

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中考试

1.(10分) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 1, y = x, y = x + 1$ 所围成的有界闭区域,求二重积分

$$\iint_D (4y - 2x) dx dy$$

Solution.

做变换 $u = y, v = y - x$,则变换的Jacobi行列式

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

积分区域变换为 $D' : 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.于是

$$\begin{aligned} \iint_D (4y - 2x) dx dy &= \iint_{D'} 2(u + v) du dv \\ &= 2 \int_0^1 dv \int_0^1 (u + v) du \\ &= 2 \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + v \right) dv \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2.(10分) 设 V 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 围成的四面体,求三重积分

$$\iiint_V \frac{1}{(1 + x + y + z)^2} dV$$

Solution.

考虑平面 $D_z = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, x + y \leq 1 - z\}$,则有

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{1}{(1 + x + y + z)^2} dV &= \int_0^1 dz \iint_{D_z} \frac{d\sigma}{(1 + x + y + z)^2} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} \frac{dy}{(1 + x + y + z)^2} \\ &= \int_0^1 dz \int_0^{1-z} \left(\frac{1}{1 + x + z} - \frac{1}{2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \left(\ln 2 - \ln(1 + z) - \frac{1}{2}(1 - z) \right) dz \\ &= \frac{3}{4} - \ln 2 \end{aligned}$$

3.(10分) 设 E 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$,求曲线积分

$$\int_E |xy| \, ds$$

Solution.

做代换 $x = \cos \theta, y = 2 \sin \theta$,则有

$$\begin{aligned} \int_E |xy| \, ds &= \int_0^{2\pi} |2 \sin \theta \cos \theta| \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} \, d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 \theta + 4 \cos^2 \theta} \sin \theta \cos \theta \, d\theta \\ &\stackrel{t=\sin \theta}{=} 8 \int_0^1 t \sqrt{4 - 3t^2} \, dt \\ &\stackrel{u=t^2}{=} 4 \int_0^1 \sqrt{4 - 3u} \, du \\ &= 4 \left(-\frac{2}{9} (4 - 3u)^{\frac{3}{2}} \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{56}{9} \end{aligned}$$

4.(15分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$,有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) : 0 \leq t \leq n\pi\}$.求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} e^{y^2 - x^2} \cos(2xy) \, dx + e^{y^2 - x^2} \sin(2xy) \, dy$$

Solution.

考虑有向直线 $T_n = \{(x, 0) : 0 \leq x \leq n\pi\}$.

L_n 的负向和 T_n 共同构成区域 $D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq n\pi, 0 \leq y \leq |\sin x|\}$ 的正向边界.

令 $P(x, y) = e^{y^2 - x^2} \cos(2xy), Q(x, y) = e^{y^2 - x^2} \sin(2xy)$,不难得出 P, Q 在 D 上可微,并且

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{y^2 - x^2} \cos(2xy) - e^{y^2 - x^2} 2x \sin(2xy) = 2e^{y^2 - x^2} (y \cos(2xy) - x \sin(2xy))$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -2xe^{y^2 - x^2} \sin(2xy) + e^{y^2 - x^2} 2y \cos(2xy) = 2e^{y^2 - x^2} (y \cos(2xy) - x \sin(2xy))$$

在 D 上使用Green公式可得

$$\int_{(L_n)^- + T_n} P \, dx + Q \, dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \, d\sigma = \iint_D 0 \, d\sigma = 0$$

在直线 T_n 上有

$$\int_{T_n} Pdx + Qdy = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx$$

于是

$$\int_{L_n} Pdx + Qdy = \int_{T_n} Pdx + Qdy = \int_0^{n\pi} e^{-x^2} dx$$

现在考虑上述积分.我们有

$$\begin{aligned} \left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 &= \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx \\ &= \iint_{x,y \geq 0} e^{-x^2-y^2} dx dy \\ &= \iint_{0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, r \geq 0} re^{-r^2} dr d\theta \\ &\stackrel{t=r^2}{=} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{+\infty} e^{-t} dt \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} Pdx + Qdy = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

5.(10分) 设 S 是曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$.求曲面积分

$$\iint_S x dS$$

Solution.

由题意可得 S 是圆柱的侧面.根据积分区域和被积函数的对称性,我们可以考虑第一卦限内的曲面 S_1 .

在 S_1 上有 $z = \sqrt{1-x^2}$,投影区域为 $D_1 : [0, 1] \times [0, 1]$,于是

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} x dS &= \iint_{D_1} x \sqrt{1 + \left(-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \right)^2} + 0 d\sigma \\ &= \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &\stackrel{t=x^2}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 dy \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

于是

$$\iint_S x dS = 4 \iint_{S_1} x dS = 4$$

6.(10分) 设 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,求曲面积分

$$\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdx dy$$

Solution.

S 的单位外法向量为 $\mathbf{n} = (x, y, z)$.于是

$$\begin{aligned}\iint_{S^+} xdydz + ydzdx + zdx dy &= \iint_S (x, y, z) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S (x^2 + y^2 + z^2) dS \\ &= \iint_S dS \\ &= 4\pi\end{aligned}$$

7.(15分) 设平面直角坐标系 Oxy 中有曲线 $L: \{(x, y(x)) : x \geq 0\}$,其中 $y(0) = 1, y(x)$ 是严格递减的正的可导函数.任取 L 上一点 M , L 在 M 点的切线交 x 轴于 A 点,假定 $|MA| \equiv 1$.写出 $y = y(x)$ 满足的一阶常微分方程,并求解该方程对应的初值问题 $y(0) = 1$.

Solution.

设 $M(x_M, y(x_M))$,则此处的切线方程 $l_m: y = y'(x_M)(x - x_M) + y(x_M)$.

于是 l_m 交 x 轴于 $A\left(-\frac{y(x_M)}{y'(x_M)} + x_M, 0\right)$.由 $|MA| \equiv 1$ 可知

$$\left(\frac{y}{y'}\right)^2 + y^2 = 1$$

由于 $y(x)$ 恒正且严格递减,于是 $y > 0 > y'$.于是 $\frac{y}{y'} = -\sqrt{1 - y^2}$,即

$$\frac{\sqrt{1 - y^2} dy}{y} = -dx$$

而

$$\begin{aligned}\int \frac{\sqrt{1 - y^2}}{y} dy &\stackrel{y=\sin t}{=} \int \frac{\cos^2 t}{\sin t} dt \\ &= \int \left(\frac{1}{\sin t} - \sin t \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \right| + \cos t + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \right| + \sqrt{1 - y^2} + C\end{aligned}$$

于是对上式两边积分可得

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{1 - \sqrt{1 - y^2}}{1 + \sqrt{1 - y^2}} \right| + \sqrt{1 - y^2} + C = -x$$

即

$$\ln \left(1 - \sqrt{1 - y^2} \right) - \ln y + \sqrt{1 - y^2} + x = C$$

代入初值 $y(0) = 1$ 可得该初值问题的解为

$$\ln \left(1 - \sqrt{1 - y^2} \right) - \ln y + \sqrt{1 - y^2} + x = 1$$

8.(10分) 求常微分方程

$$y'' + 4y = \sin 3x$$

的通解.

Solution.

对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm 2i$,于是原方程的通解为

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$$

令 $y = \alpha \sin 3x$,代入原方程可得

$$-9\alpha \sin 3x + 4\alpha \sin 3x = \sin 3x$$

于是 $\alpha = -\frac{1}{5}$,于是原方程的特解为

$$y = -\frac{1}{5} \sin 3x$$

于是原方程的通解为

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{5} \sin 3x$$

9.(10分) 回答下列问题.

(1) 设 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$,写出一个在 D 上可微的函数 $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ 且满足

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

(2) 设 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,试证明:不存在函数 $U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 U 在 Ω 上可微,且满足

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

Solution.

(1) 令 $T = \arctan \frac{y}{x}$ 即可.

(2) 令圆周 $C: x^2 + y^2 = 1 (\varepsilon > 0)$, 定向为逆时针方向. 考虑第二型曲线积分

$$\oint_{C^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_{C^+} \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right) = U(1, 0) - U(1, 0) = 0$$

另一方面

$$\oint_{C^+} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \oint_C \frac{y^2 ds + x^2 ds}{x^2 + y^2} = \oint_C ds = 2\pi$$

这与题设矛盾, 因而命题不成立.