幂级数和泰勒级数

1.幂级数和幂级数的收敛半径

1.1 定义:幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

的无穷级数称作**幂级数**.其中$a_1, a_2, \cdots$是常数.

1.2 幂级数的收敛半径

幂级数的收敛域要么是一个点$\{x_0\}$,要么是一个以x_0为中心的一个区间(两端开闭不定).该区间长度的一半称作幂级数的**收敛半径**.

Lemma

1. 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_1$处收敛,那么对于任意$x$满足$|x| < |x_1|$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都在$x$处绝对收敛.
2. 如果幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x_2$处发散,那么对于任意$x$满足$|x| > |x_1|$,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$都在$x$处发散.

引理的证明从略,可以由比较审敛法不难得到.这样,我们就得到如下定律.

1.3 幂级数的收敛半径

对于幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$,存在一个非负数$R$($R$可以为$+\infty$),使得

1. 当$|x| < R$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$绝对收敛.
2. 当$|x| > R$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散.
3. 当$|x| = R$时,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$可能收敛也可能发散.

1.4 幂级数的收敛半径与收敛区间

1.3中的R称为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛半径**,$(-R, R)$称为$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的**收敛区间**.

2.收敛半径的求法

2.1 基于D'Alembert判别法的收敛半径求法

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的相邻两项系数之比满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = l$$

设该幂级数的收敛半径为R,那么有

1. 如果$0 < l < +\infty$,那么$R = \frac{1}{l}$.

2. 如果$l = 0$,那么$R = \infty$.

3. 如果$l = +\infty$,那么$R = 0$.

广义地说,你可以认为$R = \frac{1}{l}$.

2.2 基于Cauchy判别法的收敛半径求法

若幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$系数满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

设该幂级数的收敛半径为R,那么(广义地)有$R = \frac{1}{l}$.

3.幂级数的性质

3.1 幂级数的内闭一致性

设幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径$R > 0$,则有

1. 对任意$0 < b < R$,$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$[-b, b]$上一致收敛.

2. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = R$收敛,那么它在$[0, R]$上一致收敛.

3. 若$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = -R$收敛,那么它在$[-R, 0]$上一致收敛.

3.2 幂级数的连续性

幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在$(-R, R)$连续.特别地,如果$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$在$x = R$(或$x = -R$)收敛,那么$S(x)$在在$x = R$(或$x = -R$)右(左)连续.

3.3 幂级数的和函数的逐项积分

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在$(-R,R)$内任意闭区间上可积,且可逐项求积分,并有

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \qquad -R<x<R$$

3.4 幂级数的和函数的逐项求导

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数$S(x)$在$(-R,R)$内任意闭区间上可导,且可逐项求导,并有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad -R<x<R$$

Lemma

幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径记为$R$,由幂级数逐项积分所得的新幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$的收敛半径记为$R_1$,由幂级数逐项求导所得的新幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$的收敛半径记为$R_2$,则有$R=R_1=R_2$.

4.泰勒级数

关于泰勒级数的理论这里就不再多说.以下是几个常见函数的泰勒级数.

(1) $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 收敛域$(-\infty,+\infty)$.

(2) $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 收敛域$(-\infty,+\infty)$.

(3) $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 收敛域$(-\infty,+\infty)$.

(4) $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛域$[-1,1]$.

(5) $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$ 收敛域$(-1,1]$.

(6) $\sqrt{x+1} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \cdots = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1)^{n-1} x^n$ 收敛域$[-1,1]$.

(7) $\frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \cdots = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^n$ 收敛域$(-1,1)$.

(8) $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$ 収斂域$(-1, 1)$.

(9) $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots = 1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{n!}x^n$ 収斂域$(-1, 1)$.