北京大学数学科学学院20xx高等数学B2期末考试

1.(10分) 对于$n \in \mathbb{N}^*$,设

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} \qquad u_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

的敛散性.

2.(10分) 求积分

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin mx \mathrm{d}x$$

其中$\alpha > 0, \beta > 0, m \neq 0$.

3.(10分) 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

为正项级数,并有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln \dfrac{1}{a_n}}{\ln n} = b$$

(1) **(5分)** 试证明:当$b > 1$时,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛.

(2) **(5分)** 试求b的取值范围,使得上述级数一定发散.

4.(10分) 求下列函数项级数的收敛区间和收敛域.

(1) **(5分)**

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 2^n \cdot \ln n}$$

(2) **(5分)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) x^n$$

5.(10分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^p}(0<x<\pi)$$

的敛散性.

6.(10分) 判断下列广义积分的敛散性.

(1) (5分)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\mathrm{d}x$$

(2) (5分)

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{\ln x}{\sqrt{x}\,(1-x)^2}\mathrm{d}x$$

7.(10分) 求含参变量x的无穷积分

$$I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t$$

8.(15分) 设$f(x)$以2π为周期,且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数.a_n,b_n为$f(x)$的Fourier系数.

(1) (3分) 试求延迟函数$f(x+t)$的Fourier系数.

(2) (12分) 设$f(x)$连续且在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,试求卷积函数

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)f(x+t)\mathrm{d}t$$

的Fourier展开式,并由此推出Parseval等式.

9.(15分) 回答下列问题.

(1) (5分) 把$f(x)=x^2$在$(-\pi,\pi]$上展开为Fourier级数.

(2) (5分) 利用**(1)**的结论证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

(3) (5分) 利用Parseval等式求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

的值.