北京大学数学科学学院2023-24高等数学B2期末考试

1.(14分) 讨论下列级数的敛散性.

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$$

(2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

Solution.

(1) 令$u_n = 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$,于是

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1$$

根据Cauchy判别法可知原级数收敛.

(2) 令$u_n = \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$,这显然是一个单调下降的正项级数.采用积分判别法,有

$$\sum_{n=2}^{\infty} u_n > \int_2^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\mathrm{d}x = \left(2\sqrt{\ln x}\right)\Big|_0^{+\infty}$$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\ln x} = +infty$,于是上述积分发散,因而原级数发散.

2.(14分) 判断下列级数的敛散性.如果收敛,请判断其为绝对收敛还是条件收敛.

(1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

Solution.

(1) 我们有

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1}$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1}(-1)^n + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n-1}$$

注意到$a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$对$n$单调递减且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=0$$

于是根据Leibniz判别法可知第一部分收敛.又因为级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散,从而原级数发散.

(2) 令$u_n=\dfrac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$,于是$\ln u_n=-\dfrac{n+1}{n}\ln n$.令$f(x)=-\dfrac{x+1}{x}\ln x$,则有

$$f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}-\frac{x+1}{x^2}=\frac{\ln x-x-1}{x^2}$$

当$x>2$时$f'(x)<0$,即$f(x)$在$x>2$时单调递减.于是$\{u_n\}_{n=2}^{\infty}$单调递减.此外有

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=0\cdot 1=0$$

于是根据Leibniz判别法可知原级数收敛.

现在考察其绝对收敛性.注意到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1$$

又因为级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散,于是根据比较判别法可知

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$

发散.于是原级数条件收敛.

3.(16分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$$

的收敛半径,收敛区间,收敛域以及和函数.

Solution.

令$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=1$$

于是收敛半径$R=1$,收敛区间为$(-1,1)$.又当$|x|=1$时有

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}$$

绝对收敛,因此该幂函数的收敛域为$[-1,1]$.令和函数为$S(x)$,对其逐项求导有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}=x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1}=x\arctan x$$

于是

$$\begin{aligned}\int S'(x)\mathrm{d}x&=\int x\arctan x\mathrm{d}x\\&=x^2\arctan x-\int x\left(\arctan x+\frac{x}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=x^2\arctan x-\int S'(x)\mathrm{d}x-\int\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

于是

$$\int S'(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x+\arctan x-x\right)$$

又因为$S(0)=0$,于是

$$S(x)=\frac{1}{2}\left(x^2\arctan x+\arctan x-x\right)$$

4.(12分) 求含参变量a的积分

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(a^2\sin^2 x+\cos^2 x\right)\mathrm{d}x(a>0)$$

Solution.

记$f(x,a)=\ln\left(a^2\sin^2 x+\cos^2 x\right)$.注意到$a^2\sin^2 x+\cos^2 x>0$对所有$x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$和$a\neq 0$成立,因此被积函数$f(x,a)$在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(-\infty,0)$和$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(0,+\infty)$上有定义并且二元连续.考虑到$f(x,a)=f(x,-a)$,即$I(-a)=I(a)$,因此下面考虑$a>0$的情形即可.

同理,$\dfrac{\partial f}{\partial a}(x,a)=\dfrac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x}$也在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times(0,+\infty)$上有定义并且二元连续.于是可以对$I(a)$求导得到

$$I'(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial f}{\partial a}(x,a)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x}\xlongequal{u=\tan x}\int_0^{+\infty}\frac{2au^2}{\left(a^2u^2+1\right)\left(u^2+1\right)}\mathrm{d}u$$

当$a=1$时有

$$I'(a)=\int_0^{+\infty}\frac{2u^2}{\left(1+u^2\right)^2}\mathrm{d}u=\left(\arctan u-\frac{u}{1+u^2}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{\pi}{2}$$

当$a \neq 1$时有

$$\begin{aligned}
I'(a) &= \int_0^{+\infty} \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} \mathrm{d}u \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{2}{1-a^2} \left(\frac{1}{a^2u^2+1} - \frac{1}{u^2+1} \right) \mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{1-a^2} \left(\frac{1}{a} \arctan u - \arctan u \right) \Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{1-a^2} \cdot \frac{1-a}{a} \cdot \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{1+a}
\end{aligned}$$

从而$a > 0$时$I(a) = \pi \ln(1+a) + C$.又因为

$$I(1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0 \mathrm{d}x = 0$$

于是$a > 0$时

$$I(a) = \pi \ln \frac{1+a}{2}$$

于是

$$I(a) = \pi \ln \frac{1+|a|}{2}$$

5.(12分) 判断广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^{\alpha}} \mathrm{d}x$$

的敛散性,其中$0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$.

Solution.

先考虑瑕积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\sin x)^{2\alpha}} \mathrm{d}x$$

瑕点为0.由于

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{(\sin x)^{2\alpha}}}{\frac{1}{x^{2\alpha}}} = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{x}{\sin x} \right)^{\alpha} = 1^{2\alpha} = 1$$

于是上述瑕积分与

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^{2\alpha}} \mathrm{d}x$$

同敛散.又因为$0 < \alpha < \dfrac{1}{2}$,于是$0 < 2\alpha < 1$,从而上述瑕积分收敛,因而开始的瑕积分亦收敛.设其收敛于C.

我们有

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_0^A\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x$$
$$=\lim_{A\to+\infty}\left(\int_{(n+1)\pi}^A\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x+\sum_{n=0}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x\right)$$

其中$n\in\mathbb{N}$并且$(n+1)\pi<A<(n+2)\pi$,于是$A\to+\infty$时$n\to\infty$.并且我们有

$$0<\int_{(n+1)\pi}^A\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x<\frac{1}{1+(n+1)^2\pi^2}\int_{n+1(\pi)}^A\frac{1}{\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x<\frac{2C}{1+(n+1)^2\pi^2}$$

由夹逼准则可知

$$\lim_{A\to+\infty}\int_{(n+1)\pi}^A\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x=0$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x$$

考虑到$\sin x$的周期性,可将右边的积分改写为

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x\xlongequal{u=x-n\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1+(u+n\pi)^2\right)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}u$$

而

$$\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(1+(u+n\pi)^2\right)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}u<\frac{1}{1+n^2\pi^2}\int_0^{\pi}\frac{1}{\left(\sin^2\right)^\alpha}\mathrm{d}x=\frac{2C}{1+n^2\pi^2}$$

于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2)\left(\sin^2 x\right)^\alpha}\mathrm{d}x<2C\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{1+n^2\pi^2}$$

收敛.

6.(12分) 讨论积分

$$\int_1^{+\infty}t\mathrm{e}^{-tx}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

在$0\leqslant t<+\infty$上的一致收敛性.

Solution.

令$f(x)=\dfrac{1}{x}$,$g(x)=\cos x$.不难看出$f(x)$单调递减且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,而对任意$A>a>1$有

$$\left|\int_a^A g(x)\mathrm{d}x\right|=|\sin A-\sin a|\leqslant 2$$

即$\int_a^A g(x)\mathrm{d}x$一致有界.于是根据Dirichlet判别法可知

$$\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$$

一致收敛.

令$h(x,t)=t\mathrm{e}^{-tx}$.对于固定的$t\geqslant 0$,$h(x,t)$总是对x单调递减,并且$h(x,t)=t\mathrm{e}^{-tx}<t\mathrm{e}^{-t}\leqslant\frac{1}{\mathrm{e}}$对$t\in[0,+\infty)$一致有界.

于是根据Abel判别法可知原级数对$t\in[0,+\infty)$一致收敛.

7.(20分) 设$f(x)$是以2π为周期的函数,满足$f(x)=|x|,x\in[-\pi,\pi]$.求出$f(x)$的傅里叶级数及其和函数,并求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

Solution.

注意到$f(x)=|x|$为偶函数,因此考虑a_n即可.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\pi$$

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\mathrm{d}x\overset{u=nx}{=\!=\!=}\frac{2}{\pi n^2}\int_0^{\pi}u\cos u\mathrm{d}u\\&=\frac{2}{\pi n^2}\left(u\sin u+\cos u\right)\Big|_0^{n\pi}=\begin{cases}0,n\text{为偶数}\\-\dfrac{4}{\pi n^2},n\text{为奇数}\end{cases}\end{aligned}$$

于是$f(x)$的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4\cos((2n+1)x)}{\pi(2n+1)^2}$$

由于$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上分段连续且分段单调,又因为$f(-\pi)=f(\pi)$,没有间断点,因此根据Dirichlet定理可知上述Fourier级数收敛于$f(x)$.

根据Parseval等式有

$$\frac{\pi^2}{2}+\sum_{n=0}\frac{16}{\pi^2(2n+1)^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

于是

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

注意到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4n)^4}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{1 - \frac{1}{4^4}}{1 + \frac{1}{2^4}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{16}{15} \cdot \frac{\pi^4}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$