

二重积分练习

1. 设 Ω 是 Oyz 平面上的圆盘 $(y-a)^2 + z^2 \leq \rho^2$ ($0 < \rho < a$)绕 z 轴旋转一周得到的区域,求 Ω 的体积 V .

Solution.

积分区域 Ω 实际上为 $\Omega = \left\{ (x, y, z) : \left(\sqrt{x^2 + y^2} - a \right)^2 + z^2 \leq \rho^2 \right\}$.我们采取柱坐标变换,可得

$$V = \iiint_{\Omega} dx dy dz = \int_0^{2\pi} \left[\iint_{D(\theta)} r dr dz \right] d\theta$$

其中 $D(\theta) = \{(r, z) : (r-a)^2 + z^2 \leq \rho^2\}$.可见 $D(\theta)$ 与 θ 无关,不妨记为 D .我们有

$$\begin{aligned} \iint_D r dr dz &= \int_{a-\rho}^{a+\rho} \left[\int_{-\sqrt{\rho^2 - (r-a)^2}}^{\sqrt{\rho^2 - (r-a)^2}} r dz \right] dr \\ &= \int_{a-\rho}^{a+\rho} 2\sqrt{\rho^2 - (r-a)^2} r dr \\ &\stackrel{t=r-a}{=} \int_{-\rho}^{\rho} 2\sqrt{\rho^2 - t^2} (t+a) dt \\ &= 2a \int_{-\rho}^{\rho} \sqrt{\rho^2 - t^2} dt \\ &= a\pi\rho^2 \end{aligned}$$

于是

$$V = \int_0^{2\pi} a\pi\rho^2 d\theta = 2\pi^2 a\rho^2$$