

含参变量的广义积分

连续性

假定二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形域 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续,那么含参变量积分

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上连续.特别地,对于任意 $y_0 \in [c, d]$,都有

$$\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = g(y_0) = \int_a^b f(x, y_0) dy$$

可积性

假定二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形域 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续,那么含参变量积分

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上可积,且

$$\int_c^d g(y) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

即积分顺序可以交换.

可微性

假定二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形域 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续,那么含参变量积分

$$g(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上可微,且

$$g'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

即求导和积分的顺序可以交换.

对于变上下限的积分,可以通过多元函数的求导法则确定其导函数.

变上限含参积分的求导方法

假定二元函数 $f(x, y)$ 在闭矩形域 $[a, b] \times [u, v]$ 上连续,其中 u, v 均是 y 的函数,那么含参变量积分

$$g(y) = \int_u^v f(x, y) dx$$

的导函数为

$$g'(y) = -f(u,y)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + f(v,y)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + \int_u^v f_y(x,y)\mathrm{d}x$$