

高阶常微分方程

0.1 定义: n 阶线性微分方程

n 阶线性微分方程是形如

$$y^{(n)}(x) + p_1(x)y^{(n-1)}(x) + \cdots + p_{n-1}(x)y'(x) + p_n(x)y(x) = f(x)$$

的方程,其中 p_1, \cdots, p_n 在区间 (a, b) 上连续.

1.二阶线性微分方程

我们从最简单的情形,即二阶线性齐次方程入手.

1.1 二阶线性齐次方程的解

如果 $y_1(x), y_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的解,那么它们的任意一个线性组合

$$C_1y_1(x) + C_2y_2(x)$$

也是该方程的解,其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

为了求出其通解,我们还需研究上述函数线性无关的条件.

1.2 函数线性无关的充要条件

设 ϕ_1, ϕ_2 是1.2所述的两个解,它们线性无关,当且仅当它们的Wronski行列式满足

$$W(x) = \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0, \forall x \in (a, b)$$

其证明可以从书上找到,因此就略去.当上述的两个解线性无关时,它们的线性组合就是该方程的通解.

1.3 二阶线性齐次方程的通解

如果 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 是二阶线性齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

的解,且它们线性无关,则该方程的通解为

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$$

其中 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.并且这通解包含了该方程的一切解.

1.4 二阶线性非齐次方程的通解

如果 $y^*(x)$ 是二阶线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

的特解,又设 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 是对应齐次方程的通解,则该非齐次方程的通解为

$$C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + y^*(x)$$

1.5 二阶线性非齐次方程的加和性

如果 $y_1(x), y_2(x)$ 分别是二阶线性非齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) \text{ 与 } y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的解,那么 $y_1(x) + y_2(x)$ 是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解.

2.二阶线性常系数微分方程

2.1 二阶常系数齐次方程

考虑二阶线性常系数齐次方程

$$y'' + py' + qy = 0$$

设对应的二次方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0$$

的根为 λ_1, λ_2 .方程的通解为以下三种情况.

1. 若 λ_1, λ_2 为互异实根,则方程的通解为

$$C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

2. 若 $\lambda_1 = \lambda_2$ 为重根,则方程的通解为

$$(C_1 + C_2 x) e^{\lambda x}$$

3. 若 $\lambda_1, \lambda_2 = \alpha + i\beta$ 为共轭复根,则方程的通解为

$$e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$$

上面的结论可以扩展到 n 次,不再赘述.

对于非齐次的情况,可以通过待定系数法求出特解.

3.二阶线性非齐次方程

3.1 用常数变易法求二阶线性非齐次方程

考虑方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x)$$

如果对应的齐次方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

有特解 $\phi_1(x)$ 和 $\phi_2(x)$,那么我们可以设

$$y = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x)$$

并令

$$\begin{cases} C_1'(x)\phi_1(x) + C_2'(x)\phi_2(x) = 0 \\ C_1'(x)\phi_1'(x) + C_2'(x)\phi_2'(x) = f(x) \end{cases}$$

即可得到 $C_1'(x)$ 和 $C_2'(x)$.积分后回代即可得到原非齐次方程的通解.

4.欧拉方程

4.1 定义:欧拉方程

形如

$$a_0x^ny^{(n)}(x) + a_1x^{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_{n-1}xy'(x) + a_ny = 0$$

的方程称为欧拉方程.

4.2 欧拉方程的解法

做代换 $x = e^t$,则有

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-t} \frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = e^{-2t} \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} \right) \end{aligned}$$

等等.然后这方程就转化为线性常系数齐次方程,可以通过特征根法求解,最后回代即可.