Stirling 近似

前言:在统计物理学等多个领域中,我们常常需要估计$N!$的值,其中N是一个相当大的整数. 按照定义的连乘算法通常并不高效,其复杂度为$O(N)$,而且一般的计算工具也难以存储如此巨大的数据. 因此,我们需要一个良好的近似来估计$N!$的值.Stirling近似正是实现了这一目标的方法, 它以$O(\log n)$的复杂度对$N!$进行了较为精确的估计.

下面是Stirling近似的具体内容和推广. 我们首先采取积分近似法对$\ln N!$进行估计.

以下是采用矩形放缩得到的结果.

证明:$\ln N! \approx N\ln N - N$

$$\begin{aligned}\ln N! &= \sum_{i=1}^{N}\ln i \approx \int_1^N \ln x\mathrm{d}x \\ &= x\ln x - x|_1^N \\ &= N\ln N - N + 1 \approx N\ln N - N.\end{aligned}$$

这就是最常用的Stirling近似的结果. 为了更精确的进行估计,我们可以采取梯形放缩.

证明:$\ln N! \approx (N+\frac{1}{2})\ln N - N$

$$\begin{aligned}\int_1^N \ln x\mathrm{d}x &\approx \sum_{i=1}^{N-1}\frac{\ln i + \ln(i+1)}{2} \\ N\ln N - N + 1 &\approx \sum_{i=1}^{N}\ln i - \frac{\ln N}{2} \\ N\ln N - N + 1 &\approx \ln N! - \frac{\ln N}{2}.\end{aligned}$$

对上式整理并忽略常数1可得$\ln N! \approx (N+\frac{1}{2})\ln N - N$.

然而,积分放缩法仍然不是最精确的方法.我们在用积分代替离散图形的面积求和时总有剩余的部分. 为了确定这一偏差,我们可以对梯形放缩的结果进一步优化,即更精准地确定上面式子中的常数项.

不妨设$\ln N! \approx (N+\frac{1}{2})\ln N - N + C$,如果常数$C$是收敛的,那么我们就相当于找到了一个合理的近似方法.

对上式两边取指数运算有$N! = \frac{N^N\sqrt{N}\mathrm{e}^C}{\mathrm{e}^N}$.

不妨记序列$\{a_n\}$满足$a_n = \frac{\mathrm{e}^n n!}{n^n\sqrt{n}}$.

证明:$\lim_{n\to\infty} a_n$存在,并求其值.

下面首先证明$\lim_{n\to\infty} a_n$存在.

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}}{\frac{e^n n!}{n^n\sqrt{n}}} = \frac{\mathrm{e}^{n+1}(n+1)!n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n n!(n+1)^{n+\frac{3}{2}}} \\ &= \mathrm{e}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

上述式子与1的大小关系并不是显然的.我们把它改写为$\dfrac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}}$, 记$\phi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$.

引理:$\forall x\in[1,+\infty), \phi(x) > \mathrm{e}.$

证明:$\phi(x) > e \Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) > \frac{2}{2x+1}$.

记$\varphi(x)=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{x}{2x+1},\varphi(1)=\ln 2-\frac{1}{3}>0.$

令$u=\frac{1}{x}\in(0,1]$,则$\varphi(x)=\ln(1+u)-\frac{2u}{u+2}\equiv v(u).$

$v'(u)=\frac{1}{u+1}-\frac{4}{(u+2)^2}=\frac{u^2}{(u+1)(u+2)^2}>0.$

则$\forall u\in(0,1],v(u)>v(1)>0$.从而原命题得证.

因此$\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$,又$a_n>0$,故$\{a_n\}$为单调递减且有下界的序列,其极限必然存在.

不妨设$\lim_{n\to\infty}a_n=A$.

为了求出A,我们先来考虑Wallis公式.

证明:$\dfrac{\pi}{2}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{[(2n)!!]^2}{(2n-1)!!(2n+1)!!}$

此处暂时略去证明.

我们有$(2n)!!=n!\cdot 2^n,(2n-1)!!=\dfrac{(2n)!}{(2n)!!}=\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n},(2n+1)!!=\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot 2^n}$.

将它们代入Wallis公式中有

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}&=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{\dfrac{(2n)!}{n!\cdot 2^n}}\cdot\frac{n!\cdot 2^n}{\dfrac{(2n+1)!}{n!\cdot 2^n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n!)^4\cdot 2^{4n}}{[(2n)!]^2\cdot(2n+1)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^n}\right]^4\cdot 2^{4n}}{\left[\dfrac{(2n)^{2n+1}}{\mathrm{e}^{2n}}\right]^2\cdot(2n+1)}\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}\right)^4\cdot\frac{1}{\left(\lim_{n\to\infty}\dfrac{(2n)!\mathrm{e}^{2n}}{(2n)^{2n+1}}\right)^2}\\&=A^2\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(2n+1)}\\&=\frac{A^2}{4}\end{aligned}$$

从而有$A=\sqrt{2\pi}$.因此$C=\ln\lim_{n\to\infty}a_n=\ln\sqrt{2\pi}$.

回到Stirling近似中,我们相当于证明了$n!\sim\dfrac{\sqrt{2\pi n}\cdot n^n}{\mathrm{e}^n}$,即这两者是等价无穷大. 实际上在$n>9$时使用这一式子估计的误差就已经小于1%,在取对数之后误差更是可以忽略不计.所以用这个式子是十分合适的.

对于Stirling近似的各种形式,我们还要做一些额外的说明.

引理:$\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{n\ln n-n}=\lim_{n\to\infty}\dfrac{\ln n!}{n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}}=1$.

注意到

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}}&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n-n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n-n}{n\ln n-n+\ln\sqrt{2\pi n}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n!}{n\ln n-n}\end{aligned}$$

然而我们却知道$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}$是不存在的. 因此,不能在极限的四则运算中使用$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}=1$.这两者不是等价无穷大.

与之对应的是$\lim_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt[n]{n!}}=\mathrm{e}$.