

重积分的应用

1. 由一般式求曲面面积

设空间曲面 S 的方程为

$$z = f(x, y), (x, y) \in D$$

S 在 Oxy 平面上的投影为闭区域 D , 又设 $f(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数.

考虑曲面上任意一点 $P(x, y, z)$ 和增量 $\Delta x > 0, \Delta y > 0$. 记 $\Delta\sigma = \Delta x \Delta y$, 并记 ΔS 为对应这两个增量的曲面 S 上的微元的面积.

过 P 作 S 的切平面, 切平面上对应于微元 $\Delta\sigma$ 的面积记为 ΔS^* , 那么我们有

$$\Delta\sigma = |\cos \gamma| \Delta S^*$$

其中 γ 为曲面 S 在 P 点的法向量 \mathbf{n} 与 z 轴的夹角. 由前面的讨论可知 S 在 P 点的法向量可以表示为

$$\mathbf{n} = (f_x(x, y), f_y(x, y), -1)$$

于是

$$|\cos \gamma| = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)}}$$

于是

$$\Delta S^* = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} \Delta\sigma$$

另一方面, 当 $\Delta x^2 + \Delta y^2 \rightarrow 0$ 时, ΔS 和 ΔS^* 仅相差一个高阶无穷小量, 于是

$$dS = \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

因此曲面 S 的面积为

$$S = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2(x, y) + f_y^2(x, y)} d\sigma$$

2. 由参数方程求曲面面积

设空间曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(u, v) \\ y = \mathbf{y}(u, v) \\ z = \mathbf{z}(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D'$$

给出. 由前面的讨论可知 S 在 $P(x, y, z)$ 处的法向量

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}$$

其中

$$A = \frac{D(y, z)}{D(u, v)} \quad B = \frac{D(x, z)}{D(u, v)} \quad C = \frac{D(x, y)}{D(u, v)}$$

于是

$$dS = \frac{d\sigma}{|\cos \gamma|} = \frac{d\sigma}{\frac{|\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}|}{|\mathbf{n}||\mathbf{k}|}} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}{|C|} d\sigma$$

又因为

$$d\sigma = |J| du dv = \left| \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right| du dv = |C| du dv$$

于是

$$dS = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv$$

为了便于计算,我们再做如下变形.令

$$\begin{cases} E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \\ F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \\ G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2 \end{cases}$$

于是 $A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2$. 因此曲面 S 的面积为

$$S = \iint_{D'} \sqrt{EG - F^2} du dv$$