

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B2期末考试

1. (14分) 讨论下列级数的敛散性.

(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n} \right)^{n^2}$$

(2)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$$

2. (14分) 判断下列级数的敛散性.如果收敛,请判断其为绝对收敛还是条件收敛.

(1)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$$

3. (16分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}$$

的收敛半径,收敛区间,收敛域以及和函数.

4. (12分) 求含参变量 a 的积分

$$I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x) dx (a > 0)$$

5. (12分) 判断广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha} dx$$

的敛散性,其中 $0 < \alpha < \frac{1}{2}$.

6. (12分) 讨论积分

$$\int_1^{+\infty} t e^{-tx} \frac{\cos x}{x} dx$$

在 $0 \leq t < +\infty$ 上的一致收敛性.

7. (20分) 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数,满足 $f(x) = |x|, x \in [-\pi, \pi]$.求出 $f(x)$ 的傅里叶级数及其和函数,并求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$