北京大学数学科学学院2023-24高等数学A2期末考试

1.(15分) 回答下列问题并简述理由.

(1) **(5分)** 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛 (b)一定发散 (c)敛散性不确定

(2) **(5分)** 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n$不存在,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛 (b)一定发散 (c)敛散性不确定

(3) **(5分)** 设$\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$是一给定数列, $\lim\limits_{n\to\infty} |na_n| = +\infty$,问级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$的敛散性如何:

(a)一定收敛 (b)一定发散 (c)敛散性不确定

Solution.

(1) 令$a_n = \dfrac{1}{n^2}$可知级数收敛,令$a_n = \dfrac{1}{n\ln n}$可知级数发散.于是级数的敛散性不确定.

(2) 令$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$可知级数收敛,令$a_n = (-1)^n$可知级数发散.于是级数的敛散性不确定.

(3) 令$a_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$可知级数收敛,令$a_n = 1$可知级数发散.于是级数的敛散性不确定.

2.(10分) 试求幂级数的收敛半径.

(1) **(5分)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

(2) **(5分)**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + (-2)^n + 3^n}{n(n+1)(n+2)} x^n$$

Solution.

(1) 令$u_n = \dfrac{(n!)^2}{(2n)!}$,则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{((n+1)!)^2 (2n)!}{(n!)^2 (2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{1}{4}$$

于是收敛半径$R = 4$.

(2) 令$u_n = \dfrac{(-1)^n + (-2)^n + 3^n}{n(n+1)(n+2)}$,则有

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{((-1)^{n+1} + (-2)^{n+1} + 3^{n+1})\, n(n+1)(n+2)}{((-1)^n + (-2)^n + 3^n)\,(n+1)(n+2)(n+3)}\right| = \frac{1}{3}$$

于是收敛半径$R=3$.

3.(10分) 求微分方程

$$y''+y'=x^2+x$$

的通解.

4.(10分) 判断下列级数的敛散性.

(1) **(5分)**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

(2) **(5分)**

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$$

Solution.

(1) 注意到

$$\ln\left((\ln n)^{\ln n}\right)=\ln n\cdot\ln\ln n=\ln\left(n^{\ln\ln n}\right)$$

当$n>27>\mathrm{e}^{\mathrm{e}}$时就有

$$\sum_{n=27}^{\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}=\sum_{n=27}^{\infty}\frac{1}{n^{\ln\ln n}}<\sum_{n=27}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

收敛,于是原级数收敛.

(2) 我们有

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}-1}{n-1}$$

于是

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n-1}(-1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n-1}$$

注意到$a_n=\dfrac{\sqrt{n}}{n-1}$对$n$单调递减且有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=0$$

于是根据Leibniz判别法可知第一部分收敛.又因为级数

$$\sum_{n=2}\frac{1}{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

发散,从而原级数发散.

5.(15分) 证明函数

$$f(x)=\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{x\sin x}{\ln n}\right)^n$$

是$(-\infty,+\infty)$上的连续函数.

Proof.

注意到

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\left(\frac{x\sin x}{\ln n}\right)^n\right|<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(\ln n)^n}$$

右边是一个幂级数.令$u_n=\dfrac{1}{(\ln n)^n}$,则有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}=0$$

于是收敛半径$R=+\infty$,即该幂级数对$x\in(-\infty,+\infty)$一致收敛.进而原函数在$(-\infty,+\infty)$一致收敛,于是在其上连续.

6.(10分) 计算含参变量t的无穷积分

$$I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\cos(tx)\mathrm{d}x(-\infty<t<+\infty)$$

已知$I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solution.

令$f(x,t)=\mathrm{e}^{-x^2}\cos(tx)$.首先有

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

于是$I(t)$对$t\in(-\infty,+\infty)$一致收敛.

同样地有

$$\int_0^{+\infty}\left|\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\right|\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\left|x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(tx)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=1$$

同样对$t\in(-\infty,+\infty)$一致收敛.因此$I(t)$可以求导,并且有

$$\begin{aligned}I'(t)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2}\sin(tx)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\sin(tx)\mathrm{d}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\right)=\frac{1}{2}\left[\left(\sin(tx)\mathrm{e}^{-x^2}\right)\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-x^2}\cos(tx)\mathrm{d}x\right]\\&=\frac{t}{2}I(t)\end{aligned}$$

于是即有这一微分方程的通解为

$$I(t)=C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

由于$I(0)=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$,于是

$$I(t)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}C\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$$

7.(12分) 回答下列问题.

(1) **(2分)** 写出Γ函数的表达式.

(2) **(5分)** 试证明$\Gamma(s)$在$s\in(0,+\infty)$上连续.

(3) **(5分)** 用Γ函数表示积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$$

并求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\mathrm{d}x$$

8.(13分) 设函数

$$f(x)=\begin{cases}x,0\leqslant x\leqslant 1\\ 0,1<x\leqslant 2\end{cases}$$

计算$f(x)$在$[0,2]$上的Fourier展开式,并证明

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

9.(5分) 试证明

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$

Proof.

我们有

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\mathrm{e}^{-x\ln x}$$

考虑e^t在$t=0$处的泰勒展开

$$\mathrm{e}^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}$$

代入$t=-x\ln x$可得

$$\mathrm{e}^{-x\ln x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}$$

注意到对任意$x\in(0,1)$都有$-\dfrac{1}{\mathrm{e}}<x\ln x<0$,因此

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}\right|<\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{e}^n n!}$$

收敛,于是根据强级数判别法可知

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}$$

在$(0,1)$一致收敛于$\mathrm{e}^{-x\ln x}$.于是,可逐项求积分有

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^1\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}\mathrm{d}x$$

做代换$u=-\ln x$,则有

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{x^n\left(-\ln x\right)^n}{n!}\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-(n+1)u}u^n}{n!}\mathrm{d}u\\&\xlongequal{v=(n+1)u}\frac{1}{n!(n+1)^{n+1}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-v}v^n\mathrm{d}v\\&=\frac{\Gamma(n+1)}{(n+1)^{n+1}n!}=\frac{1}{(n+1)^{n+1}}\end{aligned}$$

从而

$$\int_0^1\frac{1}{x^x}\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^n}$$