Toeplitz定理

Toeplitz定理

设正项序列$\{t_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} t_n = 0, \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ni} = 1$. 已知序列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 定义$x_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i t_{ni}, n \in \mathbb{N}^*$, 试证明: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Proof

由题意

$$x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i t_{ni} = \sum_{i=1}^{n} a t_{ni} + \sum_{i=1}^{n} (a_i - a) t_{ni} = a + \sum_{i=1}^{n} (a_i - a) t_{ni}$$

置$p_n = a_n - a$,则$\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 0$.于是根据收敛序列的有界性,$\exists M_p > 0$, s.t.$\forall n \in \mathbb{N}^*, |p_n| < M_p$.

对于任意$\varepsilon > 0$,取N_p使得$\forall n \geqslant N_p, |p_n| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

再取N_t使得$\forall n > N_t, t_n < \dfrac{\varepsilon}{2N_pM_p}$,于是

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{i=1}^{n} (a_i - a) t_{ni}\right| &\leqslant \sum_{i=1}^{n} |p_n| \, t_{ni} \\
&= \sum_{i=1}^{N_p} |p_n| \, t_{ni} + \sum_{i=N_p+1}^{n} |p_n| \, t_{ni} \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{N_p} \frac{\varepsilon \, |p_n|}{2N_pM_p} + \frac{\varepsilon}{2} \sum_{i=N_p+1}^{n} t_{ni} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

于是原命题得证.

Enhanced Theorem

将上述命题中的$\sum\limits_{i=1}^{n} t_{ni} = 1$改成$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} t_{ni} = 1$,原命题也成立.

Analysis.

再加入一个控制量ε_t描述和的偏差即可,证明过程略.

事实上,在**相乘序列的极限**一讲中的所有命题均可以用Toeplitz定理证明.

Problem.

试用Toeplitz定理证明Stolz定理.

Proof.

取$t_{ni}=\dfrac{b_{i+1}-b_i}{b_{n+1}-b_1}$.根据$\{b_n\}$单调递增可得$t_{ni}>0$.

而$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}t_{ni}=\frac{\sum_{i=1}^{n}(b_{i+1}-b_i)}{b_{n+1}-b_1}=1$.

对于每个固定的i,由$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty$可知$\displaystyle\lim_{n\to\infty}t_{ni}=0$.

置$c_n=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n-1}-b_n}$,不妨设$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=L$.

这样,使用Toeplitz定理的条件已经齐备.

置$\displaystyle x_n=\sum_{i=1}^{n}c_it_{ni}=\frac{a_n-a_1}{b_n-b_1}$,于是$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}c_n=L$, 即$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_1}{b_n}}{1-\frac{b_1}{b_n}}=L$.

于是$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n-1}-b_n}$,原命题得证.