三重积分

1. 设Ω是Oyz平面上的圆盘$(y-a)^2+z^2\leqslant\rho^2\,(0<\rho<a)$绕$z$轴旋转一周得到的区域,求$\Omega$的体积$V$.

Solution.
积分区域Ω实际上为$\Omega=\left\{(x,y,z):\left(\sqrt{x^2+y^2}-a\right)^2+z^2\leqslant\rho^2\right\}$.我们采取柱坐标变换,可得

$$V=\iiint_\Omega \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\left[\iint_{D(\theta)}r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}\theta$$

其中$D(\theta)=\{(r,z):(r-a)^2+z^2\leqslant\rho^2\}$.可见$D(\theta)$与$\theta$无关,不妨记为$D$.我们有

$$\begin{aligned}\iint_D r\mathrm{d}r\mathrm{d}z&=\int_{a-\rho}^{a+\rho}\left[\int_{-\sqrt{\rho^2-(r-a)^2}}^{\sqrt{\rho^2-(r-a)^2}}r\mathrm{d}z\right]\mathrm{d}r\\&=\int_{a-\rho}^{a+\rho}2\sqrt{\rho^2-(r-a)^2}r\mathrm{d}r\\&\xlongequal{t=r-a}\int_{-\rho}^{\rho}2\sqrt{\rho^2-t^2}(t+a)\mathrm{d}t\\&=2a\int_{-\rho}^{\rho}\sqrt{\rho^2-t^2}\mathrm{d}t\\&=a\pi\rho^2\end{aligned}$$

于是

$$V=\int_0^{2\pi}a\pi\rho^2\mathrm{d}\theta=2\pi^2a\rho^2$$