1 几何变换

1.1 齐次坐标系

我们在上一节中简单介绍了几何变换对应的数学操作. 例如, 平移可以视作向量的加法, 旋转可以视作旋转矩阵与向量的乘法. 但是, 这些操作并不能统一表示, 因而带来了额外的麻烦. 例如, 平移无法表示为矩阵与向量的乘法. 为了解决这个问题, 我们可以引入齐次坐标系的概念.

齐次坐标系的基本思想是, 通过引入额外的维度, 将所有的几何变换都表示为矩阵与向量的乘法.

定义 1.1 齐次坐标系 在 n 维空间 R^n 中, 点 $\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的齐次坐标表示为 $(x_1, \cdots, x_n, 1)$, 即在原有坐标的基础上增加一个分量恒为 1 的维度.
相应地, 齐次坐标系中的向量 $\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$ 表示为 $(x_1, \cdots, x_n, 0)$, 即在原有坐标的基础上增加一个分量恒为 0 的维度.

如此, 我们可以将所有的几何变换都表示为 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵与齐次坐标向量的乘法. 例如, 在二维空间中的一些几何操作对应的矩阵如下:

$$
\begin{array}{cc}
\text{平移} & \text{旋转} \\
\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}
\end{array}
$$