正项级数的收敛判别法

1.正项级数

1.1 定义:正项级数

顾名思义,正项级数就是每一项都不小于零的级数.

即当
$$a_n \geqslant 0 (n=1,2,\cdots)$$
时, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 是正项级数.

2.正项级数的收敛判别法

2.1 正项级数收敛当且仅当有上界

正项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ 收敛,当且仅当其部分和序列 $\{S_n\}$ 有上界.

这根据单调有界序列有极限就可以容易的得出.由此,我们可以导出比较判别法.

2.2 比较判别法I

设两正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 满足 $u_k \leqslant v_k$ 对任意 $k \in \mathbb{N}^*$ 成立,则有

- 1. 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散,那么 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 发散.
- **2.** 如果 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛,那么 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛.

由于任意增删级数的有限项不改变其敛散性,因此我们可以对上述命题略作推广.

2.2 比较判别法II

若存在 $N \geqslant 1$ 和常数c > 0,使得

$$\forall n \geqslant N, 0 \leqslant u_n \leqslant cv_n$$

则当
$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$$
发散时 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 发散;当 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛时 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛.

有时,两级数的一般项之间的不等关系较难给出,因此我们给出比较判别法的极限形式.

2.3 比较判别法III

设两正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 满足

$$\lim_{n \to \infty} \frac{u_n}{v_n} = h$$

其中h为有限数或 $+\infty$,则有

1. 如果
$$0 < h \leqslant +\infty$$
,则当 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 发散时 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 发散.

2. 如果
$$0 \le h < \infty$$
,则当 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 收敛时 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛.

3. 如果
$$0 < h < +\infty$$
,则 $\sum_{k=1}^{\infty} v_k$ 和 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 同时收敛或发散.

2.4 达朗贝尔判别法

若正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 满足

$$\lim_{u\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$$

则有

- **1.** 如果l > 1,则级数发散.
- **2.** 如果l < 1,则级数收敛.
- **3.** 如果l=1,则级数可能发散也可能收敛.

2.5 柯西判别法

若正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 满足

$$\lim_{u \to \infty} \sqrt[n]{u_n} = l$$

则有

- **1.** 如果l > 1,则级数发散.
- **2.** 如果l < 1,则级数收敛.
- 3. 如果l=1,则级数可能发散也可能收敛.

2.6 拉比判别法

若正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 满足

$$\lim_{u \to \infty} n \left(\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right) = R$$

其中R可以是 ∞ ,则有

- **1.** 如果R > 1,则级数收敛.
- **2.** 如果R < 1,则级数发散.

3. 如果R = 1,则级数可能发散也可能收敛.

此外,还可以通过积分法判断级数的敛散性.为此,我们先定义无穷积分的概念.

2.7 定义:无穷积分及其敛散性

设函数f(x)在 $[a, +\infty]$ 上有定义,且对任意A > a, f(x)在(a, A)上可积.若极限

$$\lim_{A \to +\infty} \int_{a}^{A} f(x) \mathrm{d}x$$

存在,则称f(x)在 $[a,+\infty)$ 上的**无穷积分** $\int_a^{+\infty} f(x) \mathrm{d}x$ **收敛**,并定义

$$\int_{a}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \to +\infty} \int_{a}^{A} f(x) dx$$

若该极限不存在,则称该无穷积分发散.

2.8 积分判别法

设 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 是正项级数.如果存在一个单调下降的非负函数f(x)使得

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, f(n) = u_n$$

那么 $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ 收敛当且仅当 $\int_{1}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛.