1 高级渲染

我们需要用更精确的模型描述和模拟光在环境中的传输过程.

1.1 辐射度量学

为了描述光的传输过程, 我们需要引入一些**辐射度量学 (Radiometry)** 的概念. 辐射度量学提供了一系列思想和数学工具, 来描述光的传播和反射. 它构成了推导本章余下部分将使用的渲染算法的基础.

1.1.1 基本假设

首先, 我们在渲染时总是假设几何光学成立, 因此有如下基本假设:

定理 1.1 光的基本假设

1. **线性**: 光的传输是线性的, 即多束光的叠加等于各束光的单独传输之和.
2. **能量守恒**: 光经过散射后, 散射光的能量不大于入射光的能量.
3. **无偏振**: 忽略光的偏振效应.
4. **稳态**: 环境中光的分布不随时间变化.

1.1.2 基本物理量

在辐射度量学中, 我们主要关心以下物理量: 通量, 辐照度, 强度和辐射率. 需要注意的是这些度量都依赖于波长, 但在本章的讨论中我们通常不表明这一依赖关系.

定义 1.2 通量 **通量 (Flux)**Φ 表示单位时间内通过某一给定面的光的能量, 即

$$\Phi = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

光源的总发射常用通量表示, 因为从上述定义可以看出通量与我们选取的截面无关.

定义 1.3 辐照度与辐射出射度 **辐照度 (Irradiance)**E 表示单位面积上接收到的通量, **辐射出射度 (Radiant Exitance)**M 表示单位面积上发出的通量. 对于空间中给定表面上的一点 $\boldsymbol{p}$, 其辐照度可以通过微分定义如下:

$$E(\boldsymbol{p}) = \frac{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{p})}{\mathrm{d}A}$$

需要注意的是, 辐照度 (包括辐射出射度) 都是基于表面定义的, 因此一般我们都只在物体的表面考虑辐照度. 如果是空间中的某一点, 那么一般需要额外确定所取的面积元的方向 (即确定一个虚平面).

定义 1.4 辐射率 辐射率 (Radiance)L 相比辐照度考虑了光在不同方向上的分布. 给定平面上某一点 $\boldsymbol{p}$ 在方向 $\boldsymbol{\omega}$ 上的辐射率可以定义如下:

$$L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega})=\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega})}{\mathrm{d}A^\perp\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}}$$

其中 $\mathrm{d}A^\perp=\mathrm{d}A\cos\theta$ 表示垂直于 $\boldsymbol{\omega}$ 的面积元, 这里 θ 为 $\boldsymbol{\omega}$ 与平面在 $\boldsymbol{p}$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角.
也即, 给定点 $\boldsymbol{p}$ 处的指定方向 $\boldsymbol{\omega}$ 上的辐射率 $L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega})$ 表示 $\boldsymbol{\omega}$ 上单位立体角和垂直 $\boldsymbol{\omega}$ 上单位面积上的通量.

在所有这些辐射度量中, 辐射率将在本章中最频繁地使用. 某种意义上它是所有辐射度量中最基本的, 如果给定了辐射率, 那么所有其他值都可以通过对辐射率在区域和方向上的积分来计算.

辐射率的另一个良好属性是在通过空间中的射线上保持不变. 这意味着我们只需考虑 $L(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega})$ 在物体表面上的取值, 而不必考虑光在空间中传播的过程.

在上述所有物理量中, 比较重要的是辐射率 L 与辐照度 E 的关系. 对于给定面上的一点 $\boldsymbol{p}$ 以及此处的法向量 $\boldsymbol{n}$, 入射到该点的辐照度 $E(\boldsymbol{p})$ 可以通过该点在各个方向上的辐射率积分得到 (这里的下标 i 表示入射光, 以后的下标 o 表示出射光):

$$E(\boldsymbol{p})=\int_\Omega\mathrm{d}E_{\boldsymbol{\omega}}(\boldsymbol{p})=\int_\Omega L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

其中 Ω 表示以 $\boldsymbol{p}$ 为顶点的半空间[1], 通常选择法向量 $\boldsymbol{n}$ 对应的半球, 记作 $H^2(\boldsymbol{n})$. θ_i 表示入射方向 $\boldsymbol{\omega}_i$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 之间的夹角.

1.2 反射与折射模型

当光线入射到表面时, 表面会散射光线, 将部分光线反射回环境中, 部分光线则射入物体中 (如果物体是半透明的). 建立这种模型需要描述两种主要效应: 反射/折射光的光谱分布和方向分布.

1.2.1 双向反射分布函数 BRDF

为了描述表面对光的反射特性, 我们引入**双向反射分布函数 (Bidirectional Reflectance Distribution Function, BRDF)**. BRDF 描述了入射光线和出射光线之间的关系. 具体而言, 对于物体表面上的一点 $\boldsymbol{p}$, 我们希望知道沿 $\boldsymbol{\omega}_i$ 方向入射光的辐照度 $E_{\boldsymbol{\omega}_i}(\boldsymbol{p})$ 在沿 $\boldsymbol{\omega}_o$ 方向上造成的出射光的辐射率 $L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)$.

根据几何光学的线性假设, 在 $\boldsymbol{\omega}_o$ 方向上出射光的辐照率, 应当等于各入射光造成 $\boldsymbol{\omega}_o$ 方向上反射光的总和; 此外, 增强入射光的辐照度 $E_{\boldsymbol{\omega}_i}(\boldsymbol{p})$, 也应当线性地增强出射光的辐射率. 我们把上述关系表示为积分形式:

$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=\int_\Omega k\mathrm{d}E_{\boldsymbol{\omega}_i}(\boldsymbol{p})=\int_\Omega kL_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

于是

$$\mathrm{d}L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=kL_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

根据这一关系, 我们可以定义 BRDF 如下:

[1] 如果 $\boldsymbol{\omega}$ 与法向量 $\boldsymbol{n}$ 的夹角大于 $\pi/2$, 这意味着这部分光线会被遮挡, 因此不用考虑.

定义 1.5 双向反射分布函数 给定物体表面上某一点 $\boldsymbol{p}$, 入射方向 $\boldsymbol{\omega}_i$ 和出射方向 $\boldsymbol{\omega}_o$,BRDF 定义为:

$$f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)=\frac{\mathrm{d}L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)}{L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}$$

其中 θ_i 是入射方向与表面法线之间的夹角.

基于物理的 BRDF 有两个重要性质:

定理 1.6 BRDF 的性质

(1) Helmholtz 可逆性:BRDF 在入射和出射方向上是对称的, 即

$$f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)=f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o,\boldsymbol{\omega}_i)$$

(2) 能量守恒: 对于任意入射方向 $\boldsymbol{\omega}_i$, 出射光的总能量不大于入射光的能量, 即

$$\forall\boldsymbol{\omega}_i,\quad \int_\Omega f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)\cos\theta_o\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_o\leqslant 1$$

1.2.2 双向透射分布函数 BTDF

描述透射光分布的**表面双向透射分布函数 (Bidirectional Transmittance Distribution Function, BTDF)** 与 BRDF 类似, 其定义为:

$$f_t(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)=\frac{\mathrm{d}L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)}{L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i}$$

其中各符号的定义相同, 但入射光和出射光的方向分居表面两侧.

需要注意的是, BTDF 并不满足 Helmholtz 可逆性. 可以证明, 如果入射光和出射光的介质的折射率分别为 η_i 和 η_o, 那么 BTDF 函数满足如下关系:

$$\eta_i^2 f_t\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o\right)=\eta_o^2 f_t\left(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o,\boldsymbol{\omega}_i\right)$$

1.2.3 双向散射分布函数 BSDF

为了方便起见, 我们把 BRDF 和 BTDF 合并为一个统一的函数, 称为**双向散射分布函数 (Bidirectional Scattering Distribution Function, BSDF)**. BSDF 定义为:

$$f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)=\begin{cases} f_r(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o), & \text{如果}\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o\text{在表面同侧}\\ f_t(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o), & \text{如果}\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o\text{在表面异侧}\end{cases}$$

这样, 在 $\boldsymbol{p}$ 沿 $\boldsymbol{\omega}_o$ 出射光的辐射率就可以表示为

$$L_o(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_o)=\int_{S^2} f(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_i(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega}_i)\left|\cos\theta_i\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

这里的积分区域 S^2 为 $\boldsymbol{p}$ 为球心的球面. 这是综合考虑同面的反射光和异面的透射光后的结果.

1.2.4 双向散射表面反射率分布函数 BSSRDF

在更复杂的情形下, 光线入射到表面后, 可能会在物体内部传播一段距离后, 再从物体的另一个位置出射. 为了描述这种现象, 我们引入**双向散射表面反射率分布函数 (Bidirectional Surface Scattering Reflectance Distribution Function, BSSRDF)**. BSSRDF 定义为:

$$S(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{p}_o, \boldsymbol{\omega}_o) = \frac{\mathrm{d}L_o(\boldsymbol{p}_o, \boldsymbol{\omega}_o)}{\mathrm{d}\Phi(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\omega}_i)} = \frac{\mathrm{d}L_o(\boldsymbol{p}_o, \boldsymbol{\omega}_o)}{L_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i \mathrm{d}A_i}$$

于是, 计算出射光的方程由二重积分变成了四重积分:

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = \int_A \int_{H^2(\boldsymbol{n})} S(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{p}_o, \boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p}_i, \boldsymbol{\omega}_i)\cos\theta_i \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i \mathrm{d}A_i$$

其中 A 是 $\boldsymbol{p}_o$ 的邻域 (一般而言 S 随着 $\boldsymbol{p}_i$ 与 $\boldsymbol{p}_o$ 的远离而减小, 因此只要考虑其附近的一个区域即可).

由于积分维度升高, BSSRDF 的计算量也大大增加. 因此在实际应用中, 我们通常只在需要考虑次表面散射的情况下使用 BSSRDF, 否则都使用 BSDF.

1.3 渲染方程

1.3.1 渲染方程的基本形式

我们已经通过辐射度量学对反射/折射光的物理描述. 现在再考虑物体本身的发光项 $L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o)$, 我们就得到了下述方程:

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) + \int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) |\cos\theta_i| \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

定义 1.7 渲染方程 上述方程称为**渲染方程 (Rendering Equation)**.

在空间中, 每一束入射光 $L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i)$ 都来源于另一物体上另一点 $\boldsymbol{p}'$ 沿方向 $-\boldsymbol{\omega}_i$ 的出射光 $L_o(\boldsymbol{p}', -\boldsymbol{\omega}_i)$. 因此, 渲染方程实际上是递归定义的.

渲染的本质问题, 实际上就是求解上述积分方程. 直接求解是非常困难的, 因此我们通常采取各种数值方法进行计算.

1.3.2 渲染方程的面积分形式

我们现在把渲染方程从一点的形式继续扩展至整个场景. 假定出射光由 $\boldsymbol{p}'$ 指向 $\boldsymbol{p}$, 则对于 $\boldsymbol{p}'$ 的渲染方程为

$$L_o(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_o) = L_e(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_o) + \int_{S^2} f(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_i) |\cos\theta_i| \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

前面我们已经提到, 每一束入射光 $L_i(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_i)$ 都来源于另一点 $\boldsymbol{p}''$ 沿方向 $-\boldsymbol{\omega}_i$ 的出射光 $L_o(\boldsymbol{p}'', -\boldsymbol{\omega}_i)$. 定义**路径追踪函数** $t(\boldsymbol{q}, \boldsymbol{\omega})$ 表示从点 $\boldsymbol{q}$ 沿 $\boldsymbol{\omega}$ 方向上与空间中各物体的第一个交点 $\boldsymbol{q}'$, 那么 $\boldsymbol{p}'$ 处的入射光的辐射率可以表示为

$$L_i(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_i) = L_o(t(\boldsymbol{p}', \boldsymbol{\omega}_i), -\boldsymbol{\omega}_i)$$

此外, 如果场景不是封闭的, 并且光线 $(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})$ 与任何物体都不相交, 就定义 $t(\boldsymbol{q},\boldsymbol{\omega})=\boldsymbol{\Lambda}$, 并且 $L_o(\boldsymbol{\Lambda},\boldsymbol{\omega})=0$. 由此, 我们可以把渲染方程改写为下述形式:

$$L_o(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_o)=L_e(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_o)+\int_{S^2} f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)L_o(t(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_i),-\boldsymbol{\omega}_i)\left|\cos\theta_i\right|\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

现在, 我们就无需考虑入射辐射率 L_i, 而仅需要考虑出射辐射率 L_o. 当然, 它出现在等式的两边, 并且积分号中也存在, 因此我们的任务仍然不简单.

上述方程比较复杂的原因之一是路径追踪函数 $t(\boldsymbol{p},\boldsymbol{\omega})$ 是隐式的. 我们尝试把上述积分改写成面积分. 记

$$L(\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p})=L_o(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_o)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_o$ 即由 $\boldsymbol{p}'$ 指向 $\boldsymbol{p}$ 的向量. 我们把 $\boldsymbol{p}'$ 处的 BSDF 函数写成类似的形式:

$$f(\boldsymbol{p}''\to\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p})=f(\boldsymbol{p}',\boldsymbol{\omega}_i,\boldsymbol{\omega}_o)$$

其中 $\boldsymbol{\omega}_i$ 由 $\boldsymbol{p}'$ 指向 $\boldsymbol{p}''$.

现在, 最重要的步骤是把对角度的积分转换为对面积的积分. 根据立体角的定义可知 p' 处入射立体角的微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$ 与 $\boldsymbol{p}''$ 处的面积微元 $\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}'')$ 的关系为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i=\frac{\left|\cos\theta'\right|}{\left|\left|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}'\right|\right|^2}\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}'')$$

其中 θ' 为 $\boldsymbol{\omega}_i$ 与 $\boldsymbol{p}''$ 处法向量 $\boldsymbol{n}''$ 的夹角. 定义可见函数 $V(\boldsymbol{q}\leftrightarrow\boldsymbol{q}')$, $\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}'$ 之间没有阻挡时取 1, 否则取 0. 把上述关系连同渲染方程中原有的角度项记为

$$G(\boldsymbol{p}''\leftrightarrow\boldsymbol{p}')=V(\boldsymbol{p}''\leftrightarrow\boldsymbol{p}')\frac{\left|\cos\theta\cos\theta'\right|}{\left|\left|\boldsymbol{p}''-\boldsymbol{p}'\right|\right|^2}$$

这样, 渲染方程最终可以写做如下形式:

$$L(\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p})=L_e(\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p})+\int_A f(\boldsymbol{p}''\to\boldsymbol{p}'\to\boldsymbol{p})L(\boldsymbol{p}''\to\boldsymbol{p}')G(\boldsymbol{p}''\leftrightarrow\boldsymbol{p}')\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}'')$$

其中 A 是场景中的全部表面.

1.3.3 渲染方程的路径积分形式

我们把光传输方程展开如下:

$$\begin{aligned}L(\boldsymbol{p}_1\to\boldsymbol{p}_0)=&L_e(\boldsymbol{p}_1\to\boldsymbol{p}_0)\\&+\int_A L_e(\boldsymbol{p}_2\to\boldsymbol{p}_1)f(\boldsymbol{p}_2\to\boldsymbol{p}_1\to\boldsymbol{p}_0)G(\boldsymbol{p}_2\leftrightarrow\boldsymbol{p}_1)\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}_2)\\&+\int_A\int_A L_e(\boldsymbol{p}_3\to\boldsymbol{p}_2)f(\boldsymbol{p}_3\to\boldsymbol{p}_2\to\boldsymbol{p}_1)G(\boldsymbol{p}_3\leftrightarrow\boldsymbol{p}_2)\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}_3)\mathrm{d}A(\boldsymbol{p}_2)\\&+\cdots\end{aligned}$$

等式右边的每一项都表示一条长度递增的路径. 更简洁地, 定义

$$P(\bar{\boldsymbol{p}}_n) = \underbrace{\int_A \cdots \int_A}_{n-1\text{重积分}} L_e(\boldsymbol{p}_n \to \boldsymbol{p}_{n-1}) \left(\prod_{i=1}^{n-1} f(\boldsymbol{p}_{i+1} \to \boldsymbol{p}_i \to \boldsymbol{p}_{i-1}) G(\boldsymbol{p}_{i+1} \leftrightarrow \boldsymbol{p}_i) \right) \mathrm{d}A(\boldsymbol{p}_2) \cdots \mathrm{d}A(\boldsymbol{p}_n)$$

表示具有 $n+1$ 个点的路径 $\boldsymbol{p}_n \to \boldsymbol{p}_{n-1} \to \cdots \to \boldsymbol{p}_1 \to \boldsymbol{p}_0$ 所贡献的辐射率. 于是上述无穷求和可以写做

$$L(\boldsymbol{p}_1 \to \boldsymbol{p}_0) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\bar{\boldsymbol{p}}_n)$$

现在, 对于给定的 n, 只需要在空间中随机地采样 n 个点, 就可以估计出 $P(\bar{\boldsymbol{p}}_n)$ 的值.

1.4 蒙特卡洛积分

我们回到前面的渲染方程的角度积分形式.

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) + \int_{S^2} f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i, \boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_i) \left|\cos\theta_i\right| \mathrm{d}\boldsymbol{\omega}_i$$

直接求解上述积分显然是很麻烦的. 我们更希望用采样的方式解决积分问题. 我们先从简单的情形考虑采样的办法. 例如, 对于函数 $f(x)$ 和积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$. 我们在 $[a,b]$ 区间采样了 N 个点 $x_1, \cdots, x_N$, 采样的概率密度函数为 $p(x)$. 令

$$F_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{f(x_i)}{p(x_i)}$$

于是有

$$E(F_N) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \int_a^b \left(\frac{f(x_i)}{p(x_i)} \right) p(x_i) \mathrm{d}x_i = \int_a^b f(x) \mathrm{d}x$$

于是我们可以把 F_N 作为上述积分的估计值. 同样地, 在 S^2 中随机地选取 N 个立体角 $\omega_1, \cdots, \omega_N$, 则有

$$L_o(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) = L_e(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_o) + \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_j, \boldsymbol{\omega}_o) L_i(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{\omega}_j) \left|\cos\theta_j\right|}{p(\boldsymbol{\omega}_j)}$$

于是渲染的过程就可以写做递归的形式:

```
def shade(p, wo)
    Randomly choose N directions wi
    Lo = 0.0
    for each wi
        Trace a ray r(p, wi)
        if r hit a light
            Lo += (1 / N) * L_i * f_r * cos / p(wi)
        else if r hit an obj at q
            Lo += (1 / N) * shade(q, -wi) * f_r * cos / p(wi)
    return Lo
```