

介值定理和压缩映照原理

在高等数学书中,虽然提到了介值定理,却并不要求它的证明.下面我们来证明介值定理.首先,需要引入确界原理.确界原理实际上是实数完备性的一种表现形式.

确界原理

任何上(下)方有界的非空集合一定存在上(下)界.

下面以上确界为例给出确界的定义.

设集合 S 满足 $S \subset \mathbb{R}$.若实数 α 满足:

(a) $\forall x \in S, x \leq \alpha$ (满足这一条即可称 α 为 S 的一个上界)

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S, \text{s.t. } x > \alpha - \varepsilon$

则称 α 为 S 的上确界. 下确界的定义类似,在此不再赘述.

我们记 S 的上确界为 $\sup S$,下确界为 $\inf S$.

现在我们根据确界原理来证明介值定理.

介值定理

设 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 为定义在 $[a, b]$ 上的连续函数,则 $\forall \eta \in \mathbb{R}$ 满足 $f(a) \leq \eta \leq f(b)$, $\exists \xi \in (a, b)$, s.t. $f(\xi) = \eta$.

证明:不妨设 $f(a) < \eta < f(b)$.

记集合 $S = \{x | f(x) \leq \eta\} \subset [a, b]$.由 $f(a) < \eta$ 可知 S 非空.易知 S 具有一个上界 b .

根据确界原理, S 存在上确界,记 $c = \sup S$.下面证明 $f(c) = \eta$.

首先,由于 $f(x)$ 在 $x = c$ 处连续,则 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.

采取反证法.若 $f(c) > \eta$,取 $\varepsilon = f(c) - \eta$,则 $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < f(c) - \eta$.

由于 c 是 S 的上确界,可知 $\exists y \in (c - \delta, c]$, s.t. $y \in S$.

此时有 $f(y) - f(c) > \eta - f(c)$,即 $f(y) > \eta$,这与 $y \in S$ 不符.故 $f(c) \leq \eta$.

若 $f(c) < \eta$,同理可知 $\exists \delta > 0$, s.t. $\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < \eta - f(c)$.

设 $y \in (c, c + \delta)$,则 $f(y) - f(c) < \eta - f(c)$,即 $f(y) < \eta$,从而 $y \in S$.又 $y > c$,这与 $c = \sup S$ 矛盾,故 $f(c) \geq \eta$.

综上所述, $f(c) = \eta$,原定理得证.

现在我们尝试运用介值定理来证明压缩映照原理.

压缩映照原理

设 $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续,且 $\exists q \in (0, 1)$, s.t. $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$, 则 $\exists c \in [a, b]$, s.t. $f(c) = c$.

Proof.

首先说明 $f(x)$ 的连续性.

$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \frac{\varepsilon}{q} > 0$, s.t. $\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}, |f(x) - f(x_0)| \leq q|x - x_0| \leq q\delta = \varepsilon$.

根据极限的定义有 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 即 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续, 进而 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续.

下面说明 $f(x)$ 存在唯一不动点.

假定存在 c_1, c_2 满足 $f(c_i) = c_i (i = 1, 2)$, 则 $|f(c_1) - f(c_2)| = |c_1 - c_2| > q|c_1 - c_2|$, 与题意不符.

故 $f(x)$ 至多有一个不动点.

记 $g(x) = f(x) - x$, 显然 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 连续. 下面说明 $g(x)$ 在 $[a, b]$ 上必然存在零点.

(1) 若 $g(a) = 0$ 或 $g(b) = 0$, 则 $g(x)$ 显然存在零点.

(2) 若 $g(a) > 0$ 且 $g(b) < 0$, 则根据介值定理可知 $\exists \xi \in (a, b)$ 使得 $g(\xi) = 0$.

综上, 原命题得证.

压缩映照原理还有两个引理.

Lemma 1

设 $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ 连续, 且 $\exists q \in (0, 1)$, s.t. $\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$.

设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_1 \in [a, b]$, $x_{n+1} = f(x_n)$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$ 且 $f(c) = c$.

Proof.

我们已经证明 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且存在唯一不动点.

下面说明 $\{x_n\}$ 收敛. 我们有

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - c| &= |f(x_n) - f(c)| \\ &\leq q|x_n - c| \\ &< |x_n - c| \end{aligned}$$

考虑序列 $\{y_n\}$, 其中 $y_n = |x_n - c|$.

根据上式可知 $|y_n|$ 单调递减, 又 $y_n > 0$, 故 $\{y_n\}$ 有极限.

从而 $\{x_n - c\}$ 的极限存在. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对递推式 $x_{n+1} = f(x_n)$ 两边取极限有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$$

即

$$A = f(A)$$

从而 $A = c$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = c$.

Lemma 2

设 $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists q \in (0, 1)$, s.t. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$, 则 $f(x)$ 连续且 $\exists! c \in \mathbb{R}$, s.t. $f(c) = c$.

Proof.

易知 $f(x)$ 的连续性和不动点少于或等于1个. 下面我们来证明 $f(x)$ 存在不动点.

记 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续.

由题意可知 $\exists q \in (0, 1)$, s.t. $\forall x, y \in \mathbb{R}, |g(x) - g(y) - x + y| \leq q |x - y|$.

不妨假定 $x > y$, 则有 $(1 - q)(x - y) \leq g(x) - g(y) \leq (1 + q)(x - y)$.

则有 $\forall x > y, g(x) > g(y)$ 且 $\frac{g(x) - g(y)}{x - y} \geq 1 - q$.

现在证明 $\exists a, b \in \mathbb{R}, g(a) \leq 0 \leq g(b)$.

我们采取反证法. 假设 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$. 取 $g(x_0) = p$, 则 $g(x_0 - \frac{p}{1 - q}) \geq g(x_0) + (1 - q) \cdot \frac{-p}{1 - q} = 0$.

这与 $g(x) < 0$ 不符. 同理 $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) > 0$ 也是不成立的.

根据介值定理, $\exists \xi \in [a, b]$, s.t. $g(\xi) = 0$, 即 $f(x)$ 存在不动点.

综上所述, $f(x)$ 在 \mathbb{R} 上连续且存在唯一不动点.