

北京大学数学科学学院2023-24高等数学A1期中考试

1. (20分) 求下列各极限.

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{n!}$

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{i}{(n+i)^3}$

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin \left(\left(\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \right) \pi \right)$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i \ln(n+i) - \frac{n+1}{2n} \ln n \right]$

2. (20分) 计算下列各题并适当化简.

(1) 设 $y = x\sqrt{1+x^2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(2) 设

$$y = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

求 $\frac{d^2y}{dx^2}$.

(3) 设 $y = \int_{\cot x}^{\tan x} \sqrt{1+t^2} dt$, 求 $\frac{dy}{dx}$.

(4) 设 $F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(4)}(x) - \cdots + (-1)^n f^{(2n)}(x)$, 其中 $f(x) = x^n(1-x)^n$,
求 $\frac{d}{dx} (F'(x) \sin x - F(x) \cos x)$.

3. (15分) 计算下列不定积分.

(1) $\int \sqrt{1+x^2} dx$

(2) $\int \frac{\arctan e^x}{e^x + e^{-x}} dx$

(3) 设 $y = y(x)$ 是由方程 $y^2(x-y) = x^2$ 确定的隐函数, 求 $\int \frac{dx}{y^2}$.

4. (10分) 试确定实数 a, b 使得函数

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n-1} + ax^2 + bx}{x^{2n} + 1}$$

成为 \mathbb{R} 上的连续函数.

5. (15分) 计算下列定积分.

(1) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} dx$

(2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+e^x} dx$

(3) $\int_0^\pi \left(\int_0^x \frac{\sin t}{\pi-t} dt \right) dx$

6. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, 1]$ 上Riemann可积,求

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} f\left(\frac{i}{n}\right)$$

7. (10分) 设 $f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上连续, $f(0) = 0$,且 $\forall x > 0, 0 < f(x) < x$. 令

$$a_1 = f(1), a_2 = f(a_1), \dots, a_n = f(a_{n-1}), n = 2, 3, \dots$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.