

## 北京大学数学科学学院2020-21高等数学B1期末考试

1. (15分) 下面函数的极限存在吗?若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

(1) (5分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}.$

(2) (5分)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8}.$

(3) (5分)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}.$

2. (15分) 求闭区间 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 的所有最小值点.

3. (20分) 回答下列问题.

(1) (15分) 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$ .求 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在 $(a, b)$ 处的二阶泰勒多项式.

(2) (5分) 设 $a < b$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ .函数 $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 在开区间 $(a, b)$ 中有 $n + 1$ 阶导数.定义二元函数 $T : (a, b) \times (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$T(x, y) = f(x) - f(y) - \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k$$

求出 $T(x, y)$ 对 $y$ 的一阶偏导函数 $\frac{\partial T}{\partial y}$ .

4. (10分) 证明:对任意给定的实数 $p$ ,存在 $U$ 和 $W$ 使得存在唯一的函数 $y = f(x) : U \rightarrow W$ 满足 $x^p + y^p - 2xy = 0$ .

5. (15分) 设在 $\mathbb{R}^3$ 空间中 $Oxy$ 平面之外的点 $(x, y, z)$ 处的电势 $V = \left(\frac{2y}{z}\right)^x$ .求出在点 $\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$ 处电势 $V$ 下降最快的方向上的单位向量.

6. (25分) 设 $\mathbb{R}^3$ 空间中的平面 $K : x + 2y + 3z = 6$ 与 $x, y, z$ 三轴分别交于 $A, B, C$ 三点.动点 $H \in \mathbb{R}^3$ 与 $K$ 的距离恒为1,其在 $K$ 上的垂直投影记为 $M$ .设 $M$ 在 $\triangle ABC$ 中,其到三条边 $BC, CA, AB$ 的距离分别为 $p, q, r$ .

(1) (5分) 求出 $\triangle ABC$ 的面积.

(2) (5分) 用 $p, q, r$ 表示以 $A, B, C, H$ 为顶点的四面体的表面积 $S(p, q, r)$ .

(3) (5分) 写出 $p, q, r$ 必须满足的约束条件.

(4) (10分) 求出 $S(p, q, r)$ 的条件极值的稳定点.