第一中值定理

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上连续, $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上可积且不变号, 则

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Proof.

不失一般性的,假定 $g(x) \geq 0$.

由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续,因此 $f(x)$ 存在最大值和最小值,分别记为 M, m .

于是有 $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$.对不等式求积分有

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

即

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

若 $\int_a^b g(x)dx = 0$,则 $\forall \xi \in (a, b)$, $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx = 0$

若 $\int_a^b g(x)dx \neq 0$,则由 $g(x) \geq 0$ 可得 $\int_a^b g(x)dx > 0$.于是

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

. 又 $m \leq f(x) \leq M$,根据介值定理, $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$.

即 $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$.

对于 $g(x) \leq 0$,可以采取相似的方法证明.

综上所述,原定理得证.

(2).积分第二中值定理

积分第二中值定理

若函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调有界,则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

Proof(Method I).

该方法只适用于研究的函数较为理想的情况,需要 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微.

记 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$,则

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x)dF(x) \\ &= F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= g(b) \int_a^b f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \end{aligned}$$

由于 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调,则 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号.

根据积分第一中值定理,

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi) \int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a))$$

则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= g(b) \int_a^x f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= g(b) \int_a^x f(x)dx - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \int_a^x f(x)dx - (g(b) - g(a)) \int_a^\xi f(x)dx \\ &= g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx \end{aligned}$$

从而原定理得证.

然而这种方法并不适用于所有情况(例如更一般的不可导的 $g(x)$).为此,我们需要采取另外的证法.

首先,我们来证明Bonnet Theorem.

Bonnet Theorem

若函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调递减且非负,则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

Proof.

证明:记 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$,则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 记

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \xi = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

记 $g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅(即最值之差)为 $w_i(g)$.

则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) [g(x) - g(x_i)] dx + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) [g(x) - g(x_i)]| dx + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n g(x_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\
&= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i)F(x_i) - g(x_{i-1})F(x_{i-1})] + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_{i-1}) - g(x_i)] F(x_{i-1}) \\
&= g(x)F(x)|_a^b + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_{i-1}) - g(x_i)] F(x_{i-1}) \\
&= g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1})
\end{aligned}$$

这其中用到了

$$0 \leq \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) [g(x) - g(x_i)]| dx \leq \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \max_{[a,b]} |f(x)| \sum_{i=1}^n w_i(g)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

由于 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,不妨设 $\max_{[a,b]} F(x) = M_F, \min_{[a,b]} F(x) = m_F$,则

$$g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) \leq M_F g(b) - M_F \sum_{i=1}^n g(x_i) - g(x_{i-1}) = M_F g(a)$$

$$g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) \geq m_F g(b) - m_F \sum_{i=1}^n g(x_i) - g(x_{i-1}) = m_F g(a)$$

从而根据介值定理有

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) = F(\xi)g(a)$$

整理可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

原定理得证.

该定理还有一个等价的形式.

Bonnet Theorem

若函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调递增且非负,则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

下面我们据此证明积分中值第二定理.

Proof(Method II).

证明:不失一般性的,假定 $g(x)$ 单调递增.则根据Bonnet Theorem有

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x) [g(b) - g(x)] dx = [g(b) - g(a)] \int_a^\xi f(x) dx$$

整理可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

原定理得证.

现在来看一道例题.

例1(2021Fall PKU高等数学B期中考试)

证明:对于 $[0, 1]$ 上的任何连续函数 $f(x)$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0$.

注意:本题中没有假定 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 存在.

证明:由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续可得 $f(x)$ 在 $\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$ 上也连续,其中 $k, j \in \mathbb{N}^*, 0 \leq j < k$.

记 $f(x)$ 在 $\left[\frac{j}{k}, \frac{j+1}{k}\right]$ 的上下界分别为 M_j, m_j .

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续,故 $\int_0^1 f(x) dx$ 存在.设 $\int_0^1 f(x) dx = A$,则Rieman和的极限有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_j}{k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{m_j}{k} = A$$

从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_j - m_j}{k} = A - A = 0$$

即 $\forall \varepsilon > 0, \exists K > 0, \text{ s.t. } \forall k > K, \left| \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_j - m_j}{k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

由 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 连续可得 $\exists B > 0, \text{ s.t. } |f(x)| < B$.

现在, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ 有

$$\begin{aligned} \left| \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx \right| &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f(x) \sin(nx) dx \right| \\ &= \left| \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} \left(f(x) - f\left(\frac{j}{k}\right) \right) \sin(nx) dx + \sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right) \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} \sin(nx) dx \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{k}\right) \right| |\sin(nx)| dx + \sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right) \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} \sin(nx) dx \\ &\leq \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} \left| f(x) - f\left(\frac{j}{k}\right) \right| dx + \sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right) \cdot \frac{1}{n} \left(\cos \frac{j}{k} - \cos \frac{j+1}{k} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} |M_j - m_j| \mathrm{d}x + \frac{2Bk}{n} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_j - m_j}{k} + \frac{2Bk}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Bk}{n}
\end{aligned}$$

从而 $\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max \left\{ K, \frac{4Bk}{\varepsilon} \right\}, \text{s.t.} \forall n > N,$

$$\left| \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Bk}{N} < \varepsilon$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) \mathrm{d}x = 0,$ 证毕.