0A 导数与微分

发展微积分的最初灵感之一来自试图去理解运动物体的速度,距离和时间的关系.人们经过数百年的探索建立了微积分这一学科,而这也是我们学习物理化学所必须掌握的数学基础知识.

0A.1 导数

导数的简单定义

出于简单考虑,我们不准备介绍极限的定义和严格定义导数的方法[1].或者更确切地说,这一章节的内容都是为了让你对微积分有一个简单的,偏向直观的了解,而非与那些性质古怪的函数打交道.

> **Hint.**
> 本书所考虑的所有函数几乎都是光滑的.这在图像上表现为一条“看起来”光滑的曲线,没有间断的地方,没有粗糙的折点.一个函数光滑意味着它具有良好的性质,我们可以不加考虑地对它进行求导,无需担心可能出现的差错或意外.

正如前言中所说,人们是从物体的运动状态开始研究微积分的.在初中时,你应当学过简单的运动学知识:在一段时间t内,物体运动的距离[2]x与t之比就是它在这段时间内的平均速度v,即

$$v = \frac{x}{t}$$

我们让这段时间从某一时间点t_0开始,并结束于$t_0 + \Delta t$,在这段时间内物体运动的距离为Δx.于是这段时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

现在让Δt越来越小.在此过程中,物体的平均速度$\bar{v}$应当**趋近**于某一定值,这就是某一时间t_0时该物体的瞬时速度v_0,可以记为

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

这就是导数的定义.上面的lim代表limit,意为“极限”.由于本书并不打算涉及极限的定义,因此上述式子只需意会即可:某一时间t_0的瞬时速度v_0等于当Δt趋近于0时$(t_0, t_0 + \Delta t)$时间段内的运动距离Δx与Δt之比值.

我们知道,速度即为运动距离对时间的变化率.上面的叙述就可以引出导数的(浅显而形象的)定义.

[1] 尽管这一概念是高等数学的基础.

[2] 准确而言应当是位移.此处我们假定物体做直线运动,因而位移就与距离的数值相同.

Definition 0A.1.1 导数

函数$y=f(x)$在$x=x_0$处的导数定义为

$$f'\left(x_0\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x+\Delta x\right)-f(x)}{\Delta x}$$

在各点处的$f'\left(x_0\right)$亦可以构成一个新的函数,这一函数$f'(x)$记为$f(x)$的导函数.今后,我们说某一函数的导数,一般就指其导函数.

至此,基础的介绍就已经完结了[3].如果你想对高等数学的内容有更加深入的了解,笔者建议你阅读普林斯顿微积分读本以获得对微积分的初步认识,然后再阅读各种高等数学书籍.

常见函数的导数

接下来,我们将从定义出发推导一些函数的导函数[4],首先是简单的幂函数.

Derivation.

我们先从最简单的$f(x)=x$入手.我们有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

因此$f(x)=x$的导函数处处为1.

现在考虑$f(x)=x^2$.情况要稍微复杂一些.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\end{aligned}$$

而$f(x)=\dfrac{1}{x}$也是相似的.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x^2+x\Delta x}\\&=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

[3]上述内容似有听君一席话如听一席话的感受,这实在是由于笔者不才而不能很好地介绍导数所致.

[4]这会不可避免地引入极限的四则运算,你只需意会即可.总之,尽管Δx在很多结果里都看似是0,但它总是不为0.我们需要思考的是当它接近0时整个式子所接近的值,这和直接把$\Delta x=0$代入是有区别的,毕竟分母不可能为0.

现在再来考虑$f(x)=\sqrt{x}$.我们有

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

我们可以归纳出以下结论:幂函数$f(x)=x^a$的导函数为$f'(x)=ax^{a-1}$.这一结论的严格证明过程请查阅资料.

Theorem 0A.1.2 幂函数的导数

幂函数$f(x)=x^a(a\in\mathbb{R})$的导函数为$f'(x)=ax^{a-1}$.

接下来是常见的三角函数.在推到之前,我们需要知道一个重要极限.

Theorem 0A.1.3 重要极限I

我们有重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

你可以自行查阅这一极限的证明方法.

Derivation.

先考虑$f(x)=\sin x$.我们有

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x\cos\Delta x+\sin\Delta x\cos x-\sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos\Delta x)}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\sin\Delta x}{\Delta x} \\
&= 0+\cos x=\cos x
\end{aligned}$$

其中

导(函)数的运算法则

导函数的运算法则是十分重要且基础的工具.

Theorem 0A.1.2

导函数的运算法则主要有以下几条.

i. 导数的加减法

如果$h(x) = f(x) \pm g(x)$,那么$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

ii. 导数的乘法

如果$h(x) = f(x)g(x)$,那么$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

iii. 导数的除法

如果$h(x) = f(x)$

iv. 如果$h(x) = f(g(x))$,那么$h'(x)$