北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期中考试

1. (10分) 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}}\right)^n$$

2. (10分) 设$[x]$为不超过x的最大整数,求函数极限

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{[x]}$$

3. (10分) 设$x>0$,求函数

$$f(x)=\int_0^{\ln x}\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

的导函数.

4. (10分) 求不定积分

$$\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x$$

5. (10分) 求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

在$x=1$到$x=2$的弧长.

6. (10分) 设欧氏空间中V是曲线弧$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}(1\leqslant x\leqslant 2)$与直线$x=1,x=2$围成的曲边三角形绕$x$轴旋转一周形成的旋转体,求$V$的体积.

7. (10分) 无穷序列$\{a_n\},\{a_n\}$满足$0<b_1<a_1$,且有以下递推关系

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$$

试证明$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

8. (20分) 本题中每个小问都要求给出证明和计算过程.

(1) (2分) 试证明:当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时有

$$-1<\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}<1$$

(2) (8分) 当$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,求函数

$$f(x)=\arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right)$$

的导函数.

(3) (10分) 试证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x+\sin^2 x}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x+2\sin^2 x}}$$

9. (10分) 设函数$f:[0,1]\to\mathbb{R}, g:[0,1]\to\mathbb{R}$在$[0,1]$上连续,满足$f(0)=g(0), \sin(f(1))=\sin(g(1)), \cos(f(1))=\cos(g(1))$,且

$$\forall x\in[0,1], (\cos(f(x))+\cos(g(x)))^2+(\sin(f(x))+\sin(g(x)))^2\neq 0$$

证明:$f(1)=g(1)$.