北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期末考试

1.(15分) 求函数

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

在$x=0$处的幂级数展开式.

Solution.

注意到

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x^2) - \ln(1-x^2)\right)$$

而$\ln(1+x)$在$x=0$处的Taylor级数展开式为

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$$

于是

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+2}}{2n+1}$$

2.(15分) 计算下列广义积分的值.

(1) (8分)

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$$

(2) (7分)

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x$$

Solution.

(1) 根据Γ函数的定义可知

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{\frac{3}{2}-1}\mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(2) 根据B函数的定义可知

$$\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{\frac{1}{2}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(1)} = \pi$$

3.(15分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$$

的收敛区间及其和函数.

Solution.

令$a_n = n+1$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+1} = 1$$

于是该级数的收敛半径$R=1$,即收敛区间为$(-1,1)$.

设$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n$.对其逐项求积分可得

$$\int S(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1} = \frac{x^2}{1-x}$$

于是

$$S(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^2}{1-x}\right) = \frac{2x(1-x)+x^2}{(1-x)^2} = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2}$$

4.(15分) 任意取定$r>0$,证明含参变量y的无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\mathrm{d}x$$

在$y\in[r,+\infty)$上一致收敛.

Proof.

设$f(x,y) = \cos x, g(x,y) = \mathrm{e}^{-xy^2}$.

$g(x,y)$对x单调递减,且对任意$\varepsilon>0$,存在$l = -\dfrac{\ln\varepsilon}{r^2}$使得对任意$x>l$都有

$$\mathrm{e}^{-xy^2} < \mathrm{e}^{-ly^2} < \mathrm{e}^{-lr^2} = \mathrm{e}^{\ln\varepsilon} = \varepsilon$$

于是$g(x,y)$一致收敛于0.而对任意$A>0$,总有

$$\left|\int_0^A f(x,y)\mathrm{d}x\right| = |\sin A| < 1$$

一致有界.于是根据Dirichlet判别法可知

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x$$

在$y\in[r,+\infty)$上一致收敛.

5.(10分) 求函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x+n}$$

的收敛域.

Solution.

题设级数是一个交错级数.令$u_n(x)=\dfrac{1}{n^x+n}$.为研究$u_n(x)$对n的单调性,令$f(x,y)=\dfrac{1}{y^x+y}(y>0)$,则

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{xy^{x-1}+1}{\left(y^x+y\right)^2}$$

若$x\geqslant 0$,则$xy^{x-1}>0$,即$f(x,y)$对y单调递减.

若$x<0$,则当$y>\left(-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$时$xy^{x-1}+1>0$,仍然有$f(x,y)$对$y$单调递减.

因此对充分大的n和任意$x\in\mathbb{R}$,总有$u_{n+1}(x)<u_n(x)$.

而$0<u_n(x)<\dfrac{1}{n}$,因此

$$\lim_{n\to\infty}u_n(x)=0$$

于是根据Leibniz判别法可知原级数对任意$x\in\mathbb{R}$都收敛.

于是级数的收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

6.(20分) 回答下列问题.

(1) **(10分)** 设$p\in\mathbb{R}$且不是整数,定义在$(-\infty,+\infty)$上的函数$f(x)$以2π为周期,它在$(-\pi,\pi)$上等于$\cos(px)$.求出$f(x)$的傅里叶级数及其和函数.

(2) **(3分)** 根据**(1)**的结论证明:当$t\in\mathbb{R}$且$\dfrac{t}{\pi}$不是整数时,有

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)$$

(3) **(7分)** 根据**(2)**的结论证明

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

Solution.

(1) $f(x)$是偶函数,因此只需考虑a_n项即可.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin(px)}{p}\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{2\sin(p\pi)}{p\pi}$$

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}\left(\cos(p+n)x+\cos(p-n)x\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\sin[(p+n)\pi]}{p+n}+\frac{\sin[(p-n)\pi]}{p-n}\right)
\end{aligned}
$$

于是$f(x)$的Fourier级数为

$$
f(x)\sim\frac{\sin(p\pi)}{p\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin[(p+n)\pi]}{p+n}+\frac{\sin[(p-n)\pi]}{p-n}\right)\cos(nx)
$$

其和函数

$$
S(x)=\cos(px)
$$

(2) 令$p=\dfrac{t}{\pi}, x=0$,代入**(1)**中的Fourier级数可得

$$
1=\frac{\sin t}{t}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin t}{\frac{t}{\pi}+n}+\frac{\sin t}{\frac{t}{\pi}-n}\right)(-1)^n
$$

两边同除$\sin t$即可得

$$
\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right)
$$

(3) 首先有

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t
$$

令$k\in\mathbb{N}^*$使得$\dfrac{k\pi}{2}<A<\dfrac{(k+1)\pi}{2}$,有

$$
\lim_{A\to+\infty}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{A}\left|\frac{\sin t}{t}\right|\mathrm{d}t<\lim_{A\to+\infty}\int_{\frac{k\pi}{2}}^{A}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\lim_{A\to+\infty}\ln\frac{2A}{k\pi}=\ln 1=0
$$

于是

$$
\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\lim_{k\to\infty}\int_0^{\frac{k\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)
$$

我们对上述两部分定积分分别做代换,使得积分区域为$\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.令$x=t-n\pi$,则有

$$
\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x+n\pi}\mathrm{d}x
$$

注意到$\dfrac{\sin t}{t}$为偶函数.令$y=t+(n+1)\pi$,则有

$$
\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_{-(n+1)\pi}^{-n\pi-\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin y}{y-(n+1)\pi}\mathrm{d}y
$$

将经过代换的积分代回上式,然后统一下标,即可得

$$
\sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_{n\pi}^{n\pi+\frac{\pi}{2}}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t+\int_{n\pi+\frac{\pi}{2}}^{(n+1)\pi}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x-n\pi}+\frac{\sin x}{x+n\pi}\right)\mathrm{d}x
$$

为了将第二项中的求和与积分顺序交换,注意到对任意$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$都有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin x}{x-n\pi}+\frac{\sin x}{x+n\pi}\right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2-n^2\pi} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{\frac{\pi^2}{4}-n^2\pi}$$

根据强级数判别法可知函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin x}{x-n\pi}+\frac{\sin x}{x+n\pi}\right)$$

在$x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$上一致收敛.因此,对其逐项求积分可得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{x-n\pi}+\frac{\sin x}{x+n\pi}\right)\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin x}{x-n\pi}+\frac{\sin x}{x+n\pi}\right)\right]\mathrm{d}x\\
=&\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

代回原式可得

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\frac{\sin t}{t}\right)\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}$$

7.(10分) 设$f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$是单调递减的连续函数(没有假定其导函数$f'(x)$的存在).$C, D \in \mathbb{R}$满足

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=C \qquad \lim_{x\to+\infty}f(x)=D$$

对于$0<a<b$,求广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

的值.

Solution.

我们有

$$\begin{aligned}
&\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\lim_{\delta\to 0^+, A\to+\infty}\int_\delta^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x\\
=&\lim_{\delta\to 0^+, A\to+\infty}\left(\int_\delta^A\frac{f(ax)}{x}\mathrm{d}x-\int_\delta^A\frac{f(bx)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{\delta\to 0^+, A\to+\infty}\left(\int_{a\delta}^{aA}\frac{f(u)}{u}\mathrm{d}u-\int_{b\delta}^{bA}\frac{f(v)}{v}\mathrm{d}v\right)\\
=&\lim_{\delta\to 0^+, A\to+\infty}\left(\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x\right)\\
=&\lim_{\delta\to 0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x-\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

现在分别处理上述积分.

由于$f(x)$是单调递减的,因此对任意$x\in(a\delta,b\delta)$有

$$\frac{f(a\delta)}{x}<\frac{f(x)}{x}<\frac{f(b\delta)}{x}$$

于是根据定积分的保序性有

$$\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(a\delta)}{x}\mathrm{d}x<\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x<\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(b\delta)}{x}\mathrm{d}x$$

上式左右两端积分可以求出,即有

$$f(a\delta)\ln\frac{b}{a}<\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x<f(b\delta)\ln\frac{b}{a}$$

令$\delta\to0^+$,由夹逼准则可知

$$\lim_{\delta\to0^+}\int_{a\delta}^{b\delta}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=C\ln\frac{b}{a}$$

同理有

$$\int_{aA}^{bA}\frac{f(aA)}{x}\mathrm{d}x<\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x<\int_{aA}^{bA}\frac{f(bA)}{x}\mathrm{d}x$$

即

$$f(aA)\ln\frac{b}{a}<\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x<f(bA)\ln\frac{b}{a}$$

令$A\to+\infty$,由夹逼准则可知

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{aA}^{bA}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x=D\ln\frac{b}{a}$$

综上所述,有

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=(C-D)\ln\frac{b}{a}$$