0A 极限,导数与微分

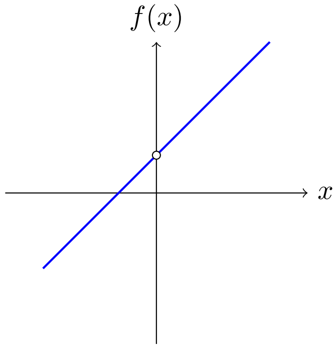
发展微积分的最初灵感之一来自试图去理解运动物体的速度,距离和时间的关系.人们经过数百年的探索建立了微积分这一学科,而这也是我们学习物理化学所必须掌握的数学基础知识.

0A.1 极限[1]

极限的定义

出于简单考虑,我们并不要求你了解极限的严格定义(即著名的$\varepsilon-\delta$语言),而是通过一些更形象的方式理解极限的意义.尤其是考虑到我们遇见的函数大多具有良好的性质,因此直观的理解并不会出太多差错.

你也许遇到过这样的一些函数,它们在某些地方没有定义,但其值却会随着自变量向此处靠近而越来越接近某一值.例如下面的这个函数,$f(x)=x+1(x\in\mathbb{R}\backslash\{0\})$.



尽管$f(x)$在$x=0$处没有定义,但你可以从图像上发现当x逐渐接近0时,$f(x)$也逐渐接近1.因此,尽管$f(x)$在$x=0$处没有定义,我们也可以获知x逐渐接近于0时$f(x)$的变化情况.因此,我们可以尝试用自然语言描述极限的定义.

Definition 0A.1.1 函数极限

当自变量x**无限接近**某一点a时,如果函数$f(x)$能**无限接近**于某一定值l,则称$f(x)$在$x=a$处的极限为l,记作

$$\lim_{x\to a}f(x)=l$$

这个定义的核心是描述函数在某个点附近的**趋势**,而不是该点的具体值.

定义中的无限接近是由$\varepsilon-\delta$语言保证的,但你并不需要了解这一点,只需对极限有一个直观认识即可.

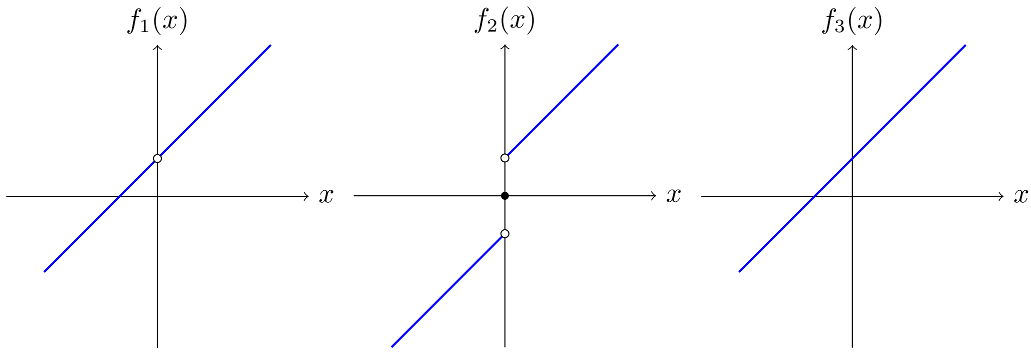
[1]本节主要介绍的是函数极限.

Hint.

值得注意的是,$f(x)$在$x=0$附近对1的接近是任意的:对于任意$\varepsilon>0$,总存在$x=0$附近的一个区间$(-\delta,\delta)\backslash\{0\}$使得这一区间内的所有$x$都满足$|f(x)-1|<\varepsilon$.这就是极限的$\varepsilon-\delta$语言.

连续函数

你也许听说过**连续**这一概念.想象用笔在纸上画一条曲线.如果你在绘制的过程中笔尖始终接触纸面,线条不间断,那么从直觉来说你应该画出了一条连续的曲线.反之,如果你在绘制的过程中笔尖离开了纸面,从而出现了跳跃或间断点,那么这条曲线就应当是不连续的.我们可以观察下面的几个函数.



$f_1(x)$在$x=0$处没有定义,即出现了一个间断点,应当是不连续的.$f_2(x)$虽然在$x=0$处有定义,但其在$x=0$处的左侧极限和右侧极限不相等,也与$f_2(0)$不相等,函数出现了跳跃,也是不连续的.只有$f_3(x)$满足在$x=0$处有定义,且左侧极限和右侧极限均与定义的函数值相等,这在图像上表现为一段连续不断的曲线.这就是连续函数的定义.

Definition 0A.1.2 连续与连续函数

如果函数$f(x)$在$x=a$处有定义,并且在$x=a$处的两侧的极限均等于$f(a)$,即

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

那么就称$f(x)$在$x=a$处**连续**.

如果$f(x)$在其定义域上的每一点都连续,那么就称$f(x)$为其定义域上的**连续函数**.

常见的函数,例如多项式函数,三角函数,指对数函数等初等函数均在其定义域上连续.这一性质同样对初等函数的复合函数也成立.

夹逼准则与极限的运算[2]

我们先来介绍夹逼准则.

[2]本节仅作介绍,不必要求掌握.了解本节的内容有助于理解导数的计算过程.

Theorem 0A.1.3 夹逼准则

对于函数$f_1(x), f_2(x), f_3(x)$和给定的a,如果在包含a的区间上总有$f_1(x) \leqslant f_2(x) \leqslant f_3(x)$,并且

$$\lim_{x \to a} f_1(x) = \lim_{x \to a} f_3(x) = l$$

那么一定有

$$\lim_{x \to a} f_2(x) = l$$

直观地说,因为$f_1(x)$和$f_3(x)$都趋近于l,因此被夹在它们中间的$f_2(x)$也只能被迫趋近于l.我们以一个简单的例子对其进行直观理解.

Problem P.0A.1

求极限$\lim\limits_{x \to 0} x \sin \dfrac{1}{x}$.

Solution.

目标函数$f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$在$x = 0$处没有定义,因此不能使用连续函数的性质解决问题.然而,我们可以注意到

$$-1 \leqslant \sin \frac{1}{x} \leqslant 1$$

对所有$x \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$成立,因此有

$$-x < x \sin \frac{1}{x} < x$$

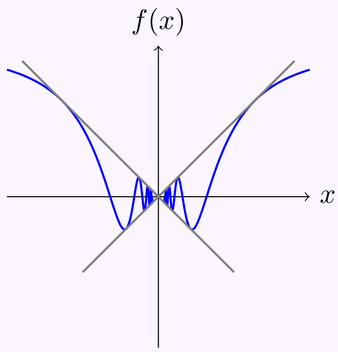
而

$$\lim_{x \to 0} (-x) = \lim_{x \to 0} x = 0$$

这是由连续函数的性质决定的.因此,我们可以得出

$$\lim_{x \to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

观察图像,可以发现$f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$被夹在$g(x) = x$和$h(x) = -x$之间,而后两个函数在$x$趋近于0时都趋近于0.自然,$f(x)$也被迫趋向于0.夹逼准则可以解决许多难以计算的极限问题.



除了使用夹逼准则以外,我们还可以利用极限的四则运算和复合来计算复杂函数的极限.

Theorem 0A.1.4 极限的四则运算

如果$f(x)$和$g(x)$满足

$$\lim_{x\to a} f(x) = l_1 \qquad \lim_{x\to a} g(x) = l_2$$

那么我们有

$$\lim_{x\to a} f(x) \pm g(x) = l_1 \pm l_2$$

$$\lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = l_1 l_2$$

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l_1}{l_2}\ (l_2 \neq 0)$$

即如果两个函数在某处的极限均存在,那么这两个函数的四则运算所得的函数在此处的极限亦存在,并且其值等于各自的极限值进行相应的四则运算的结果.

Theorem 0A.1.5 复合函数的极限

如果$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$,而$g(x)$在$x = l$及其附近的区间上连续,那么

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(l)$$

这就是说,如果复合函数的外部连续(这一条件是容易满足的),就可以先对内部求极限后代入外部函数从而得到总体的极限值.

上面两个定理的证明较为繁琐,因此你不必掌握它们的证明方法.总之,极限运算(在我们目前能接触到的函数中)是十分符合常理的.

0A.1 导数

导数的简单定义

出于简单考虑,我们不准备介绍极限的定义和严格定义导数的方法[3].或者更确切地说,这一

[3]尽管这一概念是高等数学的基础.

章节的内容都是为了让你对微积分有一个简单的,偏向直观的了解,而非与那些性质古怪的函数打交道.

Hint.
本书所考虑的所有函数几乎都是光滑的.这在图像上表现为一条“看起来”光滑的曲线,没有间断的地方,没有粗糙的折点.一个函数光滑意味着它具有良好的性质,我们可以不加考虑地对它进行求导,无需担心可能出现的差错或意外.

正如前言中所说,人们是从物体的运动状态开始研究微积分的.在初中时,你应当学过简单的运动学知识:在一段时间t内,物体运动的距离[4]x与t之比就是它在这段时间内的平均速度v,即

$$v = \frac{x}{t}$$

我们让这段时间从某一时间点t_0开始,并结束于$t_0 + \Delta t$,在这段时间内物体运动的距离为Δx.于是这段时间内的平均速度为

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

现在让Δt越来越小.在此过程中,物体的平均速度$\bar{v}$应当**趋近**于某一定值,这就是某一时间t_0时该物体的瞬时速度v_0,可以记为

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

这就是导数的定义.上面的lim代表limit,意为“极限”.由于本书并不打算涉及极限的定义,因此上述式子只需意会即可:某一时间t_0的瞬时速度v_0等于当Δt趋近于0时$(t_0, t_0 + \Delta t)$时间段内的运动距离Δx与Δt之比值.

我们知道,速度即为运动距离对时间的变化率.上面的叙述就可以引出导数的(浅显而形象的)定义.

Definition 0A.1.1 导数
函数$y = f(x)$在$x = x_0$处的导数定义为

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

在各点处的$f'(x_0)$亦可以构成一个新的函数,这一函数$f'(x)$记为$f(x)$的导函数.今后,我们说某一函数的导数,一般就指其导函数.

至此,基础的介绍就已经完结了[5].如果你想对高等数学的内容有更加深入的了解,笔者建议你阅读普林斯顿微积分读本以获得对微积分的初步认识,然后再阅读各种高等数学书籍.

[4]准确而言应当是位移.此处我们假定物体做直线运动,因而位移就与距离的数值相同.

[5]上述内容似有听君一席话如听一席话的感受,这实在是由于笔者不才而不能很好地介绍导数所致.

常见函数的导数

接下来,我们将从定义出发推导一些函数的导函数[6],首先是简单的幂函数.

Derivation.

我们先从最简单的$f(x)=x$入手.我们有

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}1=1$$

因此$f(x)=x$的导函数处处为1.

现在考虑$f(x)=x^2$.情况要稍微复杂一些.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x-(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x\end{aligned}$$

而$f(x)=\dfrac{1}{x}$也是相似的.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\frac{x-(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}\\&=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x^2+x\Delta x}\\&=-\frac{1}{x^2}\end{aligned}$$

现在再来考虑$f(x)=\sqrt{x}$.我们有

$$\begin{aligned}f'(x)&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)-x}{\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}\\&=\frac{1}{2\sqrt{x}}\end{aligned}$$

我们可以归纳出以下结论:幂函数$f(x)=x^a$的导函数为$f'(x)=ax^{a-1}$.这一结论的严格证明过程请查阅资料.

[6]这会不可避免地引入极限的四则运算,你只需意会即可.总之,尽管Δx在很多结果里都看似是0,但它总是不为0.我们需要思考的是当它接近0时整个式子所接近的值,这和直接把$\Delta x=0$代入是有区别的,毕竟分母不可能为0.

Theorem 0A.1.2 幂函数的导数

幂函数$f(x) = x^a (a \in \mathbb{R})$的导函数为$f'(x) = ax^{a-1}$.

接下来是常见的三角函数.在推到之前,我们需要知道一个重要极限.

Theorem 0A.1.3 重要极限I

我们有重要极限

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

你可以自行查阅这一极限的证明方法.

Derivation.

先考虑$f(x) = \sin x$.我们有

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x \cos \Delta x + \sin \Delta x \cos x - \sin x}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin x(1 - \cos \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \sin \Delta x}{\Delta x} \\
&= 0 + \cos x = \cos x
\end{aligned}$$

其中

导(函)数的运算法则

导函数的运算法则是十分重要且基础的工具.

Theorem 0A.1.2

导函数的运算法则主要有以下几条.

i. 导数的加减法

如果$h(x) = f(x) \pm g(x)$,那么$h'(x) = f'(x) \pm g'(x)$.

ii. 导数的乘法

如果$h(x) = f(x)g(x)$,那么$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

iii. 导数的除法

如果$h(x) = f(x)$

iv. 如果$h(x) = f(g(x))$,那么$h'(x)$