北京大学数学科学学院2024-25高等数学B1期末考试

1.(10分)

求极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|}-2+|x|}{x^2}$$

Solution.

置$t=\sqrt{|x|}$.于是

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|}-2+|x|}{x^2}&=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\cos t-2+t^2}{t^4}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{2t-2\sin t}{4t^3}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{2-2\cos t}{12t^2}\\&=\lim_{t\to 0^+}\frac{2\sin t}{24t}\\&=\frac{1}{12}\end{aligned}$$

2.(10分)

设欧氏空间$\mathbb{R}^3$中的平面$P:2x+y-3=0$和平面$Q:x+2y-z-2=0$,直线$l=P\cap Q$是P,Q的交线.求以原点$O(0,0,0)$为球心,与l相切的球面S的方程.

Solution.

联立P,Q有

$$\begin{cases}2x+y-3=0\\x+2y-z-2=0\end{cases}$$

解得$l:\dfrac{x-6}{5}=-y=\dfrac{z-4}{3}$.于是$l$的方向向量$\vec{u}=(5,-1,3)$.
考虑切点$T(x,y,z)$,则有$OT\perp l$,即$\overrightarrow{OT}\cdot\vec{u}=0$.于是

$$\begin{cases}\dfrac{x-6}{5}=-y=\dfrac{z-4}{3}\\5x-y+3z=0\end{cases}$$

解得$T\left(0,\dfrac{6}{5},\dfrac{2}{5}\right)$.于是$S$的半径$r$满足$r^2=0^2+\left(\dfrac{6}{5}\right)^2+\left(\dfrac{2}{5}\right)^2=\dfrac{8}{5}$.于是$S$的方程为

$$x^2+y^2+z^2=\frac{8}{5}$$

3.(10分)

下列函数极限是否存在?若存在,请求出其值;若不存在,请说明理由.

(1) (5分) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+\tan^2 y}$.

(2) (5分) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\left(\dfrac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Solution.

(1) 我们有

$$\lim_{y\to 0}\frac{\tan y}{y}=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos^2 y}=1$$

令$x=ky$,于是

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+\tan^2 y}&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{ky^2}{k^2y^2+\tan^2 y}\\&=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{k}{k^2+\left(\frac{\tan y}{y}\right)^2}\\&=\frac{k}{k^2+1}\end{aligned}$$

于是所取路径$x=ky$不同,得到该极限的值亦不同.于是这函数极限不存在.

(2) 我们有

$$\left|\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant 1$$

于是

$$0\leqslant\left|\left(\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right|\leqslant\left|\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}\right|+|\sin y|$$

我们有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}=1\cdot 0=0,\lim_{y\to 0}\sin y=0$$

于是由夹逼定理可知

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

4.(10分)

设二元函数$z=z(x,y)$是由方程$F(x,y,z)=z^3+x^2z-2y^3=0$确定的隐函数.求$z(x,y)$在$(1,1)$处最大的方向导数.

Solution.

当$(x,y)=(1,1)$时,由$F(x,y,z)=0$可得

$$z^3+z-2=(z-1)(z^2-z+2)=0$$

这方程有唯一的实根$z=1$.在$(1,1,1)$处求F的各偏导有

$$F_x=2xz=2 \qquad F_y=-6y^2=-6 \qquad F_z=3z^2+x^2=4$$

根据隐函数存在定理,由$F(x,y,z)\equiv 0$确定的隐函数$z=z(x,y)$在$(1,1)$处满足

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{1}{2} \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{3}{2}$$

于是$z(x,y)$在$(1,1)$处的梯度向量为$\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$,单位化后即$\vec{u}=\left(-\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.
于是$z(x,y)$在$(1,1)$处的最大的方向导数为

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{u}}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)+\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

5.(15分)

求函数$f(x,y)=x^{\sqrt{y}}$在$(1,1)$处的二阶泰勒多项式和带皮亚诺余项的二阶泰勒公式.

Solution.

在$(1,1)$处,我们有

$$\begin{aligned}
f_x&=\sqrt{y}x^{\sqrt{y}-1}=1\\
f_y&=\frac{x^{\sqrt{y}}\ln x}{2\sqrt{y}}=0\\
f_{xx}&=\sqrt{y}\left(\sqrt{y}-1\right)x^{\sqrt{y}-2}=0\\
f_{yy}&=\frac{x^{\sqrt{y}}\ln^2 x+x^{\sqrt{y}}\ln x\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}}{4y}=0\\
f_{yx}&=\frac{1}{2\sqrt{y}}\left(\sqrt{y}x^{\sqrt{y}-1}\ln x+\frac{x^{\sqrt{y}}}{x}\right)=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

由泰勒公式可得

$$f(x,y)=f(1,1)+(x-1)f_x+(y-1)f_y+\frac{(x-1)^2f_{xx}+2(x-1)(y-1)f_{xy}+(y-1)^2f_{yy}}{2}$$

于是$f(x,y)$在$(1,1)$处的二阶泰勒多项式为

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{(x-1)(y-1)}{2}$$

带皮亚诺余项的二阶泰勒公式为

$$f(x,y)=1+(x-1)+\frac{(x-1)(y-1)}{2}+o(\rho^2),\text{其中}\rho=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$$

6.(15分)

设$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$定义为

$$f(x,y)=x^2+2xy\sin(x+y)-y^2$$

试证明:存在$\mathbb{R}^2$上$(0,0)$的开邻域D和D上的连续可微的可逆变换$x,y:D\to\mathbb{R}$,使得$x(0,0)=y(0,0)=0$,并且对于任意$(u,v)\in D$有

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2$$

Proof.

首先注意到

$$f(x,y)=\left(x^2+2xy\sin(x+y)+y^2\sin^2(x+y)\right)-y^2\left(1+\sin^2(x+y)\right))$$

又因为

$$1+\sin^2(x+y)\geqslant 0$$

于是作代换

$$\begin{cases} u=x+y\sin(x+y) \\ v=y\sqrt{1+\sin^2(x+y)} \end{cases}$$

即可使得$f(x,y)=u^2-v^2$.为了证明这映射存在逆映射,对其在$(0,0)$处求偏导有

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=1+y\cos(x+y)=1\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\sin(x+y)+y\cos(x+y)=0\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{y\sin(x+y)\cos(x+y)}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}=0\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\sqrt{1+\sin^2(x+y)}+\frac{y\sin(x+y)\cos(x+y)}{\sqrt{1+\sin^2(x+y)}}=1
\end{aligned}$$

于是$\dfrac{D(u,v)}{D(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1$.因此根据逆映射存在定理,存在变换$x(u,v),y(u,v)$满足题意.

7.(15分)

求欧氏空间$\mathbb{R}^3$中原点$O(0,0,0)$到曲面

$$(x-y)^2-z^2=4$$

上的点的最短距离.

Solution.

我们只需求出距离的平方的最小值即可.为此,设

$$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2+\lambda((x-y)^2-z^2-4)$$

由于$F(x,y,z,\lambda)$是连续函数,因此其最值必在稳定点处取到.令F的各偏导为0,可得

$$\begin{cases} F_x=2x+2\lambda(x-y)=0 \\ F_y=2y+2\lambda(y-x)=0 \\ F_z=2z-2\lambda z=0 \\ F_\lambda=(x-y)^2-z^2-4=0 \end{cases}$$

由$2z-2\lambda z=0$可得$z(1-\lambda)=0$.

若$1-\lambda=0$,则有$4x-2y=4y-2x=0$,于是$x=y=0$.这要求$z^2+4=0$,于是没有实根,舍去.

若$z=0$,则由前两个方程相加可得$x+y=0$.代入约束条件中可得$x=1,y=-1$或$x=-1,y=1$.

此时$F(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2=2$.于是所求距离的最小值为$\sqrt{2}$.

8.(15分)

设$f:[-1,1]\to\mathbb{R}$是$[-1,1]$上的黎曼可积函数,$A\in\mathbb{R}$,$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=A$.试证明:

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\pi A$$

注意:本题没有假设$f(x)$在$[-1,1]$上连续.

Proof.

令$g(x)=f(x)-A$,则$g(x)$也是$[-1,1]$上的黎曼可积函数,满足$\lim\limits_{x\to 0}g(x)=A-A=0$.于是

$$\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\frac{n(g(x)+A)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=A\int_{-1}^{1}\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$$

我们有

$$\int_{-1}^{1}\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_{-n}^{n}\frac{\mathrm{d}(nx)}{1+(nx)^2}=\arctan x\big|_{-n}^{n}=2\arctan n$$

于是

$$\lim_{n\to\infty} A\int_{-1}^{1}\frac{n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x = A\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\pi A$$

将被积函数进行分段,有

$$\int_{-1}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x+\int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x$$

因为$g(x)$是$[-1,1]$上的黎曼可积函数,于是其在$[-1,1]$上有界.不妨令$\max\limits_{x\in[-1,1]} g(x)=M$.于是

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\left|\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{n|g(x)|}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{Mn}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\\
&=M\ \arctan x|_{\sqrt{n}}^{n}\\
&=M\left(\arctan n-\arctan\sqrt{n}\right)
\end{aligned}$$

又因为

$$\lim_{n\to\infty} M\left(\arctan n-\arctan\sqrt{n}\right)=M\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$$

于是由夹逼定理可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=0$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{-\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=0$$

因为$\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$,于是对于任意$\varepsilon>0$,存在$\delta>0$使得任意$0<|x|<\delta$满足$|g(x)|<\varepsilon$.

取$n>\dfrac{1}{\delta^2}$,则有$\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\delta$.于是

$$\begin{aligned}
0&\leqslant\left|\int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\right|\\
&\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{n|g(x)|}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\\
&\leqslant\int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{\varepsilon n}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x\\
&=\varepsilon\ \arctan x|_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}}\\
&=2\varepsilon\arctan\sqrt{n}\\
&\leqslant\pi\varepsilon
\end{aligned}$$

根据极限的定义,可知

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\sqrt{n}}}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{ng(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=0+0+0=0$$

于是

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\pi A+0=\pi A$$

命题得证.