正项级数的收敛判别法

1.正项级数

1.1 定义:正项级数

顾名思义,正项级数就是每一项都不小于零的级数.

即当$a_n \geqslant 0(n=1,2,\cdots)$时,$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$是**正项级数**.

2.正项级数的收敛判别法

2.1 正项级数收敛当且仅当有上界

正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛,当且仅当其部分和序列$\{S_n\}$有上界.

这根据单调有界序列有极限就可以容易的得出.由此,我们可以导出比较判别法.

2.2 比较判别法I

设两正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$满足$u_k \leqslant v_k$对任意$k \in \mathbb{N}^*$成立,则有

1. 如果$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$发散,那么$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$发散.
2. 如果$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$收敛,那么$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$收敛.

由于任意增删级数的有限项不改变其敛散性,因此我们可以对上述命题略作推广.

2.2 比较判别法II

若存在$N \geqslant 1$和常数$c>0$,使得

$$\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant c v_n$$

则当$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$发散时$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$发散;当$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$收敛时$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$收敛.

有时,两级数的一般项之间的不等关系较难给出,因此我们给出比较判别法的极限形式.

2.3 比较判别法III

设两正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$满足

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$$

其中h为有限数或$+\infty$,则有

1. 如果$0 < h \leqslant +\infty$,则当$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$发散时$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$发散.

2. 如果$0 \leqslant h < \infty$,则当$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$收敛时$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$收敛.

3. 如果$0 < h < +\infty$,则$\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$和$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$同时收敛或发散.

2.4 达朗贝尔判别法

若正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$满足

$$\lim_{u\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = l$$

则有

1. 如果$l > 1$,则级数发散.

2. 如果$l < 1$,则级数收敛.

3. 如果$l = 1$,则级数可能发散也可能收敛.

2.5 柯西判别法

若正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$满足

$$\lim_{u\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

则有

1. 如果$l > 1$,则级数发散.

2. 如果$l < 1$,则级数收敛.

3. 如果$l = 1$,则级数可能发散也可能收敛.

2.6 拉比判别法

若正项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$满足

$$\lim_{u\to\infty} n\left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1\right) = R$$

其中R可以是∞,则有

1. 如果$R > 1$,则级数收敛.

2. 如果$R < 1$,则级数发散.

3. 如果$R=1$,则级数可能发散也可能收敛.

此外,还可以通过积分法判断级数的敛散性.为此,我们先定义无穷积分的概念.

2.7 定义:无穷积分及其敛散性

设函数$f(x)$在$[a,+\infty]$上有定义,且对任意$A>a$,$f(x)$在(a,A)上可积.若极限

$$\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

存在,则称$f(x)$在$[a,+\infty)$上的**无穷积分**$\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$**收敛**,并定义

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\mathrm{d}x$$

若该极限不存在,则称该无穷积分**发散**.

2.8 积分判别法

设$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k$是正项级数.如果存在一个单调下降的非负函数$f(x)$使得

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,f(n)=u_n$$

那么$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}u_k$收敛当且仅当$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛.