Stolz定理

作为序列极限中的L'Hôpital定理,Stolz定理没有出现在高等数学教材中实在是一个遗憾. 在解决$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$等类型的序列极限时, 恰当地运用Stolz定理可以大大简化计算和思维难度,为您带来更好的体验. 下面我们就来介绍Stolz定理.

Stolz Theorem

(1) $\dfrac{*}{\infty}$型:设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足

(a) $\{b_n\}$单调递增.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$,其中$L$可为有限数,$+\infty$或$-\infty$,但不能为$\infty$.

那么有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

(2) $\dfrac{0}{0}$型:设数列$\{a_n\},\{b_n\}$满足

(a) $\{b_n\}$单调递减.

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$,其中$L$可为有限数,$+\infty$或$-\infty$,但不能为$\infty$.

那么有$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = L$.

由于$\dfrac{*}{\infty}$对$\{a_n\}$没有要求,因而在实际使用中更常用该形式的Stolz定理.
下面我们来证明这两种形式的Stolz定理.

Form(1) Proof.

(a) 若L为有限实数.

由$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = L$有$\forall\varepsilon>0,\exists N_1\in\mathbb{N}^*,\text{s.t.}\forall n>N_1,\left|\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-L\right|<\varepsilon$,即

$$L-\varepsilon < \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} < L+\varepsilon$$

由于$\{b_n\}$递增,则有$b_{n+1}-b_n>0$,于是有

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_n) < a_{n+1}-a_n < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_n)$$

由$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$有$\forall\varepsilon>0,\exists N_2\in\mathbb{N}^*,\text{s.t.}\forall n>N_2, b_n>\varepsilon$
对于给定的ε和对应的N_1,N_2,取$N=\max\{N_1,N_2\}$,将上述不等式从第$N+1$项累加至第n项,有

$$(L-\varepsilon)\sum_{i=N+1}^{n}(b_{n+1}-b_n) < \sum_{i=N+1}^{n}(a_{n+1}-a_n) < (L+\varepsilon)\sum_{i=N+1}^{n}(b_{n+1}-b_n)$$

即

$$(L-\varepsilon)(b_{n+1}-b_{N+1}) < a_{n+1}-a_{N+1} < (L+\varepsilon)(b_{n+1}-b_{N+1})$$

整理可得

$$L-\varepsilon < \frac{\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_{N+1}}{b_{n+1}}}{1-\dfrac{b_{N+1}}{b_{n+1}}} < L+\varepsilon$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_{N+1}}{b_{n+1}}}{1-\dfrac{b_{N+1}}{b_{n+1}}}=L$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{b_n}=0.$

而a_{N+1},b_{N+1}均为固定的有限数,从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{N+1}}{b_{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{N+1}}{b_{n+1}}=0.$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-\dfrac{a_{N+1}}{b_{n+1}}}{1-\dfrac{b_{N+1}}{b_{n+1}}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}-0}{1-0}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=L$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=L$,原命题得证.

(b) 若L为$+\infty$或$-\infty$,证明过程类似.

形式**(2)**的证明留待读者自己思考.下面我们来运用Stolz定理解决一些问题.

Cauchy's Proposition

若数列$\{a_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}=A.$

在之前的讲义中,我们已经用$\varepsilon-N$语言严格证明了Cauchy命题.然而用Stolz定理可以很快地解决这一问题.

Proof.(Stolz ver.)

依Stolz定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}a_i-\sum_{i=1}^n a_i}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{1}=A$$

证毕.

在**相乘序列的极限**一讲中,我们提到了如下命题:

设序列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=B,A,B\in\mathbb{R},$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}}{n}=AB$$

我们当时给出的证法的核心在于证明：

设序列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0,$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^n a_ib_{n+1-i}}{n}=0$$

下面我们用另一种方式来证明这个命题.

Proof.(Stolz ver.)

依Cauchy-Schwarz不等式有

$$0 \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}}{n}\right)^2 \leqslant \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}{n}\right)$$

依Stolz定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(a_{n+1}^2 - a_n^2\right) = \left(\lim_{n\to\infty} a_{n+1}\right)^2 - \left(\lim_{n\to\infty} a_n\right)^2 = 0 - 0 = 0$$

同理有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} = 0$$

夹逼可得$\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}}{n} = 0$,原命题得证.

上述命题告诉我们,有关**求平均**的序列极限问题都可以尝试着使用Stolz定理简化计算.
下面我们再来看一些有关的例题.

例1(24.10.09 SJTU数分小测).

正项数列$\{x_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = a, a \in \mathbb{R}$.

试证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2} = 0$.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} &= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n-1}\right) \\ &= a - 1 \cdot a = 0\end{aligned}$$

根据收敛序列的有界性,$\exists M \in \mathbb{R}$, s.t.$\dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} < M$

则

$$0 < \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2} = M \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{n}}{Mn} < M \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

依Stolz定理

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{i}}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{x_n^2}{n}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{n} = 0$$

依夹逼准则$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n^2} = 0$,证毕.

例2.

求序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}$$

Solution (Method I).

依积分的Liemann和有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i}{n}\right)^k\right)=\int_0^1 x^k\mathrm{d}x=\frac{1}{k+1}$$

Solution (Method II).

依Stolz定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n} i^k}{n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^k}{(k+1)(n+1)^k+\cdots}=\frac{1}{k+1}$$