

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1.(15分)

下面的函数极限存在吗?如果存在,请求出其值;如果不存在,请说明理由.

(1) (5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) \frac{1}{\tan 2x}.$

(2) (5分) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{(\ln(1+x))^2}.$

(3) (5分) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (e^y - 1)^2}.$

Solution.

(1) 注意到 $\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) \frac{1}{\tan 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\tan x - x)(1 - \tan^2 x)}{2x \tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x - x}{2x^3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\tan^2 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan^2 x}{6x^2} \cdot 1^2 \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

(2) 注意到 $\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x + o(x)$, $\ln(1+x) = x + o(x)$. 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2+x^4}-1}{(\ln(1+x))^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^4 + o(x^2) - 1}{x^2 + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(3) 取 $y = kx$. 注意到 $e^x = 1 + x + o(x)$, 于是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (e^y - 1)^2} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{kx^2}{x^2 + k^2x^2 + o(x^2)} = \frac{k}{1+k^2}$$

于是取不同的 k 对应的路径所得的极限不同, 因而原函数极限不存在.

2.(10分)

设欧氏空间 \mathbb{R}^3 中的平面 Ω 过直线 $x+1=y-3=\frac{z}{2}$, 且与平面 $3x-y-10z=4$ 垂直.

(1) (5分) 求 Ω 的标准方程.

(2) (5分) 已知以原点为球心的球面 S 与 Ω 相切, 求 S 的方程.

Solution.

(1) 由题意可知 $(3, -1, -10)$ 与 Ω 平行. 设 $\Omega: ax + by + cz + 1 = 0$, 于是有

$$\begin{cases} 3a - b - 10c = 0 \\ ax + b(x + 4) + c(2x + 2) + 1 \equiv 0 \end{cases}$$

解得 $a = \frac{1}{7}, b = -\frac{2}{7}, c = \frac{1}{14}$. 于是 Ω 的方程为 $2x - 4y + z + 14 = 0$.

(2) 设切点 $P(x, y, z)$, Ω 的法向量 $\vec{u} = (2, -4, 1)$ 与其上一点 $M(-7, 0, 0)$. 我们有

$$|\vec{OP}| = \left| \frac{\vec{OM} \cdot \vec{u}}{|\vec{u}|} \right| = \frac{14}{\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{3}$$

于是 S 的半径为 $\frac{2\sqrt{21}}{3}$, 因而其方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{28}{3}$.

3.(10分)

回答下列问题.

(1) (5分) 设正整数 $n \geq 3$, n 元函数 $u: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$u(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right)^{\frac{2-n}{2}}$$

其中 $\sum_{k=1}^n x_k^2 \neq 0$. 试求 $\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k}$.

(2) (5分) 设常数 $a \in \mathbb{R}$, 设 $h(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$, 其中 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 和 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 均有连续的二阶导函数. 试求 $h_{tt} - a^2 h_{xx}$.

Solution.

(1) 对于任意给定的 k , 不妨令 $S = \sum_{k=1}^n x_k^2$, 令 $S - x_k^2 = S_k$. 于是

$$\begin{aligned} u_{x_k} &= \frac{\partial}{\partial x_k} (S_k + x_k^2)^{\frac{2-n}{2}} = \left(1 - \frac{n}{2}\right) (S_k + x_k^2)^{-\frac{n}{2}} \cdot (2x_k) \\ u_{x_k x_k} &= (2-n) \left((S_k + x_k^2)^{-\frac{n}{2}} + x_k \cdot \left(-\frac{n}{2}\right) (S_k + x_k^2)^{-\frac{n+2}{2}} \cdot (2x_k) \right) \\ &= (2-n) (S_k + x_k^2)^{-\frac{n}{2}-1} (S_k + x_k^2 - nx_k^2) \\ &= (2-n) S(S - nx_k^2) \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{k=1}^n u_{x_k x_k} = (2-n)S \left(nS - \sum_{k=1}^n n x_k^2 \right) = 0$$

(2) 我们有

$$h_t = a f'(x+at) - a g'(x-at)$$

$$h_{tt} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at)$$

同理有

$$h_x = f'(x+at) + g'(x-at)$$

$$h_{xx} = f''(x+at) + g''(x-at)$$

于是

$$h_{tt} - a^2 h_{xx} = a^2 f''(x+at) + a^2 g''(x-at) - a^2 (f''(x+at) + g''(x-at)) = 0$$

4.(10分)

求函数 $f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$ 在 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式.

Solution.

在 $(1, 1)$ 处, 我们有

$$f_x = \sqrt{y} x^{\sqrt{y}-1} = 1$$

$$f_y = \frac{x^{\sqrt{y}} \ln x}{2\sqrt{y}} = 0$$

$$f_{xx} = \sqrt{y} (\sqrt{y} - 1) x^{\sqrt{y}-2} = 0$$

$$f_{yy} = \frac{x^{\sqrt{y}} \ln^2 x + x^{\sqrt{y}} \ln x \cdot \frac{1}{\sqrt{y}}}{4y} = 0$$

$$f_{yx} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \left(\sqrt{y} x^{\sqrt{y}-1} \ln x + \frac{x^{\sqrt{y}}}{x} \right) = \frac{1}{2}$$

于是

$$f(x, y) = 1 + (x-1) + \frac{(x-1)(y-1)}{2}$$

5.(10分)

设 $t \in [0, 2\pi], R > 0, a > 0$. 求螺旋线 $S: \begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \\ z = at \end{cases}$ 在 $t = \frac{\pi}{4}$ 的切线和法平面的方程.

Solution.

$t = \frac{\pi}{4}$ 时对应点 $\left(\frac{\sqrt{2}R}{2}, \frac{\sqrt{2}R}{2}, \frac{a\pi}{4}\right)$.又有

$$\frac{dx}{dt} = -R \sin t \quad \frac{dy}{dt} = R \cos t \quad \frac{dz}{dt} = a$$

于是切线为 $-\frac{R}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = \frac{R}{\sqrt{2}}\left(y - \frac{R}{\sqrt{2}}\right) = a\left(z - \frac{a\pi}{4}\right)$.

法平面为 $-\frac{R}{\sqrt{2}}x + \frac{R}{\sqrt{2}}y + az = \frac{a^2\pi}{4}$.

6.(10分)

设 $a, b, c \in \mathbb{R}$.试证明:方程 $e^x = ax^2 + bx + c$ 的互异实根不超过三个.

Proof.

设 $f(x) = ax^2 + bx + c - e^x$.于是 $f'(x) = 2ax + b - e^x, f''(x) = 2a - e^x, f'''(x) = -e^x$.

不妨设 $f(x) = 0$ 有至少四个互异实根,设其为 x_1, \dots, x_4 ,满足 $x_1 < \dots < x_4$.

对于任意 x_k, x_{k+1} (其中 $1 \leq k < 4$),有 $f(x_k) = f(x_{k+1})$.

根据Rolle中值定理,存在 $\xi_k \in (x_k, x_{k+1})$ 使得 $f'(\xi_k) = 0$.

于是 $f'(x) = 0$ 至少有三个实根 ξ_1, ξ_2, ξ_3 .同理可知 $f''(x) = 0$ 至少有两个实根, $f'''(x) = 0$ 至少有一个实根.

而 $f'''(x) = -e^x < 0$,即 $f'''(x) = 0$ 没有实根,这与假设不符,从而 $f(x) = 0$ 至多有三个互异实根.

7.(10分)

证明:对于任意给定的 $k \in \mathbb{R}$,存在1的开邻域 U 和 W ,存在唯一的函数 $y = f(x), x \in U, y \in W$ 满足方程 $x^k - 3x^2y + 3xy^2 - y^k = 0$.

Proof.

设 $F(x, y) = x^k - 3x^2y + 3xy^2 - y^k$,则有

$$F_x(x, y) = kx^{k-1} - 6xy + 3y^2 \quad F_y(x, y) = -ky^{k-1} + 6xy - 3x^2$$

若 $k = 3$,则有 $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 = 0$,即 $(x - y)^3 = 0$.这确定唯一的函数 $y = f(x) = x$.

若 $k \neq 3$,则有 $F_y(1, 1) = k - 3 \neq 0$.据隐函数存在定理,在 $(1, 1)$ 的邻域内 $F(x, y) = 0$ 确定唯一的 $y = f(x)$ 且

$$f'(x) = -\frac{F_x}{F_y} = \frac{kx^{k-1} - 6xy + 3y^2}{ky^{k-1} + 6xy - 3x^2}$$

8.(15分)

求函数 $f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 4xyz$ 在 $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ 上的最大值和最小值.

Solution.

我们有

$$f_x = 3x^2 - 4yz \quad f_y = 3y^2 - 4xz \quad f_z = 3z^2 - 4xy$$

令 $f_x = f_y = f_z = 0$, 解得 $x = y = z = 0$, 而 $f(0, 0, 0) = 0$.

现在考虑 D 的边界. 令 $F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. 令 F 的各偏导为 0, 有

$$\begin{cases} F_x = 3x^2 - 4yz - 2\lambda x = 0 \\ F_y = 3y^2 - 4xz - 2\lambda y = 0 \\ F_z = 3z^2 - 4xy - 2\lambda z = 0 \\ F_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

令 F_x, F_y 与 F_z 两两相减有

$$\begin{cases} (x - y)(3x + 3y + 4z - 2\lambda) = 0 \\ (x - z)(3x + 3z + 4y - 2\lambda) = 0 \\ (y - z)(3y + 3z + 4x - 2\lambda) = 0 \end{cases}$$

若 $x = y = z$, 不难得出 $x = y = z = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 或 $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. 此时有

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{1}{3\sqrt{3}} \quad f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{3\sqrt{3}}$$

若 x, y, z 不全相等, 不妨设 $x = y$. 于是有 $(x - z)(7x + 3z - 2\lambda) = 0$, 即 $\lambda = \frac{7x + 3z}{2}$. 代入 $F_x = 0$ 有

$$x(7z + 4x) = 0$$

若 $x = 0$, 则有 $y = 0, z = \pm 1$. 此时有 $f(0, 0, 1) = f(0, 0, -1) = 0$.

若 $7z + 4x = 0$, 则有 $x^2 + x^2 + \frac{16}{49}x^2 = 1$, 于是 $x = y = -\frac{7}{4}z = \frac{7}{\sqrt{114}}$ 或 $x = y = -\frac{7}{4}z = -\frac{7}{\sqrt{114}}$. 此时有

$$f(x, y, z) = x^3 + x^3 - \frac{64}{343}x^3 + \frac{16}{7}x^3 = \frac{1406}{343}x^3$$

于是 $f\left(\frac{7}{\sqrt{114}}, \frac{7}{\sqrt{114}}, -\frac{4}{\sqrt{114}}\right) = \frac{37}{3\sqrt{114}}, f\left(-\frac{7}{\sqrt{114}}, -\frac{7}{\sqrt{114}}, \frac{4}{\sqrt{114}}\right) = -\frac{37}{3\sqrt{114}}$.

于是 $f(x, y, z)$ 的最大值为 $\frac{37}{3\sqrt{114}}$, 最小值为 $-\frac{37}{3\sqrt{114}}$.

9.(10分)

设函数 f 在 $[0, 1]$ 二阶可微,且 $f(0) = f(1) = 0$, $\min_{x \in [0,1]} f(x) = -1$. 试证明:存在 $\epsilon \in (0, 1)$ 使得 $f''(\epsilon) \geq 8$.

Proof.

设 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处取到最小值.将 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处做泰勒展开有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2}, x \geq \xi \geq x_0$$

由于 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 二阶可微,因而最小值点必然满足 $f'(x_0) = 0$.又 $f(x_0) = -1$,于是有

$$f(x) = \frac{f''(\xi)(x - x_0)^2}{2} - 1, x \geq \xi \geq x_0$$

分别取 $x = 0, 1$ 有

$$\begin{cases} 1 = \frac{f''(\xi_1)x_0^2}{2} \\ 1 = \frac{f''(\xi_2)(1 - x_0)^2}{2} \end{cases}$$

由于 $\min \{x_0, 1 - x_0\} \leq \frac{1}{2}$, 于是

$$\max \{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} = \max \left\{ \frac{2}{x_0^2}, \frac{2}{(1 - x_0)^2} \right\} \geq \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8$$