北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期中考试

1.(20分) 求二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中积分区域$D=\left\{(r,\theta):0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$.

Solution.

做极坐标变换$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$的逆变换,变换的Jacobi矩阵

$$|J|=\begin{vmatrix}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\\ -\dfrac{y}{x^2+y^2} & \dfrac{x}{x^2+y^2}\end{vmatrix}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

积分区域变换为

$$D'=\{(x,y):0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$$

于是

$$\begin{aligned}&\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\=&\iint_{D'}\sqrt{x^2+y^2}y\sqrt{1-(x^2-y^2)}\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x y\sqrt{1-x^2+y^2}\mathrm{d}y\\=&\int_0^1\left(\frac{1}{3}\left(1-x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Big|_0^x\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{3}\int_0^1\left[1-\left(1-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\mathrm{d}x\\=&\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\cos^3 t\right)\cos t\mathrm{d}t\\=&\frac{1}{3}-\frac{\pi}{16}\end{aligned}$$

2.(20分) 求曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$$

其中曲线L是由曲面$4x^2+y^2=1$与平面$2x+y+z=1$所截得的曲线,其正向L^+规定为从z轴看的逆时针方向.

Solution.

令

$$P(x,y,z)=\frac{-y}{4x^2+y^2}\qquad Q(x,y,z)=\frac{x}{4x^2+y^2}\qquad R(x,y,z)=z$$

设$\Gamma:4x^2+y^2=\varepsilon^2,z=1,0<\varepsilon<1$,定向为顺时针方向.

在$L\cup\Gamma$所围的曲面S上运用Stokes公式有

$$\begin{aligned}&\oint_{L^+\cup\Gamma^-}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z\\=&\iint_{S^+}(0-0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(0-0)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2+y^2-8x^2+4x^2+y^2-2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_S 0\mathrm{d}S\\=&0\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma^+}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z&=\oint_{\Gamma^+}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s\\&=\frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{4x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2}2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\pi\end{aligned}$$

于是

$$\oint_{L^+}\frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=\pi$$

3.(20分) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续函数,求曲面积分

$$I=\iint_S[xf(xy)+2x-y]\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+[yf(xy)+2y+x]\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+[zf(xy)+z]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$夹在平面$z=1$和$z=2$之间的部分,方向取下侧.

Solution.

令

$$P(x,y,z)=xf(xy)+2x-y\qquad Q(x,y,z)=yf(xy)+2y+x\qquad R(x,y,z)=zf(xy)+z$$

考虑到S的曲面方程$z=\sqrt{x^2+y^2}$,其单位外法向量

$$\mathbf{n}=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(f(xy)+2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} - zf(xy) - z\right)\mathrm{d}S\\
=&\iint_S \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2} + \left(f(xy)+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)\right)\mathrm{d}S\\
=&\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S\\
=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\mathrm{d}r\\
=&\frac{14}{3}\pi
\end{aligned}
$$

4.(20分) 回答下列问题.

(1) 求常微分方程

$$
xy' + y\left(\ln x - \ln y\right) = 0
$$

满足$y(1)=\mathrm{e}^3$的解.

(2) 给定常微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数.

(a) 若$f(x)=x$,给出方程的通解.

(b) 若$f(x)$以T为周期,试证明方程有唯一以T为周期的解.

Solution.

(1) 令$t=\ln y$,于是$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot t' = t'\mathrm{e}^t$.代入原方程有

$$
x\mathrm{e}^t t' + \mathrm{e}^t\left(\ln x - t\right) = 0
$$

即

$$
xt' - t + \ln x = 0
$$

对应的齐次方程$xt'=t$的通解为$t=Cx$.将$t=C(x)x$代入原方程有

$$
x^2C'(x) + \ln x = 0
$$

即

$$
C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}
$$

于是

$$
C(x) = \frac{\ln x + 1}{x} + C
$$

代入t和y后可得

$$y=\exp\left(\ln x+1+Cx\right)=x\mathrm{e}^{Cx+1}$$

又因为

$$y(1)=\mathrm{e}^3$$

于是

$$y=x\mathrm{e}^{2x+1}$$

(2) **(a)** 对应的齐次方程$y'=-y$的通解为$y=C\mathrm{e}^{-x}$.设$y=C(x)\mathrm{e}^{-x}$,代入原方程有

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x}=x$$

即

$$C'(x)=x\mathrm{e}^{x}$$

即

$$C(x)=\mathrm{e}^{x}(x-1)+C$$

从而方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$$

(b) 同样地,根据常数变易法可知方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)$$

如果$y(x)=y(x+T)$对所有$x\in\mathbb{R}$成立,就有

$$\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)$$

即

$$\mathrm{e}^{-T}\left(\int_0^{x+T}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)=\int_0^{x}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+y(0)$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^{-T}\int_{-T}^{x}\mathrm{e}^{x-T}f(x-T)\mathrm{d}(x-T)\\&=\int_{-T}^{x}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-T}^{0}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x=\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right)y(0)$$

这样,原方程的以T为周期的周期函数解即为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T}}\int_{-T}^{0}\mathrm{e}^{x}f(x)\mathrm{d}x\right)$$

为了证明解的唯一性,假定存在不同的以T为周期的周期函数y_1, y_2使得

$$y_1 + y_1' = y_2 + y_2' = f(x)$$

令$u(x) = y_2 - y_1$,于是

$$u(x) + u'(x) = 0$$

这齐次方程的通解为

$$u(x) = C\mathrm{e}^{-x}$$

如果y_1, y_2均以T为周期,就对任意$x \in \mathbb{R}$有

$$y_2(x+T) = y_1(x+T) + C\mathrm{e}^{-x-T} = y_1(x) + C\mathrm{e}^{-x-T} = y_2(x) + C\mathrm{e}^{-x-T} - C\mathrm{e}^{-x}$$

又因为$y_2(x+T) = y_2(x)$,于是

$$C\left(\mathrm{e}^{-x-T} - \mathrm{e}^{-x}\right) = 0$$

对任意$x \in \mathbb{R}$成立,这要求$C = 0$,即$y_1 = y_2$.这与我们的假设相悖.

于是该常微分方程有唯一以T为周期的解.

5.(10分) 求曲面积分

$$I = \oiint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(y^2 + \mathrm{e}^{xz^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为柱面$z = 1 - x^2$与平面$z = 0, y = 0, y + z = 2$围成区域Ω的外表面.

Solution.

令

$$P(x,y,z) = xy \qquad Q(x,y,z) = y^2 + \mathrm{e}^{xz^2} \qquad R(x,y,z) = \sin(xy)$$

在Ω上运用Gauss公式有

$$\begin{aligned}
&\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=& \iiint_\Omega \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V \\
=& \iiint_\Omega 3y\mathrm{d}V
\end{aligned}$$

考虑到Ω与Oxy平面平行的截面

$$D_z = \left\{(x,y,z) : x^2 \leqslant 1 - z, 0 \leqslant y \leqslant 2 - z\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}
\iiint_V y\mathrm{d}V &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2-z} \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} y\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2-z} 2\sqrt{1-z}y\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 (2-z)^2 \sqrt{1-z}\mathrm{d}z \\
&\xlongequal{t=\sqrt{1-z}} 2\int_0^1 \left(1+t^2\right)^2 t^2\mathrm{d}t \\
&= 2\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{184}{105}
\end{aligned}$$

于是

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3\iiint_\Omega y\mathrm{d}V = \frac{184}{35}$$

6.(10分) 设L为平面上一条分段光滑的简单闭曲线,求曲线积分

$$I = \oint_L \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}s$$

其中$\mathbf{r}=(x,y)$,$\mathbf{n}$是L的单位外法向量.

Solution.

我们有

$$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|\,|\mathbf{n}|}$$

设$\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$,那么沿$L$的逆时针方向单位切向量即为$\mathbf{m}=(-\cos\beta,\cos\alpha)$,于是$\mathbf{n}\mathrm{d}s=(-\mathrm{d}y,\mathrm{d}x)$,于是

$$\oint_L \frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}s = \oint_L \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|^2}\mathrm{d}s = \oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

设D为L所围的区域.

若$(0,0)\notin D$,则在D上运用Green公式有

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \iint_D \frac{(y^2-x^2)-(x^2-y^2)}{\left(x^2+y^2\right)^2}\mathrm{d}\sigma = 0$$

若$(0,0)\in D$,则必然存在$(0,0)$的邻域$D_\varepsilon: x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$使得$D_\varepsilon\subset D$.设$D_\varepsilon$的边界为$\Gamma_\varepsilon$.

在$D\backslash D_\varepsilon$上运用Green公式,同理有

$$\oint_{L\cup\Gamma^-} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0$$

又因为

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = \frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma \mathrm{d}s = 2\pi$$

于是此时

$$\oint_L \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 2\pi$$

因此

$$I = \begin{cases} 0, (0,0) \notin D \\ 2\pi, (0,0) \in D \end{cases}$$

其中D为L所围的区域.