

北京大学数学科学学院2022-23高等数学B2期中考试

1. (10分) 设 D 是由

$$\iint_D \ln(1+x^2+y^2) \, dx \, dy \quad D: x^2+y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0$$

2. (10分) 计算三重积分

$$\iiint_{\Omega} (y^2+z^2) \, dV \quad \Omega: 0 \leq z \leq x^2+y^2 \leq 1$$

3. (10分) 设曲线 C 为椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ 沿逆时针方向. 计算曲线积分

$$\oint_C \frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$$

4. (10分) 计算曲面积分

$$\iint_S (x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2) \, dS$$

其中 S 为圆锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 被柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 所截下部分.

5. (15分) 计算曲面积分

$$\oiint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$$

其中 S 为抛物面 $z = x^2 + y^2$ 被平面 $z = 4$ 所截部分的外侧.

6. (10分) 求常微分方程

$$y' = xy + 3x + 2y + 6$$

的所有解.

7. (15分) 求常微分方程

$$y'' - 4y' + 3y - 4e^x = 0$$

的通解.

8. (10分) 设平面有界闭区域为

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\} \quad a, b > 0$$

设曲线 L 为 D 的边界, 函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上有连续的一阶偏导数. 记 $\mathbf{F} = (P, Q)$, \mathbf{n} 为曲线 L 的单位外法向量. 试证明

$$\oint_{L^+} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \, dx \, dy$$

9. (10分) 设 $f(x)$ 为 \mathbb{R} 上的连续函数. 试证明

$$\iint_S f(x+y+z) \, dS = 2\pi \int_{-1}^1 f(\sqrt{3}\xi) \, d\xi$$

其中 S 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.