

二重积分

1. 二重积分的定义与基本性质

一元函数的Riemann积分是通过“分割-近似代替-求和-取极限”的过程完成的.关于多元函数的重积分也是通过类似步骤定义的.

考虑二元函数 $z = f(x, y)$ 在一个由有线条光滑曲线围成的平面区域 D 上有定义.对 D 作分割如下

$$D = D_1 \cup \cdots \cup D_n$$

且 $\forall 1 \leq j < k \leq n, D_j \cap D_k = \emptyset$.我们用 $\Delta\sigma_i$ 表示 D_i 的面积,并用 λ 表示 D_i 的直径的最大者.所谓 D_i 的直径是指 D_i 中任意两点的距离的最大值.于是,仿照一元Riemann积分的定义,我们可以做如下定义.

1.1 定义:二重积分

设 $z = f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上有定义.若对于 D 的任意分割 $\{D_1, \cdots, D_n\}$ 及任意选定的 $(x_i, y_i) \in D_i (i = 1, \cdots, n)$,当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,和式

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta\sigma_i$$

总有极限,则称该极限为 $z = f(x, y)$ 在 D 上的**二重积分**,记作

$$\iint_D f(x, y) d\sigma \quad \text{或} \quad \iint_D f(x, y) dx dy$$

我们对二元函数是否可积不做详细讨论,只是指出:一个在有界闭区域上连续的二元函数是可积的.更一般地说,一个在有界闭区域上的分片连续有界函数是可积的.所谓分片连续有界函数,是指将原定义域分解成有限个小区域,在每个小区域上函数是有界连续的.

类似一元积分,二重积分具有如下性质.

1.2 二重积分的性质

(1) 常数因子可分离.

$$\iint_D k f(x, y) dx dy = k \iint_D f(x, y) dx dy$$

(2) 对被积函数的可加性.

$$\iint_D [f(x, y) + g(x, y)] dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy + \iint_D g(x, y) dx dy$$

(3) 对积分区域的可加性.

若 $D = D_1 \cup D_2$ 且 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$,那么

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(x, y) dx dy + \iint_{D_2} f(x, y) dx dy$$

(4) 积分保持不等号.

若对于任意 $(x, y) \in D$, 都有

$$f(x, y) \leq g(x, y)$$

那么

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy$$

特别地, 由上式可以推出

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy$$

(5) 积分中值定理.

若 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 那么存在 $(x_0, y_0) \in D$ 使得

$$\iint_D f(x, y) dx dy = f(x_0, y_0) \iint_D dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S$$

其中 S 即 D 的面积.

2. 二重积分的计算

我们有如下计算二重积分的定理.

2.1 直角坐标系下二重积分的计算

设 $f(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 且 D 是由两直线 $x = a, x = b (a < b)$ 以及两连续曲线 $y = \phi_1(x), y = \phi_2(x) (\phi_1(x) < \phi_2(x), a \leq x \leq b)$ 围成, 则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right] dx$$

或写成

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \right]$$

在这个定理中交换 x, y 也是成立的, 有时积分区域更适合交换后的计算方法.

对于某些时候, 用极坐标代换来计算二重积分会更加方便. 为了导出所要的公式, 我们用极坐标系中的曲线族

$$\{(r, \theta) : r \text{ 是常数}\} \quad \{(r, \theta) : \theta \text{ 是常数}\}$$

对被积区域做分割. 假定 D 中的点转换为极坐标时, 矢径 r 的最小值为 A , 最大值为 B ; 极角 θ 的最小值为 α , 最大值为 β , 那么区域 D 就落在扇形域

$$S = \{(r, \theta) : r \in [A, B], \theta \in [\alpha, \beta]\}$$

内. 现在,对 $[A, B]$ 和 $[\alpha, \beta]$ 做分割

$$A = r_0 < r_1 < \cdots < r_m = B$$

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_n = \beta$$

这样 D 就可以被分割为若干个小扇形域

$$D_{i,j} = \{(r, \theta) : r_j \leq r < r_{j+1}, \theta_i \leq \theta < \theta_{i+1}\}$$

严格来说,在 D 的边界上有时并不能分成这样的小扇形,但分割地充分精细时,这类误差的区域充分小,可以近似忽略. 令 λ 为 $D_{i,j}$ 中直径最大者,那么根据二重积分的定义可知

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(P_{i,j}) \Delta \sigma_{i,j}$$

其中 $P_{i,j}$ 表示 $D_{i,j}$ 中的一点, $\Delta \sigma_{i,j}$ 表示 $D_{i,j}$ 的面积.

由于 $P_{i,j}$ 的选取是任意的,故我们取 $P_{i,j} = (r_j \cos \theta_i, r_j \sin \theta_i)$.

现在计算 $D_{i,j}$ 的面积.取 $\Delta r_j = r_{j+1} - r_j$, $\Delta \theta_i = \theta_{i+1} - \theta_i$,则有

$$\Delta \sigma_{i,j} = \frac{1}{2} \Delta \theta_i (r_{i+1}^2 - r_i^2) = r_j \Delta r_j \Delta \theta_i + \frac{1}{2} (\Delta r_j)^2 \Delta \theta_i$$

当 $\lambda \rightarrow 0$ 时,后一项是比 $\Delta r_j \Delta \theta_i$ 更高阶的无穷小量,在求极限时可以忽略.于是我们有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i,j} f(r_j \cos \theta_i, r_j \sin \theta_i) r_j \Delta r_j \Delta \theta_j$$

定义 $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)r$,则

$$\iint_D d(x, y) dx dy = \iint_{D'} F(r, \theta) dr d\theta$$

其中 $D' = \{(r, \theta) : (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D\}$.于是我们有

2.2 极坐标系下二重积分的计算

令 $D' = \{(r, \theta) : (r \cos \theta, r \sin \theta) \in D\}$,则有

$$\iint_D d(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

极坐标变换使我们思考,在更一般的双射的变换下如何计算重积分. 事实上,有如下定理.

2.3 二重积分的一般变量替换公式

设有界闭区域 D, D' 间存在双射 $D' \rightarrow D : (\xi, \eta) \mapsto (x, y)$,其中 $x = \mathbf{x}(\xi, \eta), y = \mathbf{y}(\xi, \eta)$ 在 D' 内有连续偏导数,且变换的Jacobi行列式处处不为0.设 $z = f(x, y)$ 在 D 内连续,则有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(\mathbf{x}(\xi, \eta), \mathbf{y}(\xi, \eta)) \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta$$

定理的证明方法从略,可以参考书上内容,主要是证明变换前后的面积元间的比例即为Jacob行列式.