常微分方程

1.基本概念

1.1 定义:常微分方程

一般来说,一个联系自变量x,未知的一元函数$y=y(x)$及其导数$y^{(j)}(x)(0<j\leqslant n)$的方程

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$$

称为一个n**阶常微分方程**.

如果区间(a,b)上存在一个函数$y=y(x)$,它有n阶导数且满足

$$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)\equiv 0,\forall x\in(a,b)$$

那么称$y=y(x)$是该常微分方程在(a,b)上的一个**解**.

1.2 定义:通解与特解

若n阶常微分方程$F\left(x,y,y',\cdots,y^{(n)}\right)=0$有解

$$y=\varphi\left(x;C_1,\cdots,C_n\right)$$

其中$C_1,\cdots,C_n$是独立的常数,那么我们称上面的函数为该方程的**通解**.

反之,上述方程的任意一个不包含任意常数的解都被称作方程的**特解**.

需要注意的是,通解中的独立常数的数目恰好等于方程的阶数.

我们所说的独立,浅显的理解是每个常数都是不可替代的.更精确的说法是:如果$\varphi\left(x;C_1,\cdots,C_n\right)$中的$n$个常数是独立的,那么

$$\frac{\mathrm{D}\left(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)}\right)}{\mathrm{D}\left(C_1,\cdots,C_n\right)}\neq 0,\forall x\in(a,b)$$

虽然通解包含了大部分特解,但是仍有一些特解是不被包含于其中的.

1.3 定义:通积分

有时,微分方程的解并不能写成显式的形式,而是用隐函数$\Phi\left(x,y;C_1,\cdots,C_n\right)=0$给出.这时我们把该隐函数称作微分方程的**通积分**.