介值定理和压缩映照原理

在高等数学书中,虽然提到了介值定理,却并不要求它的证明.下面我们来证明介值定理.
首先,需要引入确界原理.确界原理实际上是实数完备性的一种表现形式.

确界原理:任何上(下)方有界的非空集合一定存在上(下)界.

下面以上确界为例给出确界的定义.
设集合S满足$S \subset \mathbb{R}$.若实数α满足:

(a) $\forall x \in S, x \leqslant \alpha$ (满足这一条即可称α为S的一个上界)

(b) $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in S$ s.t.$x > \alpha - \varepsilon$

则称α为S的上确界. 下确界的定义类似,在此不再赘述.
我们记S的上确界为$\sup S$,下确界为$\inf S$.

现在我们根据确界原理来证明介值定理.

介值定理:
设$f : [a, b] \to \mathbb{R}$为定义在$[a, b]$上的连续函数.
$\forall \eta \in \mathbb{R}$满足$f(a) \lesseqgtr \eta \lesseqgtr f(b), \exists \xi \in (a, b)$ s.t.$f(\xi) = \eta$.

证明:不妨设$f(a) < \eta < f(b)$.
记集合$S = \{x | f(x) \leqslant \eta\} \subset [a, b]$.由$f(a) < \eta$可知$S$非空.易知$S$具有一个上界$b$.
根据确界原理,S存在上确界,记$c = \sup S$.下面证明$f(c) = \eta$.
首先,由于$f(x)$在$x = c$处连续,则$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ s.t.$\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < \varepsilon$.
采取反证法.若$f(c) > \eta$,取$\varepsilon = f(c) - \eta$,则$\exists \delta > 0$ s.t.$\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < f(c) - \eta$.
由于c是S的上确界,可知$\exists y \in (c - \delta, c]$ s.t.$y \in S$.
此时有$f(y) - f(c) > \eta - f(c)$,即$f(y) > \eta$,这与$y \in S$不符.故$f(c) \leqslant \eta$.
若$f(c) < \eta$,同理可知$\exists \delta > 0$ s.t.$\forall x \in (c - \delta, c + \delta), |f(x) - f(c)| < \eta - f(c)$.
设$y \in (c, c + \delta)$,则$f(y) - f(c) < \eta - f(c)$,即$f(y) < \eta$,从而$y \in S$.又$y > c$,这与$c = \sup S$矛盾,故$f(c) \geqslant \eta$.
综上所述,$f(c) = \eta$,原定理得证.

现在我们尝试运用介值定理来证明压缩映照原理.

压缩映照原理:
设$f : [a, b] \to [a, b]$连续,且$\exists q \in (0, 1)$ s.t.$\forall x, y \in [a, b], |f(x) - f(y)| \leqslant q |x - y|$, 则$\exists! c \in [a, b]$ s.t.$f(c) = c$.

证明:首先说明$f(x)$的连续性.
$\forall x_0 \in [a, b], \forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \dfrac{\varepsilon}{q} > 0$ s.t.$\forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \setminus \{x_0\}, |f(x) - f(x_0)| \leqslant q |x - x_0| \leqslant q\delta = \varepsilon$.

根据极限的定义有$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,即$f(x)$在$x=x_0$处连续,进而$f(x)$在$[a,b]$连续.
下面说明$f(x)$存在唯一不动点.
假定存在c_1,c_2满足$f(c_i)=c_i(i=1,2)$,则 $|f(c_1)-f(c_2)|=|c_1-c_2|>q\,|c_1-c_2|$,与题意不符.
故$f(x)$至多有一个不动点.
记$g(x)=f(x)-x$,显然$g(x)$在$[a,b]$连续.下面说明$g(x)$在$[a,b]$上必然存在零点.

(1) 若$g(a)=0$或$g(b)=0$,则$g(x)$显然存在零点.

(2) 若$g(a)>0$且$g(b)<0$,则根据介值定理可知$\exists\xi\in(a,b)$使得$g(\xi)=0$.

综上,原命题得证.

压缩映照原理还有两个引理.

引理一:设$f:[a,b]\to[a,b]$连续,且$\exists q\in(0,1)$ s.t.$\forall x,y\in[a,b],|f(x)-f(y)|\leqslant q\,|x-y|$.
设序列$\{x_n\}$满足$x_1\in[a,b],x_{n+1}=f(x_n)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$且$f(c)=c$.

证明:我们已经证明$f(x)$在$[a,b]$上连续且存在唯一不动点.
下面说明$\{x_n\}$收敛.我们有

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-c|&=|f(x_n)-f(c)|\\&\leqslant q\,|x_n-c|\\&<|x_n-c|\end{aligned}$$

考虑序列$\{y_n\}$,其中$y_n=|x_n-c|$.
根据上式可知$|y_n|$单调递减,又$y_n>0$,故$\{y_n\}$有极限.
从而$\{x_n-c\}$的极限存在.设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对递推式$x_{n+1}=f(x_n)$两边取极限有

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}f(x_n)$$

即

$$A=f(A)$$

从而$A=c$,即$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=c$.

引理二:设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,$\exists q\in(0,1)$ s.t.$\forall x,y\in\mathbb{R},|f(x)-f(y)|\leqslant q\,|x-y|$,则$f(x)$连续且$\exists!c\in\mathbb{R}$ s.t.$f(c)=c$.

证明:易知$f(x)$的连续性和不动点少于或等于1个.下面我们来证明$f(x)$存在不动点.
记$g(x)=f(x)-x$,则$g(x)$在$\mathbb{R}$上连续.
由题意可知$\exists q\in(0,1)$ s.t.$\forall x,y\in\mathbb{R},|g(x)-g(y)-x+y|\leqslant q\,|x-y|$.
不妨假定$x>y$,则有$(1-q)(x-y)\leqslant g(x)-g(y)\leqslant(1+q)(x-y)$.
则有$\forall x>y,g(x)>g(y)$且$\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}\geqslant 1-q$.

现在证明$\exists a,b\in\mathbb{R},g(a)\leqslant 0\leqslant g(b)$.
我们采取反证法.假设$\forall x\in\mathbb{R},g(x)<0$. 取$g(x_0)=p$,则$g(x_0-\frac{p}{1-q})\geqslant g(x_0)+(1-q)\cdot\frac{-p}{1-q}=0$.
这与$g(x)<0$不符.同理$\forall x\in\mathbb{R},g(x)>0$也是不成立的.
根据介值定理,$\exists\xi\in[a,b]$ s.t.$g(\xi)=0$,即$f(x)$存在不动点.
综上所述,$f(x)$在$\mathbb{R}$上连续且存在唯一不动点.