

北京大学数学科学学院2021-22高等数学B2期中考试

1. (10分) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 1, y = x, y = x + 1$ 所围成的有界闭区域,求二重积分

$$\iint_D (4y - 2x) dx dy$$

2. (10分) 设 V 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 围成的四面体,求三重积分

$$\iiint_V \frac{1}{(1 + x + y + z)^2} dV$$

3. (10分) 设 E 是椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$,求曲线积分

$$\int_E |xy| ds$$

4. (15分) 设 $n \in \mathbb{N}^*$,有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) : 0 \leq t \leq n\pi\}$.求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{L_n} e^{y^2 - x^2} \cos(2xy) dx + e^{y^2 - x^2} \sin(2xy) dy$$

5. (10分) 设 S 是曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + z^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 1\}$.求曲面积分

$$\iint_S x dS$$

6. (10分) 设 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$,求曲面积分

$$\iint_{S^+} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

7. (15分) 设平面直角坐标系 Oxy 中有曲线 $L : \{(x, y(x)) : x \geq 0\}$,其中 $y(0) = 1, y(x)$ 是严格递减的正的可导函数.任取 L 上一点 M , L 在 M 点的切线交 x 轴于 A 点,假定 $|MA| \equiv 1$.写出 $y = y(x)$ 满足的一阶常微分方程,并求解该方程对应的初值问题 $y(0) = 1$.

8. (10分) 求常微分方程

$$y'' + 4y = \sin 3x$$

的通解.

9. (10分) 回答下列问题.

- (1) 设 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\}$,写出一个在 D 上可微的函数 $T : D \rightarrow \mathbb{R}$ 且满足

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

- (2) 设 $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$,试证明:不存在函数 $U \rightarrow \mathbb{R}$ 使得 U 在 Ω 上可微,且满足

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{-y}{x^2 + y^2} \quad \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$$