

北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期中考试

1.(10分)

求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)}$$

Solution.

由 $-1 \leq \sin(e^x) \leq 1$ 可知

$$\sqrt[n]{2023} \leq \sqrt[n]{2024 + \sin(e^x)} \leq \sqrt[n]{2025}$$

又

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2023} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2025} = 1$$

于是根据夹逼准则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^x)} = 1$$

2.(10分)

求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos 2x} \right)^{\csc^2 x}$$

Solution.

置 $u = \sin^2 x$, 于是

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos 2x} \right)^{\csc^2 x} &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + 2u}{1 - 2u} \right)^{\frac{1}{u}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{4u}{1 - 2u} \right)^{\frac{1-2u}{4u} \cdot \frac{4}{1-2u}} \\ &= e^4 \end{aligned}$$

3.(10分)

求定义在 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + \sin^2 t}}$$

的二阶导函数 $f''(x)$.

Solution.

置 $y = \arcsin x$, 则

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{d \int_0^y \frac{dt}{\sqrt{1+\sin^2 t}}}{dy} \cdot (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1+\sin^2 y}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$$

于是

$$f''(x) = -\frac{1}{2} (1-x^4)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-4x^3) = \frac{2x^3}{(1-x^4)^{\frac{3}{2}}}$$

4.(10分)

求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{kn^k} \right)$$

Solution.

注意到 $0 < \frac{1}{kn^k} \leq \frac{1}{n}$, 于是

$$\frac{k-1}{n} \leq \frac{k}{n} - \frac{1}{kn^k} < \frac{k}{n}$$

根据Riemann积分的定义可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{kn^k} \right) = \int_0^1 \cos x dx = \sin 1$$

5.(15分)

求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} dx$$

Solution.

设

$$\frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{A}{2x-1} + \frac{B}{2x+3} + \frac{C}{2x-5}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{A(4x^2 - 4x - 15) + B(4x^2 - 12x + 5) + C(4x^2 + 4x - 3)}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} \\
&= \frac{4(A + B + C)x^2 + 4(C - A - 3B)x + (5B - 15A - 3C)}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)}
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ C - A - 3B = 1 \\ 5B - 15A - 3C = -11 \end{cases}$$

解得 $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{4}, C = \frac{3}{4}$.

从而

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx &= \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2x - 1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2x + 3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2x - 5} \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{2x - 1} - \frac{1}{4} \int \frac{dx}{2x + 3} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{2x - 5} \\
&= \frac{1}{4} \ln |2x - 1| - \frac{1}{8} \ln |2x + 3| + \frac{3}{8} \ln |2x - 5| + C
\end{aligned}$$

6.(10分)

设欧氏空间中 V 是曲线弧 $y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}} (1 \leq x \leq 2)$ 与直线 $x = 1, x = 2$ 围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周形成的旋转体, 求 V 的体积.

Solution.

$$\begin{aligned}
V &= \pi \int_1^2 y^2 dx = \pi \int_1^2 \frac{(\ln x)^2}{\pi} dx = \int_1^2 (\ln x)^2 dx \\
&= x (\ln x)^2 \Big|_1^2 + \int_1^2 x d(\ln x)^2 \\
&= 2 (\ln 2)^2 + \int_1^2 2 \ln x dx \\
&= 2 (\ln 2)^2 + 2 (x \ln x - x) \Big|_1^2 \\
&= 2 (\ln 2)^2 + 4 \ln 2 - 2
\end{aligned}$$

7.(15分)

试证明:方程

$$x^{18} + x^{12} - \cos x = 0$$

在 \mathbb{R} 上根的个数为2.

Proof.

设 $f(x) = x^{18} + x^{12} - \cos x$, 于是 $f(-x) = f(x)$, $f(0) = -1$.

当 $x > 0$ 时, 有

$$f'(x) = 18x^{17} + 12x^{11} + \sin x$$

于是 $x \in (0, \pi)$ 时有 $f'(x) > 0$, 即 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 严格单调递增.

又 $-1 = f(0) < 0 < f(\pi) = \pi^{18} + \pi^{12}$, 于是存在唯一 $\xi \in (0, \pi)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

当 $x \geq \pi$ 时 $f(x) \geq \pi^{18} + \pi^{12} - 1 > 0$, 没有零点.

于是存在唯一 $\xi \in (0, +\infty)$, s.t. $f(\xi) = 0$.

根据偶函数的性质, $f(x) = 0$ 当且仅当 $x = \pm\xi$, 于是原方程在 \mathbb{R} 上有且仅有两个实根 $\xi, -\xi$, 证毕.

8.(15分)

设 $D = [0, 1]$, 函数 $A, B : D \rightarrow \mathbb{R}$ 在 D 上连续, 且

$$\forall x \in D, 0 \leq A(x) \leq 1$$

对于 D 上的连续函数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, 定义

$$T_f(x) = B(x) + \int_0^x A(t)f(t)dt$$

试证明: $T_f = f$ 有唯一连续函数解. 即对于 $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $T_f = f, T_g = g$, 则 $f = g$.

Proof(Method I).

假定 $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}, Tf = f, Tg = g$. 下面证明 $f = g$.

记 $R(x) = f(x) - g(x)$, 则

$$R(x) = f(x) - g(x) = Tf(x) - Tg(x) = \int_0^x A(t)f(t)dt - \int_0^x A(t)g(t)dt = \int_0^x A(t)R(t)dt$$

且有 $R(0) = 0$. 下面证明 $\forall x \in D, R(x) = 0$.

不难得知 $R(x)$ 在 D 上连续, 于是根据连续函数的有界性, 设 $M = \max_{x \in D} f(x)$ 在 $x = x_1$ 处取到. 于是

$$\forall x \in [0, x_1], A(x)R(x) \leq R(x_1)$$

对上式积分有

$$\int_0^{x_1} A(t)R(t)dt \leq \int_0^{x_1} R(x_1)dt$$

等号成立当且仅当 $\forall t \in [0, x_1], A(t)R(t) = R(x_1)$,这显然不成立.于是

$$\int_0^{x_1} A(t)R(t)dt < \int_0^{x_1} R(x_1)dt = x_1 R(x_1) \leq R(x_1)$$

这与 $R(x_1) = \int_0^{x_1} A(t)R(t)dt$ 不符,从而 $M = 0$.

同理,设 $m = \min_{x \in D} f(x)$ 在 $x = x_2$ 处取到.若 $m < 0$,可以推出相似的矛盾.

于是 $\forall x \in D, R(x) = 0$,即 $f = g$.证毕.