2020Fall PKU高等数学B期中考试

已知$y=(\arcsin x)^2$,求$y^{(n)}(0)$.

Solution.

由题意有

$$y'=2\arcsin x\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

即

$$4y=(1-x^2)y'^2$$

由于y'^2的存在,我们不能对等式两端直接使用Leibniz公式进行展开.

因此,我们再对等式两端求一次导,即

$$4y'=2y'y''(1-x^2)-2xy'^2$$

整理后有

$$y''(1-x^2)=2+xy'$$

对等式两端求n阶导,使用Leibniz公式展开有

$$(1-x^2)y^{(n+2)}-2nxy^{(n+1)}-n(n-1)y^{(n)}=xy^{(n+1)}+ny^{(n)}$$

整理可得

$$(1-x^2)y^{(n+2)}=(2n+1)xy^{(n+1)}+n^2y^{(n)}$$

代入$x=0$有

$$y^{(n+2)}(0)=n^2y^{(n)}(0)$$

从而

$$y^{(n)}(0)=\begin{cases}[(n-2)!!]^2,\ 2\mid x\\ 0,\ 2\nmid x\end{cases}$$