

北京大学数学科学学院2022-23高等数学A2期中考试

1.(32分) 指出下列各积分的积分类型,并计算其积分值,其中

$$D_1 = [0, 1] \subset \mathbb{R} \quad D_2 = [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^2 \quad D_3 = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$$

记 $\partial\Omega$ 表示 Ω 的边界.记 $S_1 = \partial D_2$, $S_2 = \partial D_3$, S_1^+ 为逆时针方向的 S_1 , S_2^+ 为外法线方向的 S_2 .

(1) $\int_{D_1} x dx$

(2) $\oint_{S_1} xy ds$

(3) $\oiint_{S_2} xyz dS$

(4) $\iint_{D_2} xy dx dy$

(5) $\oint_{S_1^+} 2xy dx + (x^2 + y^2) dy$

(6) $\iiint_{D_3} x^6 y^{16} z^{16} dx dy dz$

(7) $\oiint_{S_2^+} \left(\frac{x}{2} + z^3 \sin y^2 \right) dy dz + \left(\frac{y}{3} + e^{x \cos z} \right) dz dx + \left(\frac{z}{6} + \arctan(xy) \right) dx dy$

(8) $\oint_{\Gamma^+} x dx + y dy + z dz$, 其中 Γ^+ 是由 $(0, 0, 0)$ 出发,依次经过点 $(1, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(0, 1, 1)$, $(0, 1, 0)$ 后回到 $(0, 0, 0)$ 的直线段构成.

2.(12分) 求二重积分

$$I = \iint_D |y - x^2| dx dy$$

其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$.

3.(12分) 计算由封闭曲面

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \left(x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{5} \right)^2 \leq x \right\}$$

围成区域的体积.

4.(12分) 设 S^+ 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧,试求曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} \frac{xdydz + ydzdx + zdxdy}{(x^2 + 4y^2 + 9z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5.(12分) 设 $f(t)$ 是 $[0, 1]$ 上的可积函数,满足

$$\int_0^1 f(t)dt = 1 \quad \int_0^1 t f(t)dt = 2 \quad \int_0^1 t^2 f(t)dt = 3$$

试求累次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^y f(z)dz$$

6.(10分) 设

$$F(t) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq t^2} f(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

其中 $f(s)$ 连续,在 $s = 0$ 处可导,并且满足 $f(0) = 0, f'(0) = 10$.求极限

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t)}{t^5}$$

7.(10分) 设 $f(x, y)$ 是 \mathbb{R}^2 上的非负连续函数.对于 $r > 0, \rho > 0$,令

$$I_r = \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} f(x, y) dx dy \quad J_\rho = \iint_{-\rho \leq x, y \leq \rho} f(x, y) dx dy$$

试证明:当极限 $\lim_{r \rightarrow +\infty} I_r$ 与极限 $\lim_{\rho \rightarrow +\infty} J_\rho$ 之一存在且有限时,另一个极限必然也存在且有限,并且两者相等.