Lecture 5 Derivative and differential(导数)

1. 判断符合以下要求的函数是否存在,并说明理由.

    (1) 在全体实数定义的函数,其仅在一点一阶可导,其余点均不连续.

    (2) 在全体实数定义的函数,其仅在一点一阶可导,其余点均不连续.

2. (1) 设$f(x)=|\ln|x||$,求$f'(x)$.

(2) 在$(0,1)$上定义以下两个分段函数

$$g_1(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{2n}},\ x\neq\frac{1}{2^n},n\in\mathbb{N}^*\\ 0,\ v\end{cases}\quad 和g_2(x)=\begin{cases}\frac{1}{2^{n+1}},\ x\neq\frac{1}{2^n},n\in\mathbb{N}^*\\ 0,\ v\end{cases}$$

问$g_1(x)$和$g_2(x)$在$x=0$处是否右可导.

3. 求参数a, b, c使得$f(x)$在全体实数上可导,其中$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{e^{x^2-1}}, & |x| < 1 \\ ax^4 - bx^2 + c, & |x| \geqslant 1 \end{cases}$.

4. 设$f(x) = (\arcsin x)^2$,求$f^{(n)}(0)$,其中$n \in \mathbb{N}^*$.

5. 考虑分段函数$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}},\ x\neq 0 \\ 0,\ x=0 \end{cases}$

,求高阶导数$f^{(2021)}(0)$.

6. 计算题.

(1) 设$f(x)=x^{x^x}$,求$f'(x)$.

(2) 设$f(x)=2\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x}-\ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}$,求$f'(x)$.

(3) 定义$g(x)=f(\frac{x-1}{x+1})$,其中$f(x)$可导且$f'(x)=\arctan x$,求$g'(x)$.

(4) 设隐函数$y=y(x)$,其中$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0, x>0$,求$y'(x)$.

7. 设$f(x)$是在$x=0$的某个邻域定义的函数,据此回答下列问题.

(1) 如果$f'(0)$存在,证明$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(0)$.

(2) 如果$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x)-f(-\Delta x)}{2\Delta x}=f'(0)$存在,能否说明$f'(0)$存在?说明理由.

8. 计算n阶导数,其中$n \in \mathbb{N}^*$.

(1) $f(x) = \sin^3 x$.

(2) $f(x) = \frac{x^n}{1-x}$.

(3) $f(x) = x^{n-1} \ln x$.

9. 设$f(x)$是在$\mathbb{R}$定义的函数,且$f'(0)$存在,据此回答下列问题.

(1) 如果正序列$\{x_n\}$和负序列$\{y_n\}$均收敛于0,证明$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(y_n)}{x_n-y_n}=f'(0)$.

(2) 如果两个正序列$\{x_n\}$和$\{z_n\}$均收敛于,问$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(z_n)}{x_n-z_n}=f'(0)$是否总成立?说明理由.

10. 设$f(x)$是在$[-1,1]$定义的函数,且$f'(0)$存在,据此回答下列问题.

(1) 证明:$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n^2}\right) - nf(0) = \frac{f'(0)}{2}$.

(2) 计算$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.