

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B1期中模拟

1.(10分)

多选题,错选或少选均不得分,无需写出解答过程.

(1) (5分) 选出下列选项中总是正确的式子.

A. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{\pi}{2}$

B. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > 1$

C. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$

D. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx$

(2) (5分) 设 $f(x)$ 是定义在 $[1, +\infty)$ 上的非负单调递减的连续函数. 定义 $s_n = \sum_{k=1}^n f(k)$, 选出下列选项中总是正确的式子.

A. $s_n \leq \int_1^n f(x) dx$

B. $s_n \leq f(1) + \int_1^n f(x) dx$

C. $s_n \geq \int_1^{n+1} f(x) dx$

D. $s_n \geq f(1) + \int_1^{n+1} f(x) dx$

(1) **Solution.**

注意到 $\frac{\sin x}{x} < 1$, 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx < \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dx = \frac{\pi}{2}$, 于是**A**项正确.

注意到 $\frac{\sin x}{x} > \frac{2}{\pi}$, 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} dx = 1$, 于是**B**项正确.

割线放缩可得 $\frac{\sin x}{x} > \frac{1 - \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} x + 1$, 于是 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx > \frac{\frac{\pi}{2}(1 + \frac{\pi}{2})}{2}$, 于是**C**项正确.

注意到 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x} dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \right) > 0$, 于是**D**项正确.

(2) **Solution.**

注意到

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \forall x \in (k, k+1), f(k) \geq f(x) \geq f(k+1)$$

于是

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k) \geq \int_k^{k+1} f(x) dx \geq f(k+1)$$

于是

$$s_n \geq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} f(x) dx = \int_1^{n+1} f(x) dx$$

且

$$s_n - f(1) \leq \sum_{i=1}^{n-1} \int_i^{i+1} f(x) dx = \int_1^n f(x) dx$$

于是选择BC项.

2.(18分)

计算下列极限.

(1) (6分) 计算序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^{2021}}{n^{2022}}$$

(2) (6分) 计算函数极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x^{2022}} + \cos \frac{1}{x^{1011}} \right)^{x^{2022}}$$

(3) (6分) 计算函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3}$$

(1) Solution.

注意到

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^{2021}}{n^{2022}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^{2021}$$

于是根据Riemann积分的定义有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^{2021}}{n^{2022}} = \int_0^1 x^{2021} dx = \frac{x^{2022}}{2022} \Big|_0^1 = \frac{1}{2022}$$

(2) Solution.

注意到 $\cos x = 1 - \sin^2 \frac{x}{2}$, 于是

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{x^{2022}} + \cos \frac{1}{x^{1011}} \right)^{x^{2022}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x^{2022}} - \sin^2 \frac{1}{x^{2022}} \right)^{x^{2022}}$$

作变量代换 $u = x^{2022}$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{x^{2022}} - \sin^2 \frac{1}{x^{2022}} \right)^{x^{2022}} &= \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \sin \frac{1}{u} - \sin^2 \frac{1}{u} \right)^{\frac{1}{\sin \frac{1}{u} - \sin^2 \frac{1}{u}} \cdot u \sin \frac{1}{u} \left(1 - \frac{1}{u} \right)} \\ &= e^{1 \cdot (1-0)} \\ &= e \end{aligned}$$

(3) Solution.

我们有

$$\sin(3x) = \sin x \cos 2x + \sin 2x \cos x = \sin x (1 - 2 \sin^2 x) + 2 \sin x (1 - \sin^2 x) = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

于是

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - 3 \sin x}{x^3} = -4 \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right)^3 = -4$$

3.(12分)

计算下列积分.

(1) (6分) 计算定积分

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x \arctan(e^x)}{1 + \sin^2 x} dx$$

(2) (6分) 计算不定积分

$$\int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(1+x^2)^2} dx$$

(1) Solution.

置 $f(x) = \frac{\cos x \arctan(e^x)}{1 + \sin^2 x}$ dx, 则

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) \arctan\left(\frac{1}{e^x}\right)}{1 + (\sin x)^2} = \frac{\cos x \arctan\left(\frac{\pi}{2} - e^x\right)}{1 + \sin^2 x}$$

于是

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

(2) Solution.

设

$$\frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(1+x^2)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

两端同乘 $x-2$ 后令 $x=2$, 于是 $A = \frac{8+4+13}{5^2} = 1$ 则

$$2x^2 + 2x + 13 = x^4 + 2x^2 + 1 + (x^2 + 1)(Bx^2 + Cx - 2Bx - 2C) + (Dx + E)(x - 2)$$

解得 $B = -1, C = -2, D = -3, E = -4$.

而

$$\begin{aligned} \int \frac{x+2}{x^2+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+1} + 2 \int \frac{dx}{x^2+1} \\ \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{dx^2}{(x^2+1)^2} + 2 \int \frac{(1+x^2) + (1-x^2)}{(x^2+1)^2} dx \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \int \frac{2x^2 + 2x + 13}{(x-2)(1+x^2)^2} dx &= \int \frac{dx}{x-2} - 4 \int \frac{dx}{x^2+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx^2}{x^2+1} - \frac{3}{2} \int \frac{dx^2}{(x^2+1)^2} - 2 \int \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} dx \\ &= \ln|x-2| - 4 \arctan x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \frac{3}{2(x^2+1)} - \frac{2x}{x^2+1} + C \\ &= -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + \ln|x-2| - 4 \arctan x + \frac{3-4x}{2(x^2+1)} + C \end{aligned}$$

4.(8分)

设函数 $f(x)$ 满足

$$f(x) = \begin{cases} axe^x + bx^x, & x > 1 \\ |x|, & x \leq 1 \end{cases}$$

求所有可能的参数 a, b 使得 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导.

Solution.

首先需要 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处连续, 于是 $\lim_{x \rightarrow 1^+} = \lim_{x \rightarrow 1^-} = f(1) = 1$, 即 $ae + b = 1$. 又要求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的左右导数相同. 易知

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x} = 1$$

又 $x > 1$ 时

$$f'(x) = ae^x(x + 1) + bx^x(\ln x + 1)$$

于是 $f'_+(1) = 2ae + b = 1$.

综上可以解得 $a = 0, b = 1$.

5.(12分)

设函数 $f(x)$ 是定义在 \mathbb{R} 上的以1为周期的连续函数, 试证明: $\exists c \in \mathbb{R}$, s.t. $f(c) = f(c + \pi)$.

Proof.

置 $F(x) = f(x + \pi) - f(x)$. 根据连续函数的有界性, 可知 $\exists c_1, c_2 \in [0, 1]$, s.t. $f(c_1) \leq f(x) \leq f(c_2)$, 于是

$$F(c_1) = f(c_1 + \pi) - f(c_1) \geq 0$$

$$F(c_2) = f(c_2 + \pi) - f(c_2) \leq 0$$

根据连续函数的介值定理, $\exists c$ 介于 c_1, c_2 之间, 满足 $F(c) = 0$, 即 $f(c) = f(c + \pi)$.

6.(8分)

计算曲线 $y = \int_0^x \sqrt{\sin x} dx$ 在 $x \in [0, \pi]$ 部分的弧长.

Solution

根据弧长公式有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+y'^2} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{1+\sin x} dx \\ &= \int_0^{\pi} \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2}} dx \\ &= \int_0^{\pi} \left| \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} \\ &= 4 \end{aligned}$$

7.(12分)

考虑方程 $x = \tan x$ 的正实根.

(1) (4分) 试证明: $x = \tan x$ 有无穷多个正实根.

(2) (8分) 将 $x = \tan x$ 的正实根从小到大排列成序列 $\{x_n\}$, 试证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1} - x_n) = \pi$.

(1) Proof.

设 $f(x) = \tan x - x$, 对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, 在区间 $\left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$ 上总有

$$f(k\pi) = 0 - k\pi < 0$$

$$\text{又 } \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (k\pi + \frac{\pi}{2})^-} \tan x - k\pi - \frac{\pi}{2} = +\infty.$$

即 $\exists x \in \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, s.t. $f(x) > 0$.

于是根据连续函数的介值定理可知 $\exists x_0 \in \left[k\pi, k\pi + \frac{\pi}{2}\right)$, s.t. $f(x_0) = 0$.

又知这样的 k 有无穷多个, 于是 $x = \tan x$ 有无穷多个正实根.

(2) Proof.

8.(12分)

设 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义序列 $\{x_n\}$ 满足 $x_n = \sqrt[n]{n}$.

(1) (6分) 用 $\varepsilon - N$ 语言证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

(2) (6分) 求所有的正实数 a 满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} n(x_n - 1)^a$ 收敛.

(1) Proof.

记 $t_n = \sqrt[n]{n} - 1$, 于是 $n = (t + 1)^n$, 作部分二项展开有

$$n = 1 + nt_n + \frac{n^2 - n}{2} t_n^2 + \cdots > \frac{n^2 - n}{2} t_n$$

于是 $t_n < \frac{2n}{n^2 - n} = \frac{1}{n - 2}$.

对于任意 $\varepsilon > 0$, 取 $N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 3$, 于是 $\forall n > N$ 有

$$|a_n - 1| = |t_n| < \frac{1}{n - 2} < \varepsilon$$

于是 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, 得证.

(2)

9.(8分)

给定正整数 a , 定义 $f_a(x) = (x + \sqrt{x^2 + 1})^a$, 求所有自然数 n 满足 $f_a^{(n)}(0) = 0$.

Solution.

注意到

$$f'_a(x) = a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^{a-1} \cdot \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) = \frac{a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^a}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{a}{\sqrt{x^2 + 1}} f_a(x)$$

设 $y = f_a(x)$, 于是

$$\sqrt{1 + x^2} y' = ay$$

即

$$(1 + x^2) y'^2 = a^2 y^2$$

对该式两端求导有

$$2xy'^2 + 2(1 + x^2) y' y'' = 2a^2 y y'$$

即

$$xy' + (1 + x^2) y'' = a^2 y$$

等式两端求 n 阶导有

$$xy^{(n+1)} + ny^{(n)} + (1 + x^2) y^{(n+2)} + 2nxy^{(n+1)} + (n^2 - n) y^{(n)} = a^2 y^{(n)}$$

代入 $x = 0$ 有

$$y^{(n+2)} = (a^2 - n^2) y^{(n)}$$

由 $f_a(0) = 1, f'_a(0) = a$ 可知

$$\begin{cases} f_a^{(2k+1)}(0) = \prod_{i=1}^k (a^2 - (2i-1)^2) a \\ f_a^{(2k+2)}(0) = \prod_{i=0}^k (a^2 - (2i)^2) \end{cases}$$

于是当 $n \geq a+2$ 且 n 与 a 的奇偶性相同时 $f_a^{(n)}(0) = 0$.