

# 北京大学数学科学学院2023-24高等数学A1期末考试

1. (20分) 求下列函数的极限.

(1) (10分) 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} - e \right)$ .

(2) (10分) 设函数  $f(x)$  在  $x=0$  处  $n+1$  阶可导, 且满足

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n-1)}(0) = 0 \quad f^{(n)}(0) = a$$

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^x - 1) - f(x)}{x^{n+1}}$ .

2. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设函数  $F(u, v)$  有连续的二阶偏导数,  $z = z(x, y)$  是由方程  $F(x - z, y - z) = 0$  确定的隐函数. 计算并化简

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(2) (10分) 给定方程组

$$\begin{cases} xy + yz^2 + 4 = 0 \\ x^2y + yz - z^2 + 5 = 0 \end{cases}$$

试讨论上述方程在  $P_0(1, -2, 1)$  处能确定的隐函数, 并计算其在  $P_0$  处的导数.

3. (20分) 求函数  $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$  的极值.

4. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设函数  $f(x, y)$  在点  $(0, 0)$  的某邻域内有定义且在  $(0, 0)$  处连续. 若极限  $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$  存在, 试证明  $f(x, y)$  在  $(0, 0)$  处可微.

(2) (10分) 欧氏空间  $\mathbb{R}^3$  中平面  $T: x + y + z = 1$  截圆柱面  $S: x^2 + y^2 = 1$  得一椭圆周  $R$ . 求  $R$  上到原点最近和最远的点.

5. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设  $f(x)$  是一个定义在  $\mathbb{R}$  上的周期为  $T \neq 0$  的无穷阶光滑函数. 试证明: 对于任意  $k \in \mathbb{N}^*$ , 总存在  $\xi \in \mathbb{R}$  使得  $f^{(k)}(\xi) = 0$ .

(2) (10分) 设函数  $f(u, v)$  有连续的偏导数  $f_u(u, v)$  和  $f_v(u, v)$  且满足  $f(x, 1-x) = 1$ . 试证明: 在单位圆周  $S: u^2 + v^2 = 1$  上至少存在两个不同的点  $(u_1, v_1)$  和  $(u_2, v_2)$  使得  $v_i f_u(u_i, v_i) = u_i f_v(u_i, v_i)$ , 其中  $i = 1, 2$ .