北京大学数学科学学院2022-23高等数学B1期末考试

1.(14分)

证明方程$-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z=0$在$(0,0,0)$附近确定隐函数$z=f(x,y)$,并写出$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的一阶泰勒多项式.

Proof.

首先令$F(x,y,z)=-2x+y-x^2+y^2+z+\sin z$.

于是$F_x(x,y,z)=-2-2x, F_y(x,y,z)=1+2y, F_z(x,y,z)=1+\cos z$.因而$F$在$(0,0,0)$附近有连续的一阶偏导数.又$F_z(0,0,0)=1+\cos 0=2$,于是根据隐函数存在定理可知存在唯一$z=f(x,y)$使得在$(0,0,0)$附近有$F(x,y,z)\equiv 0$.此时有

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(0,0)}=-\frac{F_z(0,0,0)}{F_x(0,0,0)}=-1$$
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(0,0)}=-\frac{F_z(0,0,0)}{F_y(0,0,0)}=2$$

于是$z=f(x,y)$在$(0,0)$处的一阶泰勒多项式为$f(x,y)=-x+2y+o(x)+o(y)$.

2.(16分)

求函数极限.

(1) (8分) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)}$.

(2) (8分) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right)$.

Solution.

(1)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)\left(\cos x-\mathrm{e}^{x^2}\right)}&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\left(1+\frac{x^2}{2}-\frac{1}{8}x^4+o(x^4)\right)}{(x^2+o(x^2))\left(\left(1-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\right)-(1+x^2+o(x^2))\right)}\\
&=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3}{2}x^4+o(x^4)}\\
&=-\frac{1}{12}
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right) &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\sin x-\mathrm{e}^x+1}{\sin x(\mathrm{e}^x-1)} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{\cos x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}\sin x+\cos x-\mathrm{e}^x}{\cos x(\mathrm{e}^x-1)+\mathrm{e}^x\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t+\mathrm{e}^{x^2}(\cos x+2x\sin x+\cos x)-\sin x-\mathrm{e}^x}{2\mathrm{e}^x\cos x+\sin x} \\
&= \lim_{x\to 0}\frac{0+1\cdot(1+0+1)-0-1}{2+0} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

3.(16分)

回答下列问题.

(1) **(8分)** 设平面$x+y+z=3$和平面$x-2y-z+2=0$的交线为l,求过点$(1,2,3)$且与直线l垂直的平面的一般式方程.

(2) **(8分)** 设向量$\overrightarrow{OA}$和向量$\overrightarrow{OB}$夹角为$\frac{\pi}{3}$,满足$2\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=2$.定义$\overrightarrow{OP}=(1-\lambda)\overrightarrow{OA}$和$\overrightarrow{OQ}=\lambda\overrightarrow{OB}$,其中$\lambda\in[0,1]$.求$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$的最小值和此时$\lambda$的值.

Solution.

(1) 联立两平面方程,有

$$\begin{cases} x+y+z=3 \\ x-2y-z+2=0 \end{cases}$$

可知交线为$\begin{cases} y=2x-1 \\ z=-3x+4 \end{cases}$.于是$l$的方向向量为$(1,2,-3)$.

设所求平面上的点为(x,y,z),于是$(x-1,y-2,z-3)\cdot(1,2,-3)=0$.

于是该平面的方程为$x+2y-3z+4=0$.

(2) 不妨设$O(0,0),A(1,0),B(1,\sqrt{3})$.这样使得$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$满足题设.

于是$P(1-\lambda,0),Q(\lambda,\sqrt{3}\lambda)$.因此

$$\left|\overrightarrow{PQ}\right|^2=(1-2\lambda)^2+(\sqrt{3}\lambda)^2=7\lambda^2-4\lambda+1=7\left(\lambda-\frac{2}{7}\right)^2+\frac{3}{7}$$

于是$\left|\overrightarrow{PQ}\right|$的最小值为$\frac{\sqrt{21}}{7}$,此时$\lambda=\frac{2}{7}$.

4.(10分)

设函数$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x^4+y^2}, y \neq 0 \\ 1, y = 0 \end{cases}$.讨论$f(x,y)$在$(0,0)$处的两个偏导和全微分的存在性.若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

Solution.

首先考虑偏导数.当$y=0$时$f(x,y)=f(x,0)=1$,于是$\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{0,0}=0$.

当$x=0,y\neq 0$时$f(x,y)=\dfrac{y^2}{y^2}=1=f(0,0)$,于是$\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{0,0}=0$.

而$f(x,y)$在$(0,0)$处的全微分不存在.为了说明其不存在,考察$f(x,y)$的连续性.

令$y=kx^2$,于是$\lim_{(x,y)\to(0,0)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{k^2x^4}{x^4+k^2x^4}=\dfrac{k^2}{1+k^2}$.

于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$不存在,因而$f(x,y)$在$(0,0)$处不连续,也就不可微.

5.(12分)

求函数$f(x,y)=2x^3-3x^2-6xy(x-y-1)$在$\mathbb{R}^2$上的所有极值点.

Solution.

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x^2-6x-12xy+6y^2+6y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12xy-6x^2+6x$$

令$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0$,解得

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=0 \\ y=-1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=-1 \\ y=-1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

令$A=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=12x-6-12y, B=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-12x+12y+6, C=\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=12x$.

当$(x,y)=(0,0)$时$A=-6,B=6,C=0$.因$B^2>AC$,于是$(0,0)$不是极值点.

当$(x,y)=(0,-1)$时$A=6,B=-6,C=0$.因$B^2>AC$,于是$(0,-1)$不是极值点.

当$(x,y)=(-1,-1)$时$A=-6,B=-6,C=-12$.因$B^2<AC$且$A<0$,于是$(-1,-1)$是极大值点.

当$(x,y)=(1,0)$时$A=6,B=-6,C=12$.因$B^2<AC$且$A>0$,于是$(1,0)$是极小值点.

综上,$f(x,y)$在$(-1,-1)$处取到极大值,在$(1,0)$处取到极小值.

6.(10分)

设参数$a > \mathrm{e}$,且$0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$,证明:$a^y - a^x > a^x \ln a(\cos x - \cos y)$.

Proof.

令$g(u) = u + \cos u$,于是$g'(u) = 1 - \sin u \geqslant 0$.于是对于$0 < x < y < \dfrac{\pi}{2}$有$g(x) < g(y)$,即$\cos x - \cos y < y - x$.

令$f(u) = a^u$.于是$f(u)$是连续且可导的函数.根据Lagrange中值定理,存在$\xi \in (x, y)$使得

$$f'(\xi) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

成立.又$f''(u) = a^u \ln^2 a > 0$,于是$f'(\xi) > f'(x) = a^x \ln a$.于是我们有

$$a^y - a^x = f'(\xi)(y - x) > a^x \ln a(y - x) > a^x \ln a(\cos x - \cos y)$$

命题得证.

7.(12分)

求$f(x) = x\sin(x^2 - 2x)$在$x = 1$处的局部泰勒公式,并计算$f^{(n)}(1)$,其中$n \in \mathbb{N}^*$.

Proof.

令$y = x - 1$,于是$f(x) = (y + 1)\sin(y^2 - 1)$.

考虑三角恒等式$\sin(y^2 - 1) = \sin(y^2)\cos 1 - \cos(y^2)\sin 1$.于是

$$\begin{aligned}
f(x) &= (y + 1)(\sin(y^2)\cos 1 - \cos(y^2)\sin 1) \\
&= (y + 1)\left[\left(y^2 - \frac{y^6}{3!} + \frac{y^{10}}{5!} - \cdots\right)\cos 1 - \left(1 - \frac{y^4}{2!} + \frac{y^8}{4!} - \cdots\right)\sin 1\right] \\
&= x\left(\sum_{i=0} \frac{(x-1)^{4i+2}(-1)^i}{(2i+1)!}\cos 1 - \sum_{i=0} \frac{(x-1)^{4i}(-1)^i}{(2i)!}\sin 1\right)
\end{aligned}$$

于是

$$f^{(4n)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}\sin 1(4n)!}{(2n)!}$$

$$f^{(4n+1)}(1) = \frac{(-1)^{n-1}\sin 1(4n+1)!}{(2n)!}$$

$$f^{(4n+2)}(1) = \frac{(-1)^{n}\cos 1(4n+2)!}{(2n+1)!}$$

$$f^{(4n+3)}(1) = \frac{(-1)^{n}\cos 1(4n+3)!}{(2n+1)!}$$

8.(10分)

设$f(x)$是在闭区间$[P,Q]$定义的函数,且在开区间(P,Q)二阶可导,满足$f''(x) \geqslant 1$对所有$x \in (P,Q)$成立.求证:存在$y=f(x)$的图像上的三个点$A(a,f(a)),B(b,f(b)),C(c,f(c))$使得$S_{\triangle ABC} \geqslant \dfrac{(Q-P)^3}{16}$.

Proof.

假定$a<b<c$.由于$f''(x) \geqslant 1$,于是$f(x)$是凹函数.

于是

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}(c-a)\left(\frac{f(c)-f(a)}{c-a}(b-a)+f(a)-f(b)\right)$$

固定A,C,于是上式是一个关于b的函数 $S(b)=\dfrac{1}{2}\left[(c-a)(f(a)-f(b))+(b-a)(f(c)-f(a))\right]$.

我们希望找到$S(b)$的最大值.求导,有 $S'(b)=\dfrac{1}{2}\left[-(c-a)f'(b)+(f(c)-f(a))\right]$.

于是$S'(b)=0$当且仅当$f'(b)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.

不妨设$f'(t)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$,根据Lagrange中值定理保证了$t$的存在性.

又$S''(b)=-\dfrac{1}{2}(c-a)f''(b) \leqslant \dfrac{1}{2}(a-c)<0$,于是$S'(b)$在$(a,c)$上递减,即$S(b)$在$b=t$时取到最大值.

考虑$S(b)$在$b=t$处的泰勒展开式,有

$$S(b)=S(t)+(b-t)S'(t)+\frac{1}{2}(b-t)^2S''(t)$$

注意到$S(a)=S(c)=0$且$S'(t)=0$.于是

$$0=S(t)+\frac{1}{2}(a-t)^2S''(\xi_1)=S(t)+\frac{1}{2}(c-t)^2S''(\xi_2)$$

其中$a<\xi_1<t<\xi_2<c$.我们已经知道对于任意$\xi \in (a,c)$有$S''(\xi) \leqslant \dfrac{a-c}{2}$,于是

$$\begin{aligned}
S(t) &= -\frac{1}{4}\left((a-t)^2S''(\xi_1)+(c-t)^2S''(\xi_2)\right)\\
&\geqslant \frac{c-a}{8}\left((a-t)^2+(c-t)^2\right)\\
&\geqslant \frac{c-a}{8}\cdot\frac{[(t-a)+(c-t)]^2}{2}\\
&\geqslant \frac{(c-a)^3}{16}
\end{aligned}$$

现在,令$a=P,c=Q$,于是$S_{\triangle ABC}=S(t) \geqslant \dfrac{(Q-P)^3}{16}$.