

## 中值定理

也许您在高等数学的学习过程中见到了各种各样的中值定理(Mean Value Theorem),它们也构成了微积分的重要组成部分. 下面我们就来列举并证明这些中值定理.

### 一.微分中值定理

#### (1).Rolle's Mean Value Theorem(罗尔中值定理)

##### Rolle's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 满足

(a)  $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(b)  $f(x)$ 在 $(a, b)$ 可导.

(c)  $f(x)$ 在端点的函数值满足 $f(a) = f(b)$ .

则 $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $f'(\xi) = 0$ .

##### Proof.

首先,由于 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,可知 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有最大值和最小值.

若最大值和最小值均在端点处取得,又 $f(a) = f(b)$ ,则 $\forall \xi \in [a, b]$ ,  $f(x) = f(a)$ .

从而 $f(x)$ 为常函数, $\forall \xi \in [a, b]$ ,  $f'(\xi) = 0$ .

若最大值在 $(a, b)$ 上取到,设最大值点为 $\xi$ ,下面证明 $f'(\xi) = 0$ .

由题意

$$\forall x \in (a, \xi), \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \geq 0$$

$$\forall x \in (\xi, b), \frac{f(x) - f(\xi)}{x - \xi} \leq 0$$

则

$$f'(\xi - 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'(\xi + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(\xi + \Delta x) - f(\xi)}{\Delta x} \leq 0$$

又 $f(x)$ 在 $x = \xi$ 处可导,则 $f'(\xi - 0) = f'(\xi + 0) = 0$ ,从而 $f'(\xi) = 0$ .

若最小值在 $(a, b)$ 上取到,可以通过类似的方法证明之.

综上所述,原定理得证.

#### (2).Lagrange's Mean Value Theorem(拉格朗日中值定理)

### Lagrange's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 满足

(a)  $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(b)  $f(x)$ 在 $(a, b)$ 可导.

则 $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

**Proof.**

令 $g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) + f(a) - f(x)$

显然, $g(x)$ 满足Rolle's Theorem的条件,则 $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $g'(\xi) = 0$

即 $g'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} - f'(\xi) = 0$

即 $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ ,从而原定理得证.

### (3).Cauchy's Mean Value Theorem(柯西中值定理)

#### Cauchy's Mean Value Theorem

如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

(a)  $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

(b)  $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 $(a, b)$ 可导.

(c)  $\forall x \in (a, b), g'(x) \neq 0$ .

则 $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ .

**Proof.**

令 $h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g(x)$

显然, $h(x)$ 满足Rolle's Theorem的条件,则 $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $h'(\xi) = 0$

即 $h'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} \cdot g'(\xi) = 0$

即 $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ ,从而原定理得证.

我们可以发现,上述定理是逐渐推广的,但不管形式如何,都可以通过构造辅助函数,进而利用Rolle's Theorem进行证明.

## 二.积分中值定理

### (1).积分第一中值定理

### 积分第一中值定理

设  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上连续,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上可积且不变号, 则

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

#### Proof.

不失一般性的, 假定  $g(x) \geq 0$ .

由于  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 因此  $f(x)$  存在最大值和最小值, 分别记为  $M, m$ .

于是有  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$ . 对不等式求积分有

$$\int_a^b mg(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq \int_a^b Mg(x)dx$$

即

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

若  $\int_a^b g(x)dx = 0$ , 则  $\forall \xi \in (a, b)$ ,  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx = 0$

若  $\int_a^b g(x)dx \neq 0$ , 则由  $g(x) \geq 0$  可得  $\int_a^b g(x)dx > 0$ . 于是

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

. 又  $m \leq f(x) \leq M$ , 根据介值定理,  $\exists \xi \in (a, b)$ , s.t.  $f(\xi) = \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ .

即  $\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$ .

对于  $g(x) \leq 0$ , 可以采取相似的方法证明.

综上所述, 原定理得证.

### (2). 积分第二中值定理

#### 积分第二中值定理

若函数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上黎曼可积,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上单调有界, 则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

### Proof(Method I).

该方法只适用于研究的函数较为理想的情况,需要 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可微.

记 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ,则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b g(x)dF(x) \\ &= F(x)g(x)|_a^b - \int_a^b F(x)dg(x) \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= g(b) \int_a^x f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx\end{aligned}$$

由于 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调,则 $g'(x)$ 在 $[a, b]$ 上不变号.

根据积分第一中值定理,

$$\exists \xi \in (a, b), \text{ s.t. } \int_a^b F(x)g'(x)dx = F(\xi) \int_a^b g'(x)dx = F(\xi)(g(b) - g(a))$$

则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= g(b) \int_a^x f(x)dx - \int_a^b F(x)g'(x)dx \\ &= g(b) \int_a^x f(x)dx - F(\xi)(g(b) - g(a)) \\ &= g(b) \int_a^x f(x)dx - (g(b) - g(a)) \int_a^\xi f(x)dx \\ &= g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx\end{aligned}$$

从而原定理得证.

然而这种方法并不适用于所有情况(例如更一般的不可导的 $g(x)$ ).为此,我们需要采取另外的证法.

首先,我们来证明Bonnet Theorem.

### Bonnet Theorem

若函数 $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 在 $[a, b]$ 上单调递减且非负,则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

**Proof.**

证明:记 $F(x) = \int_a^x f(x)dx$ ,则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续. 记

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b, \xi = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

记 $g(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的振幅(即最值之差)为 $w_i(g)$ .

则有

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x)dx &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) [g(x) - g(x_i)] dx + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) [g(x) - g(x_i)]| dx + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x_i)dx \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n g(x_i) (F(x_i) - F(x_{i-1})) \\ &= \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i)F(x_i) - g(x_{i-1})F(x_{i-1})] + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_{i-1}) - g(x_i)] F(x_{i-1}) \\ &= g(x)F(x)|_a^b + \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_{i-1}) - g(x_i)] F(x_{i-1}) \\ &= g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) \end{aligned}$$

这其中用到了

$$0 \leq \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x) [g(x) - g(x_i)]| dx \leq \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \max_{[a, b]} |f(x)| \sum_{i=1}^n w_i(g)(x_i - x_{i-1}) = 0$$

由于 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 连续,不妨设 $\max_{[a, b]} F(x) = M_F, \min_{[a, b]} F(x) = m_F$ ,则

$$\begin{aligned} g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) &\leq M_F g(b) - M_F \sum_{i=1}^n g(x_i) - g(x_{i-1}) = M_F g(a) \\ g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) &\geq m_F g(b) - m_F \sum_{i=1}^n g(x_i) - g(x_{i-1}) = m_F g(a) \end{aligned}$$

从而根据介值定理有

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } g(b)F(b) - \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \sum_{i=1}^n [g(x_i) - g(x_{i-1})] F(x_{i-1}) = F(\xi)g(a)$$

整理可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

原定理得证.

该定理还有一个等价的形式.

### Bonnet Theorem

若函数  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上黎曼可积,  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  在  $[a, b]$  上单调递增且非负, 则

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x)g(x)dx = g(b) \int_a^\xi f(x)dx$$

下面我们据此证明积分中值第二定理.

### Proof(Method II).

**证明:** 不失一般性的, 假定  $g(x)$  单调递增. 则根据 Bonnet Theorem 有

$$\exists \xi \in [a, b], \text{ s.t. } \int_a^b f(x) [g(b) - g(x)] dx = [g(b) - g(a)] \int_a^\xi f(x) dx$$

整理可得

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx + g(b) \int_\xi^b f(x)dx$$

原定理得证.