Lecture 2 Double integral(二重积分)

L.2.1 计算定积分$I=\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x$.
提示:考虑二重积分$\iint_D x^y \mathrm{d}\sigma$,其中$D=[0,1]\times[0,1]$.

Solution.

设$D=[0,1]\times[0,1]$,我们有

$$I=\int_0^1 \frac{x-1}{\ln x}\mathrm{d}x=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 x^y\mathrm{d}y=\iint_D x^y\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{y+1}=\ln 2$$

L.2.2 求$I=\iint_D |xy-1|\,\mathrm{d}\sigma$,其中$D$为正方形$[0,1]\times[0,1]$.

Solution.

在D上有$0\leqslant xy\leqslant 1$,于是$|xy-1|=1-xy$.于是

$$I=\iint_D(1-xy)\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1(1-xy)\mathrm{d}y=\int_0^1\left(1-\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{4}$$

L.2.3 求$I=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D$是由$y^2=2x,x+y=4,x+y=12$围成的区域.

Solution.

Method I.

做代换$u=x+y,v=y$,则$|J|=1$.原积分区域为$y^2\leqslant 2x,4\leqslant x+y\leqslant 12$.代入$u,v$可得$v^2+2v-2u\leqslant 0,4\leqslant u\leqslant 12$.于是积分区域为$D'=\{(u,v)|4\leqslant u\leqslant 12,-\sqrt{2u+1}-1\leqslant v\leqslant\sqrt{2u+1}-1\}$.于是我们有

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}u\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\
&=\int_4^{12}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{2u+1}-1}^{\sqrt{2u+1}-1}u\mathrm{d}v=\int_4^{12}2u\sqrt{2u+1}\mathrm{d}u\\
&\xlongequal{t=\sqrt{2u+1}}\int_3^5(t^2-1)t\cdot t\mathrm{d}t=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3\right)\Bigg|_3^5\\
&=\frac{8156}{15}
\end{aligned}$$

Method II.(并不推荐)

注意到积分区域D可以恰好可以分为两部分

$$D_1=\{(x,y)|2\leqslant x\leqslant 8,4-x\leqslant y\leqslant\sqrt{2x}\}$$

$$D_2=\{(x,y)|8\leqslant x\leqslant 18,-\sqrt{2x}\leqslant y\leqslant 12-x\}$$

于是

$$\begin{aligned}\iint_{D_1}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_2^8\mathrm{d}x\int_{4-x}^{\sqrt{2x}}(x+y)\mathrm{d}y\\&=\int_2^8\left(\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}+x-8\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{826}{5}\\\iint_{D_2}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_8^{18}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x}}^{12-x}(x+y)\mathrm{d}y\\&=\int_8^{18}\left(-\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x^{\frac{3}{2}}-x+72\right)\\&=\frac{5678}{15}\end{aligned}$$

于是

$$\iint_D(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{826}{5}+\frac{5678}{15}=\frac{8156}{15}$$

L.2.4 设f是$[-1,1]$上的连续函数,试证明

$$\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{-1}^1f(z)\mathrm{d}z$$

Proof.

原积分区域为$D=\{(x,y)|-1\leqslant x+y\leqslant 1,-1\leqslant x-y\leqslant 1\}$.

做代换$u=x+y,v=x-y$,于是$|J|=\dfrac{1}{2}$,积分区域$D'=\{(u,v)|-1\leqslant u,v\leqslant 1\}$.于是

$$\begin{aligned}\iint_{|x|+|y|\leqslant 1}f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D'}\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^1\mathrm{d}u\int_{-1}^1\frac{1}{2}f(u)\mathrm{d}v\\&=\int_{-1}^1f(u)\mathrm{d}u=\int_{-1}^1f(z)\mathrm{d}z\end{aligned}$$

于是命题得证.

L.2.5 设函数f,g在$[a,b]$上可积.试证明

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x\right)$$

提示:考虑二重积分

$$\iint_{[a,b]\times[a,b]} \left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

Proof.

令$D=[a,b]\times[a,b]$,考虑其上的二重积分

$$0 \leqslant \iint_D \left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

不妨令$A=\displaystyle\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x, B=\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x, C=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$.我们有

$$\begin{aligned}
&\iint_D \left(f(x)g(y)-f(y)g(x)\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
=&\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^b \left([f(x)]^2[g(y)]^2+[g(x)]^2[f(y)]^2-2f(x)f(y)g(x)g(y)\right)\mathrm{d}y\\
=&\int_a^b \left([f(x)]^2B+[g(x)]^2A-2f(x)g(x)C\right)\mathrm{d}x\\
=&2(AB-C^2)\\
\geqslant&0
\end{aligned}$$

于是$C^2\leqslant AB$,即

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \left(\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x\right)$$

注:本题即**Cauchy-Schwarz不等式**的定积分形式,其证明方法还有很多,读者可以自己查阅相关资料.

L.2.6 已知$f(x)$是在$[0,1]$上单调递减的正连续函数.试证明

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \leqslant \frac{\displaystyle\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

提示:考虑二重积分

$$I=\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma$$

并证明$I\geqslant 0$.

Proof.

考虑区域$D=[0,1]\times[0,1]$和其上的积分

$$I=\iint_{[0,1]\times[0,1]} f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma$$

将积分区域分为两部分$D_1=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1\}$和$D_2=\{(x,y)|0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1\}$.

在区域D_1上做代换$u=y,v=x$,则$|J|=1$,积分区域恰好变换为D_2.我们有

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint_{D_1} f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint_{D_2} f(y)f(x)x(f(y)-f(x))+\iint_{D_2} f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint_{D_2} f(x)f(y)(x-y)(f(y)-f(x))\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

由于$f(x)$在$[0,1]$单调递减且恒正,于是对于任意$0\leqslant y\leqslant x\leqslant 1$有

$$f(x)>0,f(y)>0,x-y\geqslant 0,f(y)-f(x)\geqslant 0$$

从而被积函数在D_2上非负,因而$I\geqslant 0$.

现在设

$$A=\int_0^1 x[f(x)]^2\mathrm{d}x\qquad B=\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x\qquad C=\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x\qquad D=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

由于$f(x)$在$[0,1]$上恒正,于是上述四个定积分都非负.我们有

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D f(x)f(y)y(f(x)-f(y))\mathrm{d}\sigma\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x)\left[f(x)yf(y)-y[f(y)]^2\right]\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\left([f(x)]^2C-f(x)A\right)\mathrm{d}\sigma\\
&=BC-AD\\
&\geqslant 0
\end{aligned}$$

移项即可得$\dfrac{A}{B}\leqslant\dfrac{C}{D}$,即

$$\frac{\displaystyle\int_0^1 x[f(x)]^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leqslant\frac{\displaystyle\int_0^1[f(x)]^2\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}$$

于是命题得证.