二重积分引论

1.二重积分的定义与基本性质

一元函数的Riemann积分是通过"分割-近似代替-求和-取极限"的过程完成的.关于多元函数的重积分也是通过类似步骤定义的.

考虑二元函数$z=f(x,y)$在一个由有线条光滑曲线围成的平面区域D上有定义.对D作分割如下

$$D=D_1\cup\cdots\cup D_n$$

且$\forall 1\leqslant j<k\leqslant n, D_j\cap D_k=\varnothing$.我们用$\Delta\sigma_i$表示$D_i$的面积,并用$\lambda$表示$D_i$的直径的最大者. 所谓$D_i$的直径是指$D_i$中任意两点的距离的最大值.于是,仿照一元Riemann积分的定义,我们可以做如下定义.

1.1 定义:二重积分

设$z=f(x,y)$在有界闭区域D上有定义.若对于D的任意分割$\{D_1,\cdots,D_n\}$及任意选定的$(x_i,y_i)\in D_i(i=1,\cdots,n)$,当$\lambda\to 0$时,和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta\sigma_i$$

总有极限,则称该极限为$z=f(x,y)$在D上的**二重积分**,记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \qquad \text{或} \qquad \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

我们对二元函数是否可积不做详细讨论,只是指出:**一个在有界闭区域上连续的二元函数是可积的**.更一般地说,一个在有界闭区域上的分片连续有界函数是可积的. 所谓分片连续有界函数,是指将原定义域分解成有限个小区域,在每个小区域上函数是有界连续的.

类似一元积分,二重积分具有如下性质.

1.2 二重积分的性质

(1) 常数因子可分离.

$$\iint_D kf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=k\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) 对被积函数的可加性.

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) 对积分区域的可加性.

若$D=D_1\cup D_2$且$D_1\cap D_2=\varnothing$,那么

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(4) 积分保持不等号.

若对于任意$(x,y)\in D$,都有

$$f(x,y)\leqslant g(x,y)$$

那么

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\leqslant\iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

特别地,由上式可以推出

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\iint_D |f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(5) 积分中值定理.

若$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,那么存在$(x_0,y_0)\in D$使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0)\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(x_0,y_0)\cdot S$$

其中S即D的面积.

2.二重积分的计算

我们有如下计算二重积分的定理.

2.1 直角坐标系下二重积分的计算

设$f(x,y)$在有界闭区域D上连续,且D是由两直线$x=a,x=b(a<b)$以及两连续曲线 $y=\phi_1(x),y=\phi_2(x)\,(\phi_1(x)<\phi_2(x),a\leqslant x\leqslant b)$围成,则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x$$

或写成

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\left[\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right]$$

在这个定理中交换x,y也是成立的,有时积分区域更适合交换后的计算方法.

对于某些时候,用极坐标代换来计算二重积分会更加方便.为了导出所要的公式,我们用极坐标系中的曲线族

$$\{(r,\theta):r\text{是常数}\}\qquad\{(r,\theta):\theta\text{是常数}\}$$

对被积区域做分割.假定D中的点转换为极坐标时,矢径r的最小值为A,最大值为B; 极角θ的最小值为α,最大值为β,那么区域D就落在扇形域

$$S=\{(r,\theta):r\in[A,B],\theta\in[\alpha,\beta]\}$$

内. 现在,对$[A,B]$和$[\alpha,\beta]$做分割

$$A=r_0<r_1<\cdots<r_m=B$$

$$\alpha=\theta_0<\theta_1<\cdots<\theta_n=\beta$$

这样D就可以被分割为若干个小扇形域

$$D_{i,j}=\{(r,\theta):r_j\leqslant r<r_{j+1},\theta_i\leqslant\theta<\theta_{i+1}\}$$

严格来说,在D的边界上有时并不能分成这样的小扇形,但分割地充分精细时,这类误差的区域充分小,可以近似忽略. 令λ为$D_{i,j}$中直径最大者,那么根据二重积分的定义可知

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j}f(P_{i,j})\Delta\sigma_{i,j}$$

其中$P_{i,j}$表示$D_{i,j}$中的一点,$\Delta\sigma_{i,j}$表示$D_{i,j}$的面积.
由于$P_{i,j}$的选取是任意的,故我们取$P_{i,j}=(r_j\cos\theta_i,r_j\sin\theta_i)$.
现在计算$D_{i,j}$的面积.取$\Delta r_j=r_{j+1}-r_j,\Delta\theta_i=\theta_{i+1}-\theta_i$,则有

$$\Delta_{i,j}=\frac{1}{2}\Delta\theta_i\left(r_{i+1}^2-r_i^2\right)=r_j\Delta r_j\Delta\theta_i+\frac{1}{2}\left(\Delta r_j\right)^2\Delta\theta_i$$

当$\lambda\to 0$时,后一项是比$\Delta r_j\Delta\theta_i$更高阶的无穷小量,在求极限时可以忽略.于是我们有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i,j}f\left(r_j\cos\theta_i,r_j\sin\theta_i\right)r_j\Delta r_j\Delta\theta_j$$

定义$F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)r$,则

$$\iint_D d(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}F(r,\theta)\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中$D'=\{(r,\theta):(r\cos\theta,r\sin\theta)\in D\}$.于是我们有

2.2 极坐标系下二重积分的计算

令$D'=\{(r,\theta):(r\cos\theta,r\sin\theta)\in D\}$,则有

$$\iint_D d(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

极坐标变换使我们思考,在更一般的双射的变换下如何计算重积分. 事实上,有如下定理.

2.3 二重积分的一般变量替换公式

设有界闭区域D,D'间存在双射$D'\to D:(\xi,\eta)\mapsto(x,y)$,其中$x=\mathbf{x}(\xi,\eta),y=\mathbf{y}(\xi,\eta)$在$D'$内有连续偏导数,且变换的Jacobi行列式处处不为0.设$z=f(x,y)$在D内连续,则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(\mathbf{x}(\xi,\eta),\mathbf{y}(\xi,\eta))\left|\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}\right|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

定理的证明方法从略,可以参考书上内容,主要是证明变换前后的面积元间的比例即为Jacob行列式.