北京大学数学科学学院2024-25高等数学B2期中考试

1. (12分) 求二重积分

$$\iint_D (|x|+y)^2\,\mathrm{d}\sigma$$

其中$D: x^2+y^2 \leqslant a^2$.

2. (12分) 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$和$x^2+z^2=R^2$围成的立体的表面积.

3. (12分) 求第一型曲线积分

$$\oint_C (x+y+1)\,\mathrm{d}s$$

其中C是以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形的边界.

4. (14分) 求第二型曲线积分

$$\oint_{C^+} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

其中C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.从x轴正方向看,C^+为逆时针方向.

5. (14分) 求第二型曲面积分

$$\oiint_{S^+} \left(x^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S^+为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

6. (15分) 求微分方程

$$xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

的通解.

7. (15分) 求微分方程

$$y''+3y'+2y=\frac{1}{2+\mathrm{e}^x}$$

的通解.

8. (6分) 设函数$P(x,y), Q(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上有连续的一阶偏导数,且对任意以$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$为圆心,任意$R>0$为半径的上半圆$L: y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$都有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

上式对L的两个方向都成立.试证明:对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$都有$P(x,y)\equiv 0, \dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$.