# 北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期中考试

**1.(20分)**

**(1) (6分)** 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\cos n}$$

**(2) (7分)** 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sin\left(\frac{i}{n}-\frac{1}{2n^i}\right)$$

**(3) (7分)** 求函数极限

$$\lim_{x\to 0} \left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

**Solution.**

**(1) Solution.**

由$-1 \leqslant \cos n \leqslant 1$有

$$\sqrt[n]{1} \leqslant \sqrt[n]{2+\cos n} \leqslant \sqrt[n]{3}$$

而

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

夹逼可得

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2+\cos n} = 1$$

**(2) Solution.**

**(3) Solution.**

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x\to 0} \left(1+\tan^2 x\right)^{1+\frac{1}{\tan^2 x}} \\
&= \lim_{x\to 0} \left(1+\tan^2 x\right)^{\frac{1}{\tan^2 x}} \cdot \lim_{x\to 0} \left(1+\tan^2 x\right) \\
&= \mathrm{e} \cdot 1 \\
&= \mathrm{e}
\end{aligned}$$

**2.(20分)**

**(1) (6分)** 设$x>0$,求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数$f'(x)$.

**(2)** **(7分)** 设$x<1$,求出函数

$$g(x)=\int_0^{\sin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^3}}$$

的导函数$g'(x)$.

**(3)** **(7分)** 设$x\neq\pm1$,求出函数

$$h(x)=\frac{1}{x^2-1}$$

的四阶导函数$h^{(4)}(x)$.

**Solution.**

**(1)** **Solution.**

置$y=\ln(f(x))=\sqrt{x}\ln x$,则

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^y}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
&=\mathrm{e}^y\left(\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)\\
&=\frac{x^{\sqrt{x}}\left(\ln x+2\right)}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

**(2)** **Solution.**

置$y=\sin x$,则有

$$\begin{aligned}
g'(x)&=\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{1}{\sqrt{1-y^3}}\cdot\cos x\\
&=\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}}
\end{aligned}$$

**(3)** **Solution.**

由

$$h(x)=\frac{1}{x^2-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

有

$$\begin{aligned}
h^{(4)}(x)&=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{x-1}\right)^{(4)}-\left(\frac{1}{x+1}\right)^{(4)}\right]\\
&=\frac{1}{2}\left[12\left(x-1\right)^{-5}-12\left(x+1\right)^{-5}\right]\\
&=\frac{6}{(x-1)^5}-\frac{6}{(x+1)^5}
\end{aligned}$$

**3.(15分)**

求不定积分

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$$