定积分在几何中的应用

一.曲线的弧长

我们假定平面中的曲线l由以下参数方程给出:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$$

其中$t \in [\alpha, \beta]$.当$x'(t), y'(t)$均存在时,曲线上每一点都可以作出对应的切线,我们称这样的曲线是光滑的.光滑曲线的弧长总是可以计算的.

下面我们来详细推导曲线弧长的计算公式.将$[\alpha, \beta]$分为n份,满足

$$\alpha < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < \beta$$

设$t_0 = \alpha, t_n = \beta$,并记$t_i$对应的点为$x_i, y_i$.则弧长$s$可以近似的表示为下式:

$$s \approx \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_i - y_{i-1})^2}$$

当n充分大,即t_{i-1}与t_i充分接近时有

$$x_i - x_{i-1} = x'(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$y_i - y_{i-1} = y'(t_i)(t_i - t_{i-1})$$

记$\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$代入原式,对$n$取极限有

$$\begin{aligned} s &= \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x'(t_i))^2 + (y'(t_i))^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \mathrm{d}t \end{aligned}$$

由此,我们可以给出其它表达形式下曲线的弧长公式

$$\text{一般形式}: s = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} \mathrm{d}x$$

$$\text{极坐标形式}: s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(r(\theta))^2 + (r'(\theta))^2} \mathrm{d}\theta$$

二.旋转体的体积

这一部分并不难理解,推导过程也略去,仅给出结果.实际上,这与积分求面积采取的思想是一样的.

曲线$l: y = f(x), x \in [a, b]$绕$x$轴旋转一周形成旋转体的体积为

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) \mathrm{d}x$$

三.旋转体的侧面积

容易想到将旋转体分为小段的圆柱体并将其侧面积求和,具体算法与曲线弧长相似.下面给出结果.

曲线$l: y = f(x), x \in [a, b]$绕$x$轴旋转一周形成旋转体的侧面积为

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} \mathrm{d}x$$

参数方程和极坐标方程亦是同理,在此不再赘述.