北京大学数学科学学院2024-25高等数学B2期中考试

1.(12分) 求二重积分

$$\iint_D (|x|+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma$$

其中$D: x^2+y^2 \leqslant a^2$.

Solution.

我们有

$$(|x|+y)^2 = x^2+y^2+2y|x|$$

注意到$2y|x|$关于x轴反对称,积分区域D关于y轴对称,故此项最终为0.于是

$$\iint_D (|x|+y)^2 \,\mathrm{d}\sigma = \iint_D \left(x^2+y^2\right) \mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^a r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi a^4}{2}$$

2.(12分) 求由三个圆柱面$x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2$和$x^2+z^2=R^2$围成的立体的表面积.

Solution.

根据图形的对称性,我们考虑第一卦限中$x^2+z^2=R^2$被截出的曲面S_1.

S_1在Oxy平面上的投影为$D_1 = \{(x,y): 0 \leqslant y \leqslant x, x^2+y^2 \leqslant R^2\}$.

曲面方程为$z=\sqrt{R^2-x^2}$,于是该部分的面积

$$\begin{aligned}
\iint_{S_1} \mathrm{d}S &= \iint_{D_1} \sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_1} \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&\xlongequal{\text{极坐标换元}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}} r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(-\frac{R\sqrt{R^2-r^2\cos^2\theta}}{\cos^2\theta}\bigg|_0^R \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R^2(1-\sin\theta)}{\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= R^2 \left(\tan\theta - \frac{1}{\cos\theta}\right)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= R^2\left(2-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

考虑到每个卦限内有三个与S_1相同的曲面,于是总表面积

$$S = 24R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$$

3.(12分) 求第一型曲线积分

$$\oint_C (x+y+1)\,\mathrm{d}s$$

其中C是以$O(0,0), A(1,0), B(0,1)$为顶点的三角形的边界.

Solution.

我们分三条边考虑.

在OA上有$y=0, 0\leqslant x\leqslant 1$且$\mathrm{d}s=\mathrm{d}x$,于是

$$\int_{OA}(x+y+1)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x=\frac{3}{2}$$

在OB上有$x=0, 0\leqslant y\leqslant 1$且$\mathrm{d}s=\mathrm{d}y$,于是

$$\int_{OB}(x+y+1)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 (y+1)\,\mathrm{d}y=\frac{3}{2}$$

在AB上,令$x=t, y=1-t$,其中$0\leqslant t\leqslant 1$,则有

$$\int_{AB}(x+y+1)\,\mathrm{d}s=\int_0^1 (t+1-t+1)\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2}\mathrm{d}t=\int_0^1 2\sqrt{2}\mathrm{d}t=2\sqrt{2}$$

于是

$$\oint_C (x+y+1)\,\mathrm{d}s=\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$$

4.(14分) 求第二型曲线积分

$$\oint_{C^+} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z$$

其中C为圆周$x^2+y^2+z^2=a^2, x+y+z=0$.从x轴正方向看,C^+为逆时针方向.

Solution.

Method I.

将$z=-(x+y)$代入$x^2+y^2+z^2=a^2$有

$$\left(y+\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2$$

令$\dfrac{\sqrt{3}}{2}x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\cos t, y+\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\sin t$,就有

$$\begin{cases} x=\frac{\sqrt{6}}{3}a\cos t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}a\cos t\\ z=-\frac{\sqrt{2}}{2}a\sin t-\frac{\sqrt{6}}{6}a\cos t \end{cases}$$

曲线沿C^+方向的单位切向量为

$$\mathbf{n}=\left(-\frac{\sqrt{6}}{3}\sin t,\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t,-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos t+\frac{\sqrt{6}}{6}\sin t\right)$$

于是

$$\begin{aligned}
&\oint_{C^+} y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z\\
=&\oint_C (y,z,x)\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s\\
=&\oint_C a\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2 t+\frac{1}{3}\sin t\cos t-\frac{2}{3}\sin t\cos t-\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos^2 t+\frac{1}{3}\sin t\cos t\right)\mathrm{d}s\\
=&\int_0^{2\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}a\sqrt{\left(x'(t)\right)^2+\left(y'(t)\right)^2+\left(z'(t)\right)^2}\mathrm{d}t\\
=&\int_0^{2\pi}-\frac{\sqrt{3}}{2}a^2\mathrm{d}t\\
=&-\sqrt{3}\pi a^2
\end{aligned}$$

5.(14分) 求第二型曲面积分

$$\oiint_{S^+}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S^+为球面$x^2+y^2+z^2=R^2$的外侧.

Solution.

考虑S所围的球体$\Omega:x^2+y^2+z^2\leqslant R^2$.在$\Omega$上运用Gauss公式有

$$\oiint_{S^+}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iiint_\Omega(2x+2y+2z+3)\,\mathrm{d}V$$

考虑到$f(x,y,z)=z$关于Oxy平面反对称,而Ω关于Oxy平面对称,于是此项积分为零.同理可知x,y的一次项的积分也为零.于是

$$\oiint_{S^+}\left(x^2+x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+y\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(z^2+z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3\iiint_\Omega\mathrm{d}V=3\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=4\pi R^3$$

6.(15分) 求微分方程

$$xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$$

的通解.

Solution.

移项整理可得

$$y' = \left(1+\frac{y}{x}\right)\ln\left(1+\frac{y}{x}\right)+\frac{y}{x}$$

令$u=\dfrac{y}{x}$,则$y'=u+u'x$.代入上式有

$$u = \frac{(1+u)\ln(1+u)}{x}$$

移项积分可得

$$\ln\ln(1+u) = \ln x + C$$

于是

$$u = \mathrm{e}^{Cx}-1$$

于是

$$y = x\mathrm{e}^{Cx}-x$$

7.(15分) 求微分方程

$$y''+3y'+2y = \frac{1}{2+\mathrm{e}^x}$$

的通解.

Solution.

对应的齐次方程的特征根$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2$,于是通解为$y=C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}$.令

$$y = C_1(x)\mathrm{e}^{-x}+C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$$

代入原方程得

$$\begin{cases} C_1'(x)\mathrm{e}^{-x}+C_2'\mathrm{e}^{-2x}=0 \\ -C_1'(x)\mathrm{e}^{-x}-2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}=\dfrac{1}{2+\mathrm{e}^x} \end{cases}$$

解得

$$C_1'(x)=\frac{\mathrm{e}^x}{2+\mathrm{e}^x} \qquad C_2'(x)=-\frac{\mathrm{e}^{2x}}{2+\mathrm{e}^x}$$

积分可得

$$C_1(x)=\ln\left(\mathrm{e}^x+2\right)+C_1 \qquad C_2(x)=2\ln\left(\mathrm{e}^x+2\right)-\mathrm{e}^x+C_2$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^{-x}+C_2\mathrm{e}^{-2x}+\left(\frac{1}{\mathrm{e}^x}+\frac{2}{\mathrm{e}^{2x}}\right)\ln\left(\mathrm{e}^x+2\right)$$

8.(6分) 设函数$P(x,y),Q(x,y)$在$\mathbb{R}^2$上有连续的一阶偏导数,且对任意以$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$为圆心,任意$R>0$为半径的上半圆$L:y=y_0+\sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$都有

$$\int_L P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=0$$

上式对L的两个方向都成立.试证明:对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$都有$P(x,y)\equiv 0,\dfrac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0.$

Solution.

记半圆L的两端点为A,B,令$L+AB$围成的半圆区域为D.

根据Green公式和积分中值定理可知,存在$M\in D$使得

$$\begin{aligned}\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\oint_{AB+L}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y&=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_M\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_M\cdot\frac{\pi R^2}{2}\end{aligned}$$

另一方面,AB的切向量即为$(1,0)$.再由积分中值定理可知存在$\xi\in(x_0-R,x_0+R)$使得

$$\int_{AB}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_{AB}P\mathrm{d}x=\int_{x_0-R}^{x_0+R}P\mathrm{d}x=P\left(\xi,y_0\right)\int_{x_0-R}^{x_0+R}\mathrm{d}x=2P\left(\xi,y_0\right)R$$

结合上述两式就有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\bigg|_M\pi R=4P\left(\xi,y_0\right)$$

此时对于任意$R>0$都成立.令$R\to 0^+$就有

$$P\left(x_0,y_0\right)=0$$

又因为$(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$是任取的,所以对于任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$有$P(x,y)\equiv 0$.

将此时再代入前面的式子就有

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right)\bigg|_M=0$$

同理令$R\to 0^+$可知$\dfrac{\partial Q\left(x_0,y_0\right)}{\partial x}=0$,又根据$(x_0,y_0)$的任意性可知对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$都有

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\equiv 0$$

于是命题得证.