北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期末考试

1. **(14分)** 证明方程$-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z=0$在$(0,0,0)$附近确定隐函数$z=f(x,y)$,并写出$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的一阶泰勒多项式.

2. **(16分)** 求函数极限.

(1) **(8分)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)\,(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})}$.

(2) **(8分)** $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

3. **(16分)** 回答下列问题.

(1) **(8分)** 设平面$x+y+z=3$和平面$x-2y-z+2=0$的交线为l,求过点$(1,2,3)$且与直线l垂直的平面的一般式方程.

(2) **(8分)** 设向量$\overrightarrow{OA}$和向量$\overrightarrow{OB}$夹角为$\dfrac{\pi}{3}$,满足$2\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$.定义$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$,其中$\lambda\in[0,1]$.求$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$的最小值和此时$\lambda$的值.

4. **(10分)** 设函数$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x^4+y^2}, y\neq 0\\ 1, y=0\end{cases}$.讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的两个偏导和全微分的存在性.若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

5. **(12分)** 求函数$f(x,y)=2x^3-3x^2-6xy(x-y-1)$在$\mathbb{R}^2$上的所有极值点.

6. **(10分)** 设参数$a>\mathrm{e}$,且$0<x<y<\dfrac{\pi}{2}$,证明:$a^y-a^x>a^x\ln a(\cos x-\cos y)$.

7. **(12分)** 求$f(x)=x\sin(x^2-2x)$在$x=1$处的局部泰勒公式,并计算$f^{(n)}(1)$,其中$n\in\mathbb{N}^*$.

8. **(10分)** 设$f(x)$是在闭区间$[P,Q]$定义的函数,且在开区间(P,Q)二阶可导,满足$f''(x)\geqslant 1$对所有$x\in(P,Q)$成立.求证:存在$y=f(x)$的图像上的三个点$A(a,f(a)),B(b,f(b)),C(c,f(c))$使得$S_{\triangle ABC}\geqslant\dfrac{(Q-P)^3}{16}$.