北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期末考试

1.(10分)

设$\mathbb{R}^3$中平面$x+3y+2z=6$与x轴交点为A,与y轴交点为B,与z轴交点为C.

(1) **(5分)** 求$\triangle ABC$的面积.

(2) **(5分)** 求过四点$A,B,C,O(0,0)$的球面的方程.

Solution.

(1) 分别令x,y,z三者中两者为0可解得$A(6,0,0),B(0,2,0),C(0,0,3)$.于是

$$a=|BC|=\sqrt{13},b=|AC|=3\sqrt{5},c=|AB|=2\sqrt{10}$$

于是$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{18}{6\sqrt{65}}=\dfrac{3}{\sqrt{65}}$,则$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$.
于是$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{14}$.

(2) 设球心$Q(x,y,z)$.根据$|QO|=|QA|=|QB|=|QC|$有

$$\begin{cases}(x-6)^2+y^2+z^2=x^2+y^2+z^2\\ x^2+(y-2)^2+z^2=x^2+y^2+z^2\\ x^2+y^2+(z-3)^2=x^2+y^2+z^2\end{cases}$$

解得$x=3,y=1,z=\dfrac{3}{2}$.于是球面方程为$\Gamma:(x-3)^2+(y-1)^2+\left(z-\dfrac{3}{2}\right)^2=\dfrac{49}{4}$.

2.(15分)

下面的二元函数的极限存在吗?如果存在,请求出其值;如果不存在,请说明理由.

(1) **(5分)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{24\cos\sqrt{x^2+y^2}-24+12\left(x^2+y^2\right)}{\left(\tan\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}$.

(2) **(5分)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+\ln(1+y))\cos\frac{1}{x^2+y^2}$.

(3) **(5分)** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin y}{\sin^2 x+\sin^2 y}$.

Solution.

(1) 置$z=\sqrt{x^2+y^2}$,于是$(x,y)\to(0,0)$有$z\to 0^+$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{24\cos\sqrt{x^2+y^2}-24+12\left(x^2+y^2\right)}{\left(\tan\sqrt{x^2+y^2}\right)^4}&=\lim_{z\to 0^+}\frac{24\cos z-24+12z^2}{\tan^4 z}\\&=\lim_{z\to 0^+}\frac{24\cos z-24+12z^2}{z^4}\cdot\lim_{z\to 0^+}\frac{z^4}{\tan^4 z}\\&=\lim_{z\to 0^+}\frac{-24\sin z+24z}{4z^3}\cdot(1)^4\\&=\lim_{z\to 0^+}\frac{24-24\cos z}{12z^2}\\&=\lim_{z\to 0^+}\frac{24\sin z}{24z}\\&=1\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$0<\left|(x+\ln(1+y))\cos\frac{1}{x^2+y^2}\right|<|x+\ln(1+y)|<|x|+|\ln(1+y)|<|x|+|y|$$

而$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|+|y|=0+0=0$.

据夹逼定理可知$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+\ln(1+y))\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}=0$.

(3) 令$y=kx$,其中$k\neq 0$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\sin y}{\sin^2 x+\sin^2 y}&=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin kx}{\sin^2 x+\sin^2 kx}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{k\left(\dfrac{\sin kx}{kx}\right)}{\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2+k^2\left(\dfrac{\sin kx}{kx}\right)^2}\\&=\frac{k}{1+k^2}\end{aligned}$$

于是从不同路径接近$(0,0)$时取得的极限不同,因而原极限不存在.

3.(10分)

设$f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$都有连续的二阶导数.对于任意$x,y\in\mathbb{R}$, 定义$h(x,y)=xg\left(\dfrac{y}{x}\right)+f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 试计算$x^2h_{xx}(x,y)+2xyh_{yx}(x,y)+y^2h_{yy}(x,y)$.

Solution.

令$u=\dfrac{y}{x}$,则$h(x,u)=xg(u)+f(u)$.于是

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{\partial h}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}=()$$

4.(10分)

求$\mathbb{R}^2$中曲线$\mathrm{e}^{xy}+xy+y^2=2$在$(0,1)$处的切线方程.

Solution.

对原式求微分可得

$$x\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y+y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y+y\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y=0$$

移项整理有

$$\left(x\mathrm{e}^{xy}+x+2y\right)\mathrm{d}y=-\left(y+y\mathrm{e}^{xy}\right)\mathrm{d}x$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y(1+\mathrm{e}^{xy})}{x(1+\mathrm{e}^{xy})+2y}$$

代入$x=0,y=1$有$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}$.

于是切线方程为$y=-\dfrac{1+\mathrm{e}}{2}x+1$.

5.(10分)

设三元函数$f(x,y,z)=\left(\dfrac{2x}{z}\right)^y,z\neq 0$.求$f$在点$\left(\dfrac{1}{2},1,1\right)$处下降最快的方向上的单位向量.

Solution.

由题意

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\left(\frac{2}{z}\right)^y yx^{y-1}\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\left(\frac{2x}{z}\right)^y\ln\left(\frac{2x}{z}\right)\qquad \frac{\partial f}{\partial z}=-(2x)^y yz^{-y-1}$$

将$x=\dfrac{1}{2},y=1,z=1$代入可知$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2,\dfrac{\partial f}{\partial y}=0,\dfrac{\partial f}{\partial z}=-1$.于是$\mathbf{grad}f=(2,0,-1)$为$f$在该点处的梯度.

于是下降最快的方向与负梯度的方向相同,此方向的单位向量为$\left(-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},0,\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

6.(10分)

求二元函数$f(x,y)=\arctan\dfrac{y}{x}$在点$(2,2)$处的二阶泰勒多项式.

Solution.

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=\frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{1}{x}=\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{-(x^2+y^2)-2y(-y)}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

于是

$$f(x,y)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{4}(x-2)+\frac{1}{4}(y-2)+\frac{1}{16}(x-2)^2-\frac{1}{16}(y-2)^2$$

7.(10分)

求函数$f(x)=(\sin x)^{\frac{2}{3}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值,并指明所有最小值点.

Solution.

注意到$f(x)$是偶函数.因此,考虑$f(x)$在$\left[0,-\frac{\pi}{2}\right]$上的部分.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}&=\frac{2}{3}(\sin x)^{-\frac{1}{3}}\cos x-\frac{2}{3}(\cos x)^{-\frac{1}{3}}\sin x\\&=\frac{2}{3}(\sin x\cos x)^{-\frac{1}{3}}\left((\cos x)^{\frac{4}{3}}-(\sin x)^{\frac{4}{3}}\right)\end{aligned}$$

令$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}=0$,解得$x=0,\frac{\pi}{4}$或$\frac{\pi}{2}$.又$f(0)=1, f\left(\frac{\pi}{4}\right)=2\sqrt[3]{\frac{1}{2}}=\sqrt[3]{4}>1, f(\frac{\pi}{2})=1$.

于是$f(x)$的最小值为1,最小值点为$\pm\frac{\pi}{2},0$.

8.(10分)

证明:对于任意给定的$k\in\mathbb{R}$,存在0的开邻域U和W,存在唯一的函数$y=f(x),x\in U,y\in W$满足方程$\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}=0$.

Proof.

设$F(x,y)=\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}$.注意到$F(0)=0$.

又$\frac{\partial F}{\partial x}=k\mathrm{e}^{kx}-2\mathrm{e}^{x+y},\frac{\partial F}{\partial y}=k\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}$.于是$F(x,y)$的一阶偏导是连续的.

注意到$F_y(0,0)=k-2$.

若$k\leqslant 0$,则对任意$x,y\in\mathbb{R}$都有$F_y(x,y)<0$.根据隐函数存在定理可知存在唯一$y=f(x)$使得$F(x,y)\equiv 0$.

若$k=2$,则$F(x,y)=0$等价于$(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^y)^2=0$,当且仅当$y=x$时成立.于是这函数为$f(x)=x$.
若$k>0$且$k\neq 2$,则$F_y(x,y)=0$可解得$y=\dfrac{\ln 2-\ln k}{k-1}$.
于是取y的开邻域$W=\left\{y\in\mathbb{R}:|y|<\dfrac{\ln 2-\ln k}{k-1}\right\}$.根据隐函数存在定理可知存在唯一$y=f(x)$使得$F(x,y)\equiv 0$.

9.(15分)

设r是正实数,$D=\left\{(x,y)|\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}$,函数$f:D\to\mathbb{R}$满足$f\in C^3(D)$, $f(0,0)=0$, f在点$(0,0)$处的一阶全微分$\mathrm{d}f(0,0)=0$.f在点$(0,0)$处的二阶全微分满足

$$\mathrm{d}^2f(0,0)=E\left(\Delta x\right)^2+2F\Delta x\Delta y+G\left(\Delta y\right)^2$$

其中E,F,G均为常数.

(1) **(10分)** 证明:存在D上的两个函数$a,b:D\to\mathbb{R}$使得$\forall(x,y)\in D$有

$$f(x,y)=xa(x,y)+yb(x,y),a(0,0)=b(0,0)=0$$

(2) **(5分)** 若$E>0,EG-F^2<0$,则在$\mathbb{R}^3$中点$(0,0,0)$的充分小邻域中,曲面$z=f(x,y)$充分近似于哪一类二次曲面?画出此类二次曲面的草图. 从此类二次曲面的几何形状判断是否存在$\mathbb{R}^2$中点$(0,0)$的充分小邻域D_1,存在D_1上的一一对应的C^1变量变换$x=x(u,v),y=y(u,v)$使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2$$

Solution.

(1) **Proof.**

对于任意$P(x,y)\in D$,考虑点$P_t(tx,ty)$,其中$t\in[0,1]$.于是P_t在O与P的连线上.

令$\phi(t)=f(tx,ty)$.由于$f(x,y)$在D上二阶可微,于是$\phi(t)$可微.我们有

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=xf_x(tx,ty)+yf_y(tx,ty)$$

根据Lagrange中值定理,存在$\xi\in(0,1)$使得

$$\phi'(\xi)=\frac{\phi(1)-\phi(0)}{1-0}=f(x,y)-f(0,0)=f(x,y)$$

即

$$f(x,y)=\phi'(\xi)=xf_x(\xi x,\xi y)+yf_y(\xi x,\xi y)$$

因此,对于每个$(x,y)\in D$,用上述过程确定的ξ定义函数$a,b:D\to\mathbb{R}$为

$$a(x,y)=f_x(\xi x,\xi y)\qquad b(x,y)=f_y(\xi x,\xi y)$$

即可使得$f(x,y)=xa(x,y)+yb(x,y)$成立.

又由$\mathrm{d}f(0,0)=0$可知$f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$.于是$a(0,0)=b(0,0)=0$.

于是命题得证.

(2) 考虑$f(x,y)$在$(0,0)$处的二阶泰勒多项式

$$f(x,y)=f(0,0)+xf_x(0,0)+yf_y(0,0)+\frac{x^2f_{xx}(0,0)+2xyf_{xy}(0,0)+y^2f_{yy}(0,0)}{2}+o(\rho^2)$$

其中$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$.代入题中的f的各阶微分有

$$f(x,y)=\frac{1}{2}\left(Ex^2+2Fxy+Gy^2\right)$$

考虑旋转变换$S:(x,y)\to(x\sin\theta+y\cos\theta,x\cos\theta-y\sin\theta)$将$(x,y)$绕原点逆时针旋转$\theta$.

不妨令$x'=x\sin\theta+y\cos\theta,y'=x\cos\theta-y\sin\theta$.于是

$$x'^2=x^2\sin^2\theta+y^2\cos^2\theta+2xy\sin\theta\cos\theta \qquad y'^2=x^2\cos^2\theta+y^2\sin^2\theta-2xy\sin\theta\cos\theta$$

设$Ex^2+2Fxy+Gy^2=Ax'^2+By'^2$,于是有

$$\begin{cases}A\sin^2\theta+B\cos^2\theta=E\\A\cos^2\theta+B\sin^2\theta=G\\(A-B)\sin\theta\cos\theta=F\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}EG-F^2&=(A^2+B^2)\sin^2\theta\cos^2\theta+AB(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-(A^2-2AB+B^2)\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=AB(\sin^4\theta+\cos^4\theta)+2AB\sin^2\theta\cos^2\theta\\&=AB\end{aligned}$$

由于$EG-F^2<0$,于是$AB<0$,因而这是双曲抛物面.题中所指的变换即旋转后伸缩变换,是成立的.