Cauchy-Schwarz不等式

一个理想的释经学者应该是一位去过第一世纪那个奇异世界的人,感觉到其中的一片陌生, 但却在那里逗留,知道自己生活在其中,他的思想和感受与初听福音的人一样为止; 然后再回到今日的世界，将所获悉的真理用我们今日的思想诉说出来.

—— Charles Harold Dodd

让我们从实数域上离散形式的Cauchy不等式开始.

1.1

已知$a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n$均为实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)$$

Proof.

置$A_i = \dfrac{a_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}, B_i = \dfrac{b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}$, 则根据基本不等式有

$$A_i B_i \leqslant \frac{A_i^2 + B_i^2}{2}$$

即

$$\frac{a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right)$$

对不等式两边求和有

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2} + \frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}\right) = 1$$

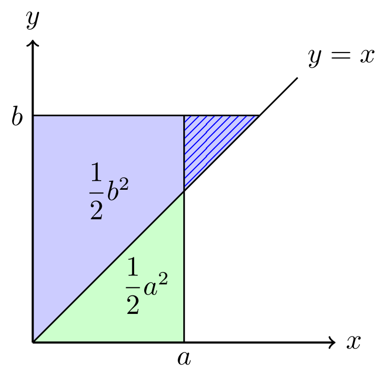
移项后两边平方即可得

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i\right)$$

原命题得证.

基本不等式$ab \leqslant \dfrac{a^2+b^2}{2}$具有一个直观的几何解释. 我们注意到在下面的图中,长方形的面积为ab,两个三角形的面积分别为$\dfrac{1}{2}a^2, \dfrac{1}{2}a^2$. 显然,长方形的面积不大于两个三角形面积之和,误差项为阴影处的小三角形的面积. 于是就有

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}, \text{等号成立当且仅当} a = b$$



我们可以根据这个图形写出如下式子.

$$ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} = \int_0^a x\mathrm{d}x + \int_0^b y\mathrm{d}y$$

能否对这个式子做推广呢?事实上,我们有

1.2 Young's不等式

函数$y=\phi(x)\in C([0,+\infty))$且在定义域上严格单调递增,满足$\phi(0)=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(x)=+\infty$.则

$$ab \leqslant \int_0^a y\mathrm{d}x + \int_0^b x\mathrm{d}y \quad \forall a,b>0$$

Proof.

若$b>\phi(a)$,则有

$$\begin{aligned}
\int_0^a y\mathrm{d}x + \int_0^b x\mathrm{d}y &= \int_0^a y\mathrm{d}x + \int_0^{\phi(a)} x\mathrm{d}y + \int_{\phi(a)}^b x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a y\mathrm{d}x + \int_0^a xy'\mathrm{d}x + \int_{\phi(a)}^b (x-a)\mathrm{d}y + \int_{\phi(a)}^b a\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a (y+xy')\mathrm{d}x + \int_{\phi(a)}^b (x-a)\mathrm{d}y + a(b-\phi(a)) \\
&= xy|_0^a + ab - a\phi(a) + \int_{\phi(a)}^b (x-a)\mathrm{d}y \\
&= ab + \int_{\phi(a)}^b (x-a)\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

由$y=\phi(x)$严格递增可知$\forall y>\phi(a), x>a$,于是$\int_{\phi(a)}^b (x-a)\mathrm{d}y>0$. 于是就有

$$\int_0^a y\mathrm{d}x + \int_0^b x\mathrm{d}y > ab$$

若$b=\phi(a)$,容易验证不等式取等.

若$b<\phi(a)$,同理可以得到

$$\int_0^a y\mathrm{d}x+\int_0^b x\mathrm{d}y=ab+\int_{\phi^{-1}(b)}^a (y-b)\mathrm{d}x>ab$$

从而题设不等式成立.

我们在Young's不等式中令$y=\phi(x)=x^{p-1},p>1$,则$\phi^{-1}(y)=y^{\frac{1}{p-1}}$.于是

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^{1+\frac{1}{p-1}}}{1+\frac{1}{p-1}}\quad\forall a,b\geqslant 0$$

置$q=1+\dfrac{1}{p-1}$,则$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{p}+\dfrac{p}{p-1}=1$,上述式子可以改写为

1.2.Special Form

对于任意$p,q>1$满足$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,有

$$ab\leqslant\frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}\quad\forall a,b\geqslant 0$$

应用上面的引理,我们马上可以证明Hölder's不等式.

1.3.1 Hölder's不等式 I

设$a_1,\cdots,a_n,b_1,\cdots,b_n$均为非负实数,$p,q>1$且$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$,则有

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leqslant\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

特别的,当$p=q=2$时上式记为Cauchy-Schwarz不等式.我们采用相似的方法证明之.

Proof.

置$A_i=\dfrac{a_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}},B_i=\dfrac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}$,于是根据Young's不等式有

$$A_iB_i\leqslant\frac{A_i^p}{p}+\frac{B_i^q}{q}=\frac{a_i^p}{p\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{b_i^q}{q\sum_{i=1}^n b_i^q}$$

对不等式两边求和有

$$\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_i}{\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}}\leqslant\frac{\sum_{i=1}^n a_i^p}{p\sum_{i=1}^n a_i^p}+\frac{\sum_{i=1}^n b_i^q}{q\sum_{i=1}^n b_i^q}=\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

移项即可得

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

原命题得证.

同样的,Hölder's不等式也有积分形式.

1.3.2 Hölder's不等式 II

已知$f(x), g(x) \in C([a,b]), p, q > 1$且$\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$,则有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

Proof.

设$T : \{x_i\}_{i=0}^{n}$为$[a,b]$上的一个分割,满足$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.

记$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \lambda = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\Delta x_i\}$,于是根据Riemann积分的定义有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| = \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \, |g(x_i)| \, \Delta x_i$$

$$\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p \, \Delta x_i$$

$$\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i)|^q \, \Delta x_i$$

根据1.3.1的结论,我们有

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \, |g(x_i)| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |g(x_i)|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

控制Δx_i相同,则有

$$\lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \, |g(x_i)| \, \Delta x_i \leqslant \left(\lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)|^p \, \Delta x_i\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\lim_{\lambda \to 0^+} \sum_{i=1}^{n} |g(x_i)|^q \, \Delta x_i\right)^{\frac{1}{q}}$$

于是就有

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_a^b |g(x)|^q \,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

从而题设不等式成立.