北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期中考试

1.(10分)

求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2024+\sin\left(\mathrm{e}^{n}\right)}$$

Solution.

由$-1\leqslant\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)\leqslant 1$可知

$$\sqrt[n]{2023}\leqslant\sqrt[n]{2024+\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)}\leqslant\sqrt[n]{2025}$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2023}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2025}=0$$

于是根据夹逼准则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{2024+\sin\left(\mathrm{e}^{x}\right)}=0$$

2.(10分)

求函数极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\cos 2x}\right)^{\csc^2 x}$$

Solution.

置$u=\sin^2 x$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+2\sin^2 x}{\cos 2x}\right)^{\csc^2 x}&=\lim_{u\to 0^+}\left(\frac{1+2u}{1-2u}\right)^{\frac{1}{u}}\\&=\lim_{u\to 0^+}\left(1+\frac{4u}{1-2u}\right)^{\frac{1-2u}{4u}\cdot\frac{4}{1-2u}}\\&=\mathrm{e}^4\end{aligned}$$

3.(10分)

求定义在$(-1,1)$上的函数

$$f(x)=\int_0^{\arcsin x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}$$

的二阶导函数$f''(x)$.

Solution.

置$y=\arcsin x$,则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\int_0^y\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+\sin^2 t}}}{\mathrm{d}y}\cdot(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 y}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

于是

$$f''(x)=-\frac{1}{2}\left(1-x^4\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-4x^3)=\frac{2x^3}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

4.(10分)

求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)$$

Solution.

注意到$0<\frac{1}{kn^k}\leqslant\frac{1}{n}$,于是

$$\frac{k-1}{n}\leqslant\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}<\frac{k}{n}$$

根据Riemann积分的定义可知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{kn^k}\right)=\int_0^1\cos x\mathrm{d}x=\sin 1$$

5.(15分)

求不定积分

$$\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x$$

Solution.

设

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}=\frac{A}{2x-1}+\frac{B}{2x+3}+\frac{C}{2x-5}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{A(4x^2-4x-15)+B(4x^2-12x+5)+C(4x^2+4x-3)}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} \\
&= \frac{4(A+B+C)x^2+4(C-A-3B)x+(5B-15A-3C)}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}
\end{aligned}
$$

从而

$$
\begin{cases}
A+B+C=1 \\
C-A-3B=1 \\
5B-15A-3C=-11
\end{cases}
$$

解得$A=\dfrac{1}{2},B=-\dfrac{1}{4},C=\dfrac{3}{4}$.
从而

$$
\begin{aligned}
\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2x+3}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2x-5}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+3}+\frac{3}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{2x-5} \\
&= \frac{1}{4}\ln|2x-1|-\frac{1}{8}\ln|2x+3|+\frac{3}{8}\ln|2x-5|+C
\end{aligned}
$$

6.(10分)

设欧氏空间中V是曲线弧$y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{\pi}}(1\leqslant x\leqslant 2)$与直线$x=1,x=2$围成的曲边三角形绕$x$轴旋转一周形成的旋转体,求$V$的体积.

Solution.

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_1^2 y^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^2\frac{(\ln x)^2\,\mathrm{d}x}{\pi}=\int_1^2(\ln x)^2\,\mathrm{d}x \\
&= x(\ln x)^2\Big|_1^2+\int_1^2 x\mathrm{d}(\ln x)^2 \\
&= 2(\ln 2)^2+\int_1^2 2\ln x\mathrm{d}x \\
&= 2(\ln 2)^2+2\,(x\ln x-x)|_1^2 \\
&= 2(\ln 2)^2+4\ln 2-2
\end{aligned}
$$

7.(15分)

试证明:方程

$$x^{18}+x^{12}-\cos x=0$$

在$\mathbb{R}$上根的个数为2.

Proof.

设$f(x)=x^{18}+x^{12}-\cos x$,于是$f(-x)=f(x),f(0)=-1$.

当$x>0$时,有

$$f'(x)=18x^{17}+12x^{11}+\sin x$$

于是$x\in(0,\pi)$时有$f'(x)>0$,即$f(x)$在$(0,\pi)$严格单调递增.

又$-1=f(0)<0<f(\pi)=\pi^{18}+\pi^{12}$,于是存在唯一$\xi\in(0,\pi)$, s.t.$f(\xi)=0$.

当$x\geqslant\pi$时$f(x)\geqslant\pi^{18}+\pi^{12}-1>0$,没有零点.

于是存在唯一$\xi\in(0,+\infty)$, s.t.$f(\xi)=0$.

根据偶函数的性质,$f(x)=0$当且仅当$x=\pm\xi$,于是原方程在$\mathbb{R}$上有且仅有两个实根$\xi,-\xi$,证毕.

8.(15分)

设$D=[0,1]$,函数$A,B:D\to\mathbb{R}$在D上连续,且

$$\forall x\in D,0\leqslant A(x)\leqslant 1$$

对于D上的连续函数$f:D\to\mathbb{R}$,定义

$$T_f(x)=B(x)+\int_0^x A(x)f(x)$$

试证明:$T_f=f$有唯一连续函数解.即对于$f,g:D\to\mathbb{R}$,若$T_f=f,T_g=g$,则$f=g$.

Proof.

假定$f,g:D\to\mathbb{R},Tf=f,Tg=g$.下面证明$f=g$.

记$R(x)=f(x)-g(x)$,则

$$R(x)=f(x)-g(x)=Tf(x)-Tg(x)=\int_0^x A(t)f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x A(t)g(t)\mathrm{d}t=\int_0^x A(t)R(t)\mathrm{d}t$$

且有$R(0)=0$.下面证明$\forall x\in D,R(x)=0$.

不难得知$R(x)$在D上连续,于是根据连续函数的有界性,设$M=\max\limits_{x\in D}f(x)$在$x=x_1$处取到.于是

$$\forall x\in[0,x_1],A(x)R(x)\leqslant R(x_1)$$

对上式积分有

$$\int_0^{x_1} A(t)R(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{x_1} R(x_1)\mathrm{d}t$$

等号成立当且仅当$\forall t \in [0, x_1], A(t)R(t) = R(x_1)$,这显然不成立.于是

$$\int_0^{x_1} A(t)R(t)\mathrm{d}t < \int_0^{x_1} R(x_1)\mathrm{d}t = x_1 R(x_1) \leqslant R(x_1)$$

这与$R(x_1) = \displaystyle\int_0^{x_1} A(t)R(t)\mathrm{d}t$不符,从而$M = 0$.

同理,设$m = \min\limits_{x \in D} f(x)$在$x = x_2$处取到.若$m < 0$,可以推出相似的矛盾.

于是$\forall x \in D, R(x) = 0$,即$f = g$.证毕.