北京大学数学科学学院2020-21高等数学B1期末考试

1.(15分)

下面函数的极限存在吗?若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

(1) **(5分)** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x-2+x^2}{x^4}$.

(2) **(5分)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^5y^3}{x^8+y^8}$.

(3) **(5分)** $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+\sin y)\cos\dfrac{1}{|x|+|y|}$.

Solution.

(1) 我们有

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x-2+x^2}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x-2\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{6x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{12x}=\frac{1}{12}$$

(2) 设$y=kx$.于是

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^5y^3}{x^8+y^8}=\lim_{x\to 0}\frac{k^3x^8}{x^8+k^8x^8}=\frac{k^3}{1+k^8}$$

于是从不同路径接近$(0,0)$将得到不同的极限值,因而原函数在$(0,0)$处的极限不存在.

(3) 注意到$\left|\cos\dfrac{1}{|x|+|y|}\right|\leqslant 1, |\sin y|\leqslant |y|$.于是我们有

$$0<\left|(x+\sin y)\cos\frac{1}{|x|+|y|}\right|\leqslant|x+\sin y|\leqslant|x|+|y|$$

又$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}|x|+|y|=0$,于是$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x+\sin y)\cos\dfrac{1}{|x|+|y|}=0.$

2.(15分)

求闭区间$[-1,1]$上的函数$f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$的所有最小值点.

Solution.

对$f(x)$求导可得

$$f'(x)=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}-\frac{2x}{3}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}(x^2-1)^{-\frac{2}{3}}\left[(x^2-1)^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{4}{3}}\right]$$

令$f'(x)=0$可知$x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.当$f'(x)$不存在时$x=0$.

我们有

$$f(-1)=1\qquad f(0)=1\qquad f(1)=1\qquad f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[3]{4}\qquad f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt[3]{4}$$

由于$f(x)$在闭区间上的最小值必然是边界点/不可导点/稳定点中的一种,于是$f(x)$的最小值点为$0,\pm1$.

3.(20分)

回答下列问题.

(1) **(15分)** 设$a,b\in\mathbb{R}$且$b\neq 0$.求$f(x,y)=\arctan\dfrac{x}{y}$在$(a,b)$处的二阶泰勒多项式.

(2) **(5分)** 设$a<b$且$n\in\mathbb{N}^*$.函数$f:(a,b)\to\mathbb{R}$在开区间(a,b)中有$n+1$阶导数.定义二元函数$T:(a,b)\times(a,b)\to\mathbb{R}$为

$$T(x,y)=f(x)-f(y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(y)}{k!}(x-y)^k$$

求出$T(x,y)$对y的一阶偏导函数$\dfrac{\partial T}{\partial y}$.

Solution.

(1) 计算各阶偏导数,有

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\frac{1}{y}=\frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{1+\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$$

于是

$$f(x,y)=\arctan\frac{a}{b}+\frac{b(x-a)+a(y-b)}{a^2+b^2}+\frac{ab(y-b)-ab(x-a)+(a^2-b^2)(x-a)(y-b)}{(a^2+b^2)^2}$$

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial y}&=-f'(y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(f^{(k)}(y)(x-y)^k\right)'\\&=-f'(y)-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\left(f^{(k+1)}(y)(x-y)^k-kf^{(k)}(x-y)^{k-1}\right)\\&=-\frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x-y)^n\end{aligned}$$

4.(10分)

证明:对任意给定的实数p,存在1的开邻域U和W使得存在唯一的函数$y=f(x):U\to W$满足$x^p+y^p-2xy=0$.

Proof.

设$F(x,y)=x^p+y^p-2xy$.于是$F(1,1)=0$.
考虑F的偏导,有$\dfrac{\partial F}{\partial x}=px^{p-1}-2y,\dfrac{\partial F}{\partial y}=py^{p-1}-2x$.
若$p=2$,则有$x^2+y^2-2xy=0$,当且仅当$y=x$时成立,此时$f(x)=x$.
若$p\neq 2$,则有$\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{(1,1)}=p-2$.由于$\dfrac{\partial F}{\partial y}$连续,于是存在1的开邻域$U$和$W$使得在$U\times W$上满足$\dfrac{\partial F}{\partial y}\neq 0$.
根据隐函数存在定理,存在唯一的函数$y=f(x)$使得$F(x,y)\equiv 0$,且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\dfrac{px^{p-1}-2y}{py^{p-1}-2x}$.

5.(15分)

设在$\mathbb{R}^3$空间中Oxy平面之外的点(x,y,z)处的电势$V=\left(\dfrac{2y}{z}\right)^x$.求出在点$\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$处电势$V$下降最快的方向上的单位向量.

Solution.

我们有

$$V_x(x,y,z)=\left(\frac{2y}{z}\right)^x\ln\left(\frac{2y}{z}\right)$$

$$V_y(x,y,z)=\left(\frac{2}{z}\right)^x xy^{x-1}$$

$$V_z(x,y,z)=-(2y)^x xz^{-x-1}$$

于是在$\left(1,\dfrac{1}{2},1\right)$处有$V_x=0,V_y=2,V_z=-1$.于是该点处的梯度向量$\mathbf{grad}V=(0,2,-1)$.
取负梯度后单位化可得所求向量为$\left(0,-\dfrac{2\sqrt{5}}{5},\dfrac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

6.(25分)

设$\mathbb{R}^3$空间中的平面$K:x+2y+3z=6$与x,y,z三轴分别交于A,B,C三点.动点$H\in\mathbb{R}^3$与K的距离恒为1,其在K上的垂直投影记为M.设M在$\triangle ABC$中,其到三条边BC,CA,AB的距离分别为p,q,r.

(1) **(5分)** 求出$\triangle ABC$的面积.

(2) **(5分)** 用p,q,r表示以A,B,C,H为顶点的四面体的表面积$S(p,q,r)$.

(3) **(5分)** 写出p,q,r必须满足的约束条件.

(4) **(10分)** 求出$S(p,q,r)$的条件极值的稳定点.

Solution.

(1) 分别令x,y,z三者中两者为0可解得$A(6,0,0),B(0,2,0),C(0,0,3)$.于是

$$a=|BC|=\sqrt{13},b=|AC|=3\sqrt{5},c=|AB|=2\sqrt{10}$$

于是$\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{18}{6\sqrt{65}}=\dfrac{3}{\sqrt{65}}$,则$\sin C=\sqrt{1-\cos^2 C}=\dfrac{2\sqrt{14}}{\sqrt{65}}$.

于是$S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}ab\sin C=3\sqrt{14}$.

(2) 设H在BC边上的垂足为D.根据立体几何知识可知$HM\perp MD$.我们有

$$S_{\triangle BCH}=\frac{1}{2}|BC||HD|=\frac{1}{2}|BC|\sqrt{|HM|^2+|MD|^2}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{p^2+1}$$

同理可知$S_{\triangle ACH}=\dfrac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{q^2+1},S_{\triangle ABH}=\sqrt{10}\sqrt{r^2+1}$.

于是

$$S(p,q,r)=3\sqrt{14}+\frac{\sqrt{13}}{2}\sqrt{p^2+1}+\frac{3\sqrt{5}}{2}\sqrt{q^2+1}+\sqrt{10}\sqrt{r^2+1}$$

(3) 注意到

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABM}+S_{\triangle BCM}+S_{\triangle ACM}$$

于是

$$3\sqrt{14}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{13}p+3\sqrt{5}q+2\sqrt{10}r\right)$$

于是满足的约束条件为

$$\sqrt{13}p+3\sqrt{5}q+2\sqrt{10}r-6\sqrt{14}=0$$

(4) 令$\phi(p,q,r)=\sqrt{13}p+3\sqrt{5}q+2\sqrt{10}r-6\sqrt{14}$.构造辅助函数$F(p,q,r,\lambda)=S(p,q,r)-\lambda\phi(p,q,r)$.

求$F(p,q,r,\lambda)$的各偏导,并令它们为0,有

$$\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\sqrt{13}}{2}\cdot\frac{p}{\sqrt{p^2+1}}-\sqrt{13}\lambda=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{3\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{q}{\sqrt{q^2+1}}-3\sqrt{5}\lambda=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial r}=\sqrt{10}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2+1}}-2\sqrt{10}\lambda=0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}=\phi(p,q,r)=0$$

于是我们有$\dfrac{p}{\sqrt{p^2+1}}=\dfrac{q}{\sqrt{q^2+1}}=\dfrac{r}{\sqrt{r^2+1}}=2\lambda$.

由于$p,q,r>0$,于是有$p=q=r=\dfrac{2\lambda}{\sqrt{1-4\lambda^2}}$.

代回$\phi(p,q,r)=0$可知稳定点满足$p=q=r=\dfrac{6\sqrt{14}}{\sqrt{13}+3\sqrt{15}+2\sqrt{10}}$.