

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期中考试

1. (15分) 导数类基本计算题.

(1) (5分) 求函数

$$f(x) = x^{\arcsin x}, 0 < x < 1$$

的导函数 $f'(x)$.

(2) (5分) 求函数

$$f(x) = \int_e^{e^x} \frac{dt}{1 + \ln t}$$

的导函数 $f'(x)$.

(3) (5分) 求函数

$$f(x) = \arctan x$$

在 $x = 0$ 处的三阶导数 $f^{(3)}(0)$.

2. (15分) 积分类基本计算题.

(1) (5分) 求定积分

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \cos x}{1 + \sin^2 x} dx$$

(2) (5分) 求欧氏平面直角坐标系中曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ 从 $(0, 0)$ 到 $\left(1, \frac{1}{2}\right)$ 的弧长.

(3) (5分) 设奇数 $n \geq 3$, 求极坐标系 (r, θ) 中曲线 $r = \sin(n\theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ 围成的封闭图形的面积.

3. (15分) 序列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1 > 0, x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{1}{x_n} \right)$$

试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求出其值.

4. (20分) 设 $x > 0$, 定义

$$p(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^3 + 2021}}$$

试证明: 方程 $p(x+1) = p(x) + \sin x$ 有无穷多个正实数解.

5. (15分) 证明: 对于任意定义在 $[0, 1]$ 上的连续函数 $f(x)$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f(x) \sin(nx) dx = 0$$

6. (20分) 设 $y = f(x) = x^3$, $x = g(t) = t^2$, $y = f(g(t)) = t^6$, $\Delta t = 0.1$, $\Delta x = g(1+0.1) - g(1) = 0.21$.

(1) (6分) 当把 t 作为自变量时, 函数 $y = f(g(t)) = t^6$ 的二阶微分记为 $d_t^2 y$, 函数 $x = g(t) = t^2$ 的一阶微分记为 $d_t x$. 试计算: 当 $t = 1$, $\Delta t = 0.1$ 时, 函数 $y = f(g(t))$ 的二阶微分 $d_t^2 y|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 和函数 $x = g(t)$ 的一阶微分 $d_t x|_{t=1, \Delta t=0.1}$.

(2) (7分) 当把 x 作为自变量时,函数 $y = f(x) = x^3$ 的二阶微分记为 $d_x^2 y, x$ (视作 x 的函数)的一阶微分记为 $d_x x$. 试计算:当 $x = 1, \Delta x = 0.21$ 时,函数 $y = f(x)$ 的二阶微分 $d_x^2 y|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 和函数 x 的一阶微分 $d_x x|_{x=1, \Delta x=0.21}$.

(3) (6分) $\frac{d_t^2 y}{(d_t x)^2} \bigg|_{t=1, \Delta t=0.1}$ 和 $\frac{d_x^2 y}{(d_x x)^2} \bigg|_{x=1, \Delta x=0.21}$ 相等吗?