Lecture 3 Function limit theory(函数极限)

1. 问极限$\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x^2\sqrt{x}}{\ln\left(1+x^{\frac{3}{2}}\right)\arctan 5x}$是否存在,若存在请计算该极限的值,若不存在请证明.

2. 使用等价无穷小方法计算下列极限.

(1) $\lim_{x\to 1}\tan\frac{\sin\pi x}{4(x-1)}$.

(2) $\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{a}-1)$,其中参数$a>0$.

(3) $\lim_{x\to 0+0}\frac{1-\sqrt{\cos x}}{x-x\cos\sqrt{x}}$.

3. 计算下列方幂型极限.

(1) $\lim_{x\to 0}(\frac{x\mathrm{e}^x+1}{x\pi^x+1})^{\frac{1}{x^2}}$.

(2) $\lim_{x\to 0+0} x^x$.

(3) $\lim_{x\to 0+0}(1+\frac{1}{x})^x$

4. 设$a_1, \cdots, a_p$为p个正实数,满足$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_p$.计算下面两个极限,并对比其区别.

(1) $\lim_{x\to 0+0}(\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.

(2) $\lim_{x\to +\infty}(\frac{\sum_{k=1}^{p} a_k^x}{p})^{\frac{1}{x}}$.

5. 判断下列命题正误,若正确请证明,若不正确请给出反例,其中$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的函数.

(1) 若对任意$a \in \mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty} f(n+a) = 0$,则必有$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

(2) 若对任意$a \in \mathbb{R}$均有$\lim_{n\to\infty} f(\frac{a}{n}) = 0$,则必有$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

6. 计算下列极限.

(1) $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x)$.

(2) $\lim_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$.

(3) $\lim_{x\to+\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^x$.

(4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt[6]{1+x}}{\sqrt[3]{1+x}-1}$.

7. 设$f(x)$和$g(x)$在$x = a$的一个去心邻域有定义,设$\lim_{x\to a} f(x) = c$且$\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$,其中$0 < c < 1$. 用$\epsilon - \delta$语言证明$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = 0$.

8. 已知$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$,计算参数$a,b$的所有可能取值.

9. 设$f(x)$在$x=0$的邻域有定义,回答下列问题.

(1) $\lim_{x\to 0} f(x^3)$收敛是$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛的充分必要条件.

(2) 问$\lim_{x\to 0} f(x)$收敛和$\lim_{x\to 0} f(x^2)$收敛的命题充分必要性如何,说明你的结论.