北京大学数学科学学院2023-24高等数学B2期末考试

1.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域.

Solution.

令$u_n(x)=\dfrac{x^{n^3}}{10^n}$,考虑比值判别法

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{|x|^{n^3+3n^3+3n+1}10^n}{|x|^{n^3}10^{n+1}}=\frac{|x|^{3n^2+3n+1}}{10}=\begin{cases}0,|x|<1\\ \dfrac{1}{10},|x|=1\\ +\infty,|x|>1\end{cases}$$

于是收敛半径$R=1$.此外,当$|x|=1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{10^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{1}{9}$$

收敛.于是原级数的收敛域为$[-1,1]$.

2.(10分) 在$(-1,1)$上将函数

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

展开为幂级数.

Solution.

$\ln(1+x)$在$x=0$处的幂级数展开为

$$\ln(1+x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

于是

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

而$\arctan x$在$x=0$处的幂级数展开为

$$\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$$

于是

$$f(x)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2x^{4n+1}}{4n+1}$$

3.(10分) 求瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\mathrm{d}x$$

的值.

Solution.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{7}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)} = \frac{5\pi}{16}$$

4.(10分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性.

Solution.

首先令$a_n=\sin(2n), b_n=\dfrac{n}{n^2+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$.

为了考虑b_n的单调递减性,令$f(x)=\ln x-\ln\left(x^2+1\right)+x\left(\ln(x+1)-\ln x\right)$,则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}+\frac{x}{x+1}-1+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) \\ &< \frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2+1}-\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x} \\ &= \frac{-x^3+x+2}{x(x+1)\left(x^2+1\right)} \end{aligned}$$

对于充分大的x,总有$f'(x)<0$,即$f(x)$单调递减.因此,对于充分大的n,b_n单调递减,且

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{e}}{n+0} = 0$$

而对于任意$k\in\mathbb{N}^*$总有

$$\left|\sum_{n=1}^{k} a_n\right| = \left|\frac{1}{\sin 1}\sin\frac{k}{2}\sin\frac{k+1}{2}\right| < \frac{1}{\sin 1}$$

即部分和序列$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$有界.

综上,根据Dirichlet判别法,原级数收敛.

现在考虑其绝对收敛性.我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right| > \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin 2n}{n}\right| > \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n}-\frac{\cos 4n}{2n}\right)$$

同理可证$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 4n}{2n}$收敛,而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$$

发散,于是原级数不绝对收敛.

综上可知原级数条件收敛.

5.(10分) 设$E\in\mathbb{R}$.

(1) **(5分)** 求出所有$E\in\mathbb{R}$使得

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛.

(2) **(5分)** 求出所有$E\in\mathbb{R}$使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛.本小问的结果可以用Γ函数表示.

Solution.

(1) 对任意$E\in\mathbb{R}$,总有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Ex)^n}{n!}=\mathrm{e}^{Ex}$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(E-1)x}\mathrm{d}x$$

当$E<1$时有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(E-1)x}\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{\mathrm{e}^{(E-1)x}}{E-1}\right)\right|_0^{+\infty}=\frac{1}{1-E}$$

收敛,而当$E\geqslant 1$时有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{(E-1)x}\mathrm{d}x>\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x$$

发散.于是$E\in(-\infty,1)$.

(2) 我们有

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\frac{E^n}{n!}\int_0^{+\infty}x^{(n+1)-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{E^n}{n!}\Gamma(n+1)=E^n$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}E^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1-E^n}{1-E}$$

当且仅当$E\in(-1,1)$时原级数收敛.

6.(10分) 对于每个$x\in[0,1],n=1,2,\cdots,$定义

$$f_1(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\qquad f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在$[0,1]$上一致收敛.

Solution.

注意到

$$f_1(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t<\int_0^x\sqrt{1+2t^2+t^4}\mathrm{d}t=\frac{x^3}{3}+x<2x$$

于是

$$f_2(x)=\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t<\int_0^x 2t\mathrm{d}t=x^2$$

如此递推可得

$$0<f_n(x)<\frac{2x^n}{n!}<\frac{2}{n!}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n!}=2(\mathrm{e}-1)$$

收敛.于是根据M-判别法可知原级数在$[0,1]$上一致收敛.

7.(15分) 设$b\in\mathbb{R}$.

(1) (5分) 试证明含参变量b的无穷积分

$$\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) (10分) 试证明

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

Solution.

(1) 我们有

$$\int_0^{+\infty}\left|x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-u}\mathrm{d}u=\frac{1}{2}$$

由比较判别法可知该无穷积分在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) 令

$$I(b)=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x$$

$$J(b)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\mathrm{d}x$$

首先有

$$\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\right|\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=1$$

于是$J(b)$对$b\in(-\infty,+\infty)$一致收敛.于是有

$$J'(b)=\int_0^{+\infty}2x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x=2I(b)$$

另一方面又有

$$\begin{aligned}I(b)&=\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x\\&=-\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\cos(2bx)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)\\&=-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2b\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\mathrm{d}x\right)\\&=\frac{1}{2}-bJ(b)\end{aligned}$$

从而有

$$J'(b)=1-2bJ(b)$$

这是一个一阶线性微分方程,其对应的齐次方程的解为

$$J(b)=C\mathrm{e}^{-b^2}$$

设$J(b)=C(b)\mathrm{e}^{-b^2}$,代入原方程可得

$$C'(b)=\mathrm{e}^{b^2}$$

于是

$$C(b)=\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+C$$

注意到$J(0)=0$,因此$C=0$,于是

$$J(b)=\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

这就证明了题设等式.

8.(15分)

(1) **(10分)** 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是周期为$2\pi$的函数,$\forall x\in(-\pi,\pi)$, $f(x)=\mathrm{e}^x$.求出$f(x)$的傅里叶级数,并求出$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处的和.

(2) **(5分)** 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

的和.

Solution.

(1) 我们有

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cos nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(n\sin nx + \cos nx\right)}{n^2+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \sin nx \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(\sin nx - n\cos nx\right)}{n^2+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} n\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

于是$f(x)$的Fourier级数为

$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}\left(\cos nx - n\sin nx\right)$$

根据Dirichlet定理有

$$S(\pi) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}$$

(2) 在上述$f(x)$的Fourier级数中令$x=\pi$,则有

$$S(\pi) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi\left(n^2+1\right)} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi\left(\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}\right)}{2\left(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}\right)} - \frac{1}{2}$$

9.(10分) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛,每项$a_n > 0$.T是序列$\{a_n\}$中的最大项.对于任意$x \in \mathbb{R}$,定义$L(x)$是序列$\{a_n\}$中大于x的项的个数.

(1) **(2分)** 试证明0是$L(x)$的瑕点.

(2) **(8分)** 试证明瑕积分

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x$$

收敛,并且

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Solution.

(1) 由于每项$a_n > 0$,因此对总存在无穷多的$a_n > 0$,从而 $\lim\limits_{x\to 0^+} L(x) = +\infty$,于是0是$L(x)$的瑕点.

(2) 由于改变正项级数中各项的排列顺序并不影响其收敛值,因此将$\{a_n\}$中的各项从大到小重排为序列$\{u_n\}$.如此,对任意$n \in \mathbb{N}^*$,总有$u_{n+1} \leqslant u_n$.去除$\{u_n\}$中重复的项,得到序列$\{v_n\}$,满足$v_{n+1} < v_n$.特别地,有$v_1 = T$.这样就有

$$L(v_n) - L(v_{n+1}) = f(v_n)$$

其中$f(v_n)$是序列中v_n的数目.对于每个确定的$v_n > 0$,$f(v_n)$都为有限的正整数,否则原级数将不收敛.这样,就可以将$L(x)$分段表示为

$$L(x) = \begin{cases} 0, x \geqslant T \\ f(T), v_2 \leqslant x < T \\ L(v_n) + f(v_n), v_{n+1} \leqslant x < v_n \end{cases}$$

因此就有

$$\begin{aligned} \int_0^T L(x)\mathrm{d}x &= f(T)(T - v_2) + L(v_3)(v_2 - v_3) + L(v_4)(v_3 - v_4) + \cdots \\ &= Tf(T) + v_2(L(v_3) - f(T)) + v_3(L(v_4) - L(v_3)) + \cdots \\ &= Tf(T) + v_2 f(v_2) + v_3 f(v_3) + \cdots \end{aligned}$$

即这一积分等于各不同项乘以其出现次数,这与对$\{a_n\}$求和等价.于是

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

又因为原级数收敛,于是这瑕积分也收敛.