

## 北京大学数学科学学院2023-24高等数学B1期中考试

### 1.(20分)

(1) (6分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

(2) (7分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sin \left( \frac{i}{n} - \frac{1}{2n^i} \right)$$

(3) (7分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

**Solution.**

(1) **Solution.**

由  $-1 \leq \cos n \leq 1$  有

$$\sqrt[n]{1} \leq \sqrt[n]{2 + \cos n} \leq \sqrt[n]{3}$$

而

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3} = 1$$

夹逼可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n} = 1$$

(2) **Solution.**

(3) **Solution.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{1 + \frac{1}{\tan^2 x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\tan^2 x}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x) \\ &= e \cdot 1 \\ &= e \end{aligned}$$

### 2.(20分)

(1) (6分) 设  $x > 0$ , 求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数  $f'(x)$ .

(2) (7分) 设  $x < 1$ , 求出函数

$$g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

的导函数  $g'(x)$ .

(3) (7分) 设  $x \neq \pm 1$ , 求出函数

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

的四阶导函数  $h^{(4)}(x)$ .

**Solution.**

(1) **Solution.**

置  $y = \ln(f(x)) = \sqrt{x} \ln x$ , 则

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{df(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= e^y \left( \frac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{x}}{x} \right) \\ &= \frac{x^{\sqrt{x}} (\ln x + 2)}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

(2) **Solution.**

置  $y = \sin x$ , 则有

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{dg(x)}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^3}} \cdot \cos x \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^3 x}} \end{aligned}$$

(3) **Solution.**

由

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right)$$

有

$$\begin{aligned} h^{(4)}(x) &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{1}{x-1} \right)^{(4)} - \left( \frac{1}{x+1} \right)^{(4)} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ 12(x-1)^{-5} - 12(x+1)^{-5} \right] \\ &= \frac{6}{(x-1)^5} - \frac{6}{(x+1)^5} \end{aligned}$$

