Lecture 12 Improper integral(无穷积分和瑕积分)

L.12.1 求无穷瑕积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Solution.

做变换$u=\arctan x$,则有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan u)\mathrm{d}u$$

再做变换$v=\dfrac{\pi}{2}-u$,则有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan u)\mathrm{d}u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\tan\left(\frac{\pi}{2}-v\right)\right)\mathrm{d}v=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{\tan v}\right)\mathrm{d}v=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan v)\mathrm{d}v$$

于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\tan u)\mathrm{d}u=0$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\mathrm{d}x=0$$

L.12.2 设参数$\alpha>2$,函数$f(x)$在$[0,+\infty)$可导,并且满足

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=0\qquad\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f'(x)=1$$

试证明:无穷积分

$$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

Proof.

先采取分部积分法,有

$$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=\left.xf(x)\right|_0^{+\infty}-\int_0^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,于是$\left.xf(x)\right|_0^{+\infty}=0$,于是

$$\int_0^{\infty}f(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x=-\int_0^{1}xf'(x)\mathrm{d}x-\int_1^{\infty}xf'(x)\mathrm{d}x$$

由题意

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{x^{1-\alpha}}=\lim_{x\to+\infty}x^\alpha f'(x)=1$$

又因为$\alpha > 2$,于是$1-\alpha < -1$,于是

$$\int_1^{+\infty} x^{1-\alpha}\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha-2}$$

于是$\displaystyle\int_1^{\infty} xf'(x)\mathrm{d}x$收敛.
由于$f(x)$在$[0,1]$可导,不妨设$\displaystyle\max_{x\in[0,1]}|f'(x)| = M$,于是

$$\left|\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 Mx\mathrm{d}x = \frac{M}{2}$$

于是$\displaystyle\int_0^1 xf'(x)\mathrm{d}x$有界.
于是

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

L.12.3 判断无穷积分

$$\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$$

的收敛性和绝对收敛性.

Solution.
先考虑其收敛性.令

$$a(x) = \frac{1}{x\ln x} \qquad b(x) = \sin x$$

由于$a(x)$单调递减并且$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} a(x) = 0$,并且

$$I(X) = \int_2^X b(x)\mathrm{d}x = \cos 2 - \cos X$$

对任意$X > 2$都有界.于是根据Dirichlet判别法,$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\sin x}{x\ln x}\mathrm{d}x$收敛.
现在考虑其绝对收敛性.我们有

$$\frac{|\sin x|}{x\ln x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x\ln x} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x\ln x} - \frac{\cos 2x}{x\ln x}\right)$$

根据Dirichlet判别法,类似地可知$\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x\ln x}\mathrm{d}x$收敛.而

$$\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x} = \ln\ln x|_2^{+\infty}$$

由于$\lim_{x\to+\infty}\ln\ln x = +\infty$,于是上述积分发散.根据比较判别法可知

$$\int_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x\ln x}\right|\mathrm{d}x$$

发散.综上所述,该无穷积分条件收敛.

L.12.4 设$f(x)$在$[1,+\infty)$上单调且连续.试证明:如果无穷积分$\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$收敛,那么

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

Proof.

假定$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$不成立.

不妨设$f(x)$单调递减.如果$f(x)$无界,那么$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$,这与无穷积分收敛显然不符.

如果$f(x)$有界,那么根据单调有界序列的性质不妨设$\lim_{x\to+\infty} f(x)=A\neq 0$.根据函数极限的定义有

$$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>1,\mathrm{s.t.}\forall x>\delta,|f(x)-A|<\varepsilon$$

取$\varepsilon=\dfrac{A}{2}$,就有$\dfrac{A}{2}<f(x)<\dfrac{3A}{2}$.若$A>0$,则有

$$\int_\delta^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x>\int_\delta^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$$

发散.若$A<0$,同理有

$$\int_\delta^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x<\int_\delta^{+\infty}\frac{A}{2}\mathrm{d}x$$

发散.因此

$$\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

发散.于是只能有

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$