北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中模拟考试

1. (10分) 设D是由直线$x=1,y=x,y=2x$所围成的有界闭区域,求二重积分

$$\iint_D (\sqrt{x}+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2. (10分) 求三重积分

$$\iiint_\Omega \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathrm{d}V$$

其中Ω是球$x^2+y^2+z^2\leqslant 2x$.

3. (10分) 求曲线积分

$$\int_L \frac{\mathrm{d}y-\mathrm{d}x}{x-y+1}$$

其中L是圆周$x^2+y^2-2x=0$在$y\leqslant 0$的部分,沿逆时针方向.

4. (15分) 求曲面积分

$$\iint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+x^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(y^2+xz\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S是球面$x^2+y^2+z^2=5$在$z\geqslant 1$的部分,取外侧.

5. (10分) 求常微分方程

$$xy'+2y=\sin x$$

满足$y(\pi)=\dfrac{1}{\pi}$的特解.

6. (10分) 求常微分方程

$$y''+2y'=3+4\sin 2x$$

的通解.

7. (10分) 设参数$a>0$,$\mathbb{R}^3$中的圆柱$x^2+z^2=a^2$和$y^2+z^2=a^2$相交的区域为Ω,求Ω的体积.

8. (10分) 设$u(x,y)$是闭矩形$D:[a,b]\times[c,d]$上的连续函数,在D上存在连续的二阶偏导数,并且$u(x,y)=0$对D的边界上任意一点都成立,试证明

$$\iint_D |u(x,y)|^2\,\mathrm{d}\sigma\leqslant\left(\iint_D\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|\mathrm{d}\sigma\right)\left(\iint_D\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|\mathrm{d}\sigma\right)$$

9. (15分) 在如下的常微分方程

$$\begin{cases} u''(x)+\lambda u(x)=0 \\ -a_1u'(0)+a_2u(0)=b_1u'(L)+b_2u(L)=0 \end{cases}$$

中,我们想求解定义在$[0,L]$上的函数$u(x)$,其中参数a_1,a_2,b_1,b_2,L都是给定的函数.

对于大多数参数λ,上述常微分方程并没有解.如果对于某个λ,上述方程存在不恒等于0的解,我们就成λ为一个**本征值**,对应的解$u_\lambda(x)$称为**本征函数**.据此,回答下列问题.

(1) 当$a_1 = -1, b_1 = 1, a_2 = b_2 = 0$时,试证明0是本征值.

(2) 对于$a_1 = -1, b_1 = 1, a_2 = b_2 = 0$以及$a_1 = b_1 = 0, a_2 = b_2 = 1$的情形,分别求解所有本征值和每个本征值对应的所有本征函数.

(3) 如果$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$,试不通过求解方程证明所有本征值都是正数.

(4) 如果$a_1, a_2, b_1, b_2 > 0$,设λ和μ是两个不同的本征值,对应本征函数分别为$u_\lambda(x)$和$u_\mu(x)$.试证明

$$\int_0^L u_\lambda(x) u_\mu(x) \mathrm{d}x = 0$$