北京大学数学科学学院2022-23高等数学A1期末考试

1. (16分) 回答下列问题。

(1) (8分) 证明:直线$l:\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 5x+2y-5z=-6 \end{cases}$ 过点$(1,2,3)$,并把此一般方程化为标准方程.

(2) (8分) 求曲线$S:\begin{cases} x=7t-14 \\ y=4t^2 \\ z=3t^3 \end{cases}$ 在参数$t=1$对应的点P处的法平面方程.

2. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设函数$z=\arctan\dfrac{(x-3)y+(x^2+x-1)y^2}{(x-2)y+(x-3)^2y^4}$,求$\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,0)}$.

(2) (10分) 设函数$z=z(x,y)$由方程

$$m\left(x+\frac{z}{y}\right)^n+n\left(y+\frac{z}{x}\right)^m=1$$

确定,其中$m,n\in\mathbb{N}$.计算并化简

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}+xy$$

3. (24分) 下列极限是否存在?若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

(1) (8分) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^3}\sin^3 2t\mathrm{d}t}{\int_0^{x^2}\tan t^5\mathrm{d}t}$.

(2) (8分) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$.

(3) (8分) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n^2+k^2}$.

4. (24分) 回答下列问题.

(1) (8分) 设$P_1(a_1,b_1,c_1),P_2(a_2,b_2,c_2)$是单位球面$S:x^2+y^2+z^2=1$上的两个不同的点,$O(0,0,0)$是坐标原点.求

$$\left|\overrightarrow{OP_1}\times\overrightarrow{OP_2}\right|^2+\left(\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2}\right)$$

(2) (8分) 计算$\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{\sin^2 x}{1+\mathrm{e}^x}+\frac{\cos^2 x}{1+\mathrm{e}^{-x}}\right)\mathrm{d}x$.

(3) (8分) 计算$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\frac{\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos x}\mathrm{d}x$.

5. (8分) 设$f(x)$在(a,b)上二阶可导,$f(a)=f(b)=0$,$f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)>0$.试证明:存在$\xi\in(a,b)$使得$f''(\xi)<0$.

6. (8分) 设$f(x)$在$[0,2]$上有连续的导数,$f(0)=f(2)=0$,记$M=\max\limits_{x\in[0,2]}\{|f(x)|\}$.试证明:

(1) (4分) 存在$\xi\in(0,2)$使得$|f'(\xi)|\geqslant M$.

(2) (4分) 若对于任意$x\in(0,2)$都有$|f'(x)|\leqslant M$,则$f(x)\equiv 0$.