北京大学数学科学学院2023-24高等数学A1期末考试

1.(20分)

求下列函数的极限.

(1) **(10分)** 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)$.

(2) **(10分)** 设函数$f(x)$在$x=0$处$n+1$阶可导,且满足

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}=0 \qquad f^{(n)}(0)=a$$

求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f\left(\mathrm{e}^x-1\right)-f(x)}{x^{n+1}}$.

Solution.

(1) 令$u=(1+x)^{\frac{1}{x}}$,于是$\ln u=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,于是

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\ln u}\cdot\frac{\mathrm{d}\ln u}{\mathrm{d}x}=(1+x)^{\frac{1}{x}}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}\right)&=\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x^2(x+1)}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}\\&=\mathrm{e}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1-(1+x)}{2x(x+1)^2}\\&=-\frac{\mathrm{e}}{2}\end{aligned}$$

(2) 考虑$f(x)$在$x=0$处的泰勒展开.

$$f(x)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+o(x^n)=\frac{ax^n}{n!}+o(x^n)$$

又$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}=1$,于是$\mathrm{e}^x-1$与$x$是同阶无穷小量.
于是有

$$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(\mathrm{e}^x-1\right)-f(x)}{x^{n+1}}=\lim_{x\to 0}$$

2.(20分)

回答下列问题.

(1) **(10分)** 设函数$F(u,v)$有连续的二阶偏导数,$z=z(x,y)$是由方程$F(x-z,y-z)=0$确定的隐函数.计算

并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(2) **(10分)** 给定方程组

$$\begin{cases} xy+yz^2+4=0 \\ x^2y+yz-z^2+5=0 \end{cases}$$

试讨论上述方程在$P_0\,(1,-2,1)$处能确定的隐函数,并计算其在P_0处的导数.

Solution.

(1) 设$G(x,y,z)=F(x-z,y-z)$.于是有

$$G_x(x,y,z)=F_u(x-z,y-z)\qquad G_y(x,y,z)=F_v(x-z,y-z)$$

$$G_z(x-z,y-z)=-F_u(x-z,y-z)-F_v(x-z,y-z)$$

于是根据隐函数存在定理,$G(x,y,z)=F(x-z,y-z)=0$确定的隐函数$z=z(x,y)$满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{G_x}{G_z}=\frac{F_u}{F_u+F_v}\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{G_y}{G_z}=\frac{F_v}{F_u+F_v}$$

其中F_u,F_v均指代$F_u(x-z,y-z),F_v(x-z,y-z)$.于是有

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{F_u+F_v}{F_u+F_v}=1$$

将上式对x求偏导有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

对y求偏导有

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=0$$

于是

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

3.(20分)

求函数$f(x,y)=\left(y-x^2\right)\left(y-x^3\right)$的极值.

4.(20分)

回答下列问题.

(1) **(10分)** 设函数$f(x,y)$在点$(0,0)$的某邻域内有定义且在$(0,0)$处连续.若极限$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$存在,试证

明$f(x,y)$在$(0,0)$处可微.

(2) **(10分)** 欧氏空间$\mathbb{R}^3$中平面$T: x+y+z=1$截圆柱面$S: x^2+y^2=1$得一椭圆周R.求R上到原点最近和最远的点.

5.(20分)

回答下列问题.

(1) **(10分)** 设$f(x)$是一个定义在$\mathbb{R}$上的周期为$T\neq 0$的无穷阶光滑函数.试证明:对于任意$k\in\mathbb{N}^*$,总存在$\xi\in\mathbb{R}$使得$f^{(k)}(\xi)=0$.

(2) **(10分)** 设函数$f(u,v)$有连续的偏导数$f_u(u,v)$和$f_v(u,v)$且满足$f(x,1-x)=1$.试证明:在单位圆周$S: u^2+v^2=1$上至少存在两个不同的点(u_1,v_1)和(u_2,v_2)使得$v_i f_u(u_i,v_i)=u_i f_v(u_i,v_i)$,其中$i=1,2$.