线性映射的向量空间

注:在没有特殊说明的情况下,本章中的$\mathbb{F}$代表$\mathbb{R}$或$\mathbb{C}$;U,V和W代表$\mathbb{F}$上的向量空间. **1.线性映射的定义**

线性代数中真正有趣的部分,是我们现在要转而研究的主题——线性映射.

现在我们给出线性代数中的一个关键定义.

1.1 定义:线性映射

一个从V到W的**线性映射**是一个满足下列性质的函数$T:V\to W$.

(1) 可加性:对于所有$u,v\in V$,$T(u+v)=Tu+Tv$.

(2) 齐次性:对于所有$\lambda\in\mathbb{F}$和所有$v\in V$,$T(\lambda v)=\lambda T(v)$.

注意,对于线性映射,除了用函数的记号$T(v)$之外,我们也经常用记号Tv.

1.2 定义:$\mathcal{L}(V,W),\mathcal{L}(V)$

(a) 从V到W的全体线性映射$T:V\to W$的集合记作$\mathcal{L}(V,W)$.

(b) 从V到V的全体线性映射$T:V\to V$的集合记作$\mathcal{L}(V)$.换言之,$\mathcal{L}(V,V)=\mathcal{L}(V)$.

我们给出下面这些线性映射的例子.

1.3 例:线性映射

(a) 零映射

除作其它用途,我们令$\mathbf{0}$表示这样的一个线性映射:它将空间中的每个元素都对应到目标向量空间的加法恒等元. 具体而言,$\mathbf{0}\in\mathcal{L}(V,W)$定义为

$$\forall v\in V,\mathbf{0}v=\mathbf{0}$$

前面的$\mathbf{0}$指的是零映射,后面的$\mathbf{0}$指的是空间W中的加法恒等元.

(b) 恒等算子

恒等算子记作I,是某个向量空间上的这样一个映射:它将空间中的每个元素对应到它本身. 具体而言,$I\in\mathcal{L}(V)$定义为

$$\forall v\in V,Iv=v$$

(c) 微分映射

定义微分映射$D\in\mathcal{L}\left(\mathcal{P}(\mathbb{R})\right)$为

$$\forall f\in\mathcal{P}(\mathbb{R}),Df=f'$$

(d) 积分映射

定义微分映射$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \mathbb{R})$为

$$\forall f \in \mathcal{P}(\mathbb{R}), Tf = \int_0^1 f$$

(e) 后向位移映射

定义后向位移映射$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^\infty)$为

$$\forall v = (x_1, x_2, x_3, \cdots) \in \mathbb{F}^\infty, Tv = (x_2, x_3, \cdots)$$

(f) $\mathbb{F}^n$到$\mathbb{F}^m$的映射

令$A_{j,k} \in \mathbb{F}$,其中$j = 1, \cdots, m$且$k = 1, \cdots, n$. 定义线性映射$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$为

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^n A_{1,i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^n A_{m,i}x_i\right)$$

事实上每个$\mathbb{F}^n$到$\mathbb{F}^m$的映射都是这种形式的.

2.线性映射引理

线性映射引理告诉我们一个向量空间的基和线性映射之间的关系.

2.1 线性映射引理

假定$v_1, \cdots, v_n$是V的基且$w_1, \cdots, w_n \in W$.那么存在唯一的线性映射$T : V \to W$使得

$$\forall k \in \{1, \cdots, n\}, Tv_k = w_k$$

我们首先证明这样的线性映射T存在.定义

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$$

其中$a_1, \cdots, a_n$是$\mathbb{F}$中的任意元素. 由于$v_1, \cdots, v_n$是V的基,因此上述定义中的自变量可以以唯一的方式取遍V中的每个元素. 于是这样的定义确定了函数$T : V \in W$.

我们现在只需证明T满足题设且是一个线性映射.

对于每个k,取上式中$a_k = 1$,其余$a = 0$即可得出$Tv_k = w_k$.

对于任意$u, v \in V$,不妨把它们写成$u = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, v = b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$.于是

$$\begin{aligned}
T(u+v) &= T\left((a_1+b_1)v_1 + \cdots + (a_n+b_n)v_n\right) \\
&= (a_1+b_1)w_1 + \cdots + (a_n+b_n)w_n \\
&= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n + b_1w_1 + \cdots + b_nw_n \\
&= T(u) + T(v)
\end{aligned}$$

于是T具有可加性.同理可以证明T的齐次性.

现在我们证明这样的T是唯一的.假设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,且$Tv_k = w_k$.

那么根据T的齐次性对于任意$c_1,\cdots,c_n \in \mathbb{F}$都有$T(c_kv_k) = c_kw_k$.再根据$T$的可加性可知

$$T(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n) = a_1w_1 + \cdots + a_nw_n$$

于是T在$\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_n) = V$上由上式唯一确定.

综上所述,命题得证.

线性映射引理告诉我们,研究一个线性映射$T: V \to W$的性质可以从V的基的对应值入手,从而简化问题. **3.$\mathcal{L}(V,W)$上的代数运算**

我们知道$\mathcal{L}(V,W)$也是一个由众多线性映射组成的集合. 这个集合是否具有类似于向量空间的性质呢?为此,我们先从定义$\mathcal{L}(V,W)$上的加法和标量乘法开始.

3.1 定义:$\mathcal{L}(V,W)$上的加法和标量乘法

假设$S,T \in \mathcal{L}(V,W)$且$\lambda \in \mathbb{F}$.和$S+T$与积λT都是V到W的线性映射,分别定义为

$$\forall v \in V, (S+T)(v) = S(v) + T(v), (\lambda T)(v) = \lambda (T(v))$$

事实上,在进行了上述定义(实际上也非常符合直觉)之后,我们可以知道$\mathcal{L}(V,W)$就是向量空间.

我们还需要额外的定义线性映射的乘积(实际上此处称为复合可能更加符合直觉).

3.2 定义:线性映射的乘积

对于$T \in \mathcal{L}(U,V)$和$V \in \mathcal{L}(V,W)$,乘积$ST \in \mathcal{L}(U,W)$定义为

$$\forall u \in U, (ST)(u) = S(T(u))$$

由此可见ST实际上就是一般的函数复合$S \circ T$,写成ST实际上是因为当两个函数都是线性的时,这样看起来更自然一些,并且也会让下面的定理看起来更加符合直觉. 事实上线性函数的乘积并不一定满足交换律,即$ST = TS$不一定成立,即使在两边都有定义的情况下. 另外,不难验证ST的确是U到W的线性映射.

3.3 线性映射乘积的代数性质

1. **可结合性**

   对于任意使乘积有意义的线性映射T_1,T_2,T_3有$(T_1T_2)T_3 = T_1(T_2T_3)$.

2. **恒等元**

   对于任意$T \in \mathcal{L}(V,W)$有$IT = TI = I$.前后两个I分别为V上和W上的恒等算子.

3. **分配性质**

   对于任意的$T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(U,V)$和$S, S_1, S_2 \in \mathcal{L}(V,W)$有

$$(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T, S(T_1 + T_2) = ST_1 + ST_2$$

我们还需额外说明一点.

3.4 加法恒等元的映射

假设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,那么$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Proof.

根据可加性,我们有

$$T(\mathbf{0}) = T(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = T(\mathbf{0}) + T(\mathbf{0})$$

等式两边同时加上$T(\mathbf{0})$的加法逆元即可得$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

这也说明了$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto kx + b$在$b \neq 0$时并非线性映射.换言之,我们所说的线性映射和线性函数是不同的.下面,我们来看一些例题.

Example 1.

设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$.证明:存在标量$A_{j,k} \in \mathbb{F}$,其中$j = 1, \cdots, m$且$k = 1, \cdots, n$使得

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} A_{1,i}x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} A_{m,i}x_i \right)$$

对任意$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$均成立.

Proof.

考虑$\mathbb{F}^n$的标准基$(1, 0, \cdots, 0), \cdots, (0, \cdots, 0, 1)$,分别记为$v_1, \cdots, v_n$. 取标量$A_{j,k}$使得下面一组等式成立.

$$\begin{cases} Tv_1 = (A_{1,1}, \cdots, A_{m,1}) \in \mathbb{F}^m \\ \cdots \\ Tv_n = (A_{1,n}, \cdots, A_{m,n}) \in \mathbb{F}^m \end{cases}$$

不难验证对于任意v_k均能满足题设的等式. 对于任意$(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$,我们有

$$\begin{aligned} T(x_1, \cdots, x_n) &= T(x_1, 0, \cdots, 0) + \cdots + T(0, \cdots, 0, x_n) \\ &= x_1 T v_1 + \cdots + x_n T v_n \\ &= x_1 (A_{1,1}, \cdots, A_{m,1}) + \cdots + x_n (A_{1,n}, \cdots, A_{m,n}) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} A_{1,i} x_i, \cdots, \sum_{i=1}^{n} A_{m,i} x_i \right) \end{aligned}$$

于是这样的一组A满足题设,命题得证.

Example 2.

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$且V中的一组向量$v_1, \cdots, v_m$满足$Tv_1, \cdots, Tv_m$在W中线性无关.

试证明:$v_1, \cdots, v_m$线性无关.

Proof.

假定$v_1, \cdots, v_m$线性相关,那么存在一组不全为0的标量$a_1, \cdots, a_n$使得

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

于是我们有

$$\begin{aligned} T(\mathbf{0}) &= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n \end{aligned}$$

又$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,于是存在这样的不全为0的标量$a_1, \cdots, a_n$使得

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

这与$Tv_1, \cdots, Tv_m$在W中线性无关矛盾.于是$v_1, \cdots, v_m$线性无关,命题得证.

Example 3.

若U是V的子空间,且$S \in \mathcal{L}(U, W)$,那么存在$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得$\forall u \in U, Tu = Su$.

Proof.

设$u_1, \cdots, u_m$为U的一组基,它可以被扩充为V的一组基$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$.

设T满足$\forall 1 \leqslant k \leqslant m, Tu_k = Su_k$且$\forall 1 \leqslant j \leqslant n, Tv_j = \mathbf{0}$. 对于任意$u \in U$,存在唯一一组标量$a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$使得

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m$$

于是

$$\begin{aligned}Tu &= T\left(a_1u_1+\cdots+a_mu_m\right)\\ &= a_1Tu_1+\cdots+a_mTu_m\\ &= a_1Su_1+\cdots+a_mSu_m\\ &= S\left(a_1u_1+\cdots+a_mu_m\right)\\ &= Su\end{aligned}$$

容易验证T是线性映射,于是命题成立.

Example 4.

设V是有限维的且$\dim V>1$,证明$\exists S,T\in\mathcal{L}(V)$, s.t.$ST\neq TS$.

Proof.

设V的一个基为$v_1,v_2,\cdots,v_m(m\geqslant 2)$.

令T满足

$$Tv_1=v_2,Tv_2=v_1,\forall k\geqslant 2,Tv_k=v_k$$

令S满足

$$Sv_1=v_1,Sv_2=2v_2,\forall k\geqslant 2,Sv_k=v_k$$

于是

$$STv_1=Sv_2=2v_2,TSv_1=Tv_1=v_2$$

于是$STv_1\neq TSv_1$,即存在这样的S,T使得$ST\neq TS$.

Example 5.

设V是有限维的,证明$\mathcal{L}(V)$仅有的双边理想是$\{\mathbf{0}\}$和$\mathcal{L}(V)$.

注:$\mathcal{L}(V)$的子空间$\mathcal{E}$被称为$\mathcal{L}(V)$的**双边理想**, 如果$TE\in\mathcal{E}$且$ET\in\mathcal{E}$对所有$E\in\mathcal{E}$和所有$T\in\mathcal{L}(V)$成立.

Proof.

若$\mathcal{E}=\{\mathbf{0}\}$,则原命题成立.

若$\mathcal{E}\neq\{\mathbf{0}\}$,则令$v_1,\cdots,v_n$是$V$的基.

于是存在$T\in\mathcal{E}$使得存在$1\leqslant j\leqslant n$使得$Tv_j\neq\{\mathbf{0}\}$.

不妨设存在一组标量$a_1,\cdots,a_n$使得$Tv_j=a_1v_1+\cdots+a_nv_n$.

定义$S_{j,k}\in\mathcal{L}(V)$为

$$\begin{cases}S_{j,k}v_k=v_j\\ S_{j,k}v_l=\mathbf{0},l\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{k\}\end{cases}$$

于是

$$\begin{aligned}(S_{k,l}TS_{j,k})(v_k) &= S_{k,l}\left(T\left(S_{j,k}v_k\right)\right)\\ &= S_{k,l}T(v_j)\\ &= S_{k,l}\left(a_1v_1+\cdots+a_nv_n\right)\\ &= a_lS_{k,l}v_l = a_lv_k\end{aligned}$$

又$S_{k,l}TS_{j,k}\in\mathcal{E}$,于是$S_{1,l}TS_{j,1}+\cdots+S_{n,l}TS_{j,n}\in\mathcal{E}$,且有

$$\forall k\in\{1,\cdots,n\},\left(S_{1,l}TS_{j,1}+\cdots+S_{n,l}TS_{j,n}\right)(v_k)=a_lv_k$$

于是$S_{1,l}TS_{j,1}+\cdots+S_{n,l}TS_{j,n}=a_lI\in\mathcal{E}$.

于是对于任意$S\in\mathcal{L}(V)$,都有$S=SI\in\mathcal{E}$,从而$\mathcal{L}(V)\subseteq\mathcal{E}$. 又$\mathcal{E}$是$\mathcal{L}(V)$的子空间,于是有$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{L}(V)$.于是$\mathcal{E}=\mathcal{L}(V)$.

综上,命题得证.