

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期中考试

1. (10分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)}$$

2. (10分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos 2x} \right)^{\csc^2 x}$$

3. (10分) 求定义在 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

的二阶导函数 $f''(x)$.

4. (10分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{kn^k} \right)$$

5. (15分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx$$

6. (15分) 设欧氏空间中 V 是曲线弧 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}} (1 \leq x \leq 2)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体,求 V 的体积.

7. (15分) 试证明:方程

$$x^{18} + x^{12} - \cos x = 0$$

在 \mathbb{R} 上根的个数为2.

8. (15分) 设 $D = [0, 1]$, 函数 $A, B : D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上连续, 且

$$\forall x \in D, 0 \leq A(x) \leq 1$$

对于 D 上的连续函数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$T_f(x) = B(x) + \int_0^x A(x)f(x)$$

试证明: $T_f = f$ 有唯一连续函数解. 即对于 $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $T_f = f, T_g = g$, 则 $f = g$.