北京大学数学科学学院2022-23高等数学A2期中考试

1. (32分) 指出下列各积分的积分类型,并计算其积分值,其中

$$D_1=[0,1]\subset\mathbb{R}\qquad D_2=[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^2\qquad D_3=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]\subset\mathbb{R}^3$$

记$\partial\Omega$表示Ω的边界.记$S_1=\partial D_2, S_2=\partial D_3$,$S_1^+$为逆时针方向的$S_1$,$S_2^+$为外法线方向的$S_2$.

(1) $\displaystyle\int_{D_1} x\mathrm{d}x$

(2) $\displaystyle\oint_{S_1} xy\mathrm{d}s$

(3) $\displaystyle\oiint_{S_2} xyz\mathrm{d}S$

(4) $\displaystyle\iint_{D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(5) $\displaystyle\oint_{S_1^+} 2xy\mathrm{d}x+\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}y$

(6) $\displaystyle\iiint_{D_3} x^6y^{16}z^{16}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

(7) $\displaystyle\oiint_{S_2^+}\left(\frac{x}{2}+z^3\sin y^2\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{y}{3}+\mathrm{e}^{x\cos z}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{z}{6}+\arctan(xy)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

(8) $\displaystyle\oint_{\Gamma^+} x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z$,其中$\Gamma^+$是由$(0,0,0)$出发,依次经过点$(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1),(0,1,1),(0,1,0)$后回到$(0,0,0)$的直线段构成.

2. (12分) 求二重积分

$$I=\iint_D\left|y-x^2\right|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:-1\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$.

3. (12分) 计算由封闭曲面

$$S=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\left(x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{5}\right)^2\leqslant x\right\}$$

围成区域的体积.

4. (12分) 设S^+是单位球面$x^2+y^2+z^2=1$的外侧,试求曲面积分

$$I=\oiint_{S^+}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+4y^2+9z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

5. (12分) 设$f(t)$是$[0,1]$上的可积函数,满足

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=1\qquad\int_0^1 tf(t)\mathrm{d}t=2\qquad\int_0^1 t^2f(t)\mathrm{d}t=3$$

试求累次积分

$$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z$$

6. (10分) 设

$$F(t)=\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant t^2} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中$f(s)$连续,在$s=0$处可导,并且满足$f(0)=0,f'(0)=10$.求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{F(t)}{t^5}$$

7. (10分) 设$f(x,y)$是$\mathbb{R}^2$上的非负连续函数.对于$r>0,\rho>0$,令

$$I_r=\iint_{x^2+y^2\leqslant r^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad J_\rho=\iint_{-\rho\leqslant x,y\leqslant\rho} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

试证明:当极限$\lim_{r\to+\infty} I_r$与极限$\lim_{\rho\to+\infty} J_\rho$之一存在且有限时,另一个极限必然也存在且有限,并且两者相等.