

幂级数和泰勒级数

1. 幂级数和幂级数的收敛半径

1.1 定义: 幂级数

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

的无穷级数称作**幂级数**. 其中 a_1, a_2, \dots 是常数.

1.2 幂级数的收敛半径

幂级数的收敛域要么是一个点 $\{x_0\}$, 要么是一个以 x_0 为中心的一个区间 (两端开闭不定). 该区间长度的一半称作**幂级数的收敛半径**.

Lemma

1. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_1 处收敛, 那么对于任意 x 满足 $|x| < |x_1|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都在 x 处绝对收敛.
2. 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 x_2 处发散, 那么对于任意 x 满足 $|x| > |x_1|$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 都在 x 处发散.

引理的证明从略, 可以由比较审敛法不难得到. 这样, 我们就得到如下定律.

1.3 幂级数的收敛半径

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 存在一个非负数 R (R 可以为 $+\infty$), 使得

1. 当 $|x| < R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.
2. 当 $|x| > R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散.
3. 当 $|x| = R$ 时, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 可能收敛也可能发散.

1.4 幂级数的收敛半径与收敛区间

1.3 中的 R 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛半径**, $(-R, R)$ 称为 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的**收敛区间**.

2. 收敛半径的求法

2.1 基于D'Alembert判别法的收敛半径求法

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的相邻两项系数之比满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = l$$

设该幂级数的收敛半径为 R , 那么有

1. 如果 $0 < l < +\infty$, 那么 $R = \frac{1}{l}$.
2. 如果 $l = 0$, 那么 $R = \infty$.
3. 如果 $l = +\infty$, 那么 $R = 0$.

广义地说, 你可以认为 $R = \frac{1}{l}$.

2.2 基于Cauchy判别法的收敛半径求法

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 系数满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = l$$

设该幂级数的收敛半径为 R , 那么(广义地)有 $R = \frac{1}{l}$.

3. 幂级数的性质

3.1 幂级数的内闭一致性

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$, 则有

1. 对任意 $0 < b < R$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $[-b, b]$ 上一致收敛.
2. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ 收敛, 那么它在 $[0, R]$ 上一致收敛.
3. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -R$ 收敛, 那么它在 $[-R, 0]$ 上一致收敛.

3.2 幂级数的连续性

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 连续. 特别地, 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = R$ (或 $x = -R$) 收敛, 那么 $S(x)$ 在 $x = R$ (或 $x = -R$) 右(左)连续.

3.3 幂级数的和函数的逐项积分

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内任意闭区间上可积, 且可逐项求积分, 并有

$$\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad -R < x < R$$

3.4 幂级数的和函数的逐项求导

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的和函数 $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内任意闭区间上可导, 且可逐项求导, 并有

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n t^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} \quad -R < x < R$$

Lemma

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径记为 R , 由幂级数逐项积分所得的新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 的收敛半径记为 R_1 , 由幂级数逐项求导所得的新幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ 的收敛半径记为 R_2 , 则有 $R = R_1 = R_2$.