

## 北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期末考试

1.(10分) 求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{|x|}}{1 - \sqrt{|x|}}$$

在 $x = 0$ 处的幂级数展开式,并指出此幂级数的收敛域.

**Solution.**

注意到 $\ln(1+x)$ 在 $x = 0$ 处的幂级数展开式

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$$

于是

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

于是

$$\frac{x}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$

代入 $x = \sqrt{|x|}$ 后即有

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1}$$

其收敛域为 $(-1, 1)$ .

2.(15分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 $2\pi$ 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 $e^x$ .求 $f(x)$ 的傅里叶级数,以及此傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的收敛值.

**Solution.**

我们有

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^x (n \sin nx + \cos nx)}{n^2 + 1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi (n^2 + 1)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^x \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^x (\sin nx - n \cos nx)}{n^2 + 1} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{n+1} n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi (n^2 + 1)}$$

于是 $f(x)$ 的Fourier级数为

$$f(x) \sim \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi (n^2 + 1)} (\cos nx - n \sin nx)$$

根据Dirichlet定理有

$$S(\pi) = \frac{e^{\pi} + e^{-\pi}}{2}$$

3.(10分) 求无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx$$

和瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx$$

的值.

**Solution.**

由 $\Gamma$ 函数的定义可知

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{\frac{5}{2}-1} e^{-x} dx = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

由B函数的定义可知

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^3}{1-x}} dx = \int_0^1 x^{\frac{5}{2}-1} (1-x)^{\frac{1}{2}-1} dx = B\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(3)} = \frac{3\pi}{8}$$

4.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$$

的收敛区间,以及此幂级数的和函数.

**Solution.**

令 $a_n = (n+1)(n+2)$ ,则有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = 1$$

于是收敛半径 $R = 1$ ,即收敛区间为 $(-1, 1)$ .令原级数为 $S(x)$ ,逐项求积分可得

$$\int S(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+1)(n+2)x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1}$$

令上述和函数为 $T(x)$ ,对 $T(x)$ 再次逐项求积分可得

$$\int T(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int (n+2)x^{n+1} dx = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2}$$

而

$$R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1 - x$$

于是

$$S(x) = \frac{d^2}{dx^2} R(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{(1-x)^2} - 1 \right) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

5.(10分) 任意给定常数 $r > 0$ ,试证明函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx}$$

在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛.

**Solution.**

注意到对任意 $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $x \in [r, +\infty)$ 都有

$$e^{-nx} \leq e^{-nr}$$

现在只需证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nr}$$

收敛即可.注意到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{n} = 0$$

因此对任意 $r > 0$ ,总存在 $N \in \mathbb{N}^*$ 使得对任意 $n > N$ 有

$$\frac{\ln n}{n} < \frac{r}{4}$$

即 $e^{-nr} < \frac{1}{n^4}$ .于是

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} n^2 e^{-nr} < \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

收敛,于是上述数项级数收敛.对任意 $x \in [r, +\infty)$ 有

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nx} < \sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-nr}$$

根据强级数判别法,题设函数项级数在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛.

6.(15分) 函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^x + 2n}$$

的收敛域,全体绝对收敛点,全体条件收敛点.

**Solution.**

这是一个交错级数.令

$$u_n(x) = \frac{1}{n^x + 2n}$$

为说明上述 $u_n(x)$ 在固定 $x$ 时对 $n$ 的单调性,令二元函数

$$f(x, y) = \frac{1}{y^x + 2y} (y > 0, x \in \mathbb{R})$$

则有

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{xy^{x-1} + 2}{(y^x + 2y)^2}$$

若 $x \geq 0$ ,则 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \leq 0$ ,即 $f(x, y)$ 对 $y$ 单调递减.

若 $x < 0$ ,则当 $y > \left(-\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$ 时 $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) < 0$ ,即 $f(x, y)$ 对 $y$ 单调递减.

因此,当 $n$ 充分大时,总有 $u_{n+1}(x) < u_n(x)$ 成立.

又因为 $0 < u_n(x) < \frac{1}{n}$ ,于是由夹逼准则可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = 0$$

综合上述条件,根据Leibniz判别法可知原函数项级数的收敛域为 $(-\infty, +\infty)$ .

现在来考察其绝对收敛点.当 $x > 1$ 时有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

根据比较判别法可知此时级数绝对收敛.

当 $x \leq 1, n \geq 1$ 时总有 $n^x < n$ ,于是

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}$$

根据比较判别法可知此时级数发散.

于是全体绝对收敛点为 $(1, +\infty)$ ,全体条件收敛点为 $(-\infty, 1]$ .

**7.(15分)** 定义函数 $\theta: [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} dt$$

试证明无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx$$

收敛.本题要求写出详细过程和依据.

**Proof.**

$\theta(x)$ 中的被积函数恒正,故 $\theta(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

又 $\theta(0) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \theta(x) = +\infty$ ,因此 $\theta(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 到 $[0, +\infty)$ 上的一一映射.

考虑 $\theta(x)$ 的反函数 $f(x)$ .于是

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{f(\frac{n\pi}{2})}^{f(\frac{(n+1)\pi}{2})} \cos(\theta(x)) dx \right)$$

考虑到当 $x \in (2k\pi - \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{\pi}{2})$ 时 $\cos(x) > 0$ ,  $x \in (2k\pi + \frac{\pi}{2}, 2k\pi + \frac{3\pi}{2})$ 时 $\cos x < 0$ ,于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left( \int_{f(\frac{n\pi}{2})}^{f(\frac{(n+1)\pi}{2})} \cos(\theta(x)) dx \right) = \int_0^{f(\frac{\pi}{2})} \cos(\theta(x)) dx + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \int_{f(n\pi - \frac{\pi}{2})}^{f(n\pi - \frac{\pi}{2})} |\cos(\theta(x))| dx$$

求和中的每项积分均为正值,因此这是一个交错级数.令

$$u_n = \int_{f(n\pi - \frac{\pi}{2})}^{f(n\pi + \frac{\pi}{2})} |\cos(\theta(x))| dx$$

令 $f_n = f(n\pi - \frac{\pi}{2})$ .注意到 $\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} > t$ ,因此

$$\pi = \theta(f_{n+1}) - \theta(f_n) = \int_{f_n}^{f_{n+1}} \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} dt > \int_{f_n}^{f_{n+1}} t dt = \frac{f_{n+1}^2 - f_n^2}{2}$$

于是

$$0 < u_n < \int_{f_n}^{f_{n+1}} 1 dx = f_{n+1} - f_n < \frac{2\pi}{f_n + f_{n+1}}$$

注意到 $n \rightarrow \infty$ 时显然有 $f_n \rightarrow +\infty$ ,因此由夹逼准则可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$$

又

$$u_n = \int_{f_n}^{f_{n+1}} |\cos(\theta(x))| dx = \int_{f_n}^{f_{n+1}} \left| \frac{d(\sin(\theta(x)))}{\theta'(x)} \right|$$

即

$$\frac{2}{\theta'(f_{n+1})} = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\theta'(f_{n+1})} < \int_{f_n}^{f_{n+1}} \left| \frac{d(\sin(\theta(x)))}{\theta'(x)} \right| < \int_{-1}^1 \frac{dt}{\theta'(f_n)} < \frac{2}{\theta'(f_n)}$$

于是 $u_n > u_{n+1}$ 对所有 $n \in \mathbb{N}^*$ 成立.因此根据Leibniz判别法,可得原级数收敛,因而无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) dx$$

收敛.

8.(15分) 设 $n$ 是正整数.

(1) (5分) 任意给定 $a > 0$ , 试证明含参变量 $t$ 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛.

(2) (10分) 对每个 $t \in (0, +\infty)$ , 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

的值.

本题要求写出详细过程和依据.

**Solution.**

(1) 注意到 $t \in [a, +\infty)$ 时有 $t > 0$ , 于是当 $x > 1$ 时有

$$\frac{1}{(t+x^2)^n} < \frac{1}{x^{2n}} < \frac{1}{x^2}$$

于是

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx < \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = 1$$

收敛. 又因为 $t+x^2 > t \geq a$ , 于是

$$\int_0^1 \frac{1}{(t+x^2)^n} dx < \int_0^1 \frac{1}{a^n} dx = \frac{1}{a^n}$$

收敛. 于是无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

收敛.

(2) 记

$$I_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n} dx$$

我们已经证明 $I_n(t)$ 在 $(0, +\infty)$ 内闭一致收敛. 令 $f_n(x, t) = \frac{1}{(t+x^2)^n}$ , 于是

$$\frac{\partial f_n}{\partial t}(x, t) = -\frac{n}{(t+x^2)^{n+1}} = -nf_{n+1}(x, t)$$

于是可对 $I_n(t)$ 求导, 并有

$$I'_n(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial f_n}{\partial t}(x, t) dx = -n \int_0^{+\infty} f_{n+1}(x, t) dx = -nI_{n+1}(t)$$

而

$$I_1(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+x^2} dx = \left( \frac{1}{\sqrt{t}} \arctan \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{t}}$$

于是

$$I_{n+1}(t) = \frac{I_1^{(n)}(t)}{(-1)^{n+1}n!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(-1)^{n+1}n!} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(-2)^n} t^{-\frac{2n+1}{2}}$$

用 $n$ 代替 $n+1$ 可得

$$I_n(t) = -\frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!\sqrt{t^{\frac{2n-1}{2}}}} (n \geq 2)$$

综上可得

$$I_n(t) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\sqrt{t}}, n=1 \\ -\frac{\pi(2n-3)!!}{2^n(n-1)!\sqrt{t^{\frac{2n-1}{2}}}}, n \geq 2 \end{cases}$$