北京大学数学科学学院2023-24高等数学B2期末考试

1.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域.

2.(10分) 在$(-1,1)$上将函数

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$$

展开为幂级数.

3.(10分) 求瑕积分

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\mathrm{d}x$$

的值.本题的结果可以用B函数和Γ函数表示.

4.(10分) 判断级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n+\dfrac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的敛散性.

5.(10分) 设$E\in\mathbb{R}$.

(1) **(5分)** 求出所有$E\in\mathbb{R}$使得

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛.

(2) **(5分)** 求出所有$E\in\mathbb{R}$使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x$$

收敛.本小问的结果可以用Γ函数表示.

6.(10分) 对于每个$x\in[0,1]$, $n=1,2,\cdots$,定义

$$f_1(x)=\int_0^x\sqrt{1+t^4}\mathrm{d}t\qquad f_{n+1}(x)=\int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

试证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

在$[0,1]$上一致收敛.

7.(15分) 设$b\in\mathbb{R}$.

(1) **(5分)** 试证明含参变量b的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\cos(2bx)\mathrm{d}x$$

在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛.

(2) **(10分)** 试证明

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$$

8.(15分)

(1) **(10分)** 设$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$是周期为$2\pi$的函数,$\forall x\in(-\pi,\pi),f(x)=\mathrm{e}^x$.求出$f(x)$的傅里叶级数,并求出$f(x)$的傅里叶级数在$x=\pi$处的和.

(2) **(5分)** 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}$$

的和.

9.(10分) 设正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$

收敛,T是序列$\{a_n\}$中的最大项.对于任意$x\in\mathbb{R}$,定义$L(x)$是序列$\{a_n\}$中大于x的项的个数.

(1) **(2分)** 试证明0是$L(x)$的瑕点.

(2) **(8分)** 试证明瑕积分

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x$$

收敛,并且

$$\int_0^T L(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}a_n$$