

含参变量的广义积分

1. 含参变量的无穷积分

仿照正常的无穷积分,我们可以定义含参变量的无穷积分.

1.1 含参变量的无穷积分

设二元函数 $f(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上有定义.如果对于任意 $y \in [c, d]$,无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

都收敛,这就在 $[c, d]$ 上确定了 y 的函数

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

该函数称为含参变量的无穷积分.

上述定义只是保证 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上逐点收敛.我们还要进一步研究其一致收敛性.

1.2 含参变量无穷积分的一致收敛性

设无穷积分

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在区间 Y 上逐点收敛.如果对于任意 $\varepsilon > 0$,存在一个与 y 无关的 $N > a$,使得当 $A > N$ 时对任意 $y \in Y$ 都有

$$\left| \int_A^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

则称 $g(y)$ 在 Y 上一致收敛.

由此可以得到含参变量无穷积分的Cauchy判别法.

1.3 Cauchy判别法

设无穷积分

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在区间 Y 上逐点收敛.如果对于任意 $\varepsilon > 0$,存在一个与 y 无关的 $N > a$,使得当 $A > N, A' > N$ 时对任意 $y \in Y$ 都有

$$\left| \int_A^{A'} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

则 $g(y)$ 在 Y 上一致收敛.

由此又可以导出 M 判别法.

1.4 M判别法

设当 $y \in Y$ 时,对任意 $A > a$,函数 $f(x, y)$ 关于 x 在区间 $[a, A]$ 上可积.又当 $x \geq a$ 时,对任意 $y \in Y$ 有

$$|f(x, y)| \leq \phi(x)$$

且无穷积分

$$\int_a^{+\infty} \phi(x) dx$$

收敛,则含参变量的积分

$$g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在 Y 上一致收敛.

M 判别法事实上和比较判别法的原理一致.将含参的被积函数 $f(x, y)$ 通过放缩得到绝对值更大的 $\phi(x)$,如果 $\phi(x)$ 的无穷积分收敛,那么原含参积分一定也收敛.

对于非绝对一致收敛的无穷积分,需要用狄利克雷判别法和阿贝尔判别法.

1.5 Dirichlet判别法

如果二元函数 $f(x, y), g(x, y)$ 满足

(1) 当 x 充分大后 $g(x, y)$ 对任意 $y \in Y$ 都是 x 的单调函数,且 $x \rightarrow +\infty$ 时对任意 $y \in Y, g(x, y)$ 一致趋于0.

(2) 对任意 $A > a$,积分

$$\int_a^A f(x, y) dx$$

存在且对任意 $y \in Y$ 一致有界.

那么含参变量的积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

在 Y 上一致收敛.

1.5 Abel判别法

如果二元函数 $f(x, y), g(x, y)$ 满足

(1) 当 x 充分大后 $g(x, y)$ 对任意 $y \in Y$ 都是 x 的单调函数,且 $x \rightarrow +\infty$ 时对任意 $y \in Y, g(x, y)$ 一致有界.

(2) 含参变量的无穷积分

$$\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在 Y 上一致收敛.

那么含参变量的无穷积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x, y) dx$$

在 Y 上一致收敛.

与含参变量的正常积分一样,无穷积分也可以进行求导操作.

1.6 含参变量无穷积分的可微性

设函数 $f(x, y)$ 和其对 y 的偏导函数 $f_y(x, y)$ 在 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上连续,并且积分

$$I(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上点点收敛.又设积分

$$\int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$$

在 $[c, d]$ 上一致收敛,那么 $I(y)$ 在 $[c, d]$ 上可导,且

$$I'(y) = \int_a^{+\infty} f_y(x, y) dx$$

瑕积分的相关定理与性质和无穷积分是类似的,在这里不再叙述.

2. Γ 函数和 B 函数