

北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期中考试

1. (20分) 求二重积分

$$I = \iint_D r^2 \sin \theta \sqrt{1 - r^2 \cos(2\theta)} dr d\theta$$

其中积分区域 $D = \left\{ (r, \theta) : 0 \leq r \leq \sec \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}$.

2. (20分) 求曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{-y}{4x^2 + y^2} dx + \frac{x}{4x^2 + y^2} dy + z dz$$

其中曲线 L 是由曲面 $4x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $2x + y + z = 1$ 所截得的曲线, 其正向 L^+ 规定为从 z 轴看的逆时针方向.

3. (20分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续函数, 求曲面积分

$$I = \iint_S [xf(xy) + 2x - y] dy dz + [yf(xy) + 2y + x] dz dx + [zf(xy) + z] dx dy$$

其中 S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 夹在平面 $z = 1$ 和 $z = 2$ 之间的部分, 方向取下侧.

4. (20分) 回答下列问题.

(1) 求常微分方程

$$xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$$

满足 $y(1) = e^3$ 的解.

(2) 给定常微分方程 $y' + y = f(x)$, 其中 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的连续函数.

(a) 若 $f(x) = x$, 给出方程的通解.

(b) 若 $f(x)$ 以 T 为周期, 试证明方程有唯一以 T 为周期的解.

5. (10分) 求曲面积分

$$I = \oiint_S xy dy dz + (y^2 + e^{xz^2}) dz dx + \sin(xy) dx dy$$

其中 S 为柱面 $z = 1 - x^2$ 与平面 $z = 0, y = 0, y + z = 2$ 围成区域 Ω 的外表面.

6. (10分) 设 L 为平面上一条分段光滑的简单闭曲线, 求曲面积分

$$I = \oint_L \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{|\mathbf{r}|} ds$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y)$, \mathbf{n} 是 L 的单位外法向量.