

Stolz定理

作为序列极限中的L'Hôpital定理,Stolz定理没有出现在高等数学教材中实在是一个遗憾. 在解决 $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ 等类型的序列极限时, 恰当地运用Stolz定理可以大大简化计算和思维难度, 为您带来更好的体验. 下面我们就来介绍Stolz定理.

Stolz Theorem

(1) $\frac{*}{\infty}$ 型: 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

(a) $\{b_n\}$ 单调递增.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, 其中 L 可为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$, 但不能为 ∞ .

那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

(2) $\frac{0}{0}$ 型: 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足

(a) $\{b_n\}$ 单调递减.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$.

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$, 其中 L 可为有限数, $+\infty$ 或 $-\infty$, 但不能为 ∞ .

那么有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$.

由于 $\frac{*}{\infty}$ 对 $\{a_n\}$ 没有要求, 因而在实际使用中更常用该形式的Stolz定理.

下面我们来证明这两种形式的Stolz定理.

Form(1) Proof.

(a) 若 L 为有限实数.

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} = L$ 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } \forall n > N_1, \left| \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} - L \right| < \varepsilon$, 即

$$L - \varepsilon < \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} < L + \varepsilon$$

由于 $\{b_n\}$ 递增, 则有 $b_{n+1} - b_n > 0$, 于是有

$$(L - \varepsilon)(b_{n+1} - b_n) < a_{n+1} - a_n < (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_n)$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ 有 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_2 \in \mathbb{N}^*, \text{ s.t. } \forall n > N_2, b_n > \varepsilon$

对于给定的 ε 和对应的 N_1, N_2 , 取 $N = \max\{N_1, N_2\}$, 将上述不等式从第 $N+1$ 项累加至第 n 项, 有

$$(L - \varepsilon) \sum_{i=N+1}^n (b_{i+1} - b_i) < \sum_{i=N+1}^n (a_{i+1} - a_i) < (L + \varepsilon) \sum_{i=N+1}^n (b_{i+1} - b_i)$$

即

$$(L - \varepsilon)(b_{n+1} - b_{N+1}) < a_{n+1} - a_{N+1} < (L + \varepsilon)(b_{n+1} - b_{N+1})$$

整理可得

$$L - \varepsilon < \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}}{1 - \frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}} < L + \varepsilon$$

$$\text{从而 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}}{1 - \frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}} = L$$

由 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = +\infty$ 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = 0$.

而 a_{N+1}, b_{N+1} 均为固定的有限数, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{N+1}}{b_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{N+1}}{b_{n+1}} = 0$.

$$\text{故 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_{N+1}}{b_{N+1}}}{1 - \frac{b_{N+1}}{b_{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - 0}{1 - 0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} = L$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$, 原命题得证.

(b) 若 L 为 $+\infty$ 或 $-\infty$, 证明过程类似.

形式(2)的证明留待读者自己思考. 下面我们来运用Stolz定理解决一些问题.

Cauchy's Proposition

若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = A$.

在之前的讲义中, 我们已经用 $\varepsilon - N$ 语言严格证明了Cauchy命题. 然而用Stolz定理可以很快地解决这一问题.

Proof.(Stolz ver.)

依Stolz定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^{n+1} a_i - \sum_{i=1}^n a_i}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{1} = A$$

证毕.

在相乘序列的极限一讲中, 我们提到了如下命题:

设序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B, A, B \in \mathbb{R}$,

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}}{n} = AB$$

我们当时给出的证法的核心在于证明:

设序列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$,

则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}}{n} = 0$$

下面我们用另一种方式来证明这个命题.

Proof.(Stolz ver.)

依Cauchy-Schwarz不等式有

$$0 \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}}{n} \right)^2 \leq \left(\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} \right) \left(\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} \right)$$

依Stolz定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \right)^2 - \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 = 0 - 0 = 0$$

同理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{n} = 0$$

夹逼可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i b_{n+1-i}}{n} = 0$, 原命题得证.

上述命题告诉我们, 有关**求平均**的序列极限问题都可以尝试着使用Stolz定理简化计算.

下面我们再来看一些有关的例题.

Problem 1(24.10.09 SJTU数分小测).

正项数列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = a, a \in \mathbb{R}$.

试证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = 0$.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1} \right) \\ &= a - 1 \cdot a = 0 \end{aligned}$$

根据收敛序列的有界性, $\exists M \in \mathbb{R}$, s.t. $\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} < M$

则

$$0 < \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = M \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{n}}{Mn} < M \cdot \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i}}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

依Stolz定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{i}}{\sum_{i=1}^n x_i} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{x_n^2}{n}}{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

依夹逼准则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n^2} = 0$, 证毕.

Problem 2.

求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}}$$

Solution (Method I).

依Riemann积分有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^k \right) = \int_0^1 x^k dx = \frac{1}{k+1}$$

Solution (Method II).

依Stolz定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1} - n^{k+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^k}{(k+1)(n+1)^k + \dots} = \frac{1}{k+1}$$

Problem 3.

数列 $\{a_n\}$ 满足 $0 < a_1 < 1, a_{n+1} = a_n(1 - a_n)$. 试证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 1$.

Proof.

由题意得 $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - a_n < 1$, 又 $a_n > 0$, 从而 $\{a_n\}$ 递减且有下界.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A < 1$. 对递推式两端取极限有

$$A = A(1 - A)$$

解得 $A = 0$. 从而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - a_n) = 1 - A = 1$$

依Stolz定理有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) - n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n a_{n+1}}{a_n - a_{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$$

