北京大学数学科学学院2022-23高等数学A1期中考试

1. (5分) 回答下列问题.

(1) 有理数的有理数次幂是否一定是有理数?

(2) 无理数的无理数次幂是否一定是无理数?

2. (15分) 计算下列函数极限.

(1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2\sqrt{x+2\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+4}}$

(2) $\lim\limits_{x\to1}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}+\dfrac{3}{x^3-1}-\dfrac{4}{x^4-1})$

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2021\sqrt{x+2021}+2023\sqrt{x+2023}-2\cdot2022\sqrt{x+2022})$

3. (10分) 解下列微分方程.

(1) 已知函数$f(x)$满足

$$f'(x)=1+e^{-x}$$

求$f(x)$.

(2) 已知函数$g(x)$满足

$$g(x)+g'(x)=1+e^{-x}$$

求$g(x)$.

4. (10分) 是否存在实数序列$\{a_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1,\ \lim\limits_{n\to\infty}a_n^n=1.001$?说明理由.

5. (10分)

(1) 求函数

$$f(x)=(x^2+2x+2)\mathrm{e}^{-x}$$

的n阶导函数$f^{(n)}(x)$.

(2) 求函数

$$g(x)=\int_{\cot x}^{\tan x}\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t$$

的导函数$g'(x)$.

6. (10分) 已知函数$f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$.

(1) 若$f(x)$在$x=x_0$处可导,试证明:$f(x)$在$x=x_0$的一个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$连续.

(2) 若$f(x)$在$x=x_0$处二阶可导,试证明:$f(x)$在$x=x_0$的一个邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$连续.

7. (10分) 已知函数$f(x):[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上连续且Riemann可积.记$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$.试证明:

(1) $F(x)$在$[a,b]$上连续.

(2) $F(x)$在$[a,b]$上可导,且$\forall x\in(a,b),F'(x)=f(x)$.

8. (10分) 序列$\{a_n\}$满足

$$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2}^{a_1},\cdots,a_{n+1}=\sqrt{2}^{a_n}$$

判断$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$是否存在.若存在,请求出其值;若不存在,说明理由.

9. (10分) 求序列$\{\xi_n\}$满足

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}(\xi_n-\mathrm{e}^n)=0$.

(b) 命$f(x)=x\ln x,\lim\limits_{n\to\infty}(f(\xi_n)-f(\mathrm{e}^n))\neq 0$.