曲面积分

1.第一型曲面积分

与第一型曲线积分类似,我们在三维空间中可以定义第一型曲面积分.这里就略去我们如何得到该定义(这实际上与曲面积分是类似的).

1.1 定义:第一型曲线积分

设函数$f(x,y,z)$在分片光滑的曲面S上有定义.将S任意分成n个互不重叠的区域$\Delta S_i(i=1_1,\cdots,1_n$,同时用其表示该部分的面积),令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i$的直径$\}$.在$\Delta S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

对于曲面S的任意分割方法和各中间点的任意取法都存在,则称此极限为$f(x,y,z)$在S上的**第一型曲线积分**,记作

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

其中S被称为**积分曲面**.如果S是封闭曲面,那么习惯上也记作

$$\oiint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$$

我们指出,当S分片光滑且$f(x,y,z)$在S上连续时,$f(x,y,z)$在S上的第一型曲面积分存在.

第一型曲面积分的可加性在此不再赘述,它也与曲面的取向没有关系,是无方向性的.

我们现在来讨论第一型曲面积分的计算.总的来说,我们有如下定理.

1.2 第一型曲面积分的计算

我们按曲面的解析式分为如下两类.

a. 设曲面S由方程$z=g(x,y)$(其中$(x,y)\in D$)给出,且$g(x,y)$在D上连续可微,那么

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\mathrm{d}\sigma$$

b. 设曲面S由参数方程

$$\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}\qquad (u,v)\in D$$

确定.由重积分的应用一章可知$\mathrm{d}S=\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$,其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2\qquad F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v\qquad G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$$

则有如下计算公式

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

总的来说,考虑对应情形下的面积微元即可得到相应的计算公式.

2.第二型曲面积分

我们首先定义曲线的面.

2.1 定义:双侧曲面与单侧曲面

考虑一个光滑的正则曲面S,在其上任取一点P,那么S在P处的法向量应有两个相反的指向.任意取定一个方向后记该法向量为$\mathbf{n}_P$,如果不论P在S上如何移动(只要不跨越S的边界),当P返回其起始点时$\mathbf{n}_P$的指向没有改变,就称该曲面S为**双侧曲面**.

如果S不具有上面的性质,则称其为**单侧曲面**.

和前面的第一型曲面积分类似,第二型曲面积分和第二型曲线积分也有很多类似之处.我们不加说明地给出第二型曲面积分的定义.

2.2 定义:第二型曲面积分

设S是一个分片光滑的双侧曲面,在S上选定一侧并记该侧在点$(x,y,z)\in S$处的单位法向量为$\mathbf{n}(x,y,z)$.设向量函数$\mathbf{F}(x,y,z)$在S上有定义.将S任意分成n个互不重叠的区域$\Delta S_i(i=1_1,\cdots,1_n$,同时用其表示该部分的面积),令$\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta S_i$的直径$\}$.在$\Delta S_i$上任取一点$(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)$.若极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mathbf{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

对于曲面S的任意分割方法和各中间点的任意取法都存在,则称此极限为$\mathbf{F}(x,y,z)$在S上的**第二型曲线积分**,记作

$$\iint_S\mathbf{F}(x,y,z)\cdot\mathbf{n}(x,y,z)\mathrm{d}S\qquad\text{或}\qquad\iint_S\mathbf{F}(x,y,z)\mathrm{d}\mathbf{S}$$

第二型曲面积分也可以写为第一型曲线积分的形式.设$\mathbf{F}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$,法向量$\mathbf{n}$的方向余弦为$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$,则有

$$\iint_S\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S$$

在考虑方向余弦具有的正负性后,我们也可以得到

$$\iint_S\mathbf{F}\mathrm{d}\mathbf{S}=\iint_S P\mathrm{d}x\mathrm{d}y+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式中的$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$等微元并不一定为正(这需要与二重积分做区别),而取决于方向余弦的正负(即法向量的指向).

第二型曲线积分的计算,就可以利用上面的转化将其写为第一型曲面积分后进行计算.我们现在完整地演示一遍第二型曲面积分向二重积分的转化.

Solution.

假定积分曲面S可以写作$z=f(x,y)$,其中$(x,y)\in D$.于是S的法向量

$$\mathbf{n}=\pm\frac{(z_x,z_y,-1)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$$

令$\mathbf{F}=(P,Q,R)$.于是

$$\begin{aligned}
&\iint_{S^+} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
=&\pm\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}S \\
=&\pm\iint_S \frac{(Pz_x+Qz_y-R)}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}\mathrm{d}S \\
=&\pm\iint_D \left(Pz_x+Qz_y-R\right)\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

事实上,可以注意到$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}$一项被抵消.