Lebesgue积分

在高等数学中,我们所学习的积分是Riemann积分.

Riemann Integral

记$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,称点列$\{x_i|0\leqslant i\leqslant n\}$为闭区间$[a,b]$的一个**分割**.

置$\xi_i\in[x_{i-1},x_{i+1}]$,其中$i\in[1,n]$,称点列$\{x_i|0\leqslant i\leqslant n\}$和$\{\xi_i|1\leqslant i\leqslant n\}$构成$[a,b]$上的**取样分割**.

记$\Delta x_i=x_i-x_{i-1},\lambda=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\Delta x_i$,若函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$满足$\lim\limits_{\lambda\to 0+}\sum\limits_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$存在,则称$f$在$[a,b]$上**Riemann可积**,记为

$$\int_a^b f\mathrm{d}x=\lim_{\lambda\to 0+}\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta x_i$$

Riemann积分通过无限细分后矩形求和的方式求极限.然而,有些函数并不满足Riemann积分的条件,例如著名的Dirichlet函数$D(x)$. 有没有一种办法来计算更广义的积分呢? 这就引入了Lebesgue积分.在介绍Lebesgue积分之前,我们先来简单介绍Lebesgue测度.

0.Preparation

首先,我们需要一些准备知识.

0.1 Characteristic Function(示性函数)

记集合S的示性函数$\mathbf{1}_S:S\to\{0,1\}$,其中 $\mathbf{1}_S(x)=\begin{cases}0,x\notin S\\1,x\in S\end{cases}$

0.2 Countable Set(可数集合)

记集合S是可数的,当且仅当S和自然数集$\mathbb{N}$存在双射.

注:此处的可数指无限可数.熟知$\mathbb{Z},\mathbb{Q}$都是可数的.

0.3 扩展实数集与级数

记扩展实数集$\mathbb{R}^*=\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}=[-\infty,+\infty]$,定义$0\cdot(\pm\infty)=0$.

记无穷序列$\{x_n\}$的级数$S_n=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$.显然,任意改变加和的顺序不会改变级数的敛散性.

1.Length

在**直觉**上,我们可以说区间$I=[a,b]$的长度为$l(I)=b-a$.这个直觉对于开区间亦成立. 点集$\{a\}$等价于闭区间$[a,a]$,其长度为$a-a=0$. 同时,定义空集也是一个区间,满足$l(\varnothing)=0$.

现在,我们尝试将这个定义扩展到集合上.

Definition 1.1

对于两两不交的**可数**集合列$(I_i)_{i=1}^{\infty}$,记集合S满足

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_j$$

则**尝试**定义S的长度$l(S) = \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) = \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i)$.

这个定义是否正确和清晰有待后面的考证.

根据这个定义,我们可以知道$l(\mathbb{N}) = \sum_{i=1}^{\infty} 0 = 0$.

然而,你也许会想$[0,1]$也是有无穷多个点集构成的,为什么它的长度不为0呢?

Lemma 1.2

[0,1]不可数.更一般的,$\mathbb{R}$和$\mathbb{R}$上所有的区间(不包括点集和空集)不可数.

读者可以自行查询以上引理的证明.

Lemma 1.2说明我们不能把$[0,1]$表示成可数个点集的并集,自然也就不能用上述方法求出其长度.

事实上,Lebesgue测度中定义的长度并不满足长度无限可加,即只有可数个不交集合的并集的长度才等于各个集合的长度之和.现在,我们用更正式的语言来描述**长度**这一概念.

对于集合$A \in \mathbb{R}$,如果开区间$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots$覆盖了$A$,即

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$$

则应有$l(A) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i)$.我们可以通过调整该开区间列来使得右端的级数尽可能地接近$l(A)$. 有时,并不能使得右端的式子严格等于$l(A)$,因此我们采用更广泛适用的下确界来描述该定义.

Definition 1.3 Lebesgue外测度

定义集合$A \in \mathbb{R}$的Lebesgue外测度$m^*(A)$,满足

$$m^*(A) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) \middle| A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)\right\}$$

我们允许用无穷可数个开区间进行覆盖.显然,对于给定的集合A,$m^*(A) \geqslant 0$,且唯一存在.

我们需要对上述定义进行一些说明.

Lemma 1.3.1

可数个开区间的并集总是可以写作可数个不交的开区间的并集.

Proof.

对于$a \in A$,定义集合$S_a = \{x | x \in \mathbb{R}, [x, a] \in A\}$.

容易验证这样的S_a是开区间,从而$S_a = (\inf S_a, \sup S_a)$.

由于每个这样的开区间都至少包含一个有理数,从而最多有可数个这样的集合.

Lemma 1.3.2

允许使用闭区间或半开半闭区间对Lebesgue外测度进行定义,且它们是等价的.

Proof.

定义

$$m^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \middle| A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \right\}$$

其中I_i为区间且两两不交.记I_i的端点为a_i, b_i.

构造无穷可数的开区间列$\{J_n\}$满足$J_i = (a_i - 2^{-i}\varepsilon, b_i + 2^{-i}\varepsilon)$,则有$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} J_i$. 又$l\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} J_i\right) = l\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i\right) + 2\varepsilon$,且$\varepsilon$可以任取大于0的数,从而

$$\inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(J_i) \middle| \varepsilon > 0 \right\} = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \right\} = m^*(A)$$

因此,不论采取何种区间定义$m^*(A)$,其结果都是相同的.

Lemma 1.3.3

闭区间$[a, b] \subset \mathbb{R}$的Lebesgue外测度满足$m^*([a, b]) = b - a$.

Proof.

取无穷可数的开区间列$\{I_n\}$满足$I_1 = (a - \varepsilon, b + \varepsilon), I_2 = I_3 = \cdots = \varnothing$.

则有$[a, b] \subset (a - \varepsilon, b + \varepsilon) = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$,从而

$$m^*(a, b) \leqslant \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} l(I_i) \right\} = \inf \{ b - a + 2\varepsilon | \varepsilon > 0 \} = b - a$$