三重积分引论

1.三重积分的定义

仿照二重积分的定义,我们定义三重积分如下.

1.1 定义:三重积分

设三元函数$f(x,y,z)$在有界闭空间Ω上有定义.对于Ω的任意分割$\{\Omega_1,\cdots,\Omega_n\}$及任意选定的$(x_i,y_i,z_i)\in\Omega_i(i=1,\cdots,n)$, 令$\lambda$为$\Omega_i$的直径的最大值,$\Delta V_i$为$\Omega_i$的体积.当$\lambda\to 0$时,若和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i$$

总有极限,则称该极限为$f(x,y,z)$在Ω上的**三重积分**,记作

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}V \quad \text{或} \quad \iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

三重积分的基本性质是和二重积分很相似的,在此就不再赘述.我们主要关注三重积分的计算.

2.三重积分的计算

三重积分和二重积分一样,可以通过累次积分的方式求得.然而,根据划分方式的不同,可能导致外层积分为二重积分,内层积分为一元函数的定积分,或正好相反.我们分别介绍这两种情况对D的要求和计算方法.

2.1 直角坐标系下三重积分的计算I

设$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续,且存在有界闭区域D使得Ω满足如下形式

$$\Omega=\{(x,y,z):(x,y)\in D,\mathbf{z}_1(x,y)\leqslant z\leqslant \mathbf{z}_2(x,y)\}$$

即Ω是以$\mathbf{z}_1(x,y)$为底,以$\mathbf{z}_2$为顶的柱面,其在(x,y)上的投影即为D.

若$\mathbf{z}_1(x,y),\mathbf{z}_2(x,y)$都是$\mathbb{R}^2$上的连续函数,那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_D\left[\int_{\mathbf{z}_1(x,y)}^{\mathbf{z}_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上面的情况即外层积分是二重积分的情况.

当外层积分是一元函数的定积分时,就对应如下计算方法.

2.2 直角坐标系下三重积分的计算I

设$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续,且Ω介于平面$z=a$与$z=b$之间.对于任意$z_0\in[a,b]$, Ω与平面$z=z_0$所交

的区域D_{z_0}都是有界闭区域,那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_a^b \left[\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}z$$

与二重积分类似,三重积分也可以通过坐标变换的方式进行简化计算.常用的有柱坐标变换和球坐标变换.

2.3 柱坐标系下三重积分的计算

设三元函数$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续,那么

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

其中$\Omega' = \{(r,\theta,z) : (r\cos\theta, r\sin\theta, z) \in \Omega\}$.

柱坐标变换适合以下两种类型的区域.

(1) Ω是一个正的柱体,在Oxy平面上投影的极坐标区域为D,其底面和顶面用柱坐标表述为$z = \phi(r,\theta)$和$z = \psi(r,\theta)$.这时我们有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_D \left[\int_{\phi(r,\theta)}^{\psi(r,\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\mathrm{d}z\right] r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

(2) Ω介于半平面$\theta = \alpha$和$\theta = \beta$之间(其中$0 \leqslant \alpha < \beta \leqslant 2\pi$),且极角为$\theta \in [\alpha,\beta]$的任意半平面与$\Omega$交于平面闭区域$D(\theta)$.这时我们有

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_\alpha^\beta \left[\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\theta$$

类似的,还有球坐标系下的计算.

2.4 球坐标系下三重积分的计算

设三元函数$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续,那么

$$\iiint_D f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{\Omega'} f(\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi)\rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

其中Ω'为球坐标变换后的区域,即$\Omega' = \{(\rho,\theta,\varphi) : (\rho\sin\varphi\cos\theta, \rho\sin\varphi\sin\theta, \rho\cos\varphi) \in \Omega\}$.

与二重积分类似,三重积分的一般变量替换如下.

2.5 一般变量替换下的三重积分的计算

设函数$f(x,y,z)$在有界闭区域Ω上连续,又设变换

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(u,v,w) \\ y = \mathbf{y}(u,v,w) \qquad (u,v,w) \in \Omega' \\ z = \mathbf{z}(u,v,w) \end{cases}$$

在Ω'上连续,有连续的一阶偏导数,且是Ω和Ω'之间的一一对应,且变换的Jacobi行列式处处不为0,则有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} f\left(\mathbf{x}(u,v,w), \mathbf{y}(u,v,w), \mathbf{z}(u,v,w)\right)|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$

其中J指变换的Jacobi行列式,即

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

容易验证球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases}$$

的Jacobi行列式为

$$\begin{aligned} J = \frac{D(x,y,z)}{D(\rho,\varphi,\theta)} &= \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & \rho\cos\varphi\cos\theta & -\rho\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & \rho\cos\varphi\sin\theta & \rho\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \sin\varphi\cos\theta\cdot\rho^2\sin^2\varphi\cos\theta + \rho\cos\varphi\cos\theta\cdot\rho\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta + \rho\sin\varphi\sin\theta\cdot\rho\sin\theta \\ &= \rho^2\sin\varphi \end{aligned}$$

同理,不难验证柱坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

的Jacobi行列式为

$$J = \frac{D(x,y,z)}{D(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

于是不难发现柱坐标变换和球坐标变换的计算公式都是**2.5**的特例.