数项级数

1.Cauchy收敛准则

迄今为止,我们所学的知识都只能帮助我们判断序列$\{a_n\}$是否以某个特定的数A为极限,而不能判断$\{a_n\}$是否有极限(除非它是单调有界序列).下面的Cauchy收敛准则给出了一个序列有极限的充要条件.

1.1 Cauchy收敛准则

序列$\{a_n\}$有极限的充要条件是对于任意给定的$\varepsilon > 0$,都存在N使得对任意的$m, n \geqslant N$都有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

证明Cauchy收敛准则的必要性是简单的,而充分性则需要用到实数的完备性.因此,略去上述命题的证明.
对于函数极限的情况也是一样的.

1.2 Cauchy收敛准则

设$y = f(x)$在a的一个去心邻域内有定义,则$x \to a$时$f(x)$的极限存在的充要条件是对于任意给定的$\varepsilon > 0$,都存在$\delta > 0$使得对任意x_1, x_2满足$|x_1 - a| < \delta$且$|x_2 - a| < \delta$都有$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

2.数项级数及其敛散性

2.1 定义:无穷级数及其敛散性

一个形如

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

的式子被称作**无穷级数**.这里的一般项a_k被称作级数的**通项**.
对于给定的级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$,我们把级数的前$n$项和

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

称作级数的**部分和**.
当$n \to \infty$时,若部分和序列$\{S_n\}$有极限S,则称级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$**收敛**,且称$S$为这个级数的**和**,记作

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

如果部分和序列$\{S_n\}$没有极限,我们就称级数是**发散的**.

2.2 无穷级数收敛则通项趋于0

如果无穷级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$收敛,那么有$\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

2.3 任意长度和收敛于0则无穷级数收敛

如果无穷级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k$满足对任意给定的$\varepsilon > 0$和$p \in \mathbb{N}$,都存在$N \in N$使得对任意$n > N$有$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \varepsilon$,那么该级数收敛.

2.4 修改级数的有限项不改变其敛散性

在级数前添上或删去有限项,所得到的新的级数与原来的级数同时收敛或发散.