

北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期中考试

1.(20分) 求二重积分

$$I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos(2\theta)} dr d\theta$$

其中积分区域 $D = \{(r, \theta) : 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$.

Solution.

做极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 的逆变换, 变换的Jacobi矩阵

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ -\frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{x}{x^2 + y^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

积分区域变换为

$$D' = \{(x, y) : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$$

于是

$$\begin{aligned} & \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos(2\theta)} dr d\theta \\ &= \iint_{D'} \sqrt{x^2 + y^2} y \sqrt{1 - (x^2 - y^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy \\ &= \int_0^1 dx \int_0^x y \sqrt{1 - x^2 + y^2} dy \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} (1 - x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^x dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^1 \left[1 - (1 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right] dx \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 t) \cos t dt \\ &= \frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \end{aligned}$$

2.(20分) 求曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + z dz$$

其中曲线 L 是由曲面 $4x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $2x + y + z = 1$ 所截得的曲线, 其正向 L^+ 规定为从 z 轴看的逆时针方向.

Solution.

令

$$P(x, y, z) = \frac{-y}{4x^2 + y^2} \quad Q(x, y, z) = \frac{x}{4x^2 + y^2} \quad R(x, y, z) = z$$

设 $\Gamma: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2, z = 1, 0 < \varepsilon < 1$, 定向为顺时针方向.

在 $L \cup \Gamma$ 所围的曲面 S 上运用 Stokes 公式有

$$\begin{aligned} & \oint_{L \cup \Gamma} Pdx + Qdy + Rdz \\ &= \iint_{S^+} (0 - 0) dydz + (0 - 0) dzdx + \left(\frac{4x^2 + y^2 - 8x^2 + 4x^2 + y^2 - 2y^2}{(4x^2 + y^2)^2} \right) dxdy \\ &= \iint_S 0 dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

又因为

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma^+} Pdx + Qdy + Rdz &= \oint_{\Gamma^+} \frac{-ydx + xdy}{\varepsilon^2} ds \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{4x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2} 2dxdy \\ &= \pi \end{aligned}$$

于是

$$\oint_{L^+} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + z dz = \pi$$

3.(20分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 求曲面积分

$$I = \iint_S [xf(xy) + 2x - y] dydz + [yf(xy) + 2y + x] dzdx + [zf(xy) + z] dxdy$$

其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在平面 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间的部分, 方向取下侧.

Solution.

令

$$P(x, y, z) = xf(xy) + 2x - y \quad Q(x, y, z) = yf(xy) + 2y + x \quad R(x, y, z) = zf(xy) + z$$

考虑到 S 的曲面方程 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, 其单位外法向量

$$\mathbf{n} = \frac{(z_x, z_y, -1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, -1 \right)$$

于是

$$\begin{aligned}& \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\&= \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{(x^2 + y^2)(f(xy) + 2)}{\sqrt{x^2 + y^2}} - z f(xy) - z \right) dS \\&= \iint_S \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2 + y^2} + (f(xy) + 1)(\sqrt{x^2 + y^2} - z) \right) dS \\&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} dS \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_1^2 r^2 dr \\&= \frac{14}{3} \pi\end{aligned}$$

4.(20分) 回答下列问题.

(1) 求常微分方程

$$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$$

满足 $y(1) = e^3$ 的解.

(2) 给定常微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的连续函数.

(a) 若 $f(x) = x$, 给出方程的通解.

(b) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 试证明方程有唯一以 T 为周期的解.

Solution.

(1) 令 $t = \ln y$, 于是 $y' = \frac{dy}{dt} \cdot t' = t'e^t$. 代入原方程有

$$xe^{t'} + e^t(\ln x - t) = 0$$

即

$$xt' - t + \ln x = 0$$

对应的齐次方程 $xt' = t$ 的通解为 $t = Cx$. 将 $t = C(x)x$ 代入原方程有

$$x^2 C'(x) + \ln x = 0$$

即

$$C'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$$

于是

$$C(x) = \frac{\ln x + 1}{x} + C$$

代入 t 和 y 后可得

$$y = \exp(\ln x + 1 + Cx) = xe^{Cx+1}$$

又因为

$$y(1) = e^3$$

于是

$$y = xe^{2x+1}$$

(2) (a) 对应的齐次方程 $y' = -y$ 的通解为 $y = Ce^{-x}$. 设 $y = C(x)e^{-x}$, 代入原方程有

$$C'(x)e^{-x} = x$$

即

$$C'(x) = xe^x$$

即

$$C(x) = e^x(x-1) + C$$

从而方程的通解为

$$y = Ce^{-x} + x - 1$$

(b) 假定存在不同的 y_1, y_2 使得

$$y_1 + y_1' = y_2 + y_2' = f(x)$$

令 $u(x) = y_2 - y_1$, 于是

$$u(x) + u'(x) = 0$$

这齐次方程的通解为

$$u(x) = Ce^{-x}$$

如果 y_1, y_2 均以 T 为周期, 就对任意 $x \in \mathbb{R}$ 有

$$y_2(x+T) = y_1(x+T) + Ce^{-x-T} = y_1(x) + Ce^{-x-T} = y_2(x) + Ce^{-x-T} - Ce^{-x}$$

又因为 $y_2(x+T) = y_2(x)$, 于是

$$C(e^{-x-T} - e^{-x}) = 0$$

对任意 $x \in \mathbb{R}$ 成立, 这要求 $C = 0$, 即 $y_1 = y_2$. 这与我们的假设相悖.

于是该常微分方程有唯一以 T 为周期的解.

5.(10分) 求曲面积分

$$I = \oiint_S xydydz + (y^2 + e^{xz^2}) dzdx + \sin(xy) dxdy$$

其中 S 为柱面 $z = 1 - x^2$ 与平面 $z = 0, y = 0, y + z = 2$ 围成区域 Ω 的外表面.

Solution.

令

$$P(x, y, z) = xy \quad Q(x, y, z) = y^2 + e^{xz^2} \quad R(x, y, z) = \sin(xy)$$

在 Ω 上运用Gauss公式有

$$\begin{aligned} & \oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy \\ &= \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \\ &= \iiint_{\Omega} 3y dV \end{aligned}$$

考虑到 Ω 与 Oxy 平面平行的截面

$$D_z = \{(x, y, z) : x^2 \leq 1 - z, 0 \leq y \leq 2 - z\}$$

于是

$$\begin{aligned} \iiint_V y dV &= \int_0^1 dz \int_0^{2-z} dy \int_{-\sqrt{1-z}}^{\sqrt{1-z}} y dx \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{2-z} 2\sqrt{1-z} y dy \\ &= \int_0^1 (2-z)^2 \sqrt{1-z} dz \\ &\stackrel{t=\sqrt{1-z}}{=} 2 \int_0^1 (1+t^2)^2 t^2 dt \\ &= 2 \left(\frac{1}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{184}{105} \end{aligned}$$

于是

$$\oiint_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = 3 \iiint_{\Omega} y dV = \frac{184}{35}$$

6.(10分) 设 L 为平面上一条分段光滑的简单闭曲线,求曲线积分

$$I = \oint_L \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}|} ds$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y)$, \mathbf{n} 是 L 的单位外法向量.

Solution.

我们有

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{n}| |\mathbf{r}|}$$

又因为 $|\mathbf{n}| = 1$, 于是

$$\oint_L \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}|} ds = \oint_L \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}|^2} ds = \oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

设 D 为 L 所围的区域.

若 $(0, 0) \notin D$, 则在 D 上运用Green公式有

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \iint_D \frac{(y^2 - x^2) - (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} d\sigma = 0$$

若 $(0, 0) \in D$, 则必然存在 $(0, 0)$ 的邻域 $D_\varepsilon : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$ 使得 $D_\varepsilon \subset D$. 设 D_ε 的边界为 Γ_ε .

在 $D \setminus D_\varepsilon$ 上运用Green公式, 同理有

$$\oint_{L \cup \Gamma^-} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$$

又因为

$$\oint_{\Gamma^+} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} ds = 2\pi$$

于是此时

$$\oint_L \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi$$

因此

$$I = \begin{cases} 0, & (0, 0) \notin D \\ 2\pi, & (0, 0) \in D \end{cases}$$

其中 D 为 L 所围的区域.