函数项级数

1.函数项级数

函数项级数

设$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$是定义在D上的函数,和式

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots$$

被称为定义在D上的**函数项级数**.在D上取定一点x_0,如果数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\left(x_0\right)$$

收敛(发散),则称x_0为该函数项级数的**收敛点**(**发散点**).因此,函数项级数的敛散性是以数项级数的敛散性为基础的.

函数项级数的收敛点的全体称为它的**收敛域**,发散点的全体称为它的**发散域**.对收敛域X内的任意一点x,上述级数的和记为$S(x)$.显然,S是定义在X上的函数,称为级数的**和函数**.

2.函数序列及函数项级数的一致收敛性

2.1 函数序列的收敛性和极限函数

设有一个函数序列$f_1(x), f_2(x), \cdots$,其中的每一项$f_n(x)$在集合D上有定义.

若一点$x_0 \in D$使得序列$\{f_n\left(x_0\right)\}$收敛,即极限$\lim\limits_{n \rightarrow \infty} f_x\left(x_0\right)$存在,则称序列$\{f_n(x)\}$**在**$x_0$**处收敛**,$x_0$称为该序列的**收敛点**,该序列的全体收敛点构成的集合称作序列的**收敛域**.

另外,序列$\{f_n(x)\}$在其收敛域X内定义了一个函数

$$f(x)=\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \qquad \forall x \in X$$

称$f(x)$为该序列的**极限函数**.

显然,函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$的收敛域就是其部分和序列的收敛域,其和函数就是部分和序列的极限函数.

2.2 一致收敛

设函数序列$\{f_n(x)\}$在集合X上收敛于极限函数$f(x)$.若对于任意$\varepsilon > 0$,都存在一个只依赖于ε而不依赖于x的正整数N使得$\forall n > N$都有$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$对任意$x \in X$成立,则称函数序列$\{f_n(x)\}$在$X$上**一致收敛**于$f(x)$,记作$f_n(x) \rightrightarrows f(x), x \in X(n \rightarrow \infty)$.

一致收敛的几何意义是,对于任意给定的$\varepsilon>0$,都存在足够大的n使得$f_n(x)$落在带状区域

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$$

中.需要注意的是,上述定义中的X不一定是序列的收敛域,可能只是收敛域的一个子集.

2.3 一致收敛的判据I

设函数序列$\{f_n(x)\}$在区间X上收敛于极限函数$f(x)$,若存在序列$\{a_n\}$使得

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n \qquad x\in X,n\geqslant N$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则$\{f_n(x)\}$在$X$上一致收敛于$f(x)$.

Proof.

对于任意$\varepsilon>0$,由于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,则存在$N\in\mathbb{N}^*$使得对任意$n\geqslant N$有

$$|a_n|<\varepsilon$$

于是对任意$\varepsilon>0$,考虑满足上述条件的N,对任意$n\geqslant N$和$x\in X$有

$$|f_n(x)-f(x)|\leqslant a_n<\varepsilon$$

因而$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$.

2.4 不一致收敛的判据I

设函数序列$\{f_n(x)\}$在X上收敛到极限函数$f(x)$.若存在常数$l>0$及点列$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$使得当$n\geqslant N(N\in\mathbb{N}^*)$时有

$$|f_n(x_n)-f(x_n)|\geqslant l$$

则$\{f_n(x)\}$在X上不一致收敛.

这一定理还有一极限版本.

设函数序列$\{f_n(x)\}$在X上收敛到极限函数$f(x)$.若存在常数$l>0$及点列$x_n\in X(n=1,2,\cdots)$使得

$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=k\neq 0$$

则$\{f_n(x)\}$在X上不一致收敛.

3.函数项级数一致收敛的必要条件和判别法

3.1

若函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$上一致收敛,那么其一般项序列$\{u_n(x)\}$也在$X$上一致收敛于0.

3.2 一致收敛的Cauchy准则

函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$X$上一致收敛,当且仅当对于任意给定的$\varepsilon > 0$,存在一个只依赖于$\varepsilon$的$N \in \mathbb{N}^*$,使得对任意$n > N$和任意$p \in \mathbb{N}^*$都有

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon$$

对任意$x \in X$成立.

3.3 强级数判别法(Weierstrass判别法)

若函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的一般项满足

$$|u_n(x)| < a_n \qquad \forall x \in X, n = 1, 2, \cdots$$

且正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,那么该函数项级数在X上一致收敛.

3.4 一致有界

设函数序列$\{f_n(x)\}$在X上有定义.若存在常数M,使得对任意$n = 1, 2, \cdots$和任意$x \in X$都有

$$|f_n(x)| < M$$

则称该函数序列在X上一致有界.

3.5 Dirichlet判别法

设函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$X$上有定义,且通项$u_n(x)$可以写成

$$u_n(x) = a_n(x) \cdot b_n(x) \qquad \forall x \in X$$

若$u_n(x)$满足

1. 在X中任意取定x,数列$\{a_n(x)\}$对n单调,且函数序列$\{a_n(x)\}$在X上一致收敛于0.
2. 函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$的部分和序列$\{B_n(x)\}$在$X$上一致有界.

则$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$在$X$上一致收敛.

只需将数项级数的Dirichlet判别法中$\{a_n\}$收敛于0和$\{B_n\}$有界分别换成$\{a_n(x)\}$**一致**收敛于0和$\{B_n(x)\}$**一致**有界,就可以得出$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$**一致**收敛.

3.6 Abel判别法

设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$上有定义,且通项$u_n(x)$可以写成

$$u_n(x)=a_n(x)\cdot b_n(x)\qquad \forall x\in X$$

若$u_n(x)$满足

1. 在X中任意取定x,数列$\{a_n(x)\}$对n单调,且函数序列$\{a_n(x)\}$在X上一致有界.

2. 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$在$X$上一致收敛.

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$X$上一致收敛.

同样地,只需将数项级数的Abel判别法中的有界和收敛换成一致有界和一致收敛即可.

4.一致收敛级数的性质

4.1 和函数的连续性

设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,且其每一个通项$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上都连续,则其和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上也连续.

这就说明当级数一致收敛且各项连续时,无穷多项的求和运算与求极限的运算可以交换次序.

4.2 逐项求积分

设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛,且其每一个通项$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上都连续,则其和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上可积,而且可以逐项积分,即

$$\int_a^b S(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\mathrm{d}x$$

4.3 逐项求导

设函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上点点收敛,且通项$u_n(x)(n=1,2,\cdots)$的导函数$u'(x)$在$[a,b]$上都连续,且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一直连续,则和函数$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上可导,且

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)\qquad \forall x\in[a,b]$$

并且$S'(x)$在$[a,b]$上也连续.