

北京大学数学科学学院2023-24高等数学B2期末考试

1. (10分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域.

2. (10分) 在 $(-1, 1)$ 上将函数

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$$

展开为幂级数.

3. (10分) 求瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx$$

的值.

4. (10分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性.

5. (10分) 设 $E \in \mathbb{R}$.

- (1) (5分) 求出所有 $E \in \mathbb{R}$ 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx$$

收敛.

- (2) (5分) 求出所有 $E \in \mathbb{R}$ 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx$$

收敛. 本小问的结果可以用 Γ 函数表示.

6. (10分) 对于每个 $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

7. (15分) 设 $b \in \mathbb{R}$.

- (1) (5分) 试证明含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} x e^{-x^2} \cos(2bx) dx$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) (10分) 试证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{t^2} dt$$

8. (15分)

(1) (10分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $\forall x \in (-\pi, \pi), f(x) = e^x$. 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的和.

(2) (5分) 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$$

的和.

9. (10分) 设级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

收敛, 每项 $a_n > 0$. T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项. 对于任意 $x \in \mathbb{R}$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数.

(1) (2分) 试证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点.

(2) (8分) 试证明瑕积分

$$\int_0^T L(x) dx$$

收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$