Lecture 11 Power series (幂级数)

L.11.1 求函数

$$f(x)=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

的Maclaurin级数.

Solution.

注意到

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\ln\left(1+x^2\right)-\ln\left(1-x^2\right)\right)$$

考虑$\ln(1+x)$的Maclaurin级数

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$$

于是

$$\ln\left(1+x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}$$

$$\ln\left(1-x^2\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n-1}x^{2n}}{n}$$

于是

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n-2}}{2n-1}$$

收敛域为$(-1,1)$.

L.11.2 求幂级数

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}x^{2n}$$

的显式表达式.

Solution.

我们有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}\cdot 2nx^{2n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}x^{2n-1}$$

$$S''(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n-1}}{(2n-1)}(2n-1)x^{2n-2}=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-2}=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}x^{2n}$$

注意到

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

于是比较可得

$$S''(x)=\frac{2}{1+x^2}$$

于是

$$S'(x)=2\arctan x$$

于是

$$S(x)=2x\arctan x-\ln\left(1+x^2\right)$$

L.11.3 如果幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

的收敛半径为R,试证明其逐项求导幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

在$(-R,R)$上内闭一致收敛.

Proof.

考虑任意$t\in(0,R)$.取$r\in(t,R)$,当$x\in[-t,t]$时总有

$$\left|na_nx^{n-1}\right|\leqslant n\left|a_b\right|t^{n-1}=\frac{n}{r}\left|a_nr^n\right|\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}$$

由于级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left|a_nx^n\right|$在$[-t,t]$收敛,其一般项有界,于是存在$M>0$使得

$$\left|a_nr^n\right|\leqslant M,\forall n\in\mathbb{N}$$

于是就有

$$\left|na_nx^{n-1}\right|\leqslant\frac{Mn}{r}\left|\frac{t}{r}\right|^{n-1}$$

由于$\dfrac{t}{r}<1$,因此级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{Mn}{r}\left(\frac{t}{r}\right)^{n-1}$$

收敛,于是根据强级数判别法可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}na_nx^{n-1}$$

在$[-t,t]$上收敛.于是它在$(-R,R)$上内闭一致收敛.

L.11.4 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

的收敛半径$R > 0$.试证明:幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$$

的收敛半径为$+\infty$.

Proof.

对于任意$t \in (0, R)$有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{t}\right)^n$$

注意到$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$收敛,而$\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{t}\right)^n$对任意$x \in \mathbb{R}$都收敛于0且从某一项开始对$n$单调.

根据Dirichlet判别法,$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$对任意$x \in \mathbb{R}$都收敛,于是其收敛半径为$+\infty$.