北京大学数学科学学院20xx高等数学B2期末考试

1.(10分) 对于$n \in \mathbb{N}^*$,设

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad u_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

的敛散性.

Solution.

对原级数变形可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \ln \frac{n+1}{n} \right)$$

又因为对任意$x > 0$有

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$$

成立,于是对任意$n \in \mathbb{N}^*$有

$$\frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2}\right) = \frac{1}{2n^2}$$

又因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1$$

收敛,于是根据比较判别法可知原级数收敛.

2.(10分) 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin mx \mathrm{d}x$$

其中$\alpha > 0, \beta > 0, m \neq 0$.

Solution.

我们有

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin mx \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy} \sin mx \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

由于二元函数$f(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}\sin mx$在$[0,+\infty)\times[\alpha,\beta]$上连续,于是

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\left(\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy}\sin mx\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x&=\int_\alpha^\beta\left(\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-yx}\sin mx\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\&=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{\mathrm{e}^{-yx}(m\cos mx+y\sin mx)}{m^2+y^2}\Big|_0^{+\infty}\right)\mathrm{d}y\\&=\int_\alpha^\beta\frac{m}{m^2+y^2}\mathrm{d}y\\&=\arctan\frac{\beta}{m}-\arctan\frac{\alpha}{m}\end{aligned}$$

3.(10分) 设

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

为正项级数,并有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{1}{a_n}}{\ln n}=b$$

(1) **(5分)** 试证明:当$b>1$时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$$

收敛.

(2) **(5分)** 试求b的取值范围,使得上述级数一定发散.

Solution.

(1) 注意到题设条件等价于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln a_n}{\ln\dfrac{1}{n^b}}=1$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^{-b}}=1$$

于是级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$同敛散.因此当$b>1$时该级数收敛.

(2) 若$b=0$,那么对任意$\varepsilon>0$都存在$N\in\mathbb{N}^*$使得$\forall n>N$都有$\left|\dfrac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}\right|<\varepsilon$,即$a_n>\dfrac{\mathrm{e}^\varepsilon}{n}$,于是根据比较判别法可知级数发散.

若$b\neq 0$且$b<1$,由**(1)**可知于是级数$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$同敛散,于是此时级数发散.

综上所述,当$b<1$时级数发散.

4.(10分) 求下列函数项级数的收敛区间和收敛域.

(1) (5分)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$$

(2) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)x^n$$

Solution.

题中给出的两个函数项级数均为幂级数.

(1) 令$u_n=\dfrac{1}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{3(n+1)\ln(n+1)}=\frac{1}{3}$$

根据D'Alembert判别法可知收敛半径$R=3$,即收敛区间为$(-3,3)$.

当$x=3$时,有

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{3n\ln n}>\frac{1}{3}\int_{2}^{+\infty}\ln\ln x\mathrm{d}x$$

发散.当$x=-3$时,原级数为交错级数,由于

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n\ln n}$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{n\cdot 3^n\cdot\ln n}&=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n\ln 2n}-\frac{1}{(2n+1)\ln(2n+1)}\right)\\&>-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2+2n}\end{aligned}$$

收敛.于是收敛域为$[-3,3)$.

(2) 令$u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{(n+1)u_n}=1$$

根据D'Alembert判别法可知收敛半径$R=1$,收敛区间为$(-1,1)$.

当$x=1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n>\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散.当$x=-1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(-1)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

发散.于是收敛域为$(-1,1)$.

5.(10分) 讨论数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^p}$$

的敛散性,其中$\varphi\in(0,\pi)$为取定的参数.

Solution.

对p的取值分类讨论.

i. $p>1$.此时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\varphi}{n^p}\right|\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$$

于是级数绝对收敛.

ii. $0<p\leqslant 1$.令$a_n=\dfrac{1}{n^p},b_n=\sin n\varphi$.我们有

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}b_n\right|=\left|\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}\right|\leqslant\left|\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\right|$$

于是$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$一致有界.而当$p>0$时,对任意$x\in(0,\pi)$有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,即$a_n$一致收敛于0,且对任意$x$单调递减.

于是根据Dirichlet判别法,原级数条件收敛.现在考虑该级数是否绝对收敛.我们有

$$\left|\frac{\sin n\varphi}{n^p}\right|\geqslant\frac{\sin^2 n\varphi}{n^p}=\frac{1-\cos 2n\varphi}{2n^p}$$

与前面同理可得级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\varphi}{2n^p}$$

收敛,而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n^p}$$

发散,于是根据比较判别法可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\varphi}{n^p}\right|=1$$

发散.于是原级数条件收敛.

iii. $p\leqslant 0$.如果

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin n\varphi}{n^p}=0$$

成立,那么必然有

$$\lim_{n\to\infty}\sin n\varphi=0$$

于是要求

$$\lim_{n\to\infty}[\sin(n+1)\varphi-\sin(n-1)\varphi]=0$$

而

$$\sin(n+1)\varphi-\sin(n-1)\varphi=2\cos n\varphi\sin\varphi$$

又因为$\sin\varphi\neq 0$,于是

$$\lim_{n\to\infty}\cos n\varphi=0$$

因而

$$\lim_{n\to\infty}\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi=0$$

这与$\cos^2 n\varphi+\sin^2 n\varphi=1$矛盾,于是原级数发散.

6.(10分) 判断下列广义积分的敛散性.

(1) (5分)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$$

(2) (5分)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^2}\mathrm{d}x$$

Solution.

(1) 先考虑在$(0,1)$上的积分.当$x\to 0^+$时,有

$$\lim_{n\to 0^+}\frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}}=\lim_{n\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$$

当$p\geqslant 2$时

$$\int_0^1\frac{1}{x^{p-1}}\mathrm{d}x$$

发散,而$p<2$时上述瑕积分收敛.根据比较判别法可知当$p<2$时瑕积分

$$\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$$

收敛.

现在考虑在$(1,+\infty)$上的积分.对p的取值分类讨论.

i. $p>1$.此时有

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{\ln(x+1)}{x^p}}{\frac{1}{x^{\frac{p+1}{2}}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^{\frac{p-1}{2}}}=0$$

于是无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$$

收敛.

ii. $p \leqslant 1$.此时有

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x \geqslant \int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x > \int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x}\mathrm{d}x \xlongequal{u=\ln x} \int_0^{+\infty} u\mathrm{d}u \to \infty$$

发散.

综上所述,当$1 < p < 2$时原积分收敛,当$p \geqslant 2$或$p \leqslant 1$时原积分发散.

(2) 我们有

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2} > \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{4\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x \xlongequal{u=\sqrt{x}} \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} 4\ln u\mathrm{d}u = 4\left(u\ln u - u\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -\sqrt{2}\left(2+\ln 2\right)$$

收敛.

7.(10分) 求含参变量x的无穷积分

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t$$

Solution.

令$f(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt$,则

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2tx$$

于是$f(x,t)$与$\dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$均在$(-\infty,+\infty)\times[0,+\infty)$上连续.

注意到对任意$x \in \mathbb{R}$有

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant 2t\mathrm{e}^{-t^2}$$

而

$$\int_0^{+\infty} 2t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u = 1$$

收敛,于是$\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$在$x \in \mathbb{R}$上一致收敛.于是有

$$\begin{aligned}
I'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\right)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \sin 2xt\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-t^2}\right) \\
&= \left(\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\right)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t \\
&= -2xI(x)
\end{aligned}$$

考虑微分方程$I'(x) = -2xI(x)$,其通解为

$$I(x) = C\mathrm{e}^{-x^2}$$

又

$$I(0) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

于是

$$I(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}$$

8.(15分) 设$f(x)$以2π为周期,且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数.a_n,b_n为$f(x)$的Fourier系数.

(1) **(3分)** 试求延迟函数$f(x+t)$的Fourier系数.

(2) **(12分)** 设$f(x)$连续且在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,试求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的Fourier展开式,并由此推出Parseval等式.

Solution.

(1) 设$f(x+t)$的Fourier系数为a_n',b_n'.我们有

$$\begin{aligned}
a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\cos nx\mathrm{d}x\\
&\xlongequal{u=x+t}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi+t}^{\pi+t}f(u)\left(\cos(nu)\cos(nt)+\sin(nu)\sin(nt)\right)\mathrm{d}u\\
&=\frac{1}{\pi}\left(\cos(nt)\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\cos(nu)\mathrm{d}u+\sin(nt)\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\sin(nu)\mathrm{d}u\right)\\
&=a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)
\end{aligned}$$

其中由于$f(x)$和$\sin nx,\cos nx$均以2π为周期,因此积分区域平移后不改变积分值.同理可知

$$b_n'=b_n\cos(nt)-a_n\sin(nt)$$

(2) 设$F(x)$的Fourier系数为A_n,B_n.我们有

$$\begin{aligned}
A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(x)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t\right)\cos(nx)\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(\int_{-\pi}^{\pi}f(t+x)\cos(nx)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt)\right)\mathrm{d}t\\
&=\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t+\frac{b_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t\\
&=a_n^2+b_n^2
\end{aligned}$$

同理可知

$$B_n=\frac{b_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(nt)\mathrm{d}t-\frac{a_n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(nt)\mathrm{d}t=a_nb_n-b_na_n=0$$

于是$F(x)$的Fourier展开式为

$$F(x)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)\cos(nx)$$

现在,取$x=0$,就有

$$F(0)=\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n^2+b_n^2\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(t))^2\,\mathrm{d}t$$

这就是Parseval等式.

9.(15分) 回答下列问题.

(1) **(5分)** 把$f(x)=x^2$在$(-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数.

(2) **(5分)** 利用**(1)**的结论证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(3) **(5分)** 利用Parseval等式求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

的值.

Solution.

(1) 这是一个偶函数,因此只需考虑a_n即可.有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin(nx)}{n}+\frac{2x\cos(nx)}{n^2}-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

因而

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

(2) 在**(1)**的结论中令$x=0$,即可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

由此亦可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

(3) 对$f(x)$使用Parseval等式可得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{2\pi^4}{5}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right)=\frac{\pi^4}{90}$$