

函数项级数

1. 函数项级数

函数项级数

设 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 是定义在 D 上的函数,和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots$$

被称为定义在 D 上的**函数项级数**.在 D 上取定一点 x_0 ,如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$$

收敛(发散),则称 x_0 为该函数项级数的**收敛点(发散点)**.因此,函数项级数的敛散性是以数项级数的敛散性为基础的.

函数项级数的收敛点的全体称为它的**收敛域**,发散点的全体称为它的**发散域**.对收敛域 X 内的任意一点 x ,上述级数的和记为 $S(x)$.显然, S 是定义在 X 上的函数,称为级数的**和函数**.

2. 函数序列及函数项级数的一致收敛性

2.1 函数序列的收敛性和极限函数

设有一个函数序列 $f_1(x), f_2(x), \dots$,其中的每一项 $f_n(x)$ 在集合 D 上有定义.

若一点 $x_0 \in D$ 使得序列 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛,即极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_0)$ 存在,则称序列 $\{f_n(x)\}$ 在 x_0 处**收敛**, x_0 称为该序列的**收敛点**,该序列的全体收敛点构成的集合称作序列的**收敛域**.

另外,序列 $\{f_n(x)\}$ 在其收敛域 X 内定义了一个函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in X$$

称 $f(x)$ 为该序列的**极限函数**.

显然,函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 的收敛域就是其部分和序列的收敛域,其和函数就是部分和序列的极限函数.

2.2 一致收敛

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在集合 X 上收敛于极限函数 $f(x)$.若对于任意 $\varepsilon > 0$,都存在一个只依赖于 ε 而不依赖于 x 的正整数 N 使得 $\forall n > N$ 都有 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ 对任意 $x \in X$ 成立,则称函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上**一致收敛**于 $f(x)$,记作 $f_n(x) \Rightarrow f(x), x \in X (n \rightarrow \infty)$.

一致收敛的几何意义是,对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,都存在足够大的 n 使得 $f_n(x)$ 落在带状区域

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

中.需要注意的是,上述定义中的 X 不一定是序列的收敛域,可能只是收敛域的一个子集.

2.3 一致收敛的判据I

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在区间 X 上收敛于极限函数 $f(x)$,若存在序列 $\{a_n\}$ 使得

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \quad x \in X, n \geq N$$

且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于 $f(x)$.

Proof.

对于任意 $\varepsilon > 0$,由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$,则存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得对任意 $n \geq N$ 有

$$|a_n| < \varepsilon$$

于是对任意 $\varepsilon > 0$,考虑满足上述条件的 N ,对任意 $n \geq N$ 和 $x \in X$ 有

$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n < \varepsilon$$

因而 $\{f_n(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

2.4 不一致收敛的判据I

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上收敛到极限函数 $f(x)$.若存在常数 $l > 0$ 及点列 $x_n \in X (n = 1, 2, \dots)$ 使得当 $n \geq N (N \in \mathbb{N}^*)$ 时有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq l$$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上不一致收敛.

这一定理还有一极限版本.

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上收敛到极限函数 $f(x)$.若存在常数 $l > 0$ 及点列 $x_n \in X (n = 1, 2, \dots)$ 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f_n(x_n) - f(x_n)] = k \neq 0$$

则 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上不一致收敛.

3. 函数项级数一致收敛的必要条件和判别法

3.1

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛,那么其一般项序列 $\{u_n(x)\}$ 也在 X 上一致收敛于0.

3.2 一致收敛的Cauchy准则

函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛,当且仅当对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在一个只依赖于 ε 的 $N \in \mathbb{N}^*$,使得对任意 $n > N$ 和任意 $p \in \mathbb{N}^*$ 都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

对任意 $x \in X$ 成立.

3.3 强级数判别法(Weierstrass判别法)

若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项满足

$$|u_n(x)| < a_n \quad \forall x \in X, n = 1, 2, \dots$$

且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,那么该函数项级数在 X 上一致收敛.

3.4 一致有界

设函数序列 $\{f_n(x)\}$ 在 X 上有定义.若存在常数 M ,使得对任意 $n = 1, 2, \dots$ 和任意 $x \in X$ 都有

$$|f_n(x)| < M$$

则称该函数序列在 X 上一致有界.

3.5 Dirichlet判别法

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上有定义,且通项 $u_n(x)$ 可以写成

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) \quad \forall x \in X$$

若 $u_n(x)$ 满足

1. 在 X 中任意取定 x ,数列 $\{a_n(x)\}$ 对 n 单调,且函数序列 $\{a_n(x)\}$ 在 X 上一致收敛于0.

2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 的部分和序列 $\{B_n(x)\}$ 在 X 上一致有界.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

只需将数项级数的Dirichlet判别法中 $\{a_n\}$ 收敛于0和 $\{B_n\}$ 有界分别换成 $\{a_n(x)\}$ 一致收敛于0和 $\{B_n(x)\}$ 一致有界,就可以得出 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 一致收敛.

3.6 Abel判别法

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上有定义,且通项 $u_n(x)$ 可以写成

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) \quad \forall x \in X$$

若 $u_n(x)$ 满足

1. 在 X 中任意取定 x , 数列 $\{a_n(x)\}$ 对 n 单调, 且函数序列 $\{a_n(x)\}$ 在 X 上一致有界.

2. 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

同样地, 只需将数项级数的Abel判别法中的有界和收敛换成一致有界和一致收敛即可.

4. 一致收敛级数的性质

4.1 和函数的连续性

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且其每一个通项 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 则其和函数

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

这就说明当级数一致收敛且各项连续时, 无穷多项的求和运算与求极限的运算可以交换次序.

4.2 逐项求积分

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且其每一个通项 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 则其和函数

$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 而且可以逐项积分, 即

$$\int_a^b S(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) dx$$

4.3 逐项求导

设函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上点点收敛, 且通项 $u_n(x) (n = 1, 2, \dots)$ 的导函数 $u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上都连续, 且级数

$\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致连续, 则和函数 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x) \quad \forall x \in [a, b]$$

并且 $S'(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.