佛脚

判断正项级数收敛的方法

(1) 比较判别法.

(2) 比较判别法的极限形式.如果$\{u_n\}$和$\{v_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=h$$

当$0<h<+\infty$时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$和$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$同敛散.

(3) 达朗贝尔判别法.如果$\{u_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

$l>1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$l<1$时发散,$l=1$时敛散性不定.

(4) 柯西判别法.将**(2)**中的$\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$替换为$\sqrt[n]{u_n}$,其余不变.

(5) 拉比判别法.如果$\{u_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=R$$

$R<1$时$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛,$R>1$时发散,$R=1$时敛散性不定.

判断任意项级数收敛的方法

(1) 莱布尼茨判别法.如果$\{u_n\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

且对充分大的n单调递减,那么交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n$收敛.

(2) 狄利克雷判别法.

i. $\{a_n\}$单调趋于0.

ii. $\{b_n\}$的部分和序列有界,即存在$M\in\mathbb{R}$使得对任意$k\in\mathbb{N}$有

$$\left|\sum_{n=1}^{k}b_n\right|\leqslant M$$

那么任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$收敛.

(3) 阿贝尔判别法.

i. $\{a_n\}$单调有界.

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$收敛.

那么任意项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

判断函数项级数收敛的方法

对于给定的x,当作数项级数判断即可.常见于求含有$\sin(x), \cos(x)$等项的函数项级数的收敛域中.

判断函数项级数一致收敛的方法

(1) 强级数判别法.如果对任意$x \in X$都有

$$|u_n(x)| < a_n$$

并且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,那么函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$x \in X$上一致收敛.

(2) 狄利克雷判别法.

i. 对任意取定的$x \in X$,$a_n(x)$对n单调趋于0.

ii. $\{b_n\}$的部分和序列在$x \in X$上一致有界,即存在$M \in \mathbb{R}$使得对任意$x \in X$和任意$k \in \mathbb{N}$有

$$\left| \sum_{n=1}^{k} b_n(x) \right| \leqslant M$$

那么函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$在$x \in X$上一致收敛.

(3) 阿贝尔判别法.

i. 对任意取定的$x \in X$,$a_n(x)$对n单调且一致有界.

ii. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_(x)$在$x \in X$上一致收敛.

那么函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_(x)$在$x \in X$上一致收敛.