北京大学数学科学学院2022-23高等数学B2期末考试

1.(15分) 判断下列级数的敛散性.

(1) (5分)

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\ln\sqrt{n}}$$

(2) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{\left(\sqrt[4]{n}+n\right)\left(\sqrt[3]{n}+n\right)}$$

(3) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n}{5^n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$$

Solution.

(1) 注意到

$$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\ln\sqrt{n}}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n\ln n}>\int_{3}^{+\infty}\frac{4}{x\ln x}\mathrm{d}x=\left.(4\ln\ln x)\right|_{2}^{+\infty}$$

而 $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\ln x=+\infty$,于是原级数发散.

(2) 注意到

$$\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{\left(\sqrt[4]{n}+n\right)\left(\sqrt[3]{n}+n\right)}<\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{n^2}<\frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$$

收敛,于是根据比较判别法可知原级数收敛.

(3) 首先有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^n}{5^n}=\frac{12}{5}\lim_{n\to\infty}\cdot\frac{1-\left(\frac{3}{5}\right)^n}{1-\frac{3}{5}}=6$$

又有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n}{5^n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)=\frac{9}{2}$$

因而原级数收敛.

2.(10分) 讨论函数序列

$$f_n(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}\qquad n=1,2,\cdots$$

在$(0,+\infty)$上的一致收敛性.

Solution.

对任意$x\in(0,+\infty)$,都有

$$\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}=1$$

于是函数序列$\{f_n(x)\}$逐点收敛于极限函数$f(x)=1$.然而,对于点列$x_n=\sqrt[4]{n}$,有

$$\lim_{n\to\infty}\left|f_n\left(x_n\right)-f\left(x_n\right)\right|=\lim_{n\to\infty}1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}=1-\mathrm{e}\neq 0$$

于是原函数序列在$(0,+\infty)$上不一致收敛.

3.(15分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$$

的收敛半径,收敛域,和函数.

Solution.

令$a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$$

于是收敛半径$R=1$.当$x=1$时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-2n}$$

收敛,而当$x=-1$时

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散.于是原级数的收敛域为$(-1,1]$.设该级数的和函数为$S(x)$,在收敛域上对级数逐项求导可得

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nx^{n-1}=-2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^n=-1+\frac{1}{1+x}$$

于是

$$S(x)=\int S'(x)\mathrm{d}x+C=-2x+\ln(1+x)+C$$

又$S(0)=0$,于是

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=-2x+\ln(1+x)$$

4.(10分) 求函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$$

于$x=1$处的泰勒展开式,并计算$f^{(2022)}(1),f^{(2023)}(1)$的值.

Solution.

注意到

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-1)^2-4}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$$

而$g(x)=\dfrac{1}{1+x}$在$x=0$处的泰勒展开式为

$$g(x)=\frac{1}{1+x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n$$

于是

$$f(x)=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\right)^n=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-(x-1)^{2n}}{4^{n+1}}$$

又因为$f(x)$的泰勒展开式的通项为

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(1)(x-1)^n}{n!}$$

于是$f^{(2022)}(1)=-\dfrac{2022!}{4^{1012}},f^{(2023)}=0$.

5.(10分) 讨论无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\mathrm{d}x$$

的敛散性.

Solution.

首先考虑积分

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\right|\mathrm{d}x$$

为了说明其无界性,考虑一个充分大的$n\in\mathbb{N}$.我们有

$$\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\right|\mathrm{d}x>\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\right|\mathrm{d}x>\arctan\pi\int_\pi^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x$$

而

$$\int_{\pi}^{n\pi}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\left|\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\right|\mathrm{d}x>\sum_{k=1}^{n-1}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{|\sin x|\,\mathrm{d}x}{\sqrt{k+1}}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

注意到

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

发散,于是这积分不绝对收敛.

现在令$f(x)=\sin x,g(x)=\dfrac{\arctan x}{\sqrt{x}}$.对任意$A>a>1$总有

$$\left|\int_a^A f(x)\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos a|\leqslant 2$$

一致有界,而

$$g'(x)=\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x}}-\frac{\arctan x}{2x\sqrt{x}}$$

当$x>\tan 1>1$时总有$\arctan x>1$且$x^2+1>2x$,因此$g(x)$在$(\tan 1,+\infty)$单调递减.又因为

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\pi}{2\sqrt{x}}=0$$

于是$g(x)$单调递减且收敛于0.根据Dirichlet判别法,无穷积分

$$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\mathrm{d}x$$

收敛.综上所述,该积分条件收敛.

6.(10分) 讨论级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x}$$

在$x\in(-\infty,+\infty)$上的绝对收敛性和条件收敛性.

Solution.

考虑到$\sin x$的周期性,只需考虑$x\in(-\pi,\pi]$的情形即可.令$u=\sin x,a_n=\dfrac{u^n}{1+u^{2n}}$.

当$x=0,\pi$时$u=0$,于是$a_n=0$,原级数显然收敛. 当$x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$时,有$0<u<1$.于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u^n}{1+u^{2n}}<\sum_{n=1}^{\infty}u^n=\frac{u}{1-u}$$

收敛.

当$x=\dfrac{\pi}{2}$时$u=1$,$a_n=\dfrac{1}{2}$,不满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$的条件,原级数发散.

当$x\in\left(-\pi,-\dfrac{\pi}{2}\right)\cup\left(-\dfrac{\pi}{2},0\right)$时,有$-1<u<0$.由前面的推导同理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{u^n}{1+u^{2n}}\right|<\sum_{n=1}^{\infty}|u^n|=\frac{-u}{1+u}$$

此时级数绝对收敛.

当$x=-\dfrac{\pi}{2}$时$u=-1$,$a_n=\dfrac{(-1)^n}{2}$,仍然发散.

因此,原级数在$\left(k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)(k\in\mathbb{Z})$上绝对收敛,在$x=k\pi+\dfrac{\pi}{2}$时发散.

7.(20分) 设以2π为周期的函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式为

$$f(x)=x^2$$

求$f(x)$的Fourier级数及其和函数,并给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

的值.

Solution.

这是一个偶函数,因此只需考虑a_n即可.有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2\sin(nx)}{n}+\frac{2x\cos(nx)}{n^2}-\frac{2}{n^3}\sin(nx)\right)\Bigg|_{-\pi}^{\pi}=\frac{4\cdot(-1)^n}{n^2}$$

因而

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot(-1)^n\cos(nx)}{n^2}$$

令$x=0$,即可得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}$$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

对$f(x)$使用Parseval等式可得

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\mathrm{d}x$$

即

$$\frac{2\pi^4}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{2\pi^4}{5}$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{16}\left(\frac{2}{5}-\frac{2}{9}\right)=\frac{\pi^4}{90}$$

8.(10分) 证明和计算下列各题.

(1) 证明含参变量t的无穷积分

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

在$t\in[0,+\infty)$上一致收敛.

(2) 证明上述$I(t)$在$t\in(0,+\infty)$上可导.

(3) 求出上述$I(t)$.

(4) 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

的值.

Solution.

(1) 令$f(x,t)=\mathrm{e}^{-tx},g(x,t)=\dfrac{\sin x}{x}$.对任意$t\in[0,+\infty)$和$x\in[0,+\infty)$,总有

$$|f(x,t)|=\left|\mathrm{e}^{-tx}\right|\leqslant e^0=1$$

即$f(x,t)$对任意$t\in[0,+\infty)$一致收敛.

令$a(x)=\sin x,b(x)=\dfrac{1}{x}$.我们有

$$\int_0^1\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x<\int_0^1\mathrm{d}x=1$$

又对任意$1<a<A$有

$$\left(\int_a^A a(x)\mathrm{d}x\right)|\cos A-\cos a|\leqslant 2$$

对x一致有界,$b(x)=\dfrac{1}{x}$单调递减且收敛于0,于是根据Dirichlet判别法可知

$$\int_0^{+\infty}g(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}a(x)b(x)\mathrm{d}x$$

收敛,即对任意$t\in[0,+\infty)$都一致收敛.

于是根据Abel判别法可知含参变量t的无穷积分

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

在$t\in[0,+\infty)$上一致收敛.

(2) 令$F(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}$.注意到$F(x)$在矩形域$(0,+\infty)\times(0,+\infty)$上二元连续.由**(1)**可得

$$\int_0^{+\infty}F(x,t)\mathrm{d}x$$

在$t\in(0,+\infty)$一致收敛,又

$$\int_0^{+\infty}\frac{\partial F}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x$$

令$\alpha(x,t)=x\mathrm{e}^{-tx},\beta(x,t)=\sin x$.同理有

$$\left|\int_a^A\beta(x)\mathrm{d}x\right|=|\cos A-\cos a|\leqslant 2$$

一致有界,并且$\alpha(x,t)$对x单调递减,且$\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x,t)=0$.

根据Dirichlet判别法可知上述级数对任意$t_0\in(0,+\infty)$和包含t_0的闭区间$[c,d]$上都一致收敛.

因此,$I(t)$在$(0,+\infty)$上可导,并且有

$$I'(t)=-\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x$$

(3) 我们有

$$\int-\mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{-tx}(t\sin x+\cos x)}{t^2+1}+C$$

于是

$$I'(t)=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-tx}\sin x\mathrm{d}x=\left(\frac{\mathrm{e}^{-tx}(t\sin x+\cos x)}{t^2+1}\right)\Bigg|_0^{+\infty}=-\frac{1}{t^2+1}$$

即

$$I(t)=-\arctan t+C$$

又因为

$$0<\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x\right|<\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x\right|=\frac{1}{t}$$

由夹逼准则可得

$$\lim_{t\to\infty}I(t)=0$$

从而$C=\dfrac{\pi}{2}$.因此有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\lim_{t\to 0}I(t)=I(0)=\frac{\pi}{2}$$