

## 北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期中模拟

1. (15分) 解答下列问题.

(1) (5分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \cos \left( \sqrt{n^2 + 1} \pi \right) \right|$$

(2) (5分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{x^2}$$

(3) (5分) 求函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

的导函数 $f'(x)$ .

2. (10分) 设参数方程

$$\begin{cases} x = e^t \sin 2t \\ y = e^t \cos t, & x = 0 \end{cases}$$

确定函数 $y = f(x)$ . 求 $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ .

3. (10分) 求不定积分

$$\int \frac{x^3 + 1}{x(x-1)^3} dx$$

4. (10分) 求心形线

$$r = a(1 + \cos \theta), a > 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

的弧长.

5. (10分) 设 $t \in (0, 1)$ ,  $f(t)$ 表示曲线 $y = \sec t$ 与直线 $x = 0, y = 0$ 和 $x = \arcsin t$ 围成的封闭图形的面积.

(1) (5分) 求 $f(t)$ 的导数 $f'(t)$ .

(2) (5分) 求 $f(t)$ .

6. (10分) 设函数 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上连续, 且有

$$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 x f(x) dx = 0$$

试证明: $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上至少有两个零点.

7. (20分) 解答下列问题.

(1) (8分) 设序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} - \ln n$ , 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在且有限.

(2) (12分) 对于  $n \in \mathbb{N}$ , 定义

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 nt}{\sin t} dt$$

求序列极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{I_n}{\ln n}$ .

8. (15分) 设函数  $f(x)$  在  $[0, \pi]$  上连续. 对于  $n \in \mathbb{N}$ , 试证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^\pi f(x) |\sin(nx)| dx = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) dx$$