Cauchy命题

关于数列$\{a_n\}$前n项的均值与$\{a_n\}$的关系,我们有如下命题:

Cauchy's Proposition

若数列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} = A$.

Analysis.

我们可以从直觉感受到这个命题是成立的,然而不难发现均值的收敛速度总是慢于原数列的. 因此在证明时,我们需要通过一定的分割使均值变成可控制大小的两项,从而证明该命题.

Proof.

由$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$有

$$\forall \varepsilon_a > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.} \forall n \geqslant N, |a_n - A| \leqslant \varepsilon_a.$$

由收敛序列的有界性可知$\exists M_a > 0, \text{s.t.} \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n - A| \leqslant M_a$.则

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - A| \leqslant M_a(N_a - 1) + \varepsilon_a(n + 1 - N_a) = (M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1) + n\varepsilon_a$$

对于任意$\varepsilon > 0$,取$0 < \varepsilon_a < \varepsilon$和对应的$N_a, M_a$.

要使$\left|\dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} - A\right| \leqslant \varepsilon$,根据绝对值三角不等式有

$$\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} - A\right| = \frac{1}{n}\left|\sum_{i=1}^{n} (a_i - A)\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i - A|$$

又$n \geqslant N_a$时

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i - A| \leqslant \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{n} + \varepsilon_a$$

令

$$\frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{n} + \varepsilon_a \leqslant \varepsilon$$

解得

$$n \geqslant \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{\varepsilon - \varepsilon_a}$$

则$\exists N = \max\left\{\left[\dfrac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{\varepsilon - \varepsilon_a}\right] + 1, N_a\right\}, \text{s.t.}$

$$\forall n \geqslant N, \left|\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} - A\right| \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |a_i - A| < \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1) + N\varepsilon_a}{N} \leqslant \varepsilon$$

从而原命题得证.

下面我们来看两道与Cauchy命题有一定相关的问题.

例1(24.10.09 SJTU数分小测).

数列$\{x_n\}$满足对于$\{x_n\}$的任意子列$\{x_{n_k}\}$均有$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{k}x_{n_i}}{k}=1$.**试证明:** $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Proof.

采取反证法.假定$\{x_n\}$不收敛或不收敛于1,则有

$$\exists\varepsilon>0,\forall N\in\mathbb{N}^*,s.t.\exists n\geqslant N,|x_n-1|>\varepsilon$$

也即$\{x_n\}$中有无穷多项x_i满足$|x_n-1|>\varepsilon$.

我们将这些项分为$\{x_n\}$的两个子序列$\left\{x_{n_+}\right\},\left\{x_{n_-}\right\}$, 满足

$$\forall x_i\in\left\{x_{n_+}\right\},x_i>1+\varepsilon$$
$$\forall x_j\in\left\{x_{n_-}\right\},x_j<1-\varepsilon$$

则$\left\{x_{n_+}\right\},\left\{x_{n_-}\right\}$中至少有一个为无穷序列.

当$\left\{x_{n_+}\right\}$或$\left\{x_{n_-}\right\}$为无穷序列时有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}x_{n_{+,i}}}{k}\geqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}1+\varepsilon}{k}=1+\varepsilon>1$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}x_{n_{-,i}}}{k}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}1-\varepsilon}{k}=1-\varepsilon<1$$

而根据题意,若$\{x_{n_+}\}$或$\{x_{n_-}\}$为无穷序列,则有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}x_{n_{+,i}}}{k}=\lim_{k\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{k}x_{n_{-,i}}}{k}=1$$

矛盾.故$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

由上可知,Cauchy命题的逆命题并不成立,需要把它加强至$\{x_n\}$的任意子列才可以推出正确的结果.

例2(24.10.09 SJTU数分小测).

正项数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}=a,a\in\mathbb{R}$.**试证明:** $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n^2}=0$.

Proof.

若$\{x_n\}$有界,设其上界为M,则有

$$0\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n^2}\leqslant\frac{M^2}{n}$$

两边夹逼可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n^2}=0$.

若$\{x_n\}$无界,则有

$$\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}^*,\text{s.t.}x_n>\varepsilon$$

设$M_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i\}$,在$i=k$处取到,则有

$$0\leqslant\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n^2}\leqslant\frac{M_n}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$$

由于$\{x_n\}$是无界的,则$n\to\infty$时有$k\to\infty$.若不然,则x_k是$\{x_n\}$的上界,矛盾.
我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}-\frac{n-1}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{n-1}\right)\\&=a-1\cdot a=0\end{aligned}$$

从而

$$0\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{M_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_k}{n}\leqslant\lim_{k\to\infty}\frac{x_k}{k}=0$$

则

$$\lim_{\to\infty}\left(\frac{M_n}{n}\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}\right)=0\cdot a=0$$

对上面提到的不等式夹逼可得$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}{n^2}=0$,从而2原命题得证.