

北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期中考试

1. (20分)

(1) (6分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

(2) (7分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \left(\frac{i}{n} - \frac{1}{2n^i} \right)$$

(3) (7分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

2. (20分)

(1) (6分) 设 $x > 0$, 求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数 $f'(x)$.

(2) (7分) 设 $x < 1$, 求出函数

$$g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

的导函数 $g'(x)$.

(3) (7分) 设 $x \neq \pm 1$, 求出函数

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

的四阶导函数 $h^{(4)}(x)$.

3. (15分) 求不定积分

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x+1)(x-1)^5}}$$

4. (15分) 设 K 是曲线弧 $y = e^x$ ($0 \leq x \leq 1$) 与直线 $x = 0, x = 1, y = 0$ 围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体, 求 K 的侧面积.

5. (10分) 设 $a, b, c \in \mathbb{R}$ 且 $a, b, c > 0, f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 在 \mathbb{R} 上连续, 且

$$f(0) = -a, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c$$

求证 $f(x) = 0$ 在 \mathbb{R} 上至少有两个不相等的实根 r_1, r_2 .

6. (20分) 设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx$$

(1) (12分) 试证明 $\forall r \in (-1, 1), A(r^2) = 2A(r)$.

(2) (4分) 试证明 $A(r)$ 在 $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上有界.

(3) (4分) 试计算 $r \in (-1, 1)$ 时 $A(r)$ 的值.