

北京大学数学科学学院2022-23高等数学A2期中考试

1.(32分) 指出下列各积分的积分类型,并计算其积分值,其中

$$D_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad D_2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \quad D_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$$

记 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.记 $S_1 = \partial D_2$, $S_2 = \partial D_3$, S_1^+ 为逆时针方向的 S_1 , S_2^+ 为外法线方向的 S_2 .

- (1) $\int_{D_1} x dx$
- (2) $\oint_{S_1} xy ds$
- (3) $\oiint_{S_2} xyz dS$
- (4) $\iint_{D_2} xy dx dy$
- (5) $\oint_{S_1^+} 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$
- (6) $\iiint_{D_3} x^6 y^{16} z^{16} dx dy dz$
- (7) $\oiint_{S_2^+} \left(\frac{x}{2} + z^3 \sin y^2 \right) dy dz + \left(\frac{y}{3} + e^{x \cos z} \right) dz dx + \left(\frac{z}{6} + \arctan(xy) \right) dx dy$
- (8) $\oint_{\Gamma^+} x dx + y dy + z dz$, 其中 Γ^+ 是由 $(0, 0, 0)$ 出发,依次经过点 $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$ 后回到 $(0, 0, 0)$ 的直线段构成.

Solution.

(1) 定积分.我们有

$$\int_{D_1} x dx = \left(\frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

(2) 第一型曲线积分.我们只需考虑线段 $L_1 : x = 1, 0 \leq y \leq 1$ 和 $L_2 : y = 1, 0 \leq x \leq 1$ 即可.此时有

$$\oint_{S_1} xy ds = \int_{L_1} xy ds + \int_{L_2} xy ds = \int_0^1 y dy + \int_0^1 x dx = 1$$

(3) 第一型曲面积分.我们只需考虑面 $D_1 : x = 1, 0 \leq y, z \leq 1$, $D_2 : y = 1, 0 \leq x, z \leq 1$ 和 $D_3 : z = 1, 0 \leq x, y \leq 1$ 即可.于是

$$\oiint_{S_2} xyz dS = \iint_{D_1} yz dS + \iint_{D_2} xz dS + \iint_{D_3} xy dS = 3 \iint_{[0,1] \times [0,1]} xy d\sigma = \frac{3}{4}$$

(4) 二重积分.我们有

$$\iint_{D_2} xy dx dy = \int_0^1 dx \int_0^1 xy dy = \frac{1}{2} \int_0^1 x dx = \frac{1}{4}$$

(5) 第二型曲线积分.在 D_2 上运用Green公式有

$$\oint_{S_1^+} 2xydx + (x^2 + y^2) dy = \iint_{D_2} (2x - 2x) d\sigma = 0$$

(6) 三重积分.我们有

$$\iiint_{D_3} x^6 y^{16} z^{16} dx dy dz = \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 x^6 y^{16} z^{16} dz = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{17} = \frac{1}{2023}$$

(7) 第二型曲面积分.在 D_3 上运用Gauss公式有

$$\begin{aligned} & \oint_{S_2^+} \left(\frac{x}{2} + z^3 \sin y^2 \right) dy dz + \left(\frac{y}{3} + e^{x \cos z} \right) dz dx + \left(\frac{z}{6} + \arctan(xy) \right) dx dy \\ &= \iiint_{D_3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right) dV \\ &= \iiint_{D_3} dV = 1 \end{aligned}$$

(8) 第二型曲线积分.考虑两个正方形 $\Omega_1 : z = 0, 0 \leq x, y \leq 1$ 和 $\Omega_2 : y = 1, 0 \leq x, z \leq 1$.则 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 的边界就是 Γ^+ .运用Stokes公式有

$$\oint_{\Gamma^+} x dx + y dy + z dz = \iint_{\Omega^+} 0 dy dz + 0 dz dx + 0 dx dy = 0$$

2.(12分) 求二重积分

$$I = \iint_D |y - x^2| dx dy$$

其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

Solution.

考虑到被积函数 $|y - x^2|$ 和积分区域 D 都关于 y 轴对称,于是仅需考虑 $D' : [0, 1] \times [0, 1]$ 即可.我们有

$$\begin{aligned} I' &= \iint_{D'} |y - x^2| dx dy \\ &= \int_0^1 dx \left(\int_0^{x^2} (x^2 - y) dy + \int_{x^2}^1 (y - x^2) dy \right) \\ &= \int_0^1 \left(x^4 - x^2 + \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \frac{11}{30} \end{aligned}$$

于是

$$I = 2I' = \frac{11}{15}$$

3.(12分) 计算由封闭曲面

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} \right)^2 \leq x \right\}$$

围成区域的体积.

Solution.

做变换

$$x = \rho \cos \varphi \quad y = 2\rho \sin \varphi \cos \theta \quad z = \sqrt{5}\rho \sin \varphi \sin \theta$$

这变换的Jacobi矩阵

$$|J| = 2\sqrt{5}\rho^2 \sin \varphi$$

曲面 S 围成的区域变换后即为

$$\Omega = \left\{ (\rho, \theta, \varphi) : 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho^3 \leq \cos \varphi \right\}$$

于是

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} |J| d\rho d\theta d\varphi \\ &= 2\sqrt{5} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sqrt[3]{\cos \varphi}} \rho^2 \sin \varphi d\rho \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi \sin \varphi d\varphi \\ &\stackrel{u=\sin \varphi}{=} \frac{2\sqrt{5}}{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 u du \\ &= \frac{2\sqrt{5}\pi}{3} \end{aligned}$$

4.(12分) 设 S^+ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧,试求曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Solution.

考虑球体 $\Omega : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ 和小椭球 $\Omega' : x^2 + 4y^2 + 9z^2 \leq \varepsilon^2, \varepsilon < 1$,并记 S_{ε}^+ 为 Ω_{ε} 的表面的外侧.

在 $\Omega \setminus \Omega'$ 上运用Gauss公式有

$$\begin{aligned} & \oint_{S^+ \cup S_\varepsilon^-} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \iiint_{\Omega \setminus \Omega'} \frac{3(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}} - (2x^2 + 8y^2 + 18z^2) \cdot \frac{3}{2}\sqrt{x^2 + 4y^2 + 9z^2}}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^3} dV \\ &= 0 \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \oint_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \oint_{S_\varepsilon^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \oint_{S_\varepsilon^+} xdydz + ydzdx + zdxdy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{\Omega_\varepsilon} 3dV = \frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{4\pi\varepsilon^3}{3} \\ &= \frac{2\pi}{3} \end{aligned}$$

5.(12分) 设 $f(t)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数,满足

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 \quad \int_0^1 tf(t)dt = 2 \quad \int_0^1 t^2f(t)dt = 3$$

试求累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz$$

Solution.

考虑区域 $D_1 : 0 \leq z \leq y \leq x \leq 1$,于是

$$I_1 = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz = \iiint_{D_1} f(z)dV$$

考虑区域 $D_2 : 0 \leq z \leq x \leq y \leq 1$,于是

$$I_2 = \int_0^1 dx \int_x^1 dy \int_0^y f(z)dz = \iiint_{D_2} f(z)dV$$

注意到被积函数 $f(z)$ 关于平面 $x = y$ 对称,而 D_1 和 D_2 也关于平面 $x = y$ 对称,于是 $I_1 = I_2$.考虑积分

$$\begin{aligned} I_3 = I_1 + I_2 &= \iiint_{D_1 \cup D_2} f(z)dV = \int_0^1 dz \iint_{[z,1] \times [z,1]} f(z)dxdy \\ &= \int_0^1 (1-z)^2 f(z)dz = 3 - 2 \cdot 2 + 1 = 0 \end{aligned}$$

于是

$$I = \frac{1}{2}I_3 = 0$$

6.(10分) 设

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz$$

其中 $f(s)$ 连续,在 $s=0$ 处可导,并且满足 $f(0)=0, f'(0)=10$.求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5}$$

Solution.

做球坐标变换

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta \quad z = \rho \cos \theta$$

则

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2+y^2+z^2) dx dy dz \\ &= \iiint_{0 \leq \rho \leq t} f(\rho^2) \rho^2 \sin \varphi d\rho d\theta d\varphi \\ &= \int_0^t d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \rho^2 f(\rho^2) \sin \varphi d\varphi \\ &= 4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi \int_0^t \rho^2 f(\rho^2) d\rho}{t^5} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi t^2 f(t^2)}{5t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{4\pi}{5} \cdot \frac{f(t^2) - f(0)}{t^2} \\ &= \frac{4}{5} \pi f'(0) = 8\pi \end{aligned}$$

7.(10分) 设 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的非负连续函数.对于 $r > 0, \rho > 0$,令

$$I_r = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy \quad J_\rho = \iint_{-\rho \leq x, y \leq \rho} f(x, y) dx dy$$

试证明:当极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_r$ 与极限 $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} J_\rho$ 之一存在且有限时,另一个极限必然也存在且有限,并且两者相等.

Proof.

首先假定 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_r$ 存在有限,不妨记为 I . 我们有

$$\{(x, y) : x^2 + y^2 \leq r^2\} \subset \{(x, y) : -r \leq x, y \leq r\} \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2r^2\}$$

又因为 $f(x, y)$ 非负, 于是

$$I_r \leq J_r \leq I_{\sqrt{2}r}$$

两边取极限, 有 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_{\sqrt{2}r} = \lim_{r \rightarrow +\infty} I_r = I$. 由夹逼准则可知

$$I \leq \lim_{r \rightarrow +\infty} J_r \leq I$$

于是

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} J_r = I$$

现在假定 $\lim_{r \rightarrow \infty} J_r$ 存在有限, 不妨记为 J . 我们有

$$\{(x, y) : -\rho \leq x, y \leq \rho\} \subset \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 2\rho^2\} \subset \{(x, y) : -\sqrt{2}\rho \leq x, y \leq \sqrt{2}\rho\}$$

同理夹逼可得

$$J \leq \lim_{\rho \rightarrow +\infty} I_{\sqrt{2}\rho} \leq J$$

于是

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} I_{\rho} = J$$

从而命题得证.