

## 北京大学数学科学学院2022-23高等数学A1期末考试

1. (16分) 回答下列问题。

(1) (8分) 证明:直线 $l: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5x + 2y - 5z = -6 \end{cases}$ 过点 $(1, 2, 3)$ ,并把此一般方程化为标准方程.

(2) (8分) 求曲线 $\begin{cases} x = 7t - 14 \\ y = 4t^2 \\ z = 3t^3 \end{cases}$ 在参数 $t = 1$ 对应的点 $P$ 处的法平面方程.

2. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设函数 $z = \arctan \frac{(x-3)y + (x^2+x-1)y^2}{(x-2)y + (x-3)^2y^4}$ ,求 $\frac{\partial z}{\partial y} \Big|_{(3,0)}$ .

(2) (10分) 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程

$$m \left( x + \frac{z}{y} \right)^n$$

3. (20分) 求函数 $f(x, y) = (y - x^2)(y - x^3)$ 的极值.

4. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某邻域内有定义且在 $(0, 0)$ 处连续.若极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{f(x, y)}{x^2 + y^2}$ 存在,试证明 $f(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处可微.

(2) (10分) 欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $T: x + y + z = 1$ 截圆柱面 $S: x^2 + y^2 = 1$ 得一椭圆周 $R$ .求 $R$ 上到原点最近和最远的点.

5. (20分) 回答下列问题.

(1) (10分) 设 $f(x)$ 是一个定义在 $\mathbb{R}$ 上的周期为 $T \neq 0$ 的无穷阶光滑函数.试证明:对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$ ,总存在 $\xi \in \mathbb{R}$ 使得 $f^{(k)}(\xi) = 0$ .

(2) (10分) 设函数 $f(u, v)$ 有连续的偏导数 $f_u(u, v)$ 和 $f_v(u, v)$ 且满足 $f(x, 1-x) = 1$ .试证明:在单位圆周 $S: u^2 + v^2 = 1$ 上至少存在两个不同的点 $(u_1, v_1)$ 和 $(u_2, v_2)$ 使得 $v_i f_u(u_i, v_i) = u_i f_v(u_i, v_i)$ ,其中 $i = 1, 2$ .