Lecture 10 Function series(函数项级数)

L.10.1 试证明:函数项级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$$

在$(-\infty,+\infty)$不一致收敛.

提示:借助连续性的传递,用反证法.

Proof.

假设$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

由于对于任意$n\in\mathbb{N}^*$,都有$u_n(x)=\dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$在$(-\infty,+\infty)$上连续,于是$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续.

而

$$S(0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{0}{1^n}=0$$

对于$x\neq 0$有

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}=x^2\left(\frac{1}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}-1\right)=x^2\left(\frac{x^2+1}{x^2}-1\right)=1$$

于是

$$\lim_{x\to 0^+}S(x)=\lim_{x\to 0^-}S(x)=1\neq S(0)$$

从而$S(x)$在$x=0$处不连续,这与假设矛盾.

于是$S(x)$在$(-\infty,+\infty)$上不一致收敛.

L.10.2 试证明:函数项级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}$$

在$(0,+\infty)$不一致收敛,但是在$(a,+\infty)$一致收敛,其中$a>0$.

Proof.

置$u_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$.取点列$x_n=\dfrac{1}{n}$,则有$u_n\left(x_n\right)=\dfrac{(-1)^n}{2}$.

于是$\{u_n\left(x_n\right)\}$震荡发散,因而$S(x)$在$(0,+\infty)$不一致收敛.

置$a_n(x)=\dfrac{1}{1+nx}$,$b_n(x)=(-1)^n$.

取定$x\in(a,+\infty)$,都有$a_n(x)$单调递减.又

$$a(x)=\lim_{n\to\infty}a_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+nx}=0$$

$$|a_n(x)-a(x)|=\left|\frac{1}{1+nx}\right|\leqslant\frac{1}{1+na}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+na}=0$$

于是$\{a_n(x)\}$在(a,∞)上一致收敛于0.

$\{b_n(x)\}$的部分和序列显然一致有界.

于是根据Ditichlet判别法可知$S(x)$在$(a,+\infty)$上一致收敛.

L.10.3 计算下列极限.

(1)

$$\lim_{x\to 3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^n$$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x$$

Solution.

(1) 考虑区间$X=(3-\delta,3+\delta)$,其中$0<\delta<1$.

不妨令$\delta=\dfrac{1}{4}$,此时对于任意$x\in X$有$-\dfrac{5}{6}<\dfrac{x-4}{2(x-2)}<-\dfrac{3}{10}$.

令$u_n(x)=\left(\dfrac{x-4}{2x-4}\right)^n$,于是$|u_n(x)|<\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

根据Weierstrass判别法可知$S(x)=\displaystyle\sum_{n\to\infty}^{\infty}u_n(x)$在$X$上一致收敛.

又各$u_n(x)$在X上连续,于是$S(x)$在X上连续.于是

$$\lim_{x\to 3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{x-4}{x-2}\right)^n=\lim_{x\to 3}S(x)=S(3)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{3}$$

(2) 考虑$f_n(x)=\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$.取定$x\in(0,1)$,则有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right]^x=\mathrm{e}^x$$

于是$\{f_n(x)\}$逐点收敛于$f(x)=\mathrm{e}^x$.又有

$$|f_n(x)-f(x)|=\left|\left(1+\frac{x}{n}\right)^n-\mathrm{e}^x\right|<\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

又

$$\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}-\mathrm{e}=0$$

于是$\{f_n(x)\}$在$(0,1)$上一致收敛于$f(x)=\mathrm{e}^x$.于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$$

L.10.4 设$f(x)$是$[0,1]$上的连续函数,且$f(1)=0$.试用定义证明$f_n(x)=x^n f(x)$在$[0,1]$上一致收敛.

Proof.

当$0\leqslant x<1$时$\lim\limits_{n\to\infty} x^n f(x)=f(x)\lim\limits_{n\to\infty} x^n=f(x)\cdot 0=0$.
当$x=1$时$\lim\limits_{n\to\infty} x^n f(x)=0$.于是$\{f_n(x)\}$在$[0,1]$上逐点收敛于$f(x)=0$.
由于$f(x)$在$[0,1]$上连续,于是存在$M\geqslant 0$使得$|f(x)|\leqslant M$对任意$x\in[0,1]$成立.
由于$f(1)=0$,因而$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=0$.
于是对于任意$\varepsilon_f>0$存在$\delta_f>0$使得$|f(x)|<\varepsilon$对任意$1-\delta_f<x<1$成立.
现在,对于任意$\varepsilon>0$,取$\varepsilon_f=\varepsilon$和对应的$\delta_f$,令$N=\max\left\{1,\left\lceil\dfrac{\ln\varepsilon-\ln M}{\ln(1-\delta_f)}\right\rceil\right\}$.
对于任意$n>N$,如果$x\leqslant 1-\delta_f$,则有

$$|x^n f(x)-0|\leqslant\left|(1-\delta_f)^N\cdot M\right|\leqslant\left|\frac{\varepsilon}{M}\cdot M\right|=\varepsilon$$

如果$1-\delta_f<x\leqslant 1$,则有

$$|x^n f(x)-0|\leqslant|x^n|\,\varepsilon_f\leqslant\varepsilon_f=\varepsilon$$

于是根据定义可知$x^n f(x)$在$[0,1]$上一致收敛于0.