北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期末考试

1.(10分) 求函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}}$$

在$x=0$处的幂级数展开式,并指出此幂级数的收敛域.

Solution.

注意到$\ln(1+x)$在$x=0$处的幂级数展开式

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

于是

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=\ln(1+x)-\ln(1-x)=2\sum_{n=0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

于是

$$\frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

代入$x=\sqrt{|x|}$后即有

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

其收敛域为$(-1,1)$.

2.(15分) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是周期为$2\pi$的而函数,$f(x)$在$(-\pi,\pi]$上等于$\mathrm{e}^x$.求$f(x)$的傅里叶级数,以及此傅里叶级数在$x=\pi$处的收敛值.

Solution.

我们有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(n\sin nx+\cos nx\right)}{n^2+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\sin nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\mathrm{e}^x\left(\sin nx-n\cos nx\right)}{n^2+1}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}n\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}$$

于是$f(x)$的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{2\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}\right)}{\pi\left(n^2+1\right)}\left(\cos nx-n\sin nx\right)$$

根据Dirichlet定理有

$$S(\pi)=\frac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$$

3.(10分) 求无穷积分

$$\int_{0}^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

和瑕积分

$$\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\mathrm{d}x$$

的值.

Solution.

由Γ函数的定义可知

$$\int_{0}^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x^{\frac{5}{2}-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

由B函数的定义可知

$$\int_{0}^{1}\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}x^{\frac{5}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{5}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)}=\frac{3\pi}{8}$$

4.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$$

的收敛区间,以及此幂级数的和函数.

Solution.

令$a_n=(n+1)(n+2)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+1}=1$$

于是收敛半径$R=1$,即收敛区间为$(-1,1)$.令原级数为$S(x)$,逐项求积分可得

$$\int S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int(n+1)(n+2)x^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}$$

令上述和函数为$T(x)$,对$T(x)$再次逐项求积分可得

$$\int T(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int(n+2)x^{n+1}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}$$

而

$$R(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}=\frac{1}{1-x}-1-x$$

于是

$$S(x)=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}R(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{(1-x)^2}-1\right)=\frac{2}{(1-x)^3}$$

5.(10分) 任意给定常数$r>0$,试证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-nx}$$

在$[r,+\infty)$上一致收敛.

Solution.

注意到对任意$n\in\mathbb{N}^*,x\in[r,+\infty)$都有

$$\mathrm{e}^{-nx}\leqslant\mathrm{e}^{-nr}$$

现在只需证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-nr}$$

收敛即可.注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$$

因此对任意$r>0$,总存在$N\in\mathbb{N}^*$使得对任意$n>N$有

$$\frac{\ln n}{n}<\frac{r}{4}$$

即$\mathrm{e}^{-nr}<\dfrac{1}{n^4}$.于是

$$\sum_{n=N+1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-nr}<\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

收敛,于是上述数项级数收敛.对任意$x\in[r,+\infty)$有

$$\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-nx}<\sum_{n=1}^{\infty}n^2\mathrm{e}^{-nr}$$

根据强级数判别法,题设函数项级数在$[r,+\infty)$上一致收敛.

6.(15分) 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x+2n}$$

的收敛域,全体绝对收敛点,全体条件收敛点.

Solution.

这是一个交错级数.令

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x + 2n}$$

为说明上述$u_n(x)$在固定x时对n的单调性,令二元函数

$$f(x,y) = \frac{1}{y^x + 2y}(y > 0, x \in \mathbb{R})$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{xy^{x-1} + 2}{(y^x + 2y)^2}$$

若$x \geqslant 0$,则$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \leqslant 0$,即$f(x,y)$对$y$单调递减.

若$x < 0$,则当$y > \left(-\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$时$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0$,即$f(x,y)$对$y$单调递减.

因此,当n充分大时,总有$u_{n+1}(x) < u_n(x)$成立.

又因为$0 < u_n(x) < \dfrac{1}{n}$,于是由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0$$

综合上述条件,根据Leibniz判别法可知原函数项级数的收敛域为$(-\infty, +\infty)$.

现在来考察其绝对收敛点.当$x > 1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

根据比较判别法可知此时级数绝对收敛.

当$x \leqslant 1, n \geqslant 1$时总有$n^x < n$,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$$

根据比较判别法可知此时级数发散.

于是全体绝对收敛点为$(1, +\infty)$,全体条件收敛点为$(-\infty, 1]$.

7.(15分) 定义函数$\theta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\mathrm{d}t$$

试证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos\left(\theta(x)\right) \mathrm{d}x$$

收敛.本题要求写出详细过程和依据.

Proof.

$\theta(x)$中的被积函数恒正,故$\theta(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增.

又$\theta(0)=0,\lim\limits_{x\to+\infty}\theta(x)=+\infty$,因此$\theta(x)$是$[0,+\infty)$到$[0,+\infty)$上的一一映射.

考虑$\theta(x)$的反函数$f(x)$.于是

$$\int_0^{+\infty}\cos\left(\theta(x)\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{f\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{f\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}\cos(\theta(x))\mathrm{d}x\right)$$

考虑到当$x\in\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$时$\cos(x)>0$,$x\in\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$时$\cos x<0$,于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{f\left(\frac{n\pi}{2}\right)}^{f\left(\frac{(n+1)\pi}{2}\right)}\cos(\theta(x))\mathrm{d}x\right)=\int_0^{f\left(\frac{\pi}{2}\right)}\cos\left(\theta(x)\right)\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_{f\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}^{f\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}\left|\cos(\theta(x))\right|\mathrm{d}x$$

求和中的每项积分均为正值,因此这是一个交错级数.令

$$u_n=\int_{f\left(n\pi-\frac{\pi}{2}\right)}^{f\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}\left|\cos(\theta(x))\right|\mathrm{d}x$$

令$f_n=f\left(n\pi-\dfrac{\pi}{2}\right)$.注意到$\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}>t$,因此

$$\pi=\theta\left(f_{n+1}\right)-\theta\left(f_n\right)=\int_{f_n}^{f_{n+1}}\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\mathrm{d}t>\int_{f_n}^{f_{n+1}}t\mathrm{d}t=\frac{f_{n+1}^2-f_n^2}{2}$$

于是

$$0<u_n<\int_{f_n}^{f_{n+1}}1\mathrm{d}x=f_{n+1}-f_n<\frac{2\pi}{f_n+f_{n+1}}$$

注意到$n\to\infty$时显然有$f_n\to+\infty$,因此由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty}u_n=0$$

又

$$u_n=\int_{f_n}^{f_{n+1}}\left|\cos(\theta(x))\right|\mathrm{d}x=\int_{f_n}^{f_{n+1}}\left|\frac{\mathrm{d}(\sin(\theta(x)))}{\theta'(x)}\right|$$

即

$$\frac{2}{\theta'\left(f_{n+1}\right)}=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\theta'\left(f_{n+1}\right)}<\int_{f_n}^{f_{n+1}}\left|\frac{\mathrm{d}(\sin(\theta(x)))}{\theta'(x)}\right|<\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\theta'(f_n)}<\frac{2}{\theta'\left(f_n\right)}$$

于是$u_n>u_{n+1}$对所有$n\in\mathbb{N}^*$成立.因此根据Leibniz判别法,可得原级数收敛,因而无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\mathrm{d}x$$

收敛.

8.(15分) 设n是正整数.

(1) **(5分)** 任意给定$a > 0$,试证明含参变量t的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

在$[a, +\infty)$上一致收敛.

(2) **(10分)** 对每个$t \in (0, +\infty)$,求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

的值.

本题要求写出详细过程和依据.

Solution.

(1) 注意到$t \in [a, +\infty)$时有$t > 0$,于是当$x > 1$时有

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} < \frac{1}{x^{2n}} < \frac{1}{x^2}$$

于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x = 1$$

收敛.又因为$t + x^2 > t \geqslant a$,于是

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x < \int_0^1 \frac{1}{a^n}\mathrm{d}x = \frac{1}{a^n}$$

收敛.于是无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

收敛.

(2) 记

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\mathrm{d}x$$

我们已经证明$I_n(t)$在$(0, +\infty)$内闭一致收敛.令$f_n(x,t) = \dfrac{1}{(t+x^2)^n}$,于是

$$\frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t) = -\frac{n}{(t+x^2)^{n+1}} = -nf_{n+1}(x,t)$$

于是可对$I_n(t)$求导,并有

$$I_n'(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x = -n\int_0^{+\infty} f_{n+1}(x,t)\mathrm{d}x = -nI_{n+1}(t)$$

而

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+x^2}\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{t}}$$

于是

$$I_{n+1}(t)=\frac{I_1^{(n)}(t)}{(-1)^{n+1}n!}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{(-1)^{n+1}n!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{(-2)^n}t^{-\frac{2n+1}{2}}$$

用n代替$n+1$可得

$$I_n(t)=-\frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!\sqrt{t^{\frac{2n-1}{2}}}}(n\geqslant 2)$$

综上可得

$$I_n(t)=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2\sqrt{t}},n=1\\-\dfrac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!\sqrt{t^{\frac{2n-1}{2}}}},n\geqslant 2\end{cases}$$