北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期中考试

1. (20分) 求二重积分

$$I=\iint_D r^2\sin\theta\sqrt{1-r^2\cos(2\theta)}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中积分区域$D=\left\{(r,\theta):0\leqslant r\leqslant\sec\theta,0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{4}\right\}$.

2. (20分) 求曲线积分

$$I=\oint_{L^+}\frac{-y}{4x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{4x^2+y^2}\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$$

其中曲线L是由曲面$4x^2+y^2=1$与平面$2x+y+z=1$所截得的曲线,其正向L^+规定为从z轴看的逆时针方向.

3. (20分) 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是连续函数,求曲面积分

$$I=\iint_S\left[xf(xy)+2x-y\right]\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left[yf(xy)+2y+x\right]\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left[zf(xy)+z\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$夹在平面$z=1$和$z=2$之间的部分,方向取下侧.

4. (20分) 回答下列问题.

(1) 求常微分方程

$$xy'+y\left(\ln x-\ln y\right)=0$$

满足$y(1)=\mathrm{e}^3$的解.

(2) 给定常微分方程$y'+y=f(x)$,其中$f(x)$是定义在$\mathbb{R}$上的连续函数.

(a) 若$f(x)=x$,给出方程的通解.

(b) 若$f(x)$以T为周期,试证明方程有唯一以T为周期的解.

5. (10分) 求曲面积分

$$I=\oiint_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(y^2+\mathrm{e}^{xz^2}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\sin(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为柱面$z=1-x^2$与平面$z=0,y=0,y+z=2$围成区域Ω的外表面.

6. (10分) 设L为平面上一条分段光滑的简单闭曲线,求曲线积分

$$I=\oint_L\frac{\cos\left(\mathbf{r},\mathbf{n}\right)}{|\mathbf{r}|}\mathrm{d}s$$

其中$\mathbf{r}=(x,y)$,$\mathbf{n}$是L的单位外法向量.