北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1.(15分)

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos\sqrt{|x|}-2+x}{x^2}$$

Solution.

(1) 注意到$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\tan x}\right)\frac{1}{\tan 2x}&=\lim_{x\to 0}\frac{(\tan x-x)(1-\tan^2 x)}{2x\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-x}{2x^3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\tan^2 x}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 x}{6x^2}\cdot 1^2\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(2) 注意到$\sqrt[3]{1+x}=1+\dfrac{1}{3}x+o(x)$,$\ln(1+x)=x+o(x)$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{\left(\ln(1+x)\right)^2}&=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x^4+o(x^2)-1}{x^2+o(x^2)}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

(3) 取$y=kx$.注意到$\mathrm{e}^x=1+x+o(x)$,于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+(\mathrm{e}^y-1)^2}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{kx^2}{x^2+k^2x^2+o(x^2)}=\frac{k}{1+k^2}$$

于是取不同的k对应的路径所得的极限不同,因而原函数极限不存在.

2.(10分)

设欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的平面Ω过直线$x+1=y-3=\dfrac{z}{2}$,且与平面$3x-y-10z=4$垂直.

(1) **(5分)** 求Ω的标准方程.

(2) **(5分)** 已知以原点为球心的球面S与Ω相切,求S的方程.

Solution.

(1) 由题意可知$(3,-1,-10)$与Ω平行.设$\Omega: ax+by+cz+1=0$,于是有

$$\begin{cases} 3a-b-10c=0 \\ ax+b(x+4)+c(2x+2)+1\equiv 0 \end{cases}$$

解得$a=\dfrac{1}{7},b=-\dfrac{2}{7},c=\dfrac{1}{14}$.于是$\Omega$的方程为$2x-4y+z+14=0$.

(2) 设切点$P(x,y,z)$,Ω的法向量$\vec{u}=(2,-4,1)$与其上一点$M(-7,0,0)$.我们有

$$\left|\overrightarrow{OP}\right|=\left|\frac{\overrightarrow{OM}\cdot\vec{u}}{|\vec{u}|}\right|=\frac{14}{\sqrt{21}}=\frac{2\sqrt{21}}{3}$$

于是S的半径为$\dfrac{2\sqrt{21}}{3}$,因而其方程为$x^2+y^2+z^2=\dfrac{28}{3}$.

3.(10分)

回答下列问题.

(1) **(5分)** 设正整数$n\geqslant 3$,n元函数$u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$满足

$$u(x_1,\cdots,x_n)=\left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{2-n}{2}}$$

其中$\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2\neq 0$.试求$\displaystyle\sum_{k=1}^n u_{x_kx_k}$.

(2) **(5分)** 设常数$a\in\mathbb{R}$,设$h(x,t)=f(x+at)+g(x-at)$,其中$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$和$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$均有连续的二阶导函数.试求$h_{tt}-a^2h_{xx}$.

Solution.

(1) 对于任意给定的k,不妨令$S=\displaystyle\sum_{k=1}^n x_k^2$,令$S-x_k^2=S_k$.于是

$$u_{x_k}=\frac{\partial}{\partial x_k}\left(S_k+x_k^2\right)^{\frac{2-n}{2}}=\left(1-\frac{n}{2}\right)\left(S_k+x_k^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot(2x_k)$$

$$\begin{aligned} u_{x_kx_k}&=(2-n)\left(\left(S_k+x_k^2\right)^{-\frac{n}{2}}+x_k\cdot\left(-\frac{n}{2}\right)\left(S_k+x_k^2\right)^{-\frac{n+2}{2}}\cdot(2x_k)\right) \\ &=(2-n)\left(S_k+x_k^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\left(S_k+x_k^2-nx_k^2\right) \\ &=(2-n)S(S-nx_k^2) \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^n u_{x_kx_k}=(2-n)S\left(nS-\sum_{k=1}^n nx_k^2\right)=0$$

(2) 我们有

$$h_t = af'(x+at) - ag'(x-at)$$

$$h_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

同理有

$$h_x = f'(x+at) + g'(x-at)$$

$$h_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at)$$

于是

$$h_{tt} - a^2 h_{xx} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at) - a^2\left(f''(x+at) + g''(x-at)\right) = 0$$

4.(10分)

求函数$f(x,y) = x^{\sqrt{y}}$在$(1,1)$处的二阶泰勒多项式.

Solution.

在$(1,1)$处,我们有

$$f_x = \sqrt{y}x^{\sqrt{y}-1} = 1$$

$$f_y = \frac{x^{\sqrt{y}}\ln x}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$f_{xx} = \sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)x^{\sqrt{y}-2} = 0$$

$$f_{yy} = \frac{x^{\sqrt{y}}\ln^2 x + x^{\sqrt{y}}\ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}{4y} = 0$$

$$f_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\sqrt{y}x^{\sqrt{y}-1}\ln x + \frac{x^{\sqrt{y}}}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

于是

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)(y-1)}{2}$$

5.(10分)

设$t \in [0, 2\pi]$,$R > 0$,$a > 0$.求螺旋线$S: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = at \end{cases}$ 在$t = \dfrac{\pi}{4}$的切线和法平面的方程.

Solution.

$t=\dfrac{\pi}{4}$时对应点$\left(\dfrac{\sqrt{2}R}{2},\dfrac{\sqrt{2}R}{2},\dfrac{a\pi}{4}\right)$.又有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-R\sin t\qquad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=R\cos t\qquad\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=a$$

于是切线为$-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\left(x-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=\dfrac{R}{\sqrt{2}}\left(y-\dfrac{R}{\sqrt{2}}\right)=a\left(z-\dfrac{a\pi}{4}\right)$.

法平面为$-\dfrac{R}{\sqrt{2}}x+\dfrac{R}{\sqrt{2}}y+az=\dfrac{a^2\pi}{4}$.

6.(10分)

设$a,b,c\in\mathbb{R}$.试证明:方程$\mathrm{e}^x=ax^2+bx+c$的互异实根不超过三个.

Proof.

设$f(x)=ax^2+bx+c-\mathrm{e}^x$.于是$f'(x)=2ax+b-\mathrm{e}^x$,$f''(x)=2a-\mathrm{e}^x$,$f'''(x)=-\mathrm{e}^x$.

不妨设$f(x)=0$有至少四个互异实根,设其为$x_1,\cdots,x_4$,满足$x_1<\cdots<x_4$.

对于任意x_k,x_{k+1}(其中$1\leqslant k<4$),有$f(x_k)=f(x_{k+1})$.

根据Rolle中值定理,存在$\xi_k\in(x_k,x_{k+1})$使得$f'(\xi_k)=0$.

于是$f'(x)=0$至少有三个实根ξ_1,ξ_2,ξ_3.同理可知$f''(x)=0$至少有两个实根,$f'''(x)=0$至少有一个实根.

而$f'''(x)=-\mathrm{e}^x<0$,即$f'''(x)=0$没有实根,这与假设不符,从而$f(x)=0$至多有三个互异实根.

7.(10分)

证明:对于任意给定的$k\in\mathbb{R}$,存在1的开邻域U和W,存在唯一的函数$y=f(x),x\in U,y\in W$满足方程$x^k-3x^2y+3xy^2-y^k=0$.

Proof.

设$F(x,y)=x^k-3x^2y+3xy^2-y^k$,则有

$$F_x(x,y)=kx^{k-1}-6xy+3y^2\qquad F_y(x,y)=-ky^{k-1}+6xy-3x^2$$

若$k=3$,则有$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=0$,即$(x-y)^3=0$.这确定唯一的函数$y=f(x)=x$.

若$k\neq3$,则有$F_y(1,1)=k-3\neq0$.据隐函数存在定理,在$(1,1)$的邻域内$F(x,y)\equiv0$确定唯一的$y=f(x)$且

$$f'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{kx^{k-1}-6xy+3y^2}{ky^{k-1}-6xy+3x^2}$$

8.(15分)

求函数$f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3-4xyz$在$D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$上的最大值和最小值.

Solution.

我们有

$$f_x=3x^2-4yz \qquad f_y=3y^2-4xz \qquad f_z=3z^2-4xy$$

令$f_x=f_y=f_z=0$,解得$x=y=z=0$,而$f(0,0,0)=0$.

现在考虑D的边界.令$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda(x^2+y^2+z^2-1)$.令$F$的各偏导为0,有

$$\begin{cases} F_x=3x^2-4yz-2\lambda x=0 \\ F_y=3y^2-4xz-2\lambda y=0 \\ F_z=3z^2-4xy-2\lambda z=0 \\ F_\lambda=x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases}$$

令F_x,F_y与F_z两两相减有

$$\begin{cases} (x-y)(3x+3y+4z-2\lambda)=0 \\ (x-z)(3x+3z+4y-2\lambda)=0 \\ (y-z)(3y+3z+4x-2\lambda)=0 \end{cases}$$

若$x=y=z$,不难得出$x=y=z=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$或$x=y=z=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.此时有

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{1}{3\sqrt{3}} \qquad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$$

若x,y,z不全相等,不妨设$x=y$.于是有$(x-z)(7x+3z-2\lambda)=0$,即$\lambda=\dfrac{7x+3z}{2}$.代入$F_x=0$有

$$x(7z+4x)=0$$

若$x=0$,则有$y=0$,$z=\pm1$.此时有$f(0,0,1)=f(0,0,-1)=0$.

若$7z+4x=0$,则有$x^2+x^2+\dfrac{16}{49}x^2=1$,于是$x=y=-\dfrac{7}{4}z=\dfrac{7}{\sqrt{114}}$或$x=y=-\dfrac{7}{4}z=-\dfrac{7}{\sqrt{114}}$.此时有

$$f(x,y,z)=x^3+x^3-\frac{64}{343}x^3+\frac{16}{7}x^3=\frac{1406}{343}x^3$$

于是$f\left(\dfrac{7}{\sqrt{114}},\dfrac{7}{\sqrt{114}},-\dfrac{4}{\sqrt{114}}\right)=\dfrac{37}{3\sqrt{114}}$,$f\left(-\dfrac{7}{\sqrt{114}},-\dfrac{7}{\sqrt{114}},\dfrac{4}{\sqrt{114}}\right)=-\dfrac{37}{3\sqrt{114}}$.

于是$f(x,y,z)$的最大值为$\dfrac{37}{3\sqrt{114}}$,最小值为$-\dfrac{37}{3\sqrt{114}}$.

9.(10分)

设函数f在$[0,1]$二阶可微,且$f(0)=f(1)=0,\min\limits_{x\in[0,1]}f(x)=-1$.试证明:存在$\epsilon\in(0,1)$使得$f''(\epsilon)\geqslant 8$.

Proof.

设$f(x)$在$x=x_0$处取到最小值.将$f(x)$在$x=x_0$处做泰勒展开有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2},x\gtrless\xi\gtrless x_0$$

由于$f(x)$在$[0,1]$二阶可微,因而最小值点必然满足$f'(x_0)=0$.又$f(x_0)=-1$,于是有

$$f(x)=\frac{f''(\xi)(x-x_0)^2}{2}-1,x\gtrless\xi\gtrless x_0$$

分别取$x=0,1$有

$$\begin{cases}1=\dfrac{f''(\xi_1)x_0^2}{2}\\1=\dfrac{f''(\xi_2)(1-x_0)^2}{2}\end{cases}$$

由于$\min\{x_0,1-x_0\}\leqslant\dfrac{1}{2}$,于是

$$\max\{f''(\xi_1),f''(\xi_2)\}=\max\left\{\frac{2}{x_0^2},\frac{2}{(1-x_0)^2}\right\}\geqslant\frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2}=8$$