北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期中模拟

命题人:DARCO

1. (10分) 多选题,错选或少选均不得分,无需写出解答过程.

(1) (5分) 选出下列选项中总是正确的式子.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x < \frac{\pi}{2}$　　**B.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x > 1$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x > \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$　　**D.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x > \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

(2) (5分) 设$f(x)$是定义在$[1,+\infty)$上的非负单调递减的连续函数.定义$s_n = \sum_{k=1}^{n} f(k)$,选出下列选项中总是正确的式子.

A. $s_n \leqslant \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$　　**B.** $s_n \leqslant f(1) + \int_1^n f(x)\mathrm{d}x$

C. $s_n \geqslant \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$　　**D.** $s_n \geqslant f(1) + \int_1^{n+1} f(x)\mathrm{d}x$

2. (18分) 计算下列极限.

(1) (6分) 计算序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^{2021}}{n^{2022}}$$

(2) (6分) 计算函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\frac{1}{x^{2022}} + \cos\frac{1}{x^{1011}}\right)^{x^{2022}}$$

(3) (6分) 计算函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x - 3\sin x}{x^3}$$

3. (12分) 计算下列积分.

(1) (6分) 计算定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \arctan\left(\mathrm{e}^x\right)}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

(2) (6分) 计算不定积分

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x$$

4. (8分) 设函数$f(x)$满足

$$f(x) = \begin{cases} ax\mathrm{e}^x + bx^x, x > 1 \\ |x|, x \leqslant 1 \end{cases}$$

求所有可能的参数a,b使得$f(x)$在$x=1$处可导.

5. (12分) 设函数$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的以1为周期的连续函数,试证明:$\exists c \in \mathbb{R}, \text{s.t.} f(c) = f(c+\pi)$.

6. (8分) 计算曲线$y = \int_0^x \sqrt{\sin x}\mathrm{d}x$在$x \in [0,\pi]$部分的弧长.

7. (12分) 考虑方程$x = \tan x$的正实根.

(1) (4分) 试证明:$x = \tan x$有无穷多个正实根.

(2) (8分) 将$x = \tan x$的正实根从小到大排列成序列$\{x_n\}$,试证明$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1} - x_n) = \pi$.

8. (12分) 设$n \in \mathbb{N}^*$,定义序列$\{x_n\}$满足$x_n = \sqrt[n]{n}$.

(1) (6分) 用$\varepsilon - N$语言证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

(2) (6分) 求所有的正实数a满足$\lim\limits_{n\to\infty} n(x_n - 1)^a$收敛.

9. (8分) 给定正整数a,定义$f_a(x) = \left(x + \sqrt{x^2+1}\right)^a$,求所有自然数$n$满足$f_a^{(n)}(0) = 0$.