北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期中考试

1.(15分)

导数类基本计算题.

(1) **(5分)** 求函数

$$f(x)=x^{\arcsin x},0<x<1$$

的导函数$f'(x)$.

(2) **(5分)** 求函数

$$f(x)=\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^x}\frac{\mathrm{d}t}{1+\ln t}$$

的导函数$f'(x)$.

(3) **(5分)** 求函数

$$f(x)=\arctan x$$

在$x=0$处的三阶导数$f^{(3)}(0)$.

(1) **Solution.**

置$y=\ln f(x)$,于是

$$\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\\
&=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^y\right)}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}\left(\arcsin x\ln x\right)}{\mathrm{d}x}\\
&=\mathrm{e}^y\cdot\left(\frac{\ln x}{\sqrt{1+x^2}}+\frac{\arcsin x}{x}\right)\\
&=\frac{x^{\arcsin x}\left(x\ln x+\sqrt{1+x^2}\arcsin x\right)}{x\sqrt{1+x^2}}
\end{aligned}$$

(2) **Solution.**

由微积分基本定理有

$$f'(x)=\frac{\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^x\right)}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{1}{1+\ln\mathrm{e}^x}=\frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$$

(3) **Solution(Method I).**

我们有

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

$$f''(x)=-\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f^{(3)}(x)=-\left(\frac{2(x^2-1)^2-2x(4x^3-4x)}{(x^2-1)^4}\right)=\frac{6x^4-4x^2-2}{(x^2-1)^4}$$

于是$f^{(3)}(0)=-2$.

Solution(Method II).

置$y=f(x)$,由$y'=\dfrac{1}{1+x^2}$有$(x^2+1)y'=1, y'|_{x=0}=1$. 对上式求导有

$$y''(x^2+1)+2xy'=0$$

再次求导有

$$y'''(x^2+1)+2xy''+2y'+2xy''=0$$

代入$x=0, y'|_{x=0}=0$有$f^{(3)}(0)=-2$.

3.(15分)

积分类基本计算题.

(1) **(5分)** 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

(2) **(5分)** 求欧氏平面直角坐标系中曲线$y=\dfrac{1}{2}x^2$从$(0,0)$到$\left(1,\dfrac{1}{2}\right)$的弧长.

(3) **(5分)** 设奇数$n\geqslant 3$,求极坐标系(r,θ)中曲线$r=\sin(n\theta), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$围成的封闭图形的面积.

(1) **Solution.**

置$t=\sin x$,于是

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{t\mathrm{d}t}{1+t^2}=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{\mathrm{d}\left(t^2\right)}{1+t^2}=\left(\frac{1}{2}\ln\left(x+1\right)\right)\Big|_0^1=\frac{\ln 2}{2}$$

(2) **Solution.**

由题意$y'=x$,于是

$$s=\int_0^1\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\sqrt{1+x^2}\mathrm{d}x=\left(\frac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right)\Big|_0^1=\frac{\sqrt{2}+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)}{2}$$

(3) **Solution.**

置$\varphi=n\theta$,用平面下极坐标公式可得

$$S=2n\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sin^2(n\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

3.(15分)

序列$\{x_n\}$满足

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right)$$

试证明$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$存在,并求出其值.

Proof.

若$x_1 = 1$,则$\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = 1$,于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

若$x_1 \neq 1$,则根据基本不等式,$\forall n \in \mathbb{N}^*$有

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) > \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{x_n \cdot \frac{1}{x_n}} = 1$$

于是$\forall n \geqslant 2, x_n > 1$.则

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} - x_n\right) < 0$$

即$\{x_n\}_{n=2}^{\infty}$递减且有下界1.设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \geqslant 1$.对递推式两边求极限有

$$a = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$$

解得$a = 1$.于是$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

4.(20分)

设$x > 0$,定义

$$p(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 + 2021}}$$

试证明:方程$p(x+1) = p(x) + \sin x$有无穷多个正实数解.

Proof.

记

$$P(x) = p(x+1) - p(x) = \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^3 + 2021}}$$

注意到$t > 0$时有

$$0 < \frac{1}{\sqrt{t^3 + 2021}} < \frac{1}{\sqrt{2021}} < \frac{1}{2}$$

于是

$$0 < P(x) < \int_x^{x+1} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2}$$

根据定积分的定义可知$P(x)$在定义域上连续.

记$F(x) = P(x) - \sin x$,于是$F(x)$在$(0, +\infty)$连续.

注意到对于任意$k \in \mathbb{N}^*$有

$$F\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=P\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)-1<-\frac{1}{2}$$

$$F\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)=P\left(2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)+1>1$$

于是根据连续函数的介值定理,$\exists x_0 \in \left(2k\pi+\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$, s.t.$F(x_0)=0$,此时$x_0$即为原方程的根.

又因为这样的区间有无穷多个,于是原方程有无穷多个正实数解.证毕.

5.(15分)

证明:对于任意定义在$[0,1]$上的连续函数$f(x)$有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=0$$

Analysis

对于$[0,1]$上的一个分割$0=x_0<x_1<\cdots<x_n=1$和每个区间(x_{i-1},x_i)上的取样点ξ_i,记$\lambda=\max\Delta x_i$.

根据Riemann积分的定义,我们可以得知

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0^+}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

这告诉我们将$f(x)$看作各段上的常值函数后求和来求极限是可行的.

而对于一个常值$f(\xi_i)$,不难得知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\xi_i)\sin(nx)=0$$

于是我们只需要证明在看作常值之后剩余的误差项也趋于0即可.

实际上,本题即我们所说的Riemann引理.

Proof.

由$f(x)$在$[0,1]$连续可得$f(x)$在$\left[\frac{j}{k},\frac{j+1}{k}\right]$上也连续,其中$k,j\in\mathbb{N}^*, 0\leqslant j<m$.

记$f(x)$在$\left[\frac{j}{k},\frac{j+1}{k}\right]$的上下界分别为$M_j, m_j$.

由于$f(x)$在$[0,1]$连续,故$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在.设$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=A$,则Rieman和的极限有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j}{k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{m_j}{k}=A$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j-m_j}{k}=A-A=0$$

即$\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\text{s.t.}\forall k>K,\left|\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j-m_j}{k}\right|<\frac{\varepsilon}{2}$.

由$f(x)$在$[0,1]$连续可得$\exists B>0,\text{s.t.}\ |f(x)|<B$.

现在,$\forall n\in\mathbb{N}^*$有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left(f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right)\sin(nx)\mathrm{d}x+\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f\left(\frac{j}{k}\right)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right|\left|\sin(nx)\right|\mathrm{d}x+\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right)\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right|\mathrm{d}x+\sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\cos\frac{j}{k}-\cos\frac{j+1}{k}\right) \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left|M_j-m_j\right|\mathrm{d}x+\frac{2Bk}{n} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j-m_j}{k}+\frac{2Bk}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Bk}{n}
\end{aligned}$$

从而$\forall\varepsilon>0,\exists N=\max\left\{K,\frac{4Bk}{\varepsilon}\right\},\text{s.t.}\forall n>N$,

$$\left|\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{2Bk}{N}<\varepsilon$$

从而$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x=0$,证毕.

6.(20分)

设$y=f(x)=x^3,x=g(t)=t^2,y=f(g(t))=t^6,\Delta t=0.1,\Delta x=g(1+0.1)-g(1)=0.21$.

(1) **(6分)** 当把t作为自变量时,函数$y=f(g(t))=t^6$的二阶微分记为d_t^2y,函数$x=g(t)=t^2$的一阶微分记为d_tx. 试计算:当$t=1,\Delta t=0.1$时,函数$y=f(g(t))$的二阶微分$\mathrm{d}_t^2y|_{t=1,\Delta t=0.1}$和函数$x=g(t)$的一阶微分$\mathrm{d}_tx|_{t=1,\Delta t=0.1}$.

(2) **(7分)** 当把x作为自变量时,函数$y=f(x)=x^3$的二阶微分记为d_x^2y,x(视作x的函数)的一阶微分记为d_xx. 试计算:当$x=1,\Delta x=0.21$时,函数$y=f(x)$的二阶微分$\mathrm{d}_x^2y|_{x=1,\Delta x=0.21}$和函数$x$的一阶微

分 $\mathrm{d}_x x|_{x=1,\Delta x=0.21}$.

(3) **(6分)** $\left.\frac{\mathrm{d}_t^2 y}{(\mathrm{d}_t x)^2}\right|_{t=1,\Delta t=0.1}$ 和 $\left.\frac{\mathrm{d}_x^2 y}{(\mathrm{d}_x x)^2}\right|_{x=1,\Delta x=0.21}$ 相等吗?

(1) **Solution.**

$$\mathrm{d}_t^2 y|_{t=1,\Delta t=0.1} = \left(t^6\right)'' (\Delta t)^2 = 30t^4 (\Delta t)^2 = 0.3$$

$$\mathrm{d}_t x|_{t=1,\Delta t=0.1} = \left(t^2\right)' \Delta t = 2t\Delta t = 0.2$$

(2) **Solution.**

$$\mathrm{d}_x^2 y|_{x=1,\Delta x=0.21} = \left(x^3\right)'' (\Delta x)^2 = 6x (\Delta x)^2 = 0.2646$$

$$\mathrm{d}_x x|_{x=1,\Delta x=0.21} = (x)' \Delta x = \Delta t = 0.21$$

(3) **Solution.**

$$\left.\frac{\mathrm{d}_t^2 y}{(\mathrm{d}_t x)^2}\right|_{t=1,\Delta t=0.1} = \frac{0.3}{0.2^2} = 7.5$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}_x^2 y}{(\mathrm{d}_x x)^2}\right|_{x=1,\Delta x=0.21} = \frac{0.2646}{0.21^2} = 6$$

显然,两者不相等.