

北京大学数学科学学院2022-23高等数学B2期中考试

1.(10分) 求常微分方程

$$(xy - x^3y^3) dx + (1 + x^2) dy = 0$$

的满足 $y(0) = 1$ 的解.

Solution.

对原方程变形可得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3y^3 - xy}{1 + x^2}$$

令 $u = \frac{1}{y^2}$,则有

$$\frac{du}{dx} = \frac{x^3y^3 - xy}{1 + x^2} \cdot \left(-\frac{2}{y^3}\right) = \frac{2ux - 2x^3}{1 + x^2}$$

即

$$\frac{du}{dx} - \frac{2ux}{1 + x^2} = -\frac{2x^3}{1 + x^2}$$

对应齐次方程为

$$\frac{du}{u} = \frac{2xdx}{1 + x^2}$$

通解为

$$u = C(1 + x^2)$$

现在将 $u = C(x)(1 + x^2)$ 代入原方程可得

$$C'(x)(1 + x^2) = -\frac{2x^3}{1 + x^2}$$

于是

$$C(x) = -\frac{1}{1 + x^2} - \ln(1 + x^2) + C$$

于是

$$u(x) = -1 - (1 + x^2) \ln(1 + x^2) + C(1 + x^2)$$

$y(0) = 1$ 要求 $u(0) = 1$,于是 $C = 1$,即原方程的解为

$$y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + (1 + x^2) \ln(1 + x^2)}}$$

2.(10分) 求常微分方程

$$x^2 y'' + 3xy' + 4y = 0 (x > 0)$$

的满足 $y(1) = y'(1) = 1$ 的解.

Solution.

做代换 $x = e^t$, 于是

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{dy}{dx} \right) \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right)\end{aligned}$$

于是

$$y_t'' - y_t' + 3y_t' + 4y = 0$$

这是一个齐次方程, 对应的特征根为 $\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{3}i$, 其通解为

$$y = e^{-t} (C_1 \cos \sqrt{3}t + C_2 \sin \sqrt{3}t)$$

于是原方程的通解为

$$y = \frac{C_1 \cos \sqrt{3} \ln x + C_2 \sin \sqrt{3} \ln x}{x}$$

要求 $y(1) = 1$ 则有 $C_1 = 1$. 而

$$y_x' = e^{-t} y_t' = e^{-2t} \left((\sqrt{3}C_2 - C_1) \cos \sqrt{3}t - (\sqrt{3}C_1 + C_2) \sin \sqrt{3}t \right)$$

要求 $y'(1) = 1$ 就有 $\sqrt{3}C_2 - C_1 = 1$. 于是 $C_1 = 1, C_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$, 于是原方程的解为

$$y = \frac{3 \cos \sqrt{3} \ln x + \sqrt{3} \sin \sqrt{3} \ln x}{3x}$$

3.(10分) 求常微分方程

$$y'' + y' - 2y = x + e^x + \sin x$$

的满足 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解.

Solution.

原方程对应的齐次方程的特征根为 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$, 于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}$$

考虑方程 $y'' + y' - 2y = x$ 的特解, 设 $y = Ax^2 + Bx + C$, 则

$$2A + (2Ax + B) - 2(Ax^2 + Bx + C) = x$$

于是 $A = 0, B = -\frac{1}{2}, C = -\frac{1}{4}$.

考虑方程 $y'' + y' - 2y = e^x$ 的特解, 设 $y = Axe^x$, 则有

$$Ae^x(x + 2 + x + 1 - 2x) = e^x$$

于是 $A = \frac{1}{3}$.

考虑方程 $y'' + y' - 2y = \sin x$ 的特解, 设 $y = A \cos x + B \sin x$, 则有

$$(-B - A - 2B) \sin x + (-A + B - 2A) \cos x = \sin x$$

于是 $A = -\frac{1}{10}, B = -\frac{3}{10}$.

于是原方程的通解为

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

于是

$$\begin{cases} y(0) = C_1 + C_2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{10} = -\frac{7}{20} \\ y'(0) = C_1 - 2C_2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{38}{15} \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$, 于是原方程的解为

$$y = e^x - e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}xe^x - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$$

4.(10分) 设关于 R 的函数

$$I(R) = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{xdy - ydx}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

试证明

$$\lim_{R \rightarrow \infty} I(R) = 0$$

其中积分方向为圆周的逆时针方向.

Proof.

考虑二元函数

$$P(x, y) = \frac{-y}{(x^2 + xy + y^2)^2} \quad Q(x, y) = \frac{x}{(x^2 + xy + y^2)^2}$$

积分曲线 $S_R: x^2 + y^2 = R^2$ 的单位切向量为 $\mathbf{n} = (-y, x)$, 于是

$$\begin{aligned} I(R) &= \oint_{S_R^+} (P, Q) \cdot \mathbf{n} ds \\ &= \oint_S \frac{x^2 + y^2}{(x^2 + xy + y^2)^2} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{(R^2(1 + \cos t \sin t))^2} dt \\ &\leq \int_0^{2\pi} \frac{4}{R^2} dt \\ &= \frac{8\pi}{R^2} \end{aligned}$$

于是

$$0 \leq I(R) \leq \frac{8\pi}{R^2}$$

由夹逼准证可知

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} I(R) = 0$$

5.(10分) 设 L 为空间曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$$

其方向为自 z 轴正方向向负方向看的逆时针方向. 计算曲线积分

$$\int_L (y - z + \sin^2 x) dx + (z - x + \sin^2 y) dy + (x - y + \sin^2 z) dz$$

Solution.

令 $P(x, y, z) = y - z + \sin^2 x$, $Q(x, y, z) = z - x + \sin^2 y$, $R(x, y, z) = x - y + \sin^2 z$. 于是 P, Q, R 在 \mathbb{R}^3 上可微. L 围成的空间曲面 $S: z = 1 - x, x^2 + y^2 \leq 1$, 其单位外法向量为 $\mathbf{n} = \frac{(1, 0, 1)}{\sqrt{2}}$.

于是据 Stokes 公式有

$$\begin{aligned} \int_L P dx + Q dy + R dz &= \iint_{S^+} \begin{vmatrix} dx dy & dy dz & dz dx \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= -2 \iint_{S^+} dx dy + dy dz + dz dx \\ &= -2\sqrt{2} \iint_{x^2 + y^2 \leq 1} d\sigma \\ &= -2\sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

6.(10分) 设 D 是单位圆 $x^2 + y^2 \leq 1$,求积分

$$\iint_D (x + y + xy)^2 d\sigma$$

Solution.

做极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,于是积分区域变为 $D': 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.于是

$$\begin{aligned}\iint_D (x + y + xy)^2 d\sigma &= \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 y^2 + 2xy + 2x^2 y + 2xy^2) d\sigma \\&= \iint_D (x^2 + y^2 + x^2 y^2) d\sigma \\&= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (r^2 + r^4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) r dr \\&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{6} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right) d\theta \\&\stackrel{t=2\theta}{=} \frac{\pi}{2} + \frac{1}{48} \int_0^{4\pi} \sin^2 t dt \\&= \frac{13}{24} \pi\end{aligned}$$

7.(10分) 设平面闭区域 D 由直线 $y = x$ 和曲线 $y = x^3$ 围成,求积分

$$\iint_D \left(\frac{3x^2 \sin y}{y} + 2e^{x^2} \right) d\sigma$$

Solution.

首先考虑第一项,有

$$\begin{aligned}\iint_D \frac{3x^2 \sin y}{y} dx dy &= \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^y \frac{3x^2 \sin y}{y} dx + \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt[3]{y}} \frac{3x^2 \sin y}{y} dx \\&\stackrel{t=x^3}{=} \int_{-1}^0 dy \int_y^{y^3} \frac{\sin y}{y} dt + \int_0^1 dy \int_{y^3}^y \frac{\sin y}{y} dt \\&= \int_{-1}^0 \sin y (y^2 - 1) dy + \int_0^1 \sin y (1 - y^2) dy \\&= 2 \int_0^1 \sin y (1 - y^2) dy \\&= 2 (y^2 \cos y - 2y \sin y - 3 \cos y) \Big|_0^1 \\&= 6 - 4 \cos 1 - 4 \sin 1\end{aligned}$$

再考虑第二项,有

$$\begin{aligned}
 \iint_D 2e^{x^2} d\sigma &= \int_{-1}^0 dx \int_x^{x^3} 2e^{x^2} dy + \int_0^1 dx \int_{x^3}^x 2e^{x^2} dy \\
 &= 4 \int_0^1 (x - x^3) e^{x^2} dx \\
 &\stackrel{t=x^2}{=} 2 \int_0^1 (1-t) e^t dt \\
 &= 2 (e^t (2-t)) \Big|_0^1 \\
 &= 2e - 4
 \end{aligned}$$

于是

$$\iint_D \left(\frac{3x^2 \sin y}{y} + 2e^{x^2} \right) d\sigma = 2e + 2 - 4 \cos 1 - 4 \sin 1$$

8.(10分) 设空间闭区域 Ω 由曲面 $z = \sqrt{1+x^2+y^2}$, $z = \sqrt{3(1+x^2+y^2)}$ 和 $x^2+y^2=1$ 围成,求积分

$$\iiint_{\Omega} \frac{(x+y+z)^2 \sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} dV$$

Solution.

做柱坐标变换 $z = z, x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$,于是积分区域变为

$$\Omega' : 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, \sqrt{1+r^2} \leq z \leq \sqrt{3}\sqrt{1+r^2}$$

于是

$$\begin{aligned}
 &\iiint_{\Omega} \frac{(x+y+z)^2 \sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} dV \\
 &= \iiint_{\Omega'} \frac{(r^2+z^2+r^2 \sin \theta \cos \theta + 2rz(\sin \theta + \cos \theta) \sqrt{1+r^2})}{(r^2+z^2)(1+r^2+z^2)} r dr d\theta dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \int_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}} \frac{r\sqrt{1+r^2}}{(z^2+r^2+1)} dz \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dr \left(r \arctan \frac{z}{\sqrt{1+r^2}} \right) \Big|_{\sqrt{1+r^2}}^{\sqrt{3}\sqrt{1+r^2}} \\
 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 \frac{\pi}{12} r dr \\
 &= \frac{\pi^2}{12}
 \end{aligned}$$

9.(10分) 设 Γ 由闭曲线 $x^2 + y^2 = 9(y \geq 0)$ 和 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1(y \leq 0)$ 组成,方向沿逆时针方向,求曲线积分

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{y^2 + y + 4x^2}{4x^2 + y^2} + \sin x^2 \right) dx + \left(\frac{4x^2 - x + y^2}{4x^2 + y^2} + \sin y^2 \right) dy$$

Solution.

设 Ω 为 Γ 围成的闭区域.

首先令

$$P(x, y) = \frac{y}{4x^2 + y^2} \quad Q(x, y) = \frac{-x}{4x^2 + y^2}$$

再令

$$A(x, y) = 1 + \sin x^2 \quad B(x, y) = 1 + \sin y^2$$

于是原曲线积分即为

$$\oint_{\Gamma} (A + P)dx + (B + Q)dy$$

首先有

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

在 \mathbb{R}^2 上成立,于是据Green公式有

$$\oint_L A dx + B dy = \iint_{\Omega} 0 d\sigma = 0$$

考虑小椭圆 $\Omega_{\varepsilon} : x^2 + y^2 \leq \varepsilon^2$ 和其边界 S_{ε} ,其中 $0 < \varepsilon < 3$.在 $\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}$ 上根据Green公式有

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma + S_{\varepsilon}^-} P dx + Q dy &= \iint_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) d\sigma \\ &= \iint_{\Omega \setminus \Omega_{\varepsilon}} -\frac{(4x^2 + y^2) - 8x^2 + (4x^2 + y^2) - 2y^2}{(4x^2 + y^2)^2} d\sigma \\ &= 0 \end{aligned}$$

现在做换元 $x = \frac{1}{2}\varepsilon \cos \theta, y = \varepsilon \sin \theta$.椭圆周 S_{ε} 逆时针方向的单位切向量为 $\mathbf{n} = \frac{(-y, x)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.于是

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} P dx + Q dy &= \oint_{S_{\varepsilon}^+} P dx + Q dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \oint_S y dx - x dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^{2\pi} -\sqrt{x^2 + y^2} d\theta \\ &= -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

于是

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{y^2 + y + 4x^2}{4x^2 + y^2} + \sin x^2 \right) dx + \left(\frac{4x^2 - x + y^2}{4x^2 + y^2} + \sin y^2 \right) dy = -\frac{\pi}{2}$$

10.(10分) 设曲面 S 是柱体 $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$ 的表面的外侧.

(1) 求曲面积分

$$\iint_S (y-z)|x|dydz + (z-x)|y|dzdx + (x-y)zdx dy$$

(2) 求曲面积分

$$\iint_S (y-z)x^2 dydz + (z-x)y^2 dzdx + (x-y)z^2 dx dy$$

(3) 求曲面积分

$$\iint_S (y-z)x^3 dydz + (z-x)y^3 dzdx + (x-y)z^3 dx dy$$

Solution.

S 可分为三个部分,即

$$D_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$$

$$D_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 = 1\}$$

三个面的单位外法向量分别为 $\mathbf{n}_1 = (0, 0, -1)$, $\mathbf{n}_2 = (0, 0, 1)$, $\mathbf{n}_3 = (x, y, 0)$.

各区域都关于 Oxz 和 Oyz 平面对称,也关于 z 轴对称.

(1) 在 D_1 面上有

$$I_1 = \iint_{D_1} -1(x-y)z dS = 0$$

在 D_2 面上有

$$I_2 = \iint_{D_2} -1(x-y)z dS = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (x-y) d\sigma = 0$$

在 D_3 面上有

$$I_3 = \iint_{D_3} x|x|(y-z) + y|y|(z-x) dS = 0$$

于是

$$\iint_S (y-z)|x|dydz + (z-x)|y|dzdx + (x-y)zdx dy = 0$$

(2) 同理不难有 $I_1 = I_2 = 0$,而

$$I_3 = \iint_{D_3} (y-z)x^3 + (z-x)y^3 dS = 0$$

于是

$$\iint_S (y-z)x^2 dydz + (z-x)y^2 dzdx + (x-y)z^2 dx dy = 0$$

(3) 仍然不难有 $I_1 = I_2 = 0$, 而

$$I_3 = \iint_{D_3} (y-z)x^4 + (z-x)y^4 \mathrm{d}S = \iint_{D_3} x^4 y - xy^4 + z(y^4 - x^4) \mathrm{d}S = 0$$

于是

$$\iint_S (y-z)x^3 \mathrm{d}y \mathrm{d}z + (z-x)y^3 \mathrm{d}z \mathrm{d}x + (x-y)z^3 \mathrm{d}x \mathrm{d}y = 0$$