北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1. (15分) 求极限

2. (10分) 设欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的平面Ω过直线$x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$,且与平面$3x-y-10z=4$垂直.

(1) (5分) 求Ω的标准方程.

(2) (5分) 已知以原点为球心的球面S与Ω相切,求S的方程.

3. (10分) 回答下列问题.

(1) (5分) 设正整数$n\geqslant 3$,n元函数$u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$满足

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$$

其中$\sum\limits_{k=1}^{n}x_k^2\neq 0$.试求$\sum\limits_{k=1}^{n}u_{x_kx_k}$.

(2) (5分) 设常数$a\in\mathbb{R}$,设$h(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$,其中$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$均有连续的二阶导函数.试求$h_{tt}-a^2h_{xx}$.

4. (10分) 求函数$f(x,y)=x^{\sqrt{y}}$在$(1,1)$处的二阶泰勒多项式.

5. (10分) 设$t\in[0,2\pi]$,$R>0$,$a>0$.求螺旋线$S:\begin{cases}x=R\cos t\\ y=R\sin t\\ z=at\end{cases}$在$t=\dfrac{\pi}{4}$的切线和法平面的方程.

6. (10分) 设$a,b,c\in\mathbb{R}$.试证明:方程$\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$的互异实根不超过三个.

7. (10分) 证明:对于任意给定的$k\in\mathbb{R}$,存在1的开邻域U和W,存在唯一的函数$y=f(x),x\in U,y\in W$满足方程$x^k-3x^2y+3xy^2-y^k=0$.

8. (15分) 求函数$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-4xyz$在$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

9. (10分) 设函数f在$[0,1]$二阶可微,且$f(0)=f(1)=0,\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$.试证明:存在$\epsilon\in(0,1)$使得$f''(\epsilon)\geqslant 8$.