北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中考试

1.(10分) 计算二重积分

$$\iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad D: x^2+y^2 \leqslant 1, x \geqslant 0, y \geqslant 0$$

Solution.

做极坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$.于是变换后的积分区域$D': 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant \dfrac{\pi}{2}$.于是

$$\begin{aligned}
\iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_{D'} \ln\left(1+r^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \ln\left(1+r^2\right) r\mathrm{d}r \\
&\xlongequal{t=r^2} \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_1^2 \ln t\mathrm{d}t \\
&= \frac{\pi}{4}(\ln 2 - 1)
\end{aligned}$$

2.(10分) 计算三重积分

$$\iiint_\Omega \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}V \qquad \Omega: 0 \leqslant z \leqslant x^2+y^2 \leqslant 1$$

Solution.

做柱坐标变换$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$,于是变换后的积分区域

$$\Omega': 0 \leqslant z \leqslant r^2 \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

于是

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega \left(y^2+z^2\right)\mathrm{d}V &= \iiint_{\Omega'} \left(r^2\sin^2\theta + z^2\right) r\mathrm{d}r\mathrm{d}z\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_0^{r^2} \left(r^2\sin^2\theta + z^2\right) r\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^1 r\left(r^4\sin^2\theta + \frac{r^6}{3}\right)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{6}\sin^2\theta + \frac{1}{24}\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{6} + \frac{1}{24}\cdot 2\pi \\
&= \frac{\pi}{4}
\end{aligned}$$

3.(10分) 设曲线C为椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$沿逆时针方向.计算曲线积分

$$\oint_C \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$$

4.(10分) 计算曲面积分

$$\iint_S \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S$$

其中S为圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=1$所截下部分.

5.(15分) 计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中S为抛物面$z=x^2+y^2$被平面$z=4$所截部分的外侧.

6.(10分) 求常微分方程

$$y'=xy+3x+2y+6$$

的所有解.

7.(15分) 求常微分方程

$$y''-4y'+3y-4\mathrm{e}^x=0$$

的通解.

8.(10分) 设平面有界闭区域为

$$D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant\right\}\qquad a,b>0$$

设曲线L为D的边界,函数$P(x,y),Q(x,y)$在D上有连续的一阶偏导数.记$\mathbf{F}=(P,Q)$,$\mathbf{n}$为曲线L的单位外法向量.试证明

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\mathrm{d}s=\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

9.(10分) 设$f(x)$为$\mathbb{R}$上的连续函数.试证明

$$\iint_S f(x+y+z)\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(\sqrt{3}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

其中S为单位球面$x^2+y^2+z^2=1$.