北京大学数学科学学院2023-24高等数学A1期末考试

1.(11分)

求极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2}$$

Solution.

当$x^2+y^2<1$时,我们有

$$\left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2}\leqslant\left(x^2+y^2\right)^{x^2}\leqslant 1$$

令$u=x^2+y^2$,则有

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2+y^2}&=\lim_{u\to0^+}u^u=\exp\left(\lim_{u\to0^+}u\ln u\right)\\&=\exp\left(\lim_{u\to0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}\right)=\exp\left(\lim_{u\to0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}\right)\\&=\mathrm{e}^0=1\end{aligned}$$

根据夹逼准则可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(x^2+y^2\right)^{x^2}=0$$

2.(11分)

求极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$$

Solution.

令$f(x)=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}$,则$\ln f(x)=\dfrac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}$.我们有

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)}{\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\dfrac{x}{1+x^2}}{\left(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{(1+x^2)-2x^2}{\left(1+x^2\right)^2}}{\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{1+x^2}=-1$$

于是

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\mathrm{e}^{-1}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

3.(11分)

求函数

$$f(x) = \cos(2x) \cdot \ln(1+x)$$

在$x=0$处的四阶泰勒多项式.

Solution.

我们有

$$\cos(2x) = 1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)$$

于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(2x) \cdot \ln(1+x) \\ &= \left(1 - \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^4}{4!} + o(x^4)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= \left(1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^4)\right)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4)\right) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + x^4 + o(x^4) \\ &= x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + o(x^4) \end{aligned}$$

4.(12分)

设$f(x)$在$[a,b]$二阶可导,满足$f(a) = f(b) = 0$且存在$c \in (a,b)$使得$f(c) > 0$.试证明:存在$\xi \in (a,b)$使得$f''(\xi) < 0$.

Proof.

考虑$f(x)$在$x = x_0$处取到极大值,则$f(x_0) \geqslant f(c) > 0$且$f'(x_0) = 0$.将$f(x)$在$x = x_0$处做泰勒展开.

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2 f''(\xi)}{2}$$

将$f'(x_0) = 0, f(a) = f(b) = 0$代入有

$$\begin{cases} 0 = f(x_0) + \dfrac{(x_0-a)^2 f''(\xi_1)}{2}, a < \xi_1 < x_0 \\ 0 = f(x_0) + \dfrac{(x_0-b)^2 f''(\xi_2)}{2}, x_0 < \xi_2 < b \end{cases}$$

因为$f(x_0) > 0, (x_0-a)^2 > 0, (x_0-b)^2 > 0$,于是$f''(\xi_1) < 0, f''(\xi_2) < 0$,命题得证.

5.(10分)

回答下列问题.本题只需给出结果,无需证明.

(1) **(5分)** 设平面Σ过点P_0,其法向量为$\vec{n}$.点P_1是平面Σ之外的一点.试用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{n}$表示P_1到Σ的距离.

(2) **(3分)** 设直线L过点P_0,其方向向量为$\vec{\tau}$.点P_1是直线L之外的一点.试用$\overrightarrow{P_0P_1}$和$\vec{\tau}$表示P_1到L的距离.

(3) **(2分)** 设异面直线L_1, L_2的方向向量分别为$\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}$.点$P_1, P_2$分别是$L_1, L_2$上的点.试用$\overrightarrow{P_1P_2}$和$\vec{\tau_1}, \vec{\tau_2}$表示$L_1$和$L_2$间的距离.

Solution.

6.(10分)

设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} y\arctan\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处是否可微.

7.(10分)

(1) **(5分)** 设二元函数

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy^3}{x^2+y^4}, (x,y) \neq (0,0) \\ 0, (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

计算方向导数$\left.\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_{(0,0)}$.其中单位向量$\mathbf{l} = (\cos\alpha, \sin\alpha)$,$\alpha \in [0, 2\pi)$.

(2) **(3分)** 若二元函数$g(x,y)$在(x_0, y_0)处取到极小值,那么对于某一$\alpha \in [0, 2\pi)$,$t = 0$是否一定是$h(t) = g(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$的极小值点?说明理由.

(3) **(2分)** 若对于任意$\alpha \in [0, 2\pi)$,$t = 0$是是$h(t) = g(x_0 + t\cos\alpha, y_0 + t\sin\alpha)$的极小值点,那么$(x_0, y_0)$是否一定是$g(x,y)$的极小值点?说明理由.

8.(15分)

设二元函数$z = z(x,y)$是由方程

$$(x^2+y^2)z + \ln z + 2(x+y+1) = 0$$

确定的隐函数,试求$z = z(x,y)$的极值.

9.(10分)

设函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在闭区间$[a,b]$上二阶可导,满足$f(a)=f(b)=f'(a)=f'(b)=0$,且对于任意$x\in[a,b]$都有$|f''(x)|\leqslant M$.试证明:对于任意$x\in[a,b]$,都有$|f(x)|\leqslant \dfrac{M}{16}(b-a)^2$.

Proof.

考虑$|f(x)|$在$x=x_0$处取到极大值,于是$f'(x_0)=0$.

考虑$x\in(a,x_0)$.将$f(x)$在$x=x_0$和$x=a$处分别做泰勒展开有

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)f'(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi_1)$$

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2}(x-a)^2f''(\xi_2)$$

其中$a<\xi_2<x<\xi_1<x_0$.于是我们有

$$f(x_0)+\frac{1}{2}(x-x_0)^2f''(\xi_1)=\frac{1}{2}(x-a)^2f''(\xi_2)$$

令$x=\dfrac{x_0+a}{2}$,则有

$$f(x_0)=\frac{(x_0-a)^2}{8}\left(f''(\xi_2)-f''(\xi_1)\right)\leqslant\frac{M(x_0-a)^2}{4}$$

同理,考虑$x\in(x_0,b)$可得

$$f(x_0)\leqslant\frac{M(x_0-b)^2}{4}$$

两式相加可得

$$f(x_0)\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{M(x_0-a)^2}{4}+\frac{M(x_0-b)^2}{4}\right)=\frac{M}{8}\left((x_0-a)^2+(b-x_0)^2\right)\leqslant\frac{M}{16}(b-a)^2$$