北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期中考试

1.(10分)

求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}}\right)^n$$

Solution.

置$t=n\mathrm{e}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n\mathrm{e}}\right)^n=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{\frac{t}{\mathrm{e}}}=\left(\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t\right)^{\frac{1}{\mathrm{e}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\mathrm{e}}}$$

2.(10分)

设$[x]$为不超过x的最大整数,求函数极限

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{[x]}$$

Solution.

由$[x]\leqslant x<[x]+1$有

$$[x]\sin\frac{1}{[x]}\leqslant x\sin\frac{1}{[x]}<([x]+1)\sin\frac{1}{[x]}$$

置$y=\dfrac{1}{x}$,则有

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=\lim_{y\to0^+}dfrac\sin yy=1$$

从而

$$\lim_{x\to+\infty}[x]\sin\frac{1}{[x]}=1$$

$$\lim_{x\to+\infty}([x]+1)\sin\frac{1}{[x]}=1+\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{1}{[x]}=1$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{[x]}=1$$

3.(10分)

设$x>0$,求函数

$$f(x)=\int_0^{\ln x}\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

的导函数.

Solution.

置$y=\ln x$,则

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}\int_0^y\sqrt{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}\cdot\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1+\mathrm{e}^y}}{x}=\frac{\sqrt{1+x}}{x}$$