

北京大学数学科学学院2022-23高等数学B2期末考试

1. (15分) 判断下列级数的敛散性.

(1) (5分)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \ln \sqrt{n}}$$

(2) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n} + 1}{(\sqrt[4]{n} + n)(\sqrt[3]{n} + n)}$$

(3) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot 3^n}{5^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right)$$

2. (10分) 讨论函数序列

$$f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)^{x^2} \quad n = 1, 2, \dots$$

在 $(0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

3. (15分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$$

的收敛半径, 收敛域, 和函数.

4. (10分) 求函数

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$$

于 $x = 1$ 处的泰勒展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1)$, $f^{(2023)}(1)$ 的值.

5. (10分) 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x dx$$

的敛散性.

6. (10分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1 + \sin^{2n} x}$$

在 $x \in (-\infty, +\infty)$ 上的绝对收敛性和条件收敛性.

7. (20分) 设以 2π 为周期的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为

$$f(x) = x^2$$

求 $f(x)$ 的Fourier级数及其和函数, 并给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

的值.

8. (10分) 证明和计算下列各题.

(1) 证明含参变量 t 的无穷积分

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$$

在 $t \in [0, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) 证明上述 $I(t)$ 在 $t \in (0, +\infty)$ 上可导.

(3) 求出上述 $I(t)$.

(4) 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

的值.