1 几何变换

1.1 齐次坐标系及其中的几何变换

我们在上一节中简单介绍了几何变换对应的数学操作. 例如, 平移可以视作向量的加法, 旋转可以视作旋转矩阵与向量的乘法. 但是, 这些操作并不能统一表示, 因而带来了额外的麻烦. 例如, 平移无法表示为矩阵与向量的乘法. 为了解决这个问题, 我们可以引入齐次坐标系的概念.

1.1.1 齐次坐标系的定义

齐次坐标系的基本思想是, 通过引入额外的维度, 将所有的几何变换都表示为矩阵与向量的乘法.

定义 1.1 齐次坐标系 在 n 维空间 R^n 中, 点 $\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$ 的齐次坐标表示为 $(x_1, \cdots, x_n, 1)$, 即在原有坐标的基础上增加一个分量恒为 1 的维度.
相应地, 齐次坐标系中的向量 $\boldsymbol{v} = (x_1, \cdots, x_n)$ 表示为 $(x_1, \cdots, x_n, 0)$, 即在原有坐标的基础上增加一个分量恒为 0 的维度.

如此, 我们可以将所有的几何变换都表示为 $(n+1) \times (n+1)$ 的矩阵与齐次坐标向量的乘法. 例如, 在二维空间中的一些几何操作对应的矩阵如下:

$$\begin{array}{cc} \text{平移} & \text{旋转} \\ \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.1.2 旋转矩阵的推导

在上一节中我们不加证明地给出了旋转矩阵的定义. 在此我们详细地推导旋转矩阵的形式.

证明. 考虑三维空间中的点 $\boldsymbol{v}$, 旋转轴 $\boldsymbol{a}$ 和旋转角度 θ. 从 $\boldsymbol{v}$ 旋转至 $\boldsymbol{v}'$ 的操作可以分解为平行于 $\boldsymbol{a}$ 的分量 $\boldsymbol{r}$ 和垂直于 $\boldsymbol{a}$ 的分量 $\boldsymbol{u}$.
根据投影向量的定义,$\boldsymbol{r} = (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$. 旋转过程中,$\boldsymbol{r}$ 保持不变, 而 $\boldsymbol{u}$ 则绕 $\boldsymbol{a}$ 旋转 θ 角度, 这可以由下面的方式得到

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u} \cos\theta + \boldsymbol{u}^{\perp} \sin\theta$$

注意到 $\boldsymbol{u}^{\perp} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}$, 于是前面的推导可以整理成

$$\boldsymbol{v}' = [(\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}) \cos\theta] + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{v}) \sin\theta + (\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{a})\boldsymbol{a}$$

□