

Cauchy命题

关于数列 $\{a_n\}$ 前 n 项的均值与 $\{a_n\}$ 的关系,我们有如下命题:

Cauchy's Proposition

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = A$.

Analysis.

我们可以从直觉感受到这个命题是成立的,然而不难发现均值的收敛速度总是慢于原数列的. 因此在证明时,我们需要通过一定的分割使均值变成可控制大小的两项,从而证明该命题.

Proof.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ 有

$$\forall \varepsilon_a > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{s.t.} \forall n \geq N, |a_n - A| \leq \varepsilon_a.$$

由收敛序列的有界性可知 $\exists M_a > 0, \text{s.t.} \forall n \in \mathbb{N}^*, |a_n - A| \leq M_a$. 则

$$\sum_{i=1}^n |a_i - A| \leq M_a(N_a - 1) + \varepsilon_a(n + 1 - N_a) = (M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1) + n\varepsilon_a$$

对于任意 $\varepsilon > 0$, 取 $0 < \varepsilon_a < \varepsilon$ 和对应的 N_a, M_a .

要使 $\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - A \right| \leq \varepsilon$, 根据绝对值三角不等式有

$$\left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - A \right| = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^n (a_i - A) \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - A|$$

又 $n \geq N_a$ 时

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - A| \leq \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{n} + \varepsilon_a$$

令

$$\frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{n} + \varepsilon_a \leq \varepsilon$$

解得

$$n \geq \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{\varepsilon - \varepsilon_a}$$

则 $\exists N = \max \left\{ \left\lceil \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1)}{\varepsilon - \varepsilon_a} \right\rceil + 1, N_a \right\}, \text{s.t.}$

$$\forall n \geq N, \left| \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - A \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |a_i - A| < \frac{(M_a - \varepsilon_a)(N_a - 1) + N\varepsilon_a}{N} \leq \varepsilon$$

从而原命题得证.

下面我们来看两道与Cauchy命题有一定相关的问题.

例1(24.10.09 SJTU数分小测).

数列 $\{x_n\}$ 满足对于 $\{x_n\}$ 的任意子列 $\{x_{n_k}\}$ 均有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k x_{n_i}}{k} = 1$. 试证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

Proof.

采取反证法. 假定 $\{x_n\}$ 不收敛或不收敛于1, 则有

$$\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } \exists n \geq N, |x_n - 1| > \varepsilon$$

也即 $\{x_n\}$ 中有无穷多项 x_i 满足 $|x_i - 1| > \varepsilon$.

我们将这些项分为 $\{x_n\}$ 的两个子序列 $\{x_{n_+}\}, \{x_{n_-}\}$, 满足

$$\forall x_i \in \{x_{n_+}\}, x_i > 1 + \varepsilon$$

$$\forall x_j \in \{x_{n_-}\}, x_j < 1 - \varepsilon$$

则 $\{x_{n_+}\}, \{x_{n_-}\}$ 中至少有一个为无穷序列.

当 $\{x_{n_+}\}$ 或 $\{x_{n_-}\}$ 为无穷序列时有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k x_{n_+, i}}{k} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k 1 + \varepsilon}{k} = 1 + \varepsilon > 1$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k x_{n_-, i}}{k} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k 1 - \varepsilon}{k} = 1 - \varepsilon < 1$$

而根据题意, 若 $\{x_{n_+}\}$ 或 $\{x_{n_-}\}$ 为无穷序列, 则有

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k x_{n_+, i}}{k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^k x_{n_-, i}}{k} = 1$$

矛盾. 故 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

由上可知, Cauchy命题的逆命题并不成立, 需要把它加强至 $\{x_n\}$ 的任意子列才可以推出正确的结果.

例2(24.10.09 SJTU数分小测).

正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = a, a \in \mathbb{R}$. 试证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = 0$.

Proof.

若 $\{x_n\}$ 有界, 设其上界为 M , 则有

$$0 \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} \leq \frac{M^2}{n}$$

两边夹逼可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = 0$.

若 $\{x_n\}$ 无界, 则有

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } x_n > \varepsilon$$

设 $M_n = \max_{1 \leq i \leq n} \{x_i\}$, 在 $i = k$ 处取到, 则有

$$0 \leq \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} \leq \frac{M_n}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

由于 $\{x_n\}$ 是无界的, 则 $n \rightarrow \infty$ 时有 $k \rightarrow \infty$. 若不然, 则 x_k 是 $\{x_n\}$ 的上界, 矛盾.

我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} \right) \\ &= a - 1 \cdot a = 0 \end{aligned}$$

从而

$$0 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_k}{n} \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{x_k}{k} = 0$$

则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{M_n}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) = 0 \cdot a = 0$$

对上面提到的不等式夹逼可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = 0$, 从而原命题得证.