

北京大学数学科学学院20xx高等数学B2期末考试

1. (10分) 对于 $n \in \mathbb{N}^*$, 设

$$u_{2n-1} = \frac{1}{n} \quad u_{2n} = \int_n^{n+1} \frac{dx}{x}$$

判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n$$

的敛散性.

2. (10分) 求积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} - e^{-\beta x}}{x} \sin mx dx$$

其中 $\alpha > 0, \beta > 0, m \neq 0$.

3. (10分) 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

为正项级数, 并有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = b$$

- (1) (5分) 试证明: 当 $b > 1$ 时, 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

收敛.

- (2) (5分) 试求 b 的取值范围, 使得上述级数一定发散.

4. (10分) 求下列函数项级数的收敛区间和收敛域.

- (1) (5分)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n \cdot 2^n \cdot \ln n}$$

- (2) (5分)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \right) x^n$$

5. (10分) 讨论数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^p}$$

的敛散性, 其中 $\varphi \in (0, \pi)$ 为取定的参数.

6. (10分) 判断下列广义积分的敛散性.

- (1) (5分)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p} dx$$

(2) (5分)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln x}{\sqrt{x}(1-x)^2} dx$$

7. (10分) 求含参变量 x 的无穷积分

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos 2xt dt$$

8. (15分) 设 $f(x)$ 以 2π 为周期,且在 $[-\pi, \pi]$ 上可积的函数. a_n, b_n 为 $f(x)$ 的Fourier系数.

(1) (3分) 试求延迟函数 $f(x+t)$ 的Fourier系数.

(2) (12分) 设 $f(x)$ 连续且在 $[-\pi, \pi]$ 上分段光滑,试求卷积函数

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)dt$$

的Fourier展开式,并由此推出Parseval等式.

9. (15分) 回答下列问题.

(1) (5分) 把 $f(x) = x^2$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上展开为Fourier级数.

(2) (5分) 利用(1)的结论证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

(3) (5分) 利用Parseval等式求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

的值.