

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中考试

1.(10分) 计算二重积分

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2) dx dy \quad D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

2.(10分) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} (y^2+z^2) \quad \Omega: 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 1$$

3.(10分) 设曲线 C 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 沿逆时针方向.计算曲线积分

$$\oint_C \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$$

4.(10分) 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) dS$$

其中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截下部分.

5.(15分) 计算曲面积分

$$\oiint_S xdydz + ydzdx + zdxdy$$

其中 S 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 4$ 所截部分的外侧.

6.(10分) 求常微分方程

$$y' = xy + 3x + 2y + 6$$

的所有解.

7.(15分) 求常微分方程

$$y'' - 4y' + 3y - 4e^x = 0$$

的通解.

8.(10分) 设平面有界闭区域为

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad a, b > 0$$

设曲线 L 为 D 的边界,函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数.记 $\mathbf{F} = (P, Q), \mathbf{n}$ 为曲线 L 的单位外法向量.试证明

$$\oint_{L^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy$$

9.(10分) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数.试证明

$$\iint_S f(x + y + z) dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{3}\xi) d\xi$$

其中 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.