

北京大学数学科学学院2023-24高等数学B2期中考试

1. (10分) 设 $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$, 求曲线积分

$$\int_L (3 + x) ds$$

2. (10分) 设 E 是曲线 $\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$ 沿逆时针方向. 求第二型曲线积分

$$\oint_E \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2}$$

3. (10分) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 2, y = x, y = x + 2$ 围成的有界闭区域, 求二重积分

$$\iint_D \left(\frac{1}{2}x - y \right) dx dy$$

4. (10分) 设曲面 $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$, 求曲面积分

$$\iint_M x dS$$

5. (10分) 求一阶常微分方程初值问题

$$y' = x + y^2, y(0) = 0$$

的皮卡序列的前两项 y_1, y_2 .

6. (10分) 求二阶常微分方程

$$y'' - 2y' + y = e^x$$

的通解.

7. (10分) 设有界闭区域 $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 2y^2 \leq z \leq 3 - 2x^2 - y^2\}$, S^- 是 V 的边界曲面的内侧, 求曲面积分

$$\iint_{S^-} (x^2 + y \sin z) dy dz - (2y + z \cos x) dz dx + (-2xz + x \sin y) dx dy$$

8. (15分) 设 $r > 0, f : (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $f(0) = 0$, 且 f 在 $x = 0$ 处可导. 对于 $t > 0$, 定义

$$V(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2 \right\}$$

试证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^5} \iiint_{V(t)} f \left(x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \right) dx dy dz = \pi f'(0)$$

9. (15分) 求出所有可导的 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 使得

$$f'(x) = xf(x) + x \int_0^1 tf(t) dt$$