北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期末考试

1. (15分) 回答下列问题并简述理由.

(1) (5分) 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列,$\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛　　(b)一定发散　　(c)敛散性不确定

(2) (5分) 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列,$\lim\limits_{n\to\infty} na_n$不存在,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛　　(b)一定发散　　(c)敛散性不确定

(3) (5分) 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列,$\lim\limits_{n\to\infty} |na_n| = +\infty$,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛　　(b)一定发散　　(c)敛散性不确定

2. (10分) 试求幂级数的收敛半径.

(1) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

(2) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^n + 3^n}{n(n+1)(n+2)} x^n$$

3. (10分) 求微分方程

$$y'' + y' = x^2 + x$$

的通解.

4. (10分) 判断下列级数的敛散性.

(1) (5分)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

(2) (5分)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

5. (15分) 证明函数

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{x \sin x}{\ln n} \right)^n$$

是$(-\infty, +\infty)$上的连续函数.

6. (10分) 计算含参变量t的无穷积分

$$I(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \cos(tx) \mathrm{d}x (-\infty < t < +\infty)$$

已知$I(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

7. (12分) 回答下列问题.

(1) (2分) 写出Γ函数的表达式.

(2) (5分) 试证明$\Gamma(s)$在$s \in (0, +\infty)$上连续.

(3) (5分) 用Γ函数表示积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \mathrm{d}x$$

并求极限

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^n} \mathrm{d}x$$

8. (13分) 设函数

$$f(x) = \begin{cases} x, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, 1 < x \leqslant 2 \end{cases}$$

计算$f(x)$在$[0, 2]$上的Fourier展开式,并证明

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

9. (5分) 试证明

$$\int_0^1 \frac{1}{x^x} \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$$