Lecture 7 Solutions to ODE(常微分方程的解法)

L.7.1 求解常微分方程$y' = xy + 3x + 2y + 6$.

Solution.

整理可得$y' = (x+2)(y+3)$.置$u = x+2, v = y+3$,则有$\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = uv$.

移项积分可得$\ln|v| = \dfrac{1}{2}u^2 + C$,回代可得$y = C\mathrm{e}^{\frac{(x+2)^2}{2}} - 3$,其中$C \in \mathbb{R}$.

L.7.2 求解常微分方程$y' = \sqrt{\dfrac{1-y^2}{1-x^2}}$.

Solution.

当$y^2 = 1$时,$y \equiv \pm 1$是该方程的特解.

当$y^2 \neq 1$时,移项可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}$$

两边积分有

$$\arcsin y = \arcsin x + C$$

从而该方程的解为

$$\arcsin y = \arcsin x + C\text{或}y = 1\text{或}y = -1$$

L.7.3 设$P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = 0$是齐次方程,试证明:函数$\mu(x,y) = \dfrac{1}{xP+yQ}$是该方程的一个积分因子.

Proof.

考虑方程$\mu P\mathrm{d}x + \mu Q\mathrm{d}y = 0$,则有

$$\frac{P}{xP+yQ}\mathrm{d}x + \frac{Q}{xP+yQ}\mathrm{d}y = 0$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right) = \frac{P_y\left(xP+yQ\right) - P\left(xP_y + Q + yQ_y\right)}{\left(xP+yQ\right)^2} = \frac{yP_yQ - yQ_yP - PQ}{\left(xP+yQ\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right) = \frac{xQ_xP - xP_xQ - PQ}{\left(xP+yQ\right)^2}$$

于是

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right) = \frac{P\left(xQ_x + yQ_y\right) - Q\left(xP_x + yP_y\right)}{\left(xP+yQ\right)^2}$$

由于题设的方程为齐次方程,于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}=h\left(\frac{y}{x}\right)=f(x,y)$$

则

$$f_y=\frac{1}{x}h\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{P_yQ-PQ_y}{Q^2}$$

$$f_x=-\frac{y}{x^2}h\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{P_xQ-PQ_x}{Q^2}$$

从而

$$\frac{y}{x}h\left(\frac{y}{x}\right)=\frac{yP_yQ-yQ_yP}{Q^2}=\frac{xPQ_x-xP_xQ}{Q^2}$$

从而

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Q}{xP+yQ}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{P}{xP+yQ}\right)=0$$

因此存在$u(x,y)$使得

$$\mathrm{d}u=\mu P\mathrm{d}x+\mu Q\mathrm{d}y$$

L.7.4 考虑一阶线性方程$y'+p(x)y=0$.如果$p(x)$是在$\mathbb{R}$上定义的以$T>0$为周期的周期函数,试证明:该微分方程的任意解都是以T为周期的周期函数,当且仅当$\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0$.

Proof.

首先,$y=0$是该方程的满足题意的解.考虑$y\neq 0$,于是对上述微分方程移项可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y}=-p(x)\mathrm{d}x$$

积分后整理可得

$$y=C\mathrm{e}^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t},C\neq 0$$

于是方程的任意非零解都具有上述形式.于是

$$\begin{aligned}
&\forall C\in\mathbb{R},y=C\mathrm{e}^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}\text{都是以}T\text{为周期的周期函数}\\
\Leftrightarrow&\forall C\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},y(x)=y(x+T)\\
\Leftrightarrow&\forall C\in\mathbb{R},\forall x\in\mathbb{R},\frac{C\mathrm{e}^{-\int_0^{x+T}p(t)\mathrm{d}t}}{C\mathrm{e}^{-\int_0^x p(t)\mathrm{d}t}}=1\\
\Leftrightarrow&\forall x\in\mathbb{R},\int_x^{x+T}p(t)\mathrm{d}t=0\\
\Leftrightarrow&\int_0^T p(t)\mathrm{d}t=0
\end{aligned}$$

最后一个等价关系可以由$p(x)$的周期性得到.于是命题得证.

L.7.5 设函数$f(x)$在$\mathbb{R}$上有界,求方程$y'+y=f(x)$在$\mathbb{R}$上所有的有界函数解.

Solution.

方程$y'+y=0$的解为

$$y=C\mathrm{e}^{-x}$$

设$y=u(x)\mathrm{e}^{-x}$,代入原方程则有

$$u'(x)\mathrm{e}^{-x}=f(x)$$

从而

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}f(t)\mathrm{d}t+C$$

于是

$$y=C\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}f(t)\mathrm{d}t$$

不妨令$\max\limits_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|=M$,则有

$$\left|\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}f(t)\mathrm{d}t\right|\leqslant M\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t=M$$

于是表达式的后半部分是有界的.而当$C\neq 0$时,$C\mathrm{e}^{-x}$是无界函数,于是

$$y=\mathrm{e}^{-x}\int_{-\infty}^{x}\mathrm{e}^{t}f(t)\mathrm{d}t$$

更为严格的叙述需要学习无穷积分.