

曲面积分

1. 第一型曲面积分

与第一型曲线积分类似,我们在三维空间中可以定义第一型曲面积分.这里就略去我们如何得到该定义(这实际上与曲面积分是类似的).

1.1 定义:第一型曲线积分

设函数 $f(x, y, z)$ 在分片光滑的曲面 S 上有定义.将 S 任意分成 n 个互不重叠的区域 $\Delta S_i (i = 1, \dots, n)$,同时用 λ 表示该部分的面积,令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{的直径}\}$.在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) .若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

对于曲面 S 的任意分割方法和各中间点的任意取法都存在,则称此极限为 $f(x, y, z)$ 在 S 上的**第一型曲线积分**,记作

$$\iint_S f(x, y, z) dS$$

其中 S 被称为**积分曲面**.如果 S 是封闭曲面,那么习惯上也记作

$$\oiint_S f(x, y, z) dS$$

我们指出,当 S 分片光滑且 $f(x, y, z)$ 在 S 上连续时, $f(x, y, z)$ 在 S 上的第一型曲面积分存在.

第一型曲面积分的可加性在此不再赘述,它也与曲面的取向没有关系,是无方向性的.

我们现在来讨论第一型曲面积分的计算.总的来说,我们有如下定理.

1.2 第一型曲面积分的计算

我们按曲面的解析式分为如下两类.

a. 设曲面 S 由方程 $z = g(x, y)$ (其中 $(x, y) \in D$)给出,且 $g(x, y)$ 在 D 上连续可微,那么

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2} d\sigma$$

b. 设曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad (u, v) \in D$$

确定.由重积分的应用一章可知 $dS = \sqrt{EG - F^2} du dv$,其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \quad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \quad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

则有如下计算公式

$$\iint_S f(x, y, z) dS = \iint_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{EG - F^2} du dv$$

总的来说,考虑对应情形下的面积微元即可得到相应的计算公式.

2. 第二型曲面积分

我们首先定义曲线的面.

2.1 定义: 双侧曲面与单侧曲面

考虑一个光滑的正则曲面 S ,在其上任取一点 P ,那么 S 在 P 处的法向量应有两个相反的指向.任意取定一个方向后记该法向量为 \mathbf{n}_P ,如果不论 P 在 S 上如何移动(只要不跨越 S 的边界),当 P 返回其起始点时 \mathbf{n}_P 的指向没有改变,就称该曲面 S 为**双侧曲面**.

如果 S 不具有上面的性质,则称其为**单侧曲面**.

和前面的第一型曲面积分类似,第二型曲面积分和第二型曲线积分也有很多类似之处.我们不加说明地给出第二型曲面积分的定义.

2.2 定义: 第二型曲面积分

设 S 是一个分片光滑的双侧曲面,在 S 上选定一侧并记该侧在点 $(x, y, z) \in S$ 处的单位法向量为 $\mathbf{n}(x, y, z)$.设向量函数 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在 S 上有定义.将 S 任意分成 n 个互不重叠的区域 $\Delta S_i (i = 1, \dots, n)$,同时用其表示该部分的面积,令 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta S_i \text{的直径}\}$.在 ΔS_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i) .若极限

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \mathbf{F}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \mathbf{n}(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta S_i$$

对于曲面 S 的任意分割方法和各中间点的任意取法都存在,则称此极限为 $\mathbf{F}(x, y, z)$ 在 S 上的**第二型曲线积分**,记作

$$\iint_S \mathbf{F}(x, y, z) \cdot \mathbf{n}(x, y, z) dS \quad \text{或} \quad \iint_S \mathbf{F}(x, y, z) d\mathbf{S}$$

第二型曲面积分也可以写为第一型曲线积分的形式.设 $\mathbf{F}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$,法向量 \mathbf{n} 的方向余弦为 $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$,则有

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS$$

在考虑方向余弦具有的正负性后,我们也可以得到

$$\iint_S \mathbf{F} d\mathbf{S} = \iint_S P dx dy + Q dz dx + R dx dy$$

上式中的 $dx dy$ 等微元并不一定为正(这需要与二重积分做区别),而取决于方向余弦的正负(即法向量的指向).
第二型曲线积分的计算,就可以利用上面的转化将其写为第一型曲面积分后进行计算.我们现在完整地演示一遍第二型曲面积分向二重积分的转化.

Solution.

假定积分曲面 S 可以写作 $z = f(x, y)$,其中 $(x, y) \in D$.于是 S 的法向量

$$\mathbf{n} = \pm \frac{(z_x, z_y, -1)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$$

令 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$.于是

$$\begin{aligned} & \iint_{S^+} P dy dz + Q dz dx + R dx dy \\ &= \pm \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \pm \iint_S \frac{(P z_x + Q z_y - R)}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}} dS \\ &= \pm \iint_D (P z_x + Q z_y - R) d\sigma \end{aligned}$$

事实上,可以注意到 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}$ 一项被抵消.