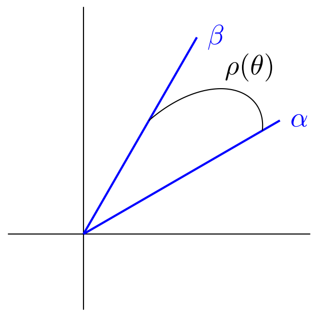
极坐标下的图形面积

熟知极坐标系(r,θ)中曲线$\rho(\theta)$从极角α到β的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_a^b \rho^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$



现在我们来看一些相关的问题.

Problem 1.

求极坐标系中三叶玫瑰线$r(\theta)=\sin(3\theta), 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$所围成图形的面积.

Analysis.

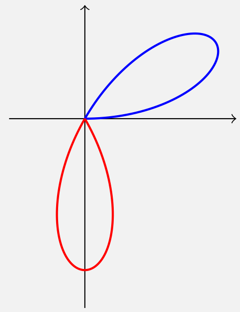
我们也许会想到直接套用公式,即

$$\begin{aligned}
S&=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\sin^2(3\theta)\mathrm{d}\theta\\
&=\frac{1}{6}\int_0^{6\pi}\sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{6}\int_0^{6\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\mathrm{d}\varphi\\
&=\frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{6\pi}\\
&=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

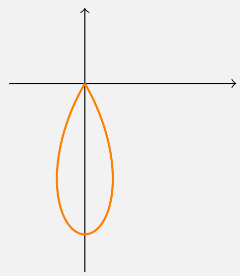
然而查阅答案可知$S=\dfrac{\pi}{4}$.

欸,问题出在哪里呢?

我们仔细观察一下这个曲线在$\left[0,\dfrac{\pi}{3}\right]$和$\left[\dfrac{\pi}{3},\dfrac{2\pi}{3}\right]$的图像,分别用红色和蓝色标出.



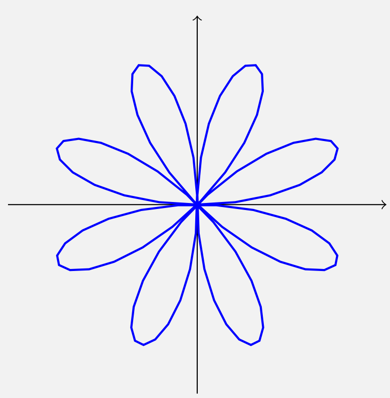
我们再来看一下该曲线在$\left[\frac{4\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right]$的图像:



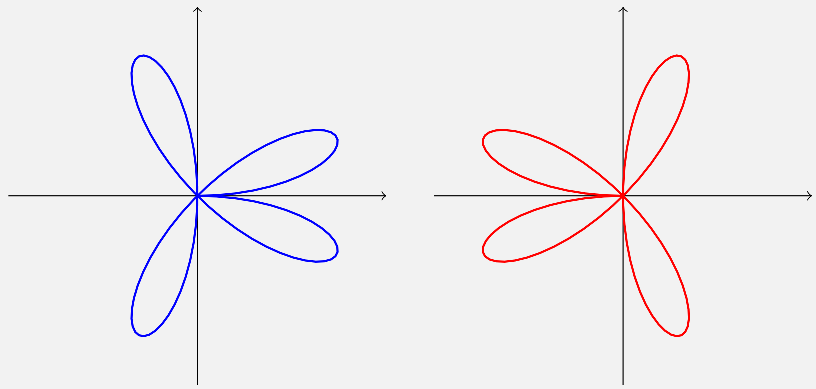
可以注意到,我们计算面积时将红色的部分和绿色的部分都计算了一遍,于是得到了不正确的结果.
这是因为当n为奇数时,$r(\theta)=\sin(m\theta)$在$\theta\in\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$和$\theta\in\left[\frac{k\pi}{n}+\pi,\frac{(k+1)\pi}{n}+\pi\right]$时有

$$r(\theta+\pi)=\sin\left(n\theta+n\pi\right)=-\sin n\theta=-r(\theta)$$

极角相差π,极径取值也为相反数,在图像上的表现就是曲线的重合.因此我们在$[0,2\pi]$上的积分将重复计算该部分的面积,对于其它几片“叶”也是相同的.
而当n为偶数时,又将得到不同的结果.请看$n=4$时的图像.



而$\theta\in[0,\pi]$和$\theta\in[\pi,2\pi]$时,$n=4$的图像如下:



可以注意到这时有

$$r(\theta+\pi)=\sin(n\theta+n\pi)=\sin n\theta=r(\theta)$$

极角相差π,极径取值相同,因此$\theta\in\left[\frac{k\pi}{n},\frac{(k+1)\pi}{n}\right]$和$\theta\in\left[\frac{k\pi}{n}+\pi,\frac{(k+1)\pi}{n}+\pi\right]$对应的两片叶并不会重合.
所以当n为偶数时,$r=\sin(n\theta)$共有$2n$片叶,直接从0积分到2π计算面积也是可行的.

Solution

观察可得该曲线由三个相同的部分组成.于是

$$\begin{aligned}S&=3\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin(3\theta)\mathrm{d}\theta\\&=3\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\bigg|_0^{\pi}\\&=\frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

我们再来看一道真题.

Problem 2(2021Fall PKU高等数学B期中考试)

设奇数$n\geqslant 3$,求极坐标系(r,θ)中曲线$r=\sin(n\theta),0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$围成的封闭图形的面积.

Solution.

用平面下极坐标公式可得

$$S=2n\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\sin^2(n\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi=\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

该方法是计算了每个叶子面积的一半后乘以$2n$而得到总面积.