

北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期末考试

1.(10分)

设 \mathbb{R}^3 中平面 $x + 3y + 2z = 6$ 与 x 轴交点为 A ,与 y 轴交点为 B ,与 z 轴交点为 C .

(1) (5分) 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(2) (5分) 求过四点 $A, B, C, O(0, 0)$ 的球面的方程.

Solution.

(1) 分别令 x, y, z 三者中两者为0可解得 $A(6, 0, 0), B(0, 2, 0), C(0, 0, 3)$.于是

$$a = |BC| = \sqrt{13}, b = |AC| = 3\sqrt{5}, c = |AB| = 2\sqrt{10}$$

$$\text{于是} \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{18}{6\sqrt{65}} = \frac{3}{\sqrt{65}}, \text{则} \sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}.$$

$$\text{于是} S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab \sin C = 3\sqrt{14}.$$

(2) 设球心 $Q(x, y, z)$.根据 $|QO| = |QA| = |QB| = |QC|$ 有

$$\begin{cases} (x-6)^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + (y-2)^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \\ x^2 + y^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\text{解得} x = 3, y = 1, z = \frac{3}{2}. \text{于是球面方程为} \Gamma: (x-3)^2 + (y-1)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{49}{4}.$$

2.(15分)

下面的二元函数的极限存在吗?如果存在,请求出其值;如果不存在,请说明理由.

$$(1) (5分) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{24 \cos \sqrt{x^2 + y^2} - 24 + 12(x^2 + y^2)}{(\tan \sqrt{x^2 + y^2})^4}.$$

$$(2) (5分) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \ln(1 + y)) \cos \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

$$(3) (5分) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sin^2 x + \sin^2 y}.$$

Solution.

(1) 置 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 于是 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 有 $z \rightarrow 0^+$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{24 \cos \sqrt{x^2 + y^2} - 24 + 12(x^2 + y^2)}{(\tan \sqrt{x^2 + y^2})^4} &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{24 \cos z - 24 + 12z^2}{\tan^4 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{24 \cos z - 24 + 12z^2}{z^4} \cdot \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{z^4}{\tan^4 z} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{-24 \sin z + 24z}{4z^3} \cdot (1)^4 \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{24 - 24 \cos z}{12z^2} \\ &= \lim_{z \rightarrow 0^+} \frac{24 \sin z}{24z} \\ &= 1 \end{aligned}$$

(2) 我们有

$$0 < \left| (x + \ln(1 + y)) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} \right| < |x + \ln(1 + y)| < |x| + |\ln(1 + y)| < |x| + |y|$$

$$\text{而 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |x| + |y| = 0 + 0 = 0.$$

$$\text{据夹逼定理可知 } \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \ln(1 + y)) \cos \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

(3) 令 $y = kx$, 其中 $k \neq 0$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x \sin y}{\sin^2 x + \sin^2 y} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin kx}{\sin^2 x + \sin^2 kx} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)}{\left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 + k^2 \left(\frac{\sin kx}{kx} \right)^2} \\ &= \frac{k}{1 + k^2} \end{aligned}$$

于是从不同路径接近 $(0, 0)$ 时取得的极限不同, 因而原极限不存在.

3.(10分)

设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都有连续的二阶导数. 对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $h(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$, 试计算 $x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{yx}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y)$.

Solution.

令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $h(x, u) = xg(u) + f(u)$. 于是

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial h}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = ()$$

4.(10分)

求 \mathbb{R}^2 中曲线 $e^{xy} + xy + y^2 = 2$ 在 $(0, 1)$ 处的切线方程.

Solution.

对原式求微分可得

$$xe^{xy}dy + ye^{xy}dx + xdy + ydx + 2ydy = 0$$

移项整理有

$$(xe^{xy} + x + 2y)dy = -(y + ye^{xy})dx$$

于是

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(1 + e^{xy})}{x(1 + e^{xy}) + 2y}$$

代入 $x = 0, y = 1$ 有 $\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + e}{2}$.

于是切线方程为 $y = -\frac{1 + e}{2}x + 1$.

5.(10分)

设三元函数 $f(x, y, z) = \left(\frac{2x}{z}\right)^y, z \neq 0$. 求 f 在点 $\left(\frac{1}{2}, 1, 1\right)$ 处下降最快的方向上的单位向量.

Solution.

由题意

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \left(\frac{2}{z}\right)^y yx^{y-1} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{2x}{z}\right)^y \ln\left(\frac{2x}{z}\right) \quad \frac{\partial f}{\partial z} = -(2x)^y yz^{-y-1}$$

将 $x = \frac{1}{2}, y = 1, z = 1$ 代入可知 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2, \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial z} = -1$. 于是 $\mathbf{grad} f = (2, 0, -1)$ 为 f 在该点处的梯度.

于是下降最快的方向与负梯度的方向相同, 此方向的单位向量为 $\left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, 0, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

6.(10分)

求二元函数 $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$ 在点 $(2, 2)$ 处的二阶泰勒多项式.

Solution.

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-(x^2 + y^2) - 2y(-y)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

于是

$$f(x, y) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{4}(y-2) + \frac{1}{16}(x-2)^2 - \frac{1}{16}(y-2)^2$$

7.(10分)

求函数 $f(x) = (\sin x)^{\frac{2}{3}} + (\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值, 并指明所有最小值点.

Solution.

注意到 $f(x)$ 是偶函数. 因此, 考虑 $f(x)$ 在 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ 上的部分.

$$\begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{2}{3}(\sin x)^{-\frac{1}{3}} \cos x - \frac{2}{3}(\cos x)^{-\frac{1}{3}} \sin x \\ &= \frac{2}{3}(\sin x \cos x)^{-\frac{1}{3}} \left((\cos x)^{\frac{4}{3}} - (\sin x)^{\frac{4}{3}} \right) \end{aligned}$$

令 $\frac{df}{dx} = 0$, 解得 $x = 0, \frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{\pi}{2}$. 又 $f(0) = 1, f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \sqrt[3]{4} > 1, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

于是 $f(x)$ 的最小值为 1, 最小值点为 $\pm \frac{\pi}{2}, 0$.

8.(10分)

证明: 对于任意给定的 $k \in \mathbb{R}$, 存在 0 的开邻域 U 和 W , 存在唯一的函数 $y = f(x), x \in U, y \in W$ 满足方程 $e^{kx} + e^{ky} - 2e^{x+y} = 0$.

Proof.

设 $F(x, y) = e^{kx} + e^{ky} - 2e^{x+y}$. 注意到 $F(0) = 0$.

又 $\frac{\partial F}{\partial x} = ke^{kx} - 2e^{x+y}, \frac{\partial F}{\partial y} = ke^{ky} - 2e^{x+y}$. 于是 $F(x, y)$ 的一阶偏导是连续的.

注意到 $F_y(0, 0) = k - 2$.

若 $k \leq 0$, 则对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 都有 $F_y(x, y) < 0$. 根据隐函数存在定理可知存在唯一 $y = f(x)$ 使得 $F(x, y) \equiv 0$.

若 $k = 2$, 则 $F(x, y) = 0$ 等价于 $(e^x - e^y)^2 = 0$, 当且仅当 $y = x$ 时成立. 于是这函数为 $f(x) = x$.

若 $k > 0$ 且 $k \neq 2$, 则 $F_y(x, y) = 0$ 可解得 $y = \frac{\ln 2 - \ln k}{k - 1}$.

于是取 y 的开邻域 $W = \left\{ y \in \mathbb{R} : |y| < \frac{\ln 2 - \ln k}{k - 1} \right\}$. 根据隐函数存在定理可知存在唯一 $y = f(x)$ 使得 $F(x, y) \equiv 0$.

9.(15分)

设 r 是正实数, $D = \{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$, 函数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $f \in C^3(D)$, $f(0, 0) = 0$, f 在点 $(0, 0)$ 处的一阶全微分 $df(0, 0) = 0$. f 在点 $(0, 0)$ 处的二阶全微分满足

$$d^2f(0, 0) = E(\Delta x)^2 + 2F\Delta x\Delta y + G(\Delta y)^2$$

其中 E, F, G 均为常数.

(1) (10分) 证明: 存在 D 上的两个函数 $a, b : D \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 $\forall (x, y) \in D$ 有

$$f(x, y) = xa(x, y) + yb(x, y), a(0, 0) = b(0, 0) = 0$$

(2) (5分) 若 $E > 0$, $EG - F^2 < 0$, 则在 \mathbb{R}^3 中点 $(0, 0, 0)$ 的充分小邻域中, 曲面 $z = f(x, y)$ 充分近似于哪一类二次曲面? 画出此类二次曲面的草图. 从此类二次曲面的几何形状判断是否存在 \mathbb{R}^2 中点 $(0, 0)$ 的充分小邻域 D_1 , 存在 D_1 上的一一对应的 C^1 变量变换 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 使得

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2$$

Solution.

(1) 给定 $(x, y) \in D$, 记 $\phi(t) = f(tx, ty)$, 其中 $t \in [0, 1]$. 由于 f 在 D 上可微, 因而 $\phi(t)$ 可微.

现在, 令

$$a(x, y) = \int_0^1 f_x(tx, ty) dt \quad b(x, y) = \int_0^1 f_y(tx, ty) dt$$

注意到

$$\int_0^1 \phi'(t) dt = \phi(1) - \phi(0) = f(x, y)$$

而

$$\phi'(t) = xf_x(tx, ty) + yf_y(tx, ty)$$

于是

$$xa(x, y) + yb(x, y) = \int_0^1 xf_x(tx, ty) dt + \int_0^1 yf_y(tx, ty) dt = \int_0^1 \phi'(t) dt = f(x, y)$$

又 $df(0, 0) = 0$, 于是 $a(0, 0) = b(0, 0) = 0$. 于是这样的 a, b 满足题意.

(2) 考虑 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处的二阶泰勒多项式

$$f(x, y) = f(0, 0) + xf_x(0, 0) + yf_y(0, 0) + \frac{x^2 f_{xx}(0, 0) + 2xyf_{xy}(0, 0) + y^2 f_{yy}(0, 0)}{2} + o(\rho^2)$$

其中 $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.代入题中的 f 的各阶微分有

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (Ex^2 + 2Fxy + Gy^2)$$

考虑旋转变换 $S: (x, y) \rightarrow (x \sin \theta + y \cos \theta, x \cos \theta - y \sin \theta)$ 将 (x, y) 绕原点逆时针旋转 θ .

不妨令 $x' = x \sin \theta + y \cos \theta, y' = x \cos \theta - y \sin \theta$.于是

$$x'^2 = x^2 \sin^2 \theta + y^2 \cos^2 \theta + 2xy \sin \theta \cos \theta \quad y'^2 = x^2 \cos^2 \theta + y^2 \sin^2 \theta - 2xy \sin \theta \cos \theta$$

设 $Ex^2 + 2Fxy + Gy^2 = Ax'^2 + By'^2$,于是有

$$\begin{cases} A \sin^2 \theta + B \cos^2 \theta = E \\ A \cos^2 \theta + B \sin^2 \theta = G \\ (A - B) \sin \theta \cos \theta = F \end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= (A^2 + B^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + AB(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) - (A^2 - 2AB + B^2) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= AB(\sin^4 \theta + \cos^4 \theta) + 2AB \sin^2 \theta \cos^2 \theta \\ &= AB \end{aligned}$$

由于 $EG - F^2 < 0$,于是 $AB < 0$,因而这是双曲抛物面.题中所指的变换即旋转后伸缩变换,是成立的.