

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期末考试

1.(15分) 求函数

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式.

2.(15分) 计算下列广义积分的值.

(1) (8分)

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx$$

(2) (7分)

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}} dx$$

3.(15分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)x^n$$

的收敛区间及其和函数.

4.(15分) 任意取定 $r > 0$, 证明含参变量 y 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-xy^2} \cos x dx$$

在 $y \in [r, +\infty)$ 上一致收敛.

5.(10分) 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + n}$$

的收敛域.

6.(20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设 $p \in \mathbb{R}$ 且不是整数, 定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $(-\pi, \pi)$ 上等于 $\cos(px)$. 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数.

(2) (3分) 根据(1)的结论证明: 当 $t \in \mathbb{R}$ 且 $\frac{t}{\pi}$ 不是整数时, 有

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right)$$

(3) (7分) 根据(2)的结论证明

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$$

7.(10分) 设 $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ 是单调递减的连续函数(没有假定其导函数 $f'(x)$ 的存在). $C, D \in \mathbb{R}$ 满足

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = C \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = D$$

对于 $0 < a < b$, 求广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x} dx$$

的值.