

北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期中考试

1. (10分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{ne}\right)^n$$

2. (10分) 设 $[x]$ 为不超过 x 的最大整数,求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{[x]}$$

3. (10分) 设 $x > 0$,求函数

$$f(x) = \int_0^{\ln x} \sqrt{1 + e^t} dt$$

的导函数.

4. (10分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x + 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx$$

5. (10分) 求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

在 $x = 1$ 到 $x = 2$ 的弧长.

6. (10分) 设欧氏空间中 V 是曲线弧 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}} (1 \leq x \leq 2)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体,求 V 的体积.

7. (10分) 无穷序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < b_1 < a_1$,且有以下递推关系

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$$

试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在并求其值.

8. (20分) 本题中每个小问都要求给出证明和计算过程.

- (1) (2分) 试证明:当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时有

$$-1 < \frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x} < 1$$

- (2) (8分) 当 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 时,求函数

$$f(x) = \arcsin \left(\frac{4 \sin x}{3 + \sin^2 x} \right)$$

的导函数.

- (3) (10分) 试证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4 \cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4} \cos^2 x + 2 \sin^2 x}}$$

9. (10分) 设函数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 满足 $f(0) = g(0), \sin(f(1)) = \sin(g(1)), \cos(f(1)) = \cos(g(1))$, 且

$$\forall x \in [0, 1], (\cos(f(x)) + \cos(g(x)))^2 + (\sin(f(x)) + \sin(g(x)))^2 \neq 0$$

证明: $f(1) = g(1)$.