

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1. (10分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2}$$

2. (10分) 设欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的平面 $P: 2x + y - 3 = 0$ 和平面 $Q: x + 2y - z - 2 = 0$, 直线 $l = P \cap Q$ 是 P, Q 的交线. 求以原点 $O(0, 0, 0)$ 为球心, 与 l 相切的球面 S 的方程.

3. (10分) 下列函数极限是否存在? 若存在, 请求出其值; 若不存在, 请说明理由.

(1) (5分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + \tan^2 y}.$

(2) (5分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$

4. (10分) 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = z^3 + x^2z - 2y^3 = 0$ 确定的隐函数. 求 $z(x, y)$ 在 $(1, 1)$ 处最大的方向导数.

5. (15分) 求函数 $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式和带皮亚诺余项的二阶泰勒公式.

6. (15分) 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \sin(x + y) - y^2$$

试证明: 存在 \mathbb{R}^2 上 $(0, 0)$ 的开邻域 D 和 D 上的连续可微的可逆变换 $x, y: D \rightarrow \mathbb{R}$, 使得 $x(0, 0) = y(0, 0) = 0$, 并且对于任意 $(u, v) \in D$ 有

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2$$

7. (15分) 求欧氏空间 \mathbb{R}^3 中原点 $O(0, 0, 0)$ 到曲面

$$(x - y)^2 - z^2 = 4$$

上的点的最短距离.

8. (15分) 设 $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 是 $[-1, 1]$ 上的黎曼可积函数, $A \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$. 试证明:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{nf(x)}{1 + n^2x^2} dx = \pi A$$

注意: 本题没有假设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续.