导函数的连续性

19世纪时,大部分数学家认为介值定理已经可以刻画出连续函数. 但在1875年,Darboux证明这个想法是错误的,因为连续函数的导函数仍然具有介值性质,但不一定是连续函数. 一个常见的反例如下:

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

不难得出

$$f'(x)=\begin{cases} 2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$$

于是我们知道$f'(x)$具有介值性,然而在$x=0$处并不连续(具体来说,$x=0$是$f'(x)$的第二类间断点).
那么,更加广泛地说,是否所有的导函数都满足介值性呢?Darboux定理告诉我们,这是成立的.

Darboux's Theorem

设$f:(A,B)\to\mathbb{R}$在开区间(A,B)上可导,闭区间$[a,b]\subset(A,B)$. 那么对介于$f'(a)$和$f'(b)$的任意实数η,总存在$\xi\in(a,b)$使得$f(\xi)=\eta$.

Proof.

设$g(x)=f(x)-\eta x$,于是$g'(x)=f'(x)-\eta$.
不失一般性地,假定$f'(a)<\eta<f'(b)$,于是$g'(a)<0<g'(b)$.
由连续函数的有界性,可知$g(x)$在$[a,b]$上有最小值.由$g'(a)<0<g'(b)$可知a,b均不是$g(x)$的最小值点.
于是$\exists\xi\in(a,b)$使得$g(\xi)=\min\limits_{x\in[a,b]}g(x)$.根据费马引理,$g'(\xi)=0$.
从而$f'(\xi)=\eta$,命题得证.

于是我们知道导函数是满足介值性的.那么更特殊一点,它是否能更接近一个连续函数呢? 接下来我们证明:导函数不存在第一类间断点. 为了证明这一点,我们首先引入导数极限定理.

导数极限定理

设函数$f(x):(a,b)\to\mathbb{R}$在(a,b)上可导,其导函数记为$f'(x)$. 对于任意$x_0\in(a,b)$,如果$f'(x)$的左(右)极限存在,那么$f(x)$在$x=x_0$处的左(右)导数一定等于该极限.

Proof.

以右侧导数为例.取$x\in(x_0,b)$,根据Lagrange中值定理

$$\exists\xi\in(x_0,x),\text{s.t.}f'(\xi)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

置$\Delta x = x - x_0, k = \dfrac{\xi - x_0}{x - x_0} = \dfrac{\xi - x_0}{\Delta x} \in (0,1)$,于是$\xi = x_0 + k\Delta x$.
假定$\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$存在,那么我们有

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0^+} f'(\xi) = \lim_{\Delta x \to 0^+} f'(x_0 + k\Delta x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x)$$

左侧导数的证明过程类似.于是命题得证.

基于上述定理,我们可以马上得出下一结论.

Example 3.

试证明:对于(a,b)上的可微函数$f(x)$有

$$\forall x_0 \in (a,b), \text{若} \lim_{x \to x_0} f'(x) \text{存在,则} \lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

更一般的,只需$\lim\limits_{x \to x_0^+} f'(x)$和$\lim\limits_{x \to x_0^-} f'(x)$分别存在,上述命题就成立.

Proof(Method I).

根据导数极限定理,我们有

$$\lim_{x \to x_0^+} f'(x) = f'_+(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = f'_-(x_0)$$

又$f(x)$在$x = x_0$处可导,于是

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$$

进而

$$\lim_{x \to x_0} f'(x) = f'(x_0)$$

Proof(Method II).

我们也可以用Darboux定理证明之.

关于**Example 3**有一个错误的推广证明.

假定$f(x)$在(a,b)上可导,于是对于任意$x_0 \in (a,b)$,取$x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$,据Lagrange中值定理有

$$\exists \xi, \text{满足} x_0 \leqslant \xi \leqslant x, \text{使得} f'(\xi) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

> 于是
>
> $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}f'(\xi)$$
>
> 注意到$x\to x_0$将迫使$\xi\to x_0$,于是
>
> $$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}f'(\xi)=\lim_{\xi\to x_0}f'(\xi)$$
>
> 从而$f(x)$在$x=x_0$处连续,进而$f(x)$在(a,b)上连续.
>
> 然而,这种证明有着根本上的问题.