

## 北京大学数学科学学院2020-21高等数学B1期末考试

1. (15分) 下面函数的极限存在吗?若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

(1) (5分)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos x - 2 + x^2}{x^4}.$

(2) (5分)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^5 y^3}{x^8 + y^8}.$

(3) (5分)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + \sin y) \cos \frac{1}{|x| + |y|}.$

2. (15分) 求闭区间 $[-1, 1]$ 上的函数 $f(x) = x^{\frac{2}{3}} - (x^2 - 1)^{\frac{1}{3}}$ 的所有最小值点.

3. (20分) 回答下列问题.

(1) (15分) 设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $b \neq 0$ .求 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在 $(a, b)$ 处的二阶泰勒多项式.

(2) (5分) 设 $a < b$ 且 $n \in \mathbb{N}^*$ .

4. (15分) 设 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 都有连续的二阶导数.对于任意 $x, y \in \mathbb{R}$ , 定义 $h(x, y) = xg\left(\frac{y}{x}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right)$ , 试计算 $x^2 h_{xx}(x, y) + 2xy h_{yx}(x, y) + y^2 h_{yy}(x, y)$ .

5. (20分) 设函数 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$F(x, y, z) = x^3 + (y^2 - 1)z^3 - xyz$$

回答下列问题.

(1) (5分) 证明:存在 $\mathbb{R}^2$ 上 $(1, 1)$ 的邻域 $D$ 使得 $D$ 上由 $F(x, y, z) \equiv 0$ 确定唯一隐函数 $z = f(x, y)$ 且 $f(1, 1) = 1$ .

(2) (5分) 求出在 $(1, 1)$ 处函数 $z = f(x, y)$ 减少最快的方向上的单位向量 $\vec{v}$ .

(3) (10分) 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x + 2y - 2z = 1$ 的 $z$ 分量为正的法向量记为 $\vec{u}$ .向量 $(\vec{v}, 0) \in \mathbb{R}^3$ .求 $\vec{u}$ 与 $(\vec{v}, 0)$ 的夹角余弦.

6. (10分) 给定正整数 $n \geq 3$ ,求单位圆的内接 $n$ 边形面积的最大值.