北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期末考试

1. (10分) 设$\mathbb{R}^3$中平面$x+3y+2z=6$与x轴交点为A,与y轴交点为B,与z轴交点为C.

(1) (5分) 求$\triangle ABC$的面积.

(2) (5分) 求过四点$A,B,C,O(0,0)$的球面的方程.

2. (15分) 下面的二元函数的极限存在吗?如果存在,请求出其值;如果不存在,请说明理由.

(1) (5分) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{24\cos\sqrt{x^2+y^2}-24+12\left(x^2+y^2\right)}{\left(\tan\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}$.

(2) (5分) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x+\ln(1+y))\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

(3) (5分) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x\sin y}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

3. (10分) 设$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都有连续的二阶导数.对于任意$x,y\in\mathbb{R}$, 定义$h(x,y)=xg\left(\dfrac{y}{x}\right)+f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 试计算$x^2h_{xx}(x,y)+2xyh_{yx}(x,y)+y^2h_{yy}(x,y)$.

4. (10分) 求$\mathbb{R}^2$中曲线$\mathrm{e}^{xy}+xy+y^2=2$在$(0,1)$处的切线方程.

5. (10分) 设三元函数$f(x,y,z)=\left(\dfrac{2x}{z}\right)^y, z\neq 0$.求$f$在点$\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$处下降最快的方向上的单位向量.

6. (10分) 求二元函数$f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$(2,2)$处的二阶泰勒多项式.

7. (10分) 求函数$f(x)=(\sin x)^{\frac{2}{3}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}$在闭区间$\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$上的最小值,并指明所有最小值点.

8. (10分) 证明:对于任意给定的$k\in\mathbb{R}$,存在0的开邻域U和W,存在唯一的函数$y=f(x),x\in U,y\in W$满足方程$\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}=0$.

9. (15分) 设r是正实数,$D=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}$,函数$f:D\to\mathbb{R}$满足$f\in C^3(D)$, $f(0,0)=0$, f在点$(0,0)$处的一阶全微分$\mathrm{d}f(0,0)=0$.f在点$(0,0)$处的二阶全微分满足

$$\mathrm{d}^2f(0,0)=E\left(\Delta x\right)^2+2F\Delta x\Delta y+G\left(\Delta y\right)^2$$

其中E,F,G均为常数.

(1) (10分) 证明:存在D上的两个函数$a,b:D\to\mathbb{R}$使得$\forall(x,y)\in D$有

$$f(x,y)=xa(x,y)+yb(x,y), a(0,0)=b(0,0)=0$$

(2) (5分) 若$E>0, EG-F^2<0$,则在$\mathbb{R}^3$中点$(0,0,0)$的充分小邻域中,曲面$z=f(x,y)$充分近似于哪一类二次曲面?画出此类二次曲面的草图. 从此类二次曲面的几何形状判断是否存在$\mathbb{R}^2$中点$(0,0)$的充分小邻域D_1,存在D_1上的一一对应的C^1变量变换$x=x(u,v),y=y(u,v)$使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2$$