

## 北京大学数学科学学院2022-23高等数学B2期中考试

1. (10分) 求常微分方程

$$(xy - x^3y^3) dx + (1 + x^2) dy = 0$$

的满足 $y(0) = 1$ 的解.

2. (10分) 求常微分方程

$$x^2y'' + 3xy' + 4y = 0 (x > 0)$$

的满足 $y(1) = y'(1) = 1$ 的解.

3. (10分) 求常微分方程

$$y'' + y' - 2y = x + e^x + \sin x$$

的满足 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解.

4. (10分) 设关于 $R$ 的函数

$$I(R) = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{xdy - ydx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

试证明

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$$

其中积分方向为圆周的逆时针方向.

5. (10分) 设 $L$ 为空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

其方向为自 $z$ 轴正方向向负方向看的逆时针方向. 计算曲线积分

$$\int_L (y - z + \sin^2 x) dx + (z - x + \sin^2 y) dy + (x - y + \sin^2 z) dz$$

6. (10分) 设 $D$ 是单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$ , 求积分

$$\iint_D (x + y + xy)^2 d\sigma$$

7. (10分) 设平面闭区域 $D$ 由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^3$ 围成, 求积分

$$\iint_D \left( \frac{3x^2 \sin y}{y} + 2e^{x^2} \right) d\sigma$$

8. (10分) 设空间闭区域 $\Omega$ 由曲面 $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$ ,  $z = \sqrt{3(1 + x^2 + y^2)}$ 和 $x^2 + y^2 = 1$ 围成, 求积分

$$\iiint_{\Omega} \frac{(x + y + z)^2 \sqrt{1 + x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2 + z^2)(1 + x^2 + y^2 + z^2)} dV$$

9. (10分) 设 $\Gamma$ 由闭曲线 $x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ 和 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1 (y \leq 0)$ 组成,方向沿逆时针方向,求曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \left( \frac{y^2 + y + 4x^2}{4x^2 + y^2} \sin x^2 \right) dx + \left( \frac{4x^2 - x + y^2}{4x^2 + y^2} + \sin y^2 \right) dy$$

10. (10分) 设曲面 $S$ 是柱体 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的表面的外侧.

(1) 求曲面积分

$$\iint_S (y - z)|x| dy dz + (z - x)|y| dz dx + (x - y)z dx dy$$

(2) 求曲面积分

$$\iint_S (y - z)x^2 dy dz + (z - x)y^2 dz dx + (x - y)z^2 dx dy$$

(3) 求曲面积分

$$\iint_S (y - z)x^3 dy dz + (z - x)y^3 dz dx + (x - y)z^3 dx dy$$