北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期末考试

1. (10分) 证明:对于任意$x \in \mathbb{R}$,存在$\theta \in (0,1)$使得

$$\arctan x = \frac{x}{1+\theta^2 x^2}$$

成立.

2. (20分) 求出下面函数的极限.

(1) (10分) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^4 x}{\sqrt{1 - \dfrac{x \sin x}{2}} - \sqrt{\cos x}}$.

(2) (10分) 设$n \in \mathbb{N}^*$.对于实序列$\{a_k\}_{k=1}^n$,求

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{\sum_{k=1}^n a_k^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}$$

3. (15分) 设函数

$$f(x) = \frac{1-2x+5x^2}{(1-2x)(1+x^2)}$$

在$x=0$处的$2n+1$阶泰勒公式.

4. (10分) 定义三元函数$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$为

$$f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, (x,y,z) \neq (0,0,0) \\ 0, (x,y,z) = (0,0,0) \end{cases}$$

回答下列问题.

(1) (5分) 求函数$f(x,y,z)$在$(0,0,0)$处的三个偏导数.

(2) (5分) $f(z,y,z)$在$(0,0,0)$处是否可微?试证明之.

5. (15分) 设$f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$都有连续的二阶导数.对于任意$x, y \in \mathbb{R}$, 定义$h(x,y) = xg\left(\dfrac{y}{x}\right) + f\left(\dfrac{y}{x}\right)$, 试计算$x^2 h_{xx}(x,y) + 2xy h_{yx}(x,y) + y^2 h_{yy}(x,y)$.

6. (20分) 设函数$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$为

$$F(x,y,z) = x^3 + (y^2-1)z^3 - xyz$$

回答下列问题.

(1) (5分) 证明:存在$\mathbb{R}^2$上$(1,1)$的邻域D使得D上由$F(x,y,z) \equiv 0$确定唯一的隐函数$z = f(x,y)$,且$f(1,1) = 1$.

(2) (5分) 求出在$(1,1)$处函数$z = f(x,y)$减少最快的方向上的单位向量$\vec{v}$.

(3) (10分) 设$\mathbb{R}^3$中

7. (10分) 求函数$f(x)=(\sin x)^{\frac{2}{3}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}$在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的最小值,并指明所有最小值点.

8. (10分) 证明:对于任意给定的$k\in\mathbb{R}$,存在0的开邻域U和W,存在唯一的函数$y=f(x),x\in U,y\in W$满足方程$\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}=0$.

9. (15分) 设r是正实数,$D=\left\{(x,y)|\sqrt{x^2+y^2}<r\right\}$,函数$f:D\to\mathbb{R}$满足$f\in C^3(D)$, $f(0,0)=0$, f在点$(0,0)$处的一阶全微分$\mathrm{d}f(0,0)=0$.f在点$(0,0)$处的二阶全微分满足

$$\mathrm{d}^2f(0,0)=E\left(\Delta x\right)^2+2F\Delta x\Delta y+G\left(\Delta y\right)^2$$

其中E,F,G均为常数.

(1) (10分) 证明:存在D上的两个函数$a,b:D\to\mathbb{R}$使得$\forall(x,y)\in D$有

$$f(x,y)=xa(x,y)+yb(x,y),a(0,0)=b(0,0)=0$$

(2) (5分) 若$E>0,EG-F^2<0$,则在$\mathbb{R}^3$中点$(0,0,0)$的充分小邻域中,曲面$z=f(x,y)$充分近似于哪一类二次曲面?画出此类二次曲面的草图. 从此类二次曲面的几何形状判断是否存在$\mathbb{R}^2$中点$(0,0)$的充分小邻域D_1,存在D_1上的一一对应的C^1变量变换$x=x(u,v),y=y(u,v)$使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2$$