北京大学数学科学学院2024-25高等数学A2期中考试

1.(20分) 求下列积分.

(1) 求二重积分

$$\iint_D \sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中D是矩形区域$[-1,1]\times[0,2]$.

(2) 求累次积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

Solution.

(1) 被积函数$\sqrt{|y-x^2|}$和积分区域D都关于y轴对称,故考虑区域$D_1:[0,1]\times[0,2]$即可.我们有

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^2\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left(\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}\mathrm{d}y+\int_{x^2}^2\sqrt{y-x^2}\mathrm{d}y\right)\\ &= \int_0^1\left[\left(-\frac{2}{3}\left(x^2-y\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^{x^2}+\left(\frac{2}{3}\left(y-x^2\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{x^2}^2\right]\\ &= \int_0^1\left(\frac{2}{3}\left(2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}+\frac{2}{3}x^3\right)\mathrm{d}x\\ &\xlongequal{x=\sqrt{2}\sin t}\frac{1}{6}+\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}4\cos^4 t\mathrm{d}t\\ &= \frac{1}{6}+\frac{1}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\cos 4t+4\cos 2t+3\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{5}{6}+\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

于是

$$\iint_D\sqrt{|y-x^2|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}$$

(2) 将累次积分化为重积分

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{1-x^2}}\int_1^{1+\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iiint_\Omega\frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

其中$\Omega:-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant\sqrt{1-x^2},1\leqslant z\leqslant 1+\sqrt{1-x^2-y^2}$.

做球坐标变换

$$x=\rho\sin\varphi\cos\theta\qquad y=\rho\sin\varphi\sin\theta\qquad z=\rho\cos\varphi$$

则积分区域变换为$\Omega' : 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \pi, 1 \leqslant z \leqslant 1 + \sqrt{1-r^2}$.于是

$$\begin{aligned}\iiint_{\Omega} \frac{\mathrm{d}V}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} &= \iiint_{\Omega'} \frac{r\mathrm{d}V}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_1^{1+\sqrt{1-r^2}} \frac{r\mathrm{d}z}{\sqrt{r^2+z^2}} \\ &= \pi \int_0^1 \left(\ln\left(z + \sqrt{r^2+z^2}\right)\Big|_1^{1+\sqrt{1-r^2}} \right) \\ &= \end{aligned}$$

2.(20分) 求曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$$

其中曲线L是由曲面$4x^2+y^2=1$与平面$2x+y+z=1$所截得的曲线,其正向L^+规定为从z轴看的逆时针方向.

Solution.

令

$$P(x,y,z) = \frac{-y}{4x^2+y^2} \qquad Q(x,y,z) = \frac{x}{4x^2+y^2} \qquad R(x,y,z) = z$$

设$\Gamma : 4x^2+y^2=\varepsilon^2, z=1, 0<\varepsilon<1$,定向为顺时针方向.

在$L\cup\Gamma$所围的曲面S上运用Stokes公式有

$$\begin{aligned}&\oint_{L^+\cup\Gamma^-} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z \\ =&\iint_{S^+} (0-0)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (0-0)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(\frac{4x^2+y^2-8x^2+4x^2+y^2-2y^2}{(4x^2+y^2)^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =&\iint_S 0\mathrm{d}S \\ =&0\end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma^+} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z &= \oint_{\Gamma^+} \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{\varepsilon^2}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{4x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2} 2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \pi\end{aligned}$$

于是

$$\oint_{L^+} \frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z = \pi$$

3.(20分) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续函数,求曲面积分

$$I=\iint_S\left[xf(xy)+2x-y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(xy)+2y+x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$夹在平面$z=1$和$z=2$之间的部分,方向取下侧.

Solution.

令

$$P(x,y,z)=xf(xy)+2x-y\qquad Q(x,y,z)=yf(xy)+2y+x\qquad R(x,y,z)=zf(xy)+z$$

考虑到S的曲面方程$z=\sqrt{x^2+y^2}$,其单位外法向量

$$\mathbf{n}=\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},-1\right)$$

于是

$$\begin{aligned}&\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iint_S\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{(x^2+y^2)\left(f(xy)+2\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}-zf(xy)-z\right)\mathrm{d}S\\=&\iint_S\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{x^2+y^2}+\left(f(xy)+1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2}-z\right)\right)\mathrm{d}S\\=&\frac{1}{\sqrt{2}}\iint_S\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}S\\=&\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r^2\mathrm{d}r\\=&\frac{14}{3}\pi\end{aligned}$$

4.(20分) 回答下列问题.

(1) 求常微分方程

$$xy'+y\left(\ln x-\ln y\right)=0$$

满足$y(1)=\mathrm{e}^3$的解.

(2) 给定常微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数.

(a) 若$f(x)=x$,给出方程的通解.

(b) 若$f(x)$以T为周期,试证明方程有唯一以T为周期的解.

Solution.

(1) 令$t=\ln y$,于是$y'=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot t'=t'\mathrm{e}^t$.代入原方程有

$$x\mathrm{e}^t t'+\mathrm{e}^t(\ln x-t)=0$$

即

$$xt'-t+\ln x=0$$

对应的齐次方程$xt'=t$的通解为$t=Cx$.将$t=C(x)x$代入原方程有

$$x^2C'(x)+\ln x=0$$

即

$$C'(x)=-\frac{\ln x}{x^2}$$

于是

$$C(x)=\frac{\ln x+1}{x}+C$$

代入t和y后可得

$$y=\exp(\ln x+1+Cx)=x\mathrm{e}^{Cx+1}$$

又因为

$$y(1)=\mathrm{e}^3$$

于是

$$y=x\mathrm{e}^{2x+1}$$

(2) **(a)** 对应的齐次方程$y'=-y$的通解为$y=C\mathrm{e}^{-x}$.设$y=C(x)\mathrm{e}^{-x}$,代入原方程有

$$C'(x)\mathrm{e}^{-x}=x$$

即

$$C'(x)=x\mathrm{e}^x$$

即

$$C(x)=\mathrm{e}^x(x-1)+C$$

从而方程的通解为

$$y=C\mathrm{e}^{-x}+x-1$$

(b) 同样地,根据常数变易法可知方程的通解为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^x\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)$$

如果$y(x)=y(x+T)$对所有$x\in\mathbb{R}$成立,就有

$$\mathrm{e}^{-x-T}\left(\int_0^{x+T}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)$$

即

$$\mathrm{e}^{-T}\left(\int_0^{x+T}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+y(0)\right)=\int_0^{x}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+y(0)$$

又因为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-T}\int_0^{x+T}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x&=\mathrm{e}^{-T}\int_{-T}^{x}\mathrm{e}^{x-T}f(x-T)\mathrm{d}(x-T)\\&=\int_{-T}^{x}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$\int_{-T}^{0}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x=\left(1-\mathrm{e}^{-T}\right)y(0)$$

这样,原方程的以T为周期的周期函数解即为

$$y=\mathrm{e}^{-x}\left(\int_0^{x}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x+\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-T}}\int_{-T}^{0}\mathrm{e}^x f(x)\mathrm{d}x\right)$$

为了证明解的唯一性,假定存在不同的以T为周期的周期函数y_1,y_2使得

$$y_1+y_1'=y_2+y_2'=f(x)$$

令$u(x)=y_2-y_1$,于是

$$u(x)+u'(x)=0$$

这齐次方程的通解为

$$u(x)=C\mathrm{e}^{-x}$$

如果y_1,y_2均以T为周期,就对任意$x\in\mathbb{R}$有

$$y_2(x+T)=y_1(x+T)+C\mathrm{e}^{-x-T}=y_1(x)+C\mathrm{e}^{-x-T}=y_2(x)+C\mathrm{e}^{-x-T}-C\mathrm{e}^{-x}$$

又因为$y_2(x+T)=y_2(x)$,于是

$$C\left(\mathrm{e}^{-x-T}-\mathrm{e}^{-x}\right)=0$$

对任意$x\in\mathbb{R}$成立,这要求$C=0$,即$y_1=y_2$.这与我们的假设相悖.

于是该常微分方程有唯一以T为周期的解.

5.(10分) 求曲面积分

$$I=\oiint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+\mathrm{e}^{xz^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为柱面$z=1-x^2$与平面$z=0,y=0,y+z=2$围成区域Ω的外表面.

Solution.

令

$$P(x,y,z)=xy \qquad Q(x,y,z)=y^2+\mathrm{e}^{xz^2} \qquad R(x,y,z)=\sin(xy)$$

在Ω上运用Gauss公式有

$$\begin{aligned}&\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\=&\iiint_\Omega\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V\\=&\iiint_\Omega 3y\mathrm{d}V\end{aligned}$$

考虑到Ω与Oxy平面平行的截面

$$D_z=\left\{(x,y,z):x^2\leqslant 1-z,0\leqslant y\leqslant 2-z\right\}$$

于是

$$\begin{aligned}\iiint_V y\mathrm{d}V&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2-z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}}y\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2-z}2\sqrt{1-z}y\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(2-z)^2\sqrt{1-z}\mathrm{d}z\\&\xlongequal{t=\sqrt{1-z}}2\int_0^1\left(1+t^2\right)^2t^2\mathrm{d}t\\&=2\left(\frac{1}{7}+\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\right)\\&=\frac{184}{105}\end{aligned}$$

于是

$$\oiint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_\Omega y\mathrm{d}V=\frac{184}{35}$$

6.(10分) 设L为平面上一条分段光滑的简单闭曲线,求曲线积分

$$I=\oint_L\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}s$$

其中$\mathbf{r}=(x,y)$,$\mathbf{n}$是L的单位外法向量.

Solution.

我们有

$$\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})=\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|\,|\mathbf{n}|}$$

设$\mathbf{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$,那么沿$L$的逆时针方向单位切向量即为$\mathbf{m}=(-\cos\beta,\cos\alpha)$,于是$\mathbf{n}\mathrm{d}s=(-\mathrm{d}y,\mathrm{d}x)$,于是

$$\oint_L\frac{\cos(\mathbf{r},\mathbf{n})}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}s=\oint_L\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{r}|^2}\mathrm{d}s=\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

设D为L所围的区域.

若$(0,0)\notin D$,则在D上运用Green公式有

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\iint_D\frac{(y^2-x^2)-(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}\sigma=0$$

若$(0,0)\in D$,则必然存在$(0,0)$的邻域$D_\varepsilon:x^2+y^2\leqslant\varepsilon^2$使得$D_\varepsilon\subset D$.设$D_\varepsilon$的边界为$\Gamma_\varepsilon$.

在$D\backslash D_\varepsilon$上运用Green公式,同理有

$$\oint_{L\cup\Gamma^-}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=0$$

又因为

$$\oint_{\Gamma^+}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=\frac{1}{\varepsilon}\int_\Gamma\mathrm{d}s=2\pi$$

于是此时

$$\oint_L\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}=2\pi$$

因此

$$I=\begin{cases}0,(0,0)\notin D\\2\pi,(0,0)\in D\end{cases}$$

其中D为L所围的区域.