函数项级数

1.函数项级数

函数项级数

设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在D上的函数,和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

被称为定义在D上的**函数项级数**.在D上取定一点x_0,如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x_0\right)$$

收敛(发散),则称x_0为该函数项级数的**收敛点**(**发散点**).因此,函数项级数的敛散性是以数项级数的敛散性为基础的.

函数项级数的收敛点的全体称为它的**收敛域**,发散点的全体称为它的**发散域**.对收敛域X内的任意一点x,上述级数的和记为$S(x)$.显然,S是定义在X上的函数,称为级数的**和函数**.

2.函数序列及函数项级数的一致收敛性

2.1 函数序列的收敛性和极限函数

设有一个函数序列$f_1(x),f_2(x),\cdots$,其中的每一项$f_n(x)$在集合D上有定义.

若一点$x_0\in D$使得序列$\{f_n\left(x_0\right)\}$收敛,即极限$\lim\limits_{n\to\infty} f_x\left(x_0\right)$存在,则称序列$\{f_n(x)\}$**在$x_0$处收敛**,$x_0$称为该序列的**收敛点**,该序列的全体收敛点构成的集合称作序列的**收敛域**.

另外,序列$\{f_n(x)\}$在其收敛域X内定义了一个函数

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x) \qquad \forall x\in X$$

称$f(x)$为该序列的**极限函数**.

显然,函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的收敛域就是其部分和序列的收敛域,其和函数就是部分和序列的极限函数.

2.2 一致收敛

设函数序列$\{f_n(x)\}$在集合X上收敛于极限函数$f(x)$.若对于任意$\varepsilon>0$,都存在一个只依赖于ε而不依赖于x的正整数N使得$\forall n>N$都有$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$对任意$x\in X$成立,则称函数序列$\{f_n(x)\}$在$X$上**一致收敛**于$f(x)$,记作$f_n(x)\rightrightarrows f(x),x\in X(n\to\infty)$.

一致收敛的几何意义是,对于任意给定的$\varepsilon>0$,都存在足够大的n使得$f_n(x)$落在带状区域

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$$

中.需要注意的是,上述定义中的X不一定是序列的收敛域,可能只是收敛域的一个子集.

2.3 一致收敛的判据I

设函数序列$\{f_n(x)\}$在区间X上收敛于极限函数$f(x)$,若存在序列$\{a_n\}$使得

$$|f_n(x)-f(x)| \leqslant a_n \qquad x\in X, n\geqslant N$$

且$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,则$\{f_n(x)\}$在$X$上一致收敛于$f(x)$.

Proof.

对于任意$\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$使得对任意$n\geqslant N$有

$$|a_n|<\varepsilon$$

于是对任意$\varepsilon>0$,考虑满足上述条件的N,对任意$n\geqslant N$和$x\in X$有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n<\varepsilon$$

因而$\{f_n\left(x\right)\}$一致收敛于$f(x)$.

2.4 不一致收敛的判据I

设函数序列$\{f_n(x)\}$在X上收敛到极限函数$f(x)$.若存在常数$l>0$及点列$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$使得当$n\geqslant N(N\in\mathbb{N}^*)$时有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant l$$

则$\{f_n(x)\}$在X上不一致收敛.

这一定理还有一极限版本.

设函数序列$\{f_n(x)\}$在X上收敛到极限函数$f(x)$.若存在常数$l>0$及点列$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$使得

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=k\neq 0$$

则$\{f_n(x)\}$在X上不一致收敛.