隐函数存在定理

Theorem I

设函数$F(x,y)$在$P_0(x_0,y_0)$的某个邻域内有定义,且满足$F(x_0,y_0)=0$,$\frac{\partial F}{\partial x}$和$\frac{\partial F}{\partial y}$连续且$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}\neq 0$.则在$x_0$的某个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内存在唯一的隐函数$y=f(x)$使得$F(x,f(x))\equiv 0,\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$.
此外,$y=f(x)$在$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内有连续的导数,满足$f'(x)=-\frac{F_x(x,y)}{F_y(x,y)}$.

Theorem II

设函数$F(x,y,z)$在$P_0(x_0,y_0,z_0)$的某个邻域内有连续的一阶偏导数,满足$F(x_0,y_0,z_0)=0$,$F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.
则在(x_0,y_0)的某邻域内,方程$F(x,y,z)=0$确定唯一的隐函数$z=\mathbf{z}(x,y)$,满足$F(x,y,\mathbf{z}(x,y))\equiv 0$.
且$\mathbf{z}(x,y)$有连续的偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\qquad \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

我们考虑$\mathbb{R}^2$上的映射$(u,v)\mapsto(x,y)$满足

$$\begin{cases} x=\mathbf{x}(u,v)\\ y=\mathbf{y}(u,v)\end{cases}$$

这映射是否有逆映射存在?应当满足什么条件?即,对于给定的(x_0,y_0),是否有唯一的(u,v)满足上述方程式?为此,我们令$F(x,y,u,v)=x-\mathbf{x}(u,v)$,$G(x,y,u,v)=y-\mathbf{y}(u,v)$.
根据隐函数存在定理,存在(u_0,v_0)满足

$$\begin{cases} x_0=\mathbf{x}(u_0,v_0)\\ y_0=\mathbf{y}(u_0,v_0)\end{cases}$$

即$F(x_0,y_0,u_0,v_0)=G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$.此外,要求$F,G$在$(x_0,y_0,u_0,v_0)$的某个邻域内有连续的一阶偏导数,且

$$\left.\frac{D(F,G)}{D(u,v)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}$$