Lecture 2 Sequence limit theory(序列极限)

1. 计算下列和式型极限.

   (1) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$

   (2) $\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{1}{2^k}$

   (3) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$

   (4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{(2n+k)(2n+k+1)}$

2. 计算下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt[n]{n}-1)$

(2) $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}-3\sqrt{n+3})$

(3) $\lim_{n\to\infty}\sin\pi\sqrt{4n^2+1}$

(4) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{k=3}^{2021}k^n\right)$

3. 证明序列$x_n = \tan n$发散.

4. 设x_n是方程$\sum_{k=1}^{n} x^k = 1$在$(0,1)$上唯一的根,证明$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

5. 证明:$\mathrm{e} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

6. 用柯西命题证明或计算:

(1) 设序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=A$,那么$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=A$.

(2) 设正序列$\{a_n\}$满足$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=A$,那么$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=A$.

(3) 求极限$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

7. 计算下列极限.

(1) $\lim_{n\to\infty} \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$.

(2) $\lim_{n\to\infty}(\frac{n-2}{n-1})^{2n+1}$.

(3) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{n}(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n})$.

(4) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

8. 设$x_1 > 0$,且对一切$n \in \mathbb{N}^*$有$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{1}{x_n})$,求证$\lim_{n\to\infty} x_n$存在并求该极限的值.

9. 考虑序列$\{a_n\}$,定义$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$,回答下列问题.

(1) 如果S_n收敛,证明$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(2) 如果$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$,$\lim_{n\to\infty} S_n$是否一定存在?

10. 定义Fibonacci数列$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$对一切$n \in \mathbb{N}^*$成立,且$F_0 = F_1 = 1$,设$x_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$,问序列$\{x_n\}$是否收敛,如收敛请计算其极限,如发散请说明理由.