中值定理

也许您在高等数学的学习过程中见到了各种各样的中值定理(Mean Value Theorem),它们也构成了微积分的重要组成部分. 下面我们就来列举并证明这些中值定理.

一.微分中值定理

(1).**Rolle's Mean Value Theorem**(罗尔中值定理)

Rolle's Mean Value Theorem

如果函数$f(x)$满足

(a) $f(x)$在$[a,b]$连续.

(b) $f(x)$在(a,b)可导.

(c) $f(x)$在端点的函数值满足$f(a)=f(b)$.

则$\exists\xi\in(a,b),\mathrm{s.t.}f'(\xi)=0$.

Proof.

首先,由于$f(x)$在$[a,b]$连续,可知$f(x)$在$[a,b]$上有最大值和最小值.
若最大值和最小值均在端点处取得,又$f(a)=f(b)$,则$\forall\xi\in[a,b],f(x)=f(a)$.
从而$f(x)$为常函数,$\forall\xi\in[a,b],f'(\xi)=0$.
若最大值在(a,b)上取到,设最大值点为ξ,下面证明$f'(\xi)=0$.
由题意

$$\forall x\in(a,\xi),\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\geqslant 0$$

$$\forall x\in(\xi,b),\frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}\leqslant 0$$

则

$$f'(\xi-0)=\lim_{\Delta x\to 0-0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\geqslant 0$$

$$f'(\xi+0)=\lim_{\Delta x\to 0+0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x}\leqslant 0$$

又$f(x)$在$x=\xi$处可导,则$f'(\xi-0)=f'(\xi+0)=0$,从而$f'(\xi)=0$.
若最小值在(a,b)上取到,可以通过类似的方法证明之.
综上所述,原定理得证.

(2).**Lagrange's Mean Value Theorem**(拉格朗日中值定理)

Lagrange's Mean Value Theorem

如果函数$f(x)$满足

(a) $f(x)$在$[a,b]$连续.

(b) $f(x)$在(a,b)可导.

则$\exists\xi\in(a,b),\mathrm{s.t.}f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Proof.
令$g(x)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)+f(a)-f(x)$
显然,$g(x)$满足Rolle's Theorem的条件,则$\exists\xi\in(a,b),\text{s.t.}g'(\xi)=0$
即$g'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}-f'(\xi)=0$
即$f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$,从而原定理得证.

(3).**Cauchy's Mean Value Theorem**(柯西中值定理)

Cauchy's Mean Value Theorem
如果函数$f(x)$和$g(x)$满足

(a) $f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$连续.

(b) $f(x)$和$g(x)$在(a,b)可导.

(c) $\forall x\in(a,b),g'(x)\neq 0$.

则$\exists\xi\in(a,b),\text{s.t.}\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

Proof.
令$h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g(x)$
显然,$h(x)$满足Rolle's Theorem的条件,则$\exists\xi\in(a,b),\text{s.t.}h'(\xi)=0$
即$h'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(\xi)=0$
即$\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$,从而原定理得证.

我们可以发现,上述定理是逐渐推广的,但不管形式如何,都可以通过构造辅助函数,进而利用Rolle's Theorem进行证明.

二.积分中值定理
(1).积分第一中值定理

积分第一中值定理
设$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上连续,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上可积且不变号,则

$$\exists\xi\in(a,b),\text{s.t.}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Proof.

不失一般性的,假定$g(x)\geqslant 0$.

由于$f(x)$在$[a,b]$上连续,因此$f(x)$存在最大值和最小值,分别记为M,m.

于是有$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x)$.对不等式求积分有

$$\int_a^b mg(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b Mg(x)\mathrm{d}x$$

即

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$,则$\forall\xi\in(a,b),\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$

若$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\neq 0$,则由$g(x)\geqslant 0$可得$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$.于是

$$m\leqslant\frac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}\leqslant M$$

. 又$m\leqslant f(x)\leqslant M$,根据介值定理,$\exists\xi\in(a,b),\mathrm{s.t.}f(\xi)=\dfrac{\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\mathrm{d}x}$.

即$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

对于$g(x)\leqslant 0$,可以采取相似的方法证明.

综上所述,原定理得证.

(2).积分第二中值定理

积分第二中值定理

若函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上黎曼可积,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上单调有界,则

$$\exists\xi\in[a,b],\mathrm{s.t.}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

Proof(Method I).

该方法只适用于研究的函数较为理想的情况,需要$g(x)$在$[a,b]$上可微.

记$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$,则

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\int_a^b g(x)\mathrm{d}F(x)\\&=F(x)g(x)|_a^b-\int_a^b F(x)\mathrm{d}g(x)\\&=F(b)g(b)-F(a)g(a)-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=g(b)\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

由于$g(x)$在$[a,b]$上单调,则$g'(x)$在$[a,b]$上不变号.
根据积分第一中值定理,

$$\exists\xi\in(a,b),\text{s.t.}\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x=F(\xi)\int_a^b g'(x)\mathrm{d}x=F(\xi)(g(b)-g(a))$$

则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=g(b)\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-\int_a^b F(x)g'(x)\mathrm{d}x\\&=g(b)\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-F(\xi)(g(b)-g(a))\\&=g(b)\int_a^x f(x)\mathrm{d}x-(g(b)-g(a))\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x\\&=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x+g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

从而原定理得证.

然而这种方法并不适用于所有情况(例如更一般的不可导的$g(x)$).为此,我们需要采取另外的证法.
首先,我们来证明Bonnet Theorem.

Bonnet Theorem
若函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上黎曼可积,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上单调递减且非负,则

$$\exists\xi\in[a,b],\text{s.t.}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

Proof.
证明:记$F(x)=\displaystyle\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$,则$F(x)$在$[a,b]$上连续. 记

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,\xi=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i-x_{i-1}|$$

记$g(x)$在$[x_{i-1},x_i]$上的振幅(即最值之差)为$w_i(g)$.
则有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x&=\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)\left[g(x)-g(x_i)\right]\mathrm{d}x+\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x_i)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}|f(x)\left[g(x)-g(x_i)\right]\mathrm{d}x|+\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x_i)\mathrm{d}x\\&=\lim_{\xi\to0^+}\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}f(x)g(x_i)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n} g(x_i)\left(F(x_i)-F(x_{i-1})\right) \\
&= \lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)F(x_i)-g(x_{i-1})F(x_{i-1})\right]+\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_{i-1})-g(x_i)\right]F(x_{i-1}) \\
&= g(x)F(x)\big|_a^b+\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_{i-1})-g(x_i)\right]F(x_{i-1}) \\
&= g(b)F(b)-\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]F(x_{i-1})
\end{aligned}
$$

这其中用到了

$$
0\leqslant \lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|f(x)\left[g(x)-g(x_i)\right]\mathrm{d}x\right|\leqslant \lim_{\xi\to 0^+}\max_{[a,b]}|f(x)|\sum_{i=1}^{n}w_i(g)(x_i-x_{i-1})=0
$$

由于$F(x)$在$[a,b]$连续,不妨设$\max\limits_{[a,b]}F(x)=M_F,\min\limits_{[a,b]}F(x)=m_F$,则

$$
g(b)F(b)-\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]F(x_{i-1})\leqslant M_Fg(b)-M_F\sum_{i=1}^{n}g(x_i)-g(x_{i-1})=M_Fg(a)
$$

$$
g(b)F(b)-\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]F(x_{i-1})\geqslant m_Fg(b)-m_F\sum_{i=1}^{n}g(x_i)-g(x_{i-1})=m_Fg(a)
$$

从而根据介值定理有

$$
\exists\xi\in[a,b],\text{s.t.}g(b)F(b)-\lim_{\xi\to 0^+}\sum_{i=1}^{n}\left[g(x_i)-g(x_{i-1})\right]F(x_{i-1})=F(\xi)g(a)
$$

整理可得

$$
\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(a)\int_a^{\xi}f(x)\mathrm{d}x
$$

原定理得证.

该定理还有一个等价的形式.

Bonnet Theorem

若函数$f:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上黎曼可积,$g:[a,b]\to\mathbb{R}$在$[a,b]$上单调递增且非负,则

$$
\exists\xi\in[a,b],\text{s.t.}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=g(b)\int_{\xi}^{b}f(x)\mathrm{d}x
$$

下面我们据此证明积分中值第二定理.

Proof(Method II).

证明:不失一般性的,假定$g(x)$单调递增.则根据Bonnet Theorem有

$$\exists \xi \in [a,b], \text{s.t.} \int_a^b f(x)\left[g(b)-g(x)\right]\mathrm{d}x = \left[g(b)-g(a)\right]\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x$$

整理可得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\mathrm{d}x$$

原定理得证.

现在我们来看一道例题.

例1(2021Fall PKU高等数学B期中考试)

证明:对于$[0,1]$上的任何连续函数$f(x)$, 都有$\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$.

注意:本题中没有假定$f(x)$的导函数$f'(x)$存在.

证明:由$f(x)$在$[0,1]$连续可得$f(x)$在$\left[\dfrac{j}{k},\dfrac{j+1}{k}\right]$上也连续,其中$k,j\in\mathbb{N}^*, 0\leqslant j<m$.

记$f(x)$在$\left[\dfrac{j}{k},\dfrac{j+1}{k}\right]$的上下界分别为$M_j,m_j$.

由于$f(x)$在$[0,1]$连续,故$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$存在.设$\displaystyle\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = A$,则Rieman和的极限有

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{m_j}{k} = A$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j-m_j}{k} = A-A=0$$

即$\forall\varepsilon>0,\exists K>0,\text{s.t.}\forall k>K,\left|\displaystyle\sum_{j=0}^{k-1}\frac{M_j-m_j}{k}\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

由$f(x)$在$[0,1]$连续可得$\exists B>0,\text{s.t.}\,|f(x)|<B$.

现在,$\forall n\in\mathbb{N}^*$有

$$\begin{aligned}
\left|\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| &= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \\
&= \left|\sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left(f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right)\sin(nx)\mathrm{d}x + \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} f\left(\frac{j}{k}\right)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right|\left|\sin(nx)\right|\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right)\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\sin(nx)\mathrm{d}x \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1}\int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}}\left|f(x)-f\left(\frac{j}{k}\right)\right|\mathrm{d}x + \sum_{j=0}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right)\cdot\frac{1}{n}\left(\cos\frac{j}{k}-\cos\frac{j+1}{k}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \int_{\frac{j}{k}}^{\frac{j+1}{k}} |M_j - m_j| \,\mathrm{d}x + \frac{2Bk}{n} \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{k-1} \frac{M_j - m_j}{k} + \frac{2Bk}{n} \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Bk}{n}
\end{aligned}
$$

从而$\forall \varepsilon > 0, \exists N = \max\left\{K, \dfrac{4Bk}{\varepsilon}\right\}$, s.t.$\forall n > N$,

$$
\left|\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2Bk}{N} < \varepsilon
$$

从而$\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x = 0$,证毕.