重积分的应用

1.由一般式求曲面面积

设空间曲面S的方程为

$$z=f(x,y),(x,y)\in D$$

S在Oxy平面上的投影为闭区域D,又设$f(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数.

考虑曲面上任意一点$P(x,y,z)$和增量$\Delta x>0,\Delta y>0$.记$\Delta\sigma=\Delta x\Delta y$,并记$\Delta S$为对应这两个增量的曲面$S$上的微元的面积.

过P作S的切平面,切平面上对应于微元$\Delta\sigma$的面积记为ΔS^*,那么我们有

$$\Delta\sigma=|\cos\gamma|\Delta S^*$$

其中γ为曲面S在P点的法向量$\mathbf{n}$与z轴的夹角.由前面的讨论可知S在P点的法向量可以表示为

$$\mathbf{n}=(f_x(x,y),f_y(x,y),-1)$$

于是

$$|\cos\gamma|=\frac{1}{\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}}$$

于是

$$\Delta S^*=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\Delta\sigma$$

另一方面,当$\Delta x^2+\Delta y^2\to 0$时,$\Delta S$和$\Delta S^*$仅相差一个高阶无穷小量,于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma$$

因此曲面S的面积为

$$S=\iint_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}\sigma$$

2.由参数方程求曲面面积

设空间曲面S由参数方程

$$\begin{cases}x=\mathbf{x}(u,v)\\ y=\mathbf{y}(u,v)\\ z=\mathbf{z}(u,v)\end{cases}\qquad (u,v)\in D'$$

给出.由前面的讨论可知S在$P(x,y,z)$处的法向量

$$\mathbf{n}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ x_u&y_u&z_u\\ x_v&y_v&z_v\end{vmatrix}=A\mathbf{i}+B\mathbf{j}+C\mathbf{k}$$

其中

$$A=\frac{D(y,z)}{D(u,v)}\qquad B=\frac{D(x,z)}{D(u,v)}\qquad C=\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$$

于是

$$\mathrm{d}S=\frac{\mathrm{d}\sigma}{|\cos\gamma|}=\frac{\mathrm{d}\sigma}{\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|}}=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{|C|}\mathrm{d}\sigma$$

又因为

$$\mathrm{d}\sigma=|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\left|\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=|C|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

于是

$$\mathrm{d}S=\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

为了便于计算,我们再做如下变形.令

$$\begin{cases}E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\\F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\\G=x_v^2+y_v^2+z_v^2\end{cases}$$

于是$A^2+B^2+C^2=EG-F^2$.因此曲面S的面积为

$$S=\iint_{D'}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$