北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期末考试

1. (10分) 求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x-\int_0^x\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t\right)}{x^3}$$

2. (10分) 设函数$f:[0,7]\to\mathbb{R}$为

$$f(x)=x^3-6x^2+9x-1$$

称区间$[a,b]$是f的单调区间,当$0\leqslant a<b\leqslant 7$且限制在$[a,b]$上的$f$严格单调.求$f$的长度最大的单调区间.

3. (10分) 设欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的平面$T:2x-y+3z=6$.设T与x,y,z三轴的交点分别为A,B,C.以原点$O(0,0,0)$为球心,与T相切的球面记作S.

(1) (5分) 求$\triangle ABC$的面积.

(2) (5分) 求球面S与T相切的点的坐标.

4. (10分) 设二元函数$z=f(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=z^3+z\mathrm{e}^x+y=0$确定的隐函数.求$z=f(x,y)$在$(0,2)$处函数值下降最快的方向上的单位向量.

5. (10分) 求函数$f(x,y)=x^y$在$(1,1)$处的二阶泰勒多项式.

6. (10分) 设D是由直线$x+y=2\pi$,x轴和y轴围成的有界闭区域.求D上的二元函数$f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$达到最大值的$D$中所有点.

7. (10分) 回答下列问题.

(1) (2分) 举例说明:当z是(x,y)的函数,也是(t,u)的函数时,$x\equiv t\nRightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}\equiv\dfrac{\partial z}{\partial t}$.

(2) (8分) 给定方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2$$

作变量代换

$$x=t,y=\frac{t}{1+tu},z=\frac{t}{1+tW}$$

试证明:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=0$$

8. (15分) 证明下列恒等式.

(1) (3分) 对于任意$x\in\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,有

$$2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\int_0^{2x\sqrt{1-x^2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$$

(2) **(12分)** 对于任意$x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$,有

$$2\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}$$

9. **(15分)** 设函数$P(x)$在$[0,1]$连续,有$P(0)=0, P(1)=1$.$P(x)$在$(0,1)$可导,且对任意$x \in (0,1)$有$P'(x) > 0$.任意取定$A, B \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*$.试证明:在$(0,1)$上存在$\theta_0, \cdots, \theta_n \in \mathbb{R}$使得

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{P'(\theta_k)} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^{n-k} B^k$$

并且

$$0 < \theta_0 < \cdots < \theta_n < 1$$