## 三重积分

### 1.三重积分的定义

仿照二重积分的定义,我们定义三重积分如下.

# 1.1 定义:三重积分

设三元函数f(x,y,z)在有界闭空间 $\Omega$ 上有定义.对于 $\Omega$ 的任意分割 $\{\Omega_1,\cdots,\Omega_n\}$ 及任意选定的 $(x_i,y_i,z_i)\in \Omega_i (i=1,\cdots,n),$  令 $\lambda$ 为 $\Omega_i$ 的直径的最大值, $\Delta V_i$ 为 $\Omega_i$ 的体积.当 $\lambda \to 0$ 时,若和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i$$

总有极限,则称该极限为f(x,y,z)在 $\Omega$ 上的**三重积分**,记作

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) dV \qquad \vec{y} \qquad \iiint_{\Omega} f(x,y,z) dx dy dz$$

三重积分的基本性质是和二重积分很相似的,在此就不再赘述.我们主要关注三重积分的计算.

### 2.三重积分的计算

三重积分和二重积分一样,可以通过累次积分的方式求得.然而,根据划分方式的不同,可能导致外层积分为二重积分,内层积分为一元函数的定积分,或正好相反.我们分别介绍这两种情况对D的要求和计算方法.

#### 2.1 直角坐标系下三重积分的计算I

设f(x,y,z)在有界闭区域 $\Omega$ 上连续,且存在有界闭区域D使得 $\Omega$ 满足如下形式

$$\Omega = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \mathbf{z}_1(x, y) \le z \le \mathbf{z}_2(x, y)\}$$

即 $\Omega$ 是以 $\mathbf{z}_1(x,y)$ 为底,以 $\mathbf{z}_2$ 为顶的柱面,其在(x,y)上的投影即为D.

若 $\mathbf{z}_1(x,y)$ ,  $\mathbf{z}_2(x,y)$ 都是 $\mathbb{R}^2$ 上的连续函数,那么

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{D} \left[ \int_{\mathbf{z}_{1}(x, y)}^{\mathbf{z}_{2}(x, y)} f(x, y, z) dz \right] dx dy$$

上面的情况即外层积分是二重积分的情况.

当外层积分是一元函数的定积分时,就对应如下计算方法.

#### 2.2 直角坐标系下三重积分的计算I

设f(x,y,z)在有界闭区域 $\Omega$ 上连续,且 $\Omega$ 介于平面z=a与z=b之间.对于任意 $z_0\in[a,b]$ , $\Omega$ 与平面 $z=z_0$ 所交

的区域 $D_{z_0}$ 都是有界闭区域,那么

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{a}^{b} \left[ \iint_{D_{z}} f(x, y, z) dx dy \right] dz$$

与二重积分类似,三重积分也可以通过坐标变换的方式进行简化计算.常用的有柱坐标变换和球坐标变换.

## 2.3 柱坐标系下三重积分的计算

设三元函数f(x,y,z)在有界闭区域 $\Omega$ 上连续,那么

$$\iiint_{\Omega}f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_{\Omega'}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
   
 
$$\mbox{$\not =$}\{(r,\theta,z):(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\in\Omega\}.$$

柱坐标变换适合以下两种类型的区域.

(1)  $\Omega$ 是一个正的柱体,在Oxy平面上投影的极坐标区域为D,其底面和顶面用柱坐标表述为 $z = \phi(r,\theta)$ 和z = $\psi(r,\theta)$ .这时我们有

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) \mathrm{d}x \mathrm{d}y \mathrm{d}z = \iint_{D} \left[ \int_{\phi(r,\theta)}^{\psi(r,\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z) \mathrm{d}z \right] r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

(2)  $\Omega$ 介于半平面 $\theta = \alpha$ 和 $\theta = \beta$ 之间(其中 $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$ ),且极角为 $\theta \in [\alpha, \beta]$ 的任意半平面与 $\Omega$ 交于平面闭 区域 $D(\theta)$ .这时我们有

$$\iiint_{\Omega} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\alpha}^{\beta} \left[ \iint_{D} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr dz \right] d\theta$$

类似的,还有球坐标系下的计算.

# 2.4 球坐标系下三重积分的计算

设三元函数f(x,y,z)在有界闭区域 $\Omega$ 上连续,那么

$$\iiint_D f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_{\Omega'} f(\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta$$

其中 $\Omega'$ 为球坐标变换后的区域,即 $\Omega' = \{(\rho, \theta, \varphi) : (\rho \sin \varphi \cos \theta, \rho \sin \varphi \sin \theta, \rho \cos \varphi) \in \Omega\}.$ 

与二重积分类似,三重积分的一般变量替换如下.

## 2.5 一般变量替换下的三重积分的计算

设函数f(x,y,z)在有界闭区域 $\Omega$ 上连续,又设变换

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(u, v, w) \\ y = \mathbf{y}(u, v, w) \\ z = \mathbf{z}(u, v, w) \end{cases} (u, v, w) \in \Omega'$$

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z) \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega'} f\left(\mathbf{x}(u,v,w), \mathbf{y}(u,v,w), \mathbf{z}(u,v,w)\right) |J| \mathrm{d}u \mathrm{d}v \mathrm{d}w$$

其中J指变换的Jacobi行列式,即

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

容易验证球坐标变换

$$\begin{cases} x = \rho \sin \varphi \cos \theta \\ y = \rho \sin \varphi \sin \theta \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases}$$

的Jacobi行列式为

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(\rho, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix}$$
$$= \sin \varphi \cos \theta \cdot \rho^2 \sin^2 \varphi \cos \theta + \rho \cos \varphi \cos \theta \cdot \rho \sin \varphi \cos \varphi \cos \theta + \rho \sin \varphi \sin \theta \cdot \rho \sin \theta$$
$$= \rho^2 \sin \varphi$$

同理,不难验证柱坐标变换

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

的Jacobi行列式为

$$J = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

于是不难发现柱坐标变换和球坐标变换的计算公式都是2.5的特例.