北京大学数学科学学院2023-24(1)“高等数学B1”期中试题答案

姓名____________________ 学号____________________ 共 9 道大题

1.(10分) 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n\,e})^{\,n}$$

参考答案:

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n\,e})^{n} \;=\; (\;\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n\,e})^{n\,e}\;)^{\frac{1}{e}} \;=\; e^{\frac{1}{e}}$$

2.(10分) 设 $[x]$ 是不超过 x 的最大整数. 求函数极限

$$\lim_{x\to+\infty} x\,\sin\frac{1}{[x]}$$

参考答案:

（1）(4分)

当 $x>1$ 时，有 $[x]\geq 1$, $0<\frac{1}{[x]}\leq 1<\frac{\pi}{2}$. 又 $0\;\leq\; x-[x]\;\leq\;1$ ， 所以

$$0\;\leq\;(x-[x])\,\sin\frac{1}{[x]}\;\leq\;\sin\frac{1}{[x]}\;\leq\;\frac{1}{[x]}\;\leq\;\frac{1}{x}$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$ ，用**夹逼定理** 推出

$$\lim_{x\to+\infty}(x-[x])\,\sin\frac{1}{[x]}\;=\;0$$

（2）(4分)

$$\lim_{x\to+\infty}[x]\,\sin\frac{1}{[x]}\;=\;\lim_{t\to+0}\frac{\sin t}{t}\;=\;1$$

（3）(2分) 由（1）和（2）一起推出

$$\lim_{x\to+\infty}x\,\sin\frac{1}{[x]}\;=\;\lim_{x\to+\infty}(x-[x])\sin\frac{1}{[x]}+\lim_{x\to+\infty}[x]\,\sin\frac{1}{[x]}\;=\;0+1\;=\;1$$

(本小题也可以有其他推导方式. ）

3.(10分) 设 $x>0$. 求函数

$$f(x)\;=\;\int_0^{\ln x}\sqrt{1+e^t}\;dt$$

的导函数 .

参考答案:

（1）(4分) $\int_0^y\sqrt{1+e^t}\;dt$ **作为** y **的函数** 对 y 的导函数是 $\sqrt{1+e^y}$.

（2）(3分)

$$(\ln x)'\;=\;\frac{1}{x}$$

（3）(3分) 复合函数的导函数的**链式法则** 推出

$$f'(x)\;=\;\sqrt{1+e^{\ln x}}\;(\ln x)'\;=\;\sqrt{1+x}\;\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{1+x}}{x}$$

4.(10分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx$$

参考答案:

(1) (6分) 用待定系数系数法得

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} \;=\; \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \;-\; \frac{\frac{1}{4}}{2x+3} \;+\; \frac{\frac{3}{4}}{2x-5}$$

(2) (4分)

$$\begin{aligned}\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,dx \;&=\; \int \frac{\frac{1}{2}}{2x-1}\,dx \;-\; \int \frac{\frac{1}{4}}{2x+3}\,dx \;+\; \int \frac{\frac{3}{4}}{2x-5}\,dx \\ &=\; \frac{1}{4}\ln\,|\,x-\frac{1}{2}\,| \;-\; \frac{1}{8}\ln\,|\,x+\frac{3}{2}\,| \;+\; \frac{3}{8}\ln\,|\,x-\frac{5}{2}\,| \;+\; C_1 \\ &=\; \frac{1}{8}\ln\,|\,\frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3}\,| \;+\; C\end{aligned}$$

其中 C 为任意常数.

5.(10分) 求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y \;=\; \frac{1}{2}\,x\,\sqrt{x^2-1} \;-\; \frac{1}{2}\,\ln\,(\,x+\sqrt{x^2-1}\,)$$

在 $x=1$ 到 $x=2$ 之间的弧长.

参考答案:

(1) (3分) 根据弧长公式, L 的弧长等于

$$\int_1^2 \sqrt{\,1\;+\;(y')^2\,}\;\,dx$$

(2) (4分)

$$\begin{aligned}y' \;&=\; \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \;+\; \frac{1}{2}x\,\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\,(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}) \\ &=\; \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} \;-\; \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \\ &=\; \frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \;+\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1} \;=\; \sqrt{x^2-1}\end{aligned}$$

(3) (3分) 上面 (2) 代入上面 (1) 得 L 的弧长等于

$$\int_1^2 \sqrt{\,1\;+\;(\;\sqrt{x^2-1}\;\;)^2\,}\;\;dx \;=\; \int_1^2 x\,dx \;=\; \frac{1}{2}\,x^2\,|_1^2 \;=\; \frac{1}{2}\,4-\frac{1}{2} \;=\; \frac{3}{2}$$

6.(10分) 设欧氏空间中 V 是由曲线弧 $y \;=\; \frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}$ $(\,1\le x\le 2\,)$ 及直线 $x=2,\;y=0$ 所围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体. 求 V 的体积.

参考答案:

(1) (4分) 用旋转体的 **体积公式** 得 V 的体积等于

$$\int_1^2 \pi\,(\,\frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}\,)^2\,dx$$

（2）(6分) 用 **二次分部积分** 得

$$\int_1^2 \pi\,(\frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}})^2\,dx = \frac{1}{2}\int_1^2 (\ln x)^2\,dx = \frac{1}{2}\,x(\ln x)^2\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\int_1^2 x\;2(\ln x)\;\frac{1}{x}\,dx$$

$$= (\ln 2)^2 - \int_1^2 \ln x\,dx = (\ln 2)^2 - (\,x\;\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x}\,dx\,)$$

$$= (\ln 2)^2 - 2\;\ln 2 + \;x\Big|_1^2 \;=\; (\ln 2)^2 - 2\;\ln 2 + 1$$

所以 V 的体积等于 $(\ln 2)^2 - 2\;\ln 2 + 1$

7.(10分) 给定正实数 $a_1 > 0,\ \ b_1 > 0$. 设 $a_1 > b_1$， 对于每个正整数 n， 有递归公式

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}\ , \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n\,b_n}\ .$$

证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在有限 .

参考答案:

（1）(2分) 已知 $a_1 > 0,\ \ b_1 > 0$. 再**归纳证明**：对于每个正整数 n， 有

$$a_n > 0\ ,\ b_n > 0$$

（2）(2分) 上面（1）推出 $\sqrt{a_n}$， $\sqrt{b_n}$ **有定义**. 因此

$$a_n + b_n - 2\sqrt{a_n\,b_n} \;=\; (\,\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n}\,)^2 \;\geq\; 0$$

推出

$$a_n + b_n - 2\sqrt{a_n\,b_n} \;\geq\; 0$$

（3）(2分) 用给定的递归公式和 **上面（2）** 推出 对于每个正整数 n， 有

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \;\geq\; \sqrt{a_n\,b_n} \;=\; b_{n+1}$$

又已知 $a_1 > b_1$，所以对于每个正整数 n，有

$$a_n \;\geq\; b_n$$

（4）(2分) 用 **上面（3）** 推出 对于每个正整数 n， 有

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \;\leq \frac{a_n + a_n}{2} \;= a_n$$

（5）(2分) 上面（1）和（4）推出$\{a_n\}$ 是有**下界** 的 **单调下降** 的实数序列. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在有限.

8.(20分) 本题中每个小题都要求写出证明和计算过程。

（1）(2分)． 证明：当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，有

$$-1 \;<\; \frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x} < 1$$

（2）(8分)． 当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，求出 下面定义的函数 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$.

$$f(x) \;=\; \arcsin\,(\,\frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x}\,)$$

（3）(10分)． 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} \;=\; \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}$$

参考答案:

（1）(2分）.

（1.1）（1分）当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，

$$1 > \sin x$$
$$2 - 1 < 2 - \sin x$$
$$1 < 2 - \sin x$$
$$1 < (2 - \sin x)^2$$
$$1 < 4 - 4\sin x + \sin^2 x$$
$$4\sin x < 3 + \sin^2 x$$
$$\frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x} < 1$$

（1.2）（1分）当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，上式中 x 换为 $-x$ 得

$$\frac{-4\sin x}{3 + \sin^2 x} < 1$$
$$-1 < \frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x}$$

（2）(8分）.

（2.1）（2分）设

$$g(x) \ = \ \frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x}$$

$$g'(x) \ = \ \frac{4\cos x(3 + \sin^2 x) - 4\sin x \ \ 2\sin x \ \cos x}{(3 + \sin^2 x)^2} = \frac{3 - \sin^2 x}{(3 + \sin^2 x)^2} \ \ 4\cos x$$

（2.2）（2分）当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，上面 (1) 推出 $1 - g(x)^2 > 0$. 因此

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \ g'(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{1 - g(x)^2}} \ \frac{3 - \sin^2 x}{(3 + \sin^2 x)^2} \ \ 4\cos x$$

（2.3）（2分）计算

$$(3 + \sin^2 x)^2 \ \ (1 - g(x)^2) \ = \ (3 + \sin^2 x)^2 \ \left(1 - (\frac{4\sin x}{3 + \sin^2 x})^2 \right)$$
$$= \ (3 + \sin^2 x)^2 - 16\sin^2 x \ = \ 9 + 6\sin^2 x + \sin^4 x - 16\sin^2 x$$
$$= \ 9 - 10\sin^2 x + \sin^4 x \ = \ 10(1 - \sin^2 x) - 1 + \sin^4 x$$
$$= \ 10\cos^2 x + (-1 + \sin^2 x)(1 + \sin^2 x) \ = \ 10\cos^2 x - \cos^2 x(1 + \sin^2 x)$$
$$= \ (10 - 1 - \sin^2 x)\cos^2 x \ = \ (9 - \sin^2 x)\cos^2 x$$

$$\sqrt{1 - g(x)^2} \ = \frac{\sqrt{9 - \sin^2 x}}{3 + \sin^2 x} \ |\cos x|$$

（2.4）（2分）当 $x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 时，有 $\cos x > 0$. 把（2.3）代入（2.2）得

$$f'(x) \ = \ \frac{3 + \sin^2 x}{\sqrt{9 - \sin^2 x}} \ \frac{1}{\cos x} \ \ \frac{3 - \sin^2 x}{(3 + \sin^2 x)^2} \ 4\cos x \ = \ \frac{12 - 4\sin^2 x}{(3 + \sin^2 x)\sqrt{9 - \sin^2 x}}$$

（3）(10分).

（3.1）(2分). 对 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 做**变量代换**

$$t = \arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} \right) = f(x)$$

$$f(0) = 0 \ , \quad f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$$

（3.2）(2分).

$$\sin t = \frac{4\sin x}{3+\sin^2 x} = g(x)$$

用上面（2.3）得

$$\cos^2 t = 1 - \sin^2 t = 1 - g(x)^2 = \frac{(9-\sin^2 x)\cos^2 x}{(3+\sin^2 x)^2}$$

计算

$$\begin{aligned} 4\cos^2 t + \sin^2 t &= 4\,(1-g(x)^2) + g(x)^2 \\ &= 4\,\frac{(9-\sin^2 x)\cos^2 x}{(3+\sin^2 x)^2} + (\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x})^2 \\ &= 4\,\frac{(9-\sin^2 x)(1-\sin^2 x) + 4\sin^2 x}{(3+\sin^2 x)^2} \\ &= 4\,\frac{9 - 10\sin^2 x + \sin^4 x + 4\sin^2 x}{(3+\sin^2 x)^2} \\ &= 4\,\frac{9 - 6\sin^2 x + \sin^4 x}{(3+\sin^2 x)^2} = 4\,\frac{(3-\sin^2 x)^2}{(3+\sin^2 x)^2} \end{aligned}$$

（3.3）(2分).

$$\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x} = \sqrt{\frac{9}{4}(1-\sin^2 x) + 2\sin^2 x} = \frac{1}{2}\sqrt{9-\sin^2 x}$$

（3.4）(2分). 代入上面（3.2）、（2）和（3.3）得

$$\begin{aligned} \frac{dt}{\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}} &= \frac{f'(x)dx}{\sqrt{4\,\frac{(3-\sin^2 x)^2}{(3+\sin^2 x)^2}}} = \frac{12 - 4\sin^2 x}{(3+\sin^2 x)\,\sqrt{9-\sin^2 x}}\sqrt{\frac{(3+\sin^2 x)^2}{4\,(3-\sin^2 x)^2}}\ dx \\ &= \frac{2\ dx}{\sqrt{9-\sin^2 x}} = \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}} \end{aligned}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}$$

（3.5）(2分). 定积分与积分变量的符号**无关** 推出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{\sqrt{4\cos^2 t + \sin^2 t}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}}$$

结合（3.4）和（3.5）得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}$$

9.(10分) 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,\,1]$ 上连续的实值函数满足 $f(0) = g(0)$， $\sin f(1) = \sin g(1)$， $\cos f(1) = \cos g(1)$，对于每个 $x \in [0,1]$ 有

$$(\cos f(x) + \cos g(x))^2 + (\sin f(x) + \sin g(x))^2 \neq 0.$$

证明 $f(1) = g(1)$.

参考答案:

（1）（2分） **定义** $[0,1]$ 上连续的实值函数

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

（2）（2分） 下面用 **反证法** 。 假设 $f(1) \neq g(1)$ 即 $h(1) \neq 0$.
条件

$$\sin f(1) = \sin g(1) \ , \ \cos f(1) = \cos g(1)$$

推出

$$\sin h(1) = \sin(f(1) - g(1)) = \sin f(1) \cos g(1) - \cos f(1) \sin g(1) = \sin g(1) \cos g(1) - \cos g(1) \sin g(1) = 0$$

$$\cos h(1) = \cos(f(1) - g(1)) = \cos f(1) \cos g(1) + \sin f(1) \sin g(1) = \cos g(1) \cos g(1) + \sin g(1) \sin g(1) = 1$$

因此存在 **整数** n 使得

$$h(1) \ = \ 2\, n\, \pi$$

反证的假设 $h(1) \neq 0$ 推出

$$n \neq 0$$

(3) （4分）**情形1**: $n > 0$. 则 n 是**正整数** 推出

$$n \geq 1$$

$h(x)$ 是 $[0,1]$ 上的连续的实值函数， 条件 $f(0) = g(0)$ 推出 $h(0) = 0$，

$$h(0) = 0 \ < \ \pi \ < \ 2\pi \ \leq \ 2n\pi = h(1)$$

由连续函数的 **价值定理** 得到： **存在** $a \in [0,1]$ 使得

$$h(a) = \pi$$

$$\begin{aligned} (\, \cos f(a), \ \sin f(a)\,) \ &= \ (\, \cos(h(a) + g(a)), \ \sin(h(a) + g(a))\,) \\ = \ (\, \cos h(a) \cos g(a) - \sin h(a) \sin g(a) \ \ &\sin h(a) \cos g(a) + \cos h(a) \sin g(a)\,) \\ = \ (\, \cos \pi \ \cos g(a) - \sin \pi \ \sin g(a), \ &\sin \pi \ \cos g(a) + \cos \pi \ \sin g(a)\,) \\ &= \ (\, - \ \cos g(a), \ - \ \sin g(a)\,) \end{aligned}$$

推出

$$\cos f(a) \ = \ - \ \cos g(a) \quad \text{并且} \quad \sin f(a) \ = \ - \ \sin g(a)$$

推出

$$(\, \cos f(a) \ + \ \cos g(a)\,)^2 + (\, \sin f(a) \ + \ \sin g(a)\,)^2 \ = \ 0$$

此等式与 **条件** “对于每个 $x \in [0,1]$ 有 $(\cos f(x) \ + \ \cos g(x))^2 + (\sin f(x) \ + \ \sin g(x))^2 \neq 0$ ” **相矛盾** 。

(4)（1分）**情形2**: $n < 0$. 则在上面(6.3) 中把 $f(x)$ 和 $g(x)$ **对换** ， 同样地得出矛盾。

(5)（1分）上面（3）和（4）一起推出

$$n = 0$$

$$f(1) - g(1) = h(1) = 2n\pi = 0$$

$$f(1) = g(1)$$