

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期末考试

1. (10分) 证明:对于任意 $x \in \mathbb{R}$,存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$\arctan x = \frac{x}{1 + \theta^2 x^2}$$

成立.

2. (20分) 求出下面函数的极限.

(1) (10分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^4 x}{\sqrt{1 - \frac{x \sin x}{2}} - \sqrt{\cos x}}.$

- (2) (10分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$.对于实序列 $\{a_k\}_{k=1}^n$,求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

3. (15分) 设函数

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 5x^2}{(1 - 2x)(1 + x^2)}$$

在 $x = 0$ 处的 $2n + 1$ 阶泰勒公式.

4. (10分) 定义三元函数 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}, & (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0, & (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$$

回答下列问题.

- (1) (5分) 求函数 $f(x, y, z)$ 在 $(0, 0, 0)$ 处的三个偏导数.

- (2) (5分) $f(x, y, z)$ 在 $(0, 0, 0)$ 处是否可微?试证明之.

5. (15分) 设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都有连续的二阶导数.对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$, 定义 $h(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$, 试计算 $x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{yx}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y)$.

6. (20分) 设函数 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F(x, y, z) = x^3 + (y^2 - 1)z^3 - xyz$$

回答下列问题.

- (1) (5分) 证明:存在 \mathbb{R}^2 上 $(1, 1)$ 的邻域 D 使得 D 上由 $F(x, y, z) \equiv 0$ 确定唯一隐函数 $z = f(x, y)$ 且 $f(1, 1) = 1$.

- (2) (5分) 求出在 $(1, 1)$ 处函数 $z = f(x, y)$ 减少最快的方向上的单位向量 \vec{v} .

- (3) (10分) 设 \mathbb{R}^3 中平面 $x + 2y - 2z = 1$ 的 z 分量为正的法向量记为 \vec{u} .向量 $(\vec{v}, 0) \in \mathbb{R}^3$.求 \vec{u} 与 $(\vec{v}, 0)$ 的夹角余弦.

7. (10分) 给定正整数 $n \geq 3$,求单位圆的内接 n 边形面积的最大值.