

曲线积分

1. 第一型曲线积分

在考虑曲线的质量,质心,转动惯量等问题时,都要用到第一型曲线积分.

1.1 物质曲线的质量

设有一不均匀的物质曲线 L ,设 L 上一点 $M(x, y, z)$ 的密度为 $\rho(x, y, z)$,求 L 的质量 m .

Solution.

我们仍然用分割,近似代替,求和,取极限的方法求 m 的值.

将曲线 L 分成 n 段,第 i 段的弧长为 Δs_i .任取第 i 段上的一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$.

当分割的足够精细时,可以用 M_i 处的密度近似代替第 i 段的密度.于是第 i 段的质量为

$$\Delta m_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

对 Δm_i 求和,即可得到曲线质量 m 的近似值

$$m = \sum_{i=1}^n \Delta m_i \approx \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$.类比定积分的定义,若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

存在,我们就认为这极限值是 L 的质量 m ,即

$$m = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

实际问题中不只是物质曲线的质量需要计算上面形式的极限,还有很多问题也是类似的.

于是,我们着手定义第一型曲线积分.

1.2 定义:第一型曲线积分

设函数 $f(x, y, z)$ 在分段光滑的曲线段 L 上有定义.将曲线 L 任意分成 n 段,第 i 段的弧长为 Δs_i ,在其上任取一点 $M_i(x_i, y_i, z_i)$.令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$.若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i$$

对于曲线 L 的任意分割方法和各中间点 M_i 的任意取法都存在,则称此极限为 $f(x, y, z)$ 沿曲线 L 的**第一型曲**

线积分,也称为对弧长的曲线积分,记作

$$\int_L f(x, y, z) ds$$

如果上述极限存在,我们就称函数 $f(x, y, z)$ 在 L 上可积.

第一型曲线积分不依赖曲线的走向.例如,对于曲线 L 和它的端点 A, B ,积分路径从 A 到 B 和从 B 到 A 不改变结果,即

$$\int_{\widehat{AB}} f(x, y, z) ds = \int_{\widehat{BA}} f(x, y, z) ds$$

其余的性质,例如可加性等,在此略去.

我们现在来讨论第一型曲线积分的计算.为了简单起见,我们先讨论平面第一型曲线积分的计算.

1.3 平面第一型曲线积分的计算I

设 L 是 Oxy 平面上的一条曲线,其方程由函数 $y = \mathbf{y}(x)$, $a \leq x \leq b$ 给出,并假定 $y = \mathbf{y}(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数.设 $f(x, y)$ 是在 L 上定义的连续函数,试计算积分 $\int_L f(x, y) ds$.

Solution.

根据第一型曲线积分的定义有

$$\int_L f(x, y) ds = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i$$

在这种情况下,对 L 的任意分割都相当于对区间 $[a, b]$ 的分割.于是上述和式可以改写为

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i = \sum_{i=1}^n f(x_i, \mathbf{y}(x_i)) \Delta s_i$$

另一方面,在分割地足够精细的情形下,又有

$$\Delta s_i \approx \sqrt{(\Delta x_i)^2 + [\mathbf{y}'(x_i) \Delta x_i]^2} = \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x_i)]^2} \Delta x_i$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.又因为 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\} \rightarrow 0$ 时, $\lambda' = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\} \rightarrow 0$,于是根据Riemann积分的定义有

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y) ds &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \\ &= \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, \mathbf{y}(x_i)) \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x_i)]^2} \Delta x_i \\ &= \int_a^b f(x, \mathbf{y}(x)) \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x)]^2} dx \end{aligned}$$

于是我们有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_a^b f(x, \mathbf{y}(x)) \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x)]^2} dx$$

上述结果的得出是十分符合直觉的,因为 L 由 $y = \mathbf{y}(x)$ 确定,自然可以将 $f(x, y)$ 写成 $f(x, \mathbf{y}(x))$.

我们已经知道,弧微分 $ds = \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x)]^2}dx$,两者结合自然可以得到上面的公式.

1.4 平面第一型曲线积分的计算II

设 L 是 Oxy 平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

确定,其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的一阶导数.设 $f(x, y)$ 是在 L 上定义的连续函数,试计算积分 $\int_L f(x, y)ds$.

Solution.

我们采取相似的方法计算之.对曲线 L 的任意分割都相当于对区间 $[\alpha, \beta]$ 的分割

$$\alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = \beta$$

点 $M_n(\varphi(t_i), \psi(t_i)) (0 \leq i \leq n)$ 构成了 L 的分割点.可以证明,第 i 段的弧长 Δs_i 有如下近似

$$\Delta s_i \approx \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2} \Delta t_i$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$.令 $\lambda' = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta t_i\}$,于是 $\lambda' \rightarrow 0$ 时上述近似的误差是高阶无穷小量.因此

$$\begin{aligned} \int_L f(x, y)ds &= \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta s_i \\ &= \lim_{\lambda' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\varphi(t_i), \psi(t_i)) \sqrt{[\varphi'(t_i)]^2 + [\psi'(t_i)]^2} \Delta t_i \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt \end{aligned}$$

观察上述式子,也可以与参数方程的弧微分对应.总结来说,我们有如下定理.

1.5 平面第一型曲线积分的计算

我们按曲线的解析式分为如下两类.

- a. 设 L 是 Oxy 平面上的一条曲线,其方程由函数 $y = \mathbf{y}(x)$, $a \leq x \leq b$ 给出,并假定 $y = \mathbf{y}(x)$ 在 $[a, b]$ 上有连续的导数.设 $f(x, y)$ 是在 L 上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x, y)ds = \int_a^b f(x, \mathbf{y}(x)) \sqrt{1 + [\mathbf{y}'(x)]^2} dx$$

b. 设 L 是 Oxy 平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

确定,其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的一阶导数.设 $f(x, y)$ 是在 L 上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x, y) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt$$

总的来说,考虑对应情形下的弧微分即可得到相应的计算公式.

类似地,我们也可以给出三维空间中的第一型曲线积分的计算公式.

1.6 空间第一型曲线积分的计算

设 L 是 \mathbb{R}^3 空间中的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(t) \\ y = \mathbf{y}(t) \\ z = \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

确定,其中 $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}(t)$ 和 $\mathbf{z}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的一阶导数.设 $f(x, y, z)$ 是在 L 上定义的连续函数,则有

$$\int_L f(x, y, z) ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{y}(t), \mathbf{z}(t)) \sqrt{[\mathbf{x}'(t)]^2 + [\mathbf{y}'(t)]^2 + [\mathbf{z}'(t)]^2} dt$$

定理的证明与在平面中是完全相似的,在此就不再赘述.

2. 第二型曲线积分

计算一个受力的质点沿曲线运动的功需要用到第二型曲线积分.

2.1 质点沿曲线运动所做的功

设平面上有一光滑的曲线 L 和 L 的一个走向,其起点为 A ,终点为 B .设想一质点沿 L 运动,它在点 $(x, y) \in L$ 受到的力为

$$\mathbf{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$$

试计算该质点从 A 运动到 B 时外力 \mathbf{F} 所做的功 W .

Solution.

我们将 \widehat{AB} 以分点 $A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ 分成 n 段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i} (i = 1, \dots, n)$.

设第 i 段弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长为 Δs_i .

当分割的足够精细时,外力 \mathbf{F} 在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上变化不大,可以近似看作常力 $\mathbf{F}(x_i, y_i)$,其中 (x_i, y_i) 为这弧上任意取定的一点.同理,质点的运动路径也可以近似看作从 M_{i-1} 到 M_i 的线段,于是 \mathbf{F} 在这弧上做的功 ΔW_i 近似为

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}$$

对 \mathbf{F} 做正交分解,有 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$.对有向线段 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i}$ 做正交分解,有 $\overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \Delta x_i\mathbf{i} + \Delta y_i\mathbf{j}$.其中 $\Delta x_i, \Delta y_i$ 为这有向线段在 x, y 方向上对应的位移.于是我们有

$$\Delta W_i \approx \mathbf{F}(x_i, y_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i$$

于是所求的总功 W 近似为

$$W \approx \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i]$$

令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$,当分割的足够精细时有 $\lambda \rightarrow 0$.若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(x_i, y_i)\Delta x_i + Q(x_i, y_i)\Delta y_i]$$

存在,这极限就是所求的功.

于是我们可以对第二型曲线积分做如下定义.

2.2 定义:第二型曲线积分

设 L 是从 A 到 B 的分段光滑有向曲线,向量函数 $\mathbf{F}(x, y) = P(x, y)\mathbf{i} + Q(x, y)\mathbf{j}$ 在 L 上有定义.按照 L 的方向,依次用分点 $A = M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n = B$ 将 L 分成 n 条有向弧 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ ($i = 1, \dots, n$), $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 的弧长记为 Δs_i ,并令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta s_i\}$.在 $\widehat{M_{i-1}M_i}$ 上任取一点 (ξ_i, η_i) .若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [P(\xi_i, \eta_i)\Delta x_i + Q(\xi_i, \eta_i)\Delta y_i]$$

存在(不依赖于分割方法和中间点的取法),则称此极限为向量函数 $\mathbf{F}(x, y)$ 沿曲线 L 从 A 到 B 的**第二型曲线积分**,也称作**对坐标的曲线积分**,记作

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy \quad \text{或} \quad \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F}(x, y) d\mathbf{r}$$

其中 $d\mathbf{r} = (dx, dy)$.

与第一型曲线积分类似,我们可以通过计算定积分的一般方法计算第二型积分曲线,只不过现在要注意曲线的走向.

2.3 第二型曲线积分的计算

设 L 是 Oxy 平面上的一条曲线,由参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

确定,其中 $\varphi(t)$ 和 $\psi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的一阶导数.

当 t 单调地由 α 变化至 β 时,曲线上的点由 A 变化至 B .设 $P(x, y), Q(x, y)$ 是在 L 上定义的连续函数,则有

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} [P(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)] dt$$

Proof.

我们略去详细的证明过程(需要用到Lagrange中值定理),而给出一个理解此式的方法.

根据参数方程可知 $dx = \varphi'(t)dt, dy = \psi'(t)dt$.将 x, y, dx, dy 代入定义式中即可得到答案.

应特别强调的是,第二型曲线积分与给定曲线的方向有关,于是在所求的定积分中可能出现下限大于上限的情形.不管怎样,都需要注意下限对应起点,上限对应终点.

在空间中的第二型曲线积分也是完全类似的,在此也不再赘述.

3.两种曲线积分间的联系

首先,我们来回顾一下方向余弦的概念.

3.1 向量的方向余弦

以平面向量 \mathbf{a} 为例,我们用 $\cos(\mathbf{a}, x)$ 和 $\cos(\mathbf{a}, y)$ 表示 \mathbf{a} 与两个坐标轴的夹角的余弦,称为向量 \mathbf{a} 的方向余弦.方向余弦的基本性质如下

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(\cos(\mathbf{a}, x) \cos(\mathbf{a}, y))$$

换言之,向量 $(\cos(\mathbf{a}, x), \cos(\mathbf{a}, y))$ 即为 \mathbf{a} 方向的单位法向量.

我们有如下定理.

3.2 第一型和第二型曲线积分的联系

设函数 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$,则有

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

其中 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 为 \widehat{AB} 上各点的切线的方向余弦.

Proof.

由之前的讨论可知,当曲线 L 用参数方程

$$\begin{cases} x = \mathbf{x}(t) \\ y = \mathbf{y}(t) \\ z = \mathbf{z}(t) \end{cases}, \alpha \leq t \leq \beta$$

表出时, $\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$ 即为曲线的切向量,因而

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) dt$$

又 $d\mathbf{r}$ 的模恰为 ds ,即

$$|d\mathbf{r}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = ds$$

设 $d\mathbf{r}$ 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$,则有

$$(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{d\mathbf{r}}{|d\mathbf{r}|} = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right)$$

由此可得

$$dx = \cos \alpha ds, dy = \cos \beta ds, dz = \cos \gamma ds$$

于是

$$\int_{\widehat{AB}} Pdx + Qdy + Rdz = \int_{\widehat{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds$$

上述转化在之后将非常有用.