# 北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中考试

**1.(10分)** 设$D$是由直线$y=0,y=1,y=x,y=x+1$所围成的有界闭区域,求二重积分

$$\iint_D (4y-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**Solution.**

做变换$u=y,v=y-x$,则变换的Jacobi行列式

$$\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=1$$

积分区域变换为$D':0\leqslant u\leqslant 1,0\leqslant v\leqslant 1$.于是

$$\begin{aligned}\iint_D (4y-2x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D'}2(u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=2\int_0^1\mathrm{d}v\int_0^1(u+v)\mathrm{d}u\\&=2\int_0^1\left(\frac{1}{2}+v\right)\mathrm{d}v\\&=2\end{aligned}$$

**2.(10分)** 设$V$是由平面$x=0,y=0,z=0,x+y+z=1$围成的四面体,求三重积分

$$\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\mathrm{d}V$$

**Solution.**

考虑平面$D_z=\{(x,y,z):0\leqslant x,y,x+y\leqslant 1-z\}$,则有

$$\begin{aligned}\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2}\mathrm{d}V&=\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x+y+z)^2}\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_0^{1-z-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^2}\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\left(\frac{1}{1+x+z}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1\left(\ln 2-\ln(1+z)-\frac{1}{2}(1-z)\right)\mathrm{d}z\\&=\frac{3}{4}-\ln 2\end{aligned}$$

**3.(10分)** 设$E$是椭圆$x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$,求曲线积分

$$\int_E |xy|\,\mathrm{d}s$$

**Solution.**

做代换$x=\cos\theta, y=2\sin\theta$,则有

$$\begin{aligned}
\int_E |xy|\,\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi} |2\sin\theta\cos\theta|\sqrt{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2\theta+4\cos^2\theta}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&\xlongequal{t=\sin\theta} 8\int_0^1 t\sqrt{4-3t^2}\mathrm{d}t \\
&\xlongequal{u=t^2} 4\int_0^1 \sqrt{4-3u}\mathrm{d}u \\
&= 4\left(-\frac{2}{9}(4-3u)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{56}{9}
\end{aligned}$$

**4.(15分)** 设$n\in\mathbb{N}^*$,有向曲线$L_n=\{(t,|\sin t|):0\leqslant t\leqslant n\pi\}$.求极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)\mathrm{d}y$$

**Solution.**

考虑有向直线$T_n=\{(x,0):0\leqslant x\leqslant n\pi\}$.

$L_n$的负向和$T_n$共同构成区域$D=\{(x,y):0\leqslant x\leqslant n\pi, 0\leqslant y\leqslant |\sin x|\}$的正向边界.

令$P(x,y)=\mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy), Q(x,y)=\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)$,不难得出$P,Q$在$D$上可微,并且

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P}{\partial y} &= 2y\mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy)-\mathrm{e}^{y^2-x^2}2x\sin(2xy)=2\mathrm{e}^{y^2-x^2}\left(y\cos(2xy)-x\sin(2xy)\right) \\
\frac{\partial Q}{\partial x} &= -2x\mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)+\mathrm{e}^{y^2-x^2}2y\cos(2xy)=2\mathrm{e}^{y^2-x^2}\left(y\cos(2xy)-x\sin(2xy)\right)
\end{aligned}$$

在$D$上使用Green公式可得

$$\int_{(L_n)^-+T_n} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_D 0\mathrm{d}\sigma=0$$

在直线$T_n$上有

$$\int_{T_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

于是

$$\int_{L_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_{T_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x$$

现在考虑上述积分.我们有

$$\begin{aligned}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\\ &= \iint_{x,y\geqslant 0}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_{0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2},r\geqslant 0} r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &\xlongequal{t=r^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

**5.(10分)** 设$S$是曲面$\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+z^2=1, x\geqslant 0, z\geqslant 0, 0\leqslant y\leqslant 1\}$.求曲面积分

$$\iint_S x\mathrm{d}S$$

**Solution.**

由题意可得$S$是圆柱的侧面. 在$S$上有$z=\sqrt{1-x^2}$,投影区域为$D:[0,1]\times[0,1]$,于是

$$\begin{aligned}\iint_S x\mathrm{d}S &= \iint_D x\sqrt{1+\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2+0}\mathrm{d}\sigma\\ &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &\xlongequal{t=x^2} \frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}\\ &= 1\end{aligned}$$

**6.(10分)** 设$S$是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$,求曲面积分

$$\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**Solution.**

$S$的单位外法向量为$\mathbf{n}=(x,y,z)$.于是

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_S (x,y,z)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S\\&=\iint_S (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}S\\&=\iint_S \mathrm{d}S\\&=4\pi\end{aligned}$$

**7.(15分)** 设平面直角坐标系$Oxy$中有曲线$L:\{(x,y(x)):x\geqslant 0\}$,其中$y(0)=1$,$y(x)$是严格递减的正的可导函数.任取$L$上一点$M$,$L$在$M$点的切线交$x$轴于$A$点,假定$|MA|\equiv 1$.写出$y=y(x)$满足的一阶常微分方程,并求解该方程对应的初值问题$y(0)=1$.

**Solution.**

设$M(x_M,y\left(x_M\right))$,则此处的切线方程$l_m:y=y'\left(x_M\right)\left(x-x_M\right)+y\left(x_M\right)$.
于是$l_M$交$x$轴于$A\left(-\dfrac{y\left(x_M\right)}{y'\left(x_M\right)}+x_M,0\right)$.由$|MA|\equiv 1$可知

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2+y^2=1$$

由于$y(x)$恒正且严格递减,于是$y>0>y'$.于是$\dfrac{y}{y'}=-\sqrt{1-y^2}$,即

$$\frac{\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y}{y}=-\mathrm{d}x$$

而

$$\begin{aligned}\int\frac{\sqrt{1-y^2}}{y}\mathrm{d}y&\xlongequal{y=\sin t}\int\frac{\cos^2 t}{\sin t}\mathrm{d}t\\&=\int\left(\frac{1}{\sin t}-\sin t\right)\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos t}{1+\cos t}\right|+\cos t+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-y^2}}\right|+\sqrt{1-y^2}+C\end{aligned}$$

于是对上式两边积分可得

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-y^2}}{1+\sqrt{1-y^2}}\right|+\sqrt{1-y^2}+C=-x$$

即

$$\ln\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)-\ln y+\sqrt{1-y^2}+x=C$$

代入初值$y(0)=1$可得该初值问题的解为

$$\ln\left(1-\sqrt{1-y^2}\right)-\ln y+\sqrt{1-y^2}+x=1$$

**8.(10分)** 求常微分方程

$$y''+4y=\sin 3x$$

的通解.

**Solution.**

对应的齐次方程的特征根为$\lambda_{1,2}=\pm 2\mathrm{i}$,于是原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$$

令$y=\alpha\sin 3x$,代入原方程可得

$$-9\alpha\sin 3x+4\alpha\sin 3x=\sin 3x$$

于是$\alpha=-\dfrac{1}{5}$,于是原方程的特解为

$$y=-\frac{1}{5}\sin 3x$$

于是原方程的通解为

$$y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x-\frac{1}{5}\sin 3x$$

**9.(10分)** 回答下列问题.

**(1)** 设$D=\mathbb{R}^2\setminus\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:x\geqslant 0\}$,写出一个在$D$上可微的函数$T:D\to\mathbb{R}$且满足

$$\frac{\partial T}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\qquad\frac{\partial T}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

**(2)** 设$\Omega=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$,试证明:不存在函数$U\to\mathbb{R}$使得$U$在$\Omega$上可微,且满足

$$\frac{\partial U}{\partial x}=\frac{-y}{x^2+y^2}\qquad\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

**Solution.**

**(1)** 令$T=\arctan\dfrac{y}{x}$即可.

**(2)** 令圆周$C:x^2+y^2=1(\varepsilon>0)$,定向为逆时针方向.考虑第二型曲线积分

$$\oint_{C^+}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{C^+}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial U}{\partial y}\mathrm{d}y\right)=U(1,0)-U(1,0)=0$$

另一方面

$$\oint_{C^+}\frac{-y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\oint_{C}\frac{y^2\mathrm{d}s+x^2\mathrm{d}s}{x^2+y^2}=\oint_{C}\mathrm{d}s=2\pi$$

这与题设矛盾,因而命题不成立.