1. 设T是V到W的函数.T的**图(Graph)**是$V \times W$的子集,定义为

$$\mathcal{G}(T) = \{(v, Tv) \in V \times W : v \in V\}$$

证明:T是线性映射,当且仅当$\mathcal{G}(T)$是$V \times W$的子空间.

Proof.

$\Rightarrow$:对任意$u, v \in V$,都有$Tu + Tv = T(u + v)$.于是对于任意$(v, Tv), (u, Tu) \in \mathcal{G}(T)$有

$$(u, Tu) + (v, Tv) = (u + v, Tu + Tv) = (u + v, T(u + v))$$

于是$\mathcal{G}(T)$对加法封闭.

证明它对标量乘法也封闭的过程是类似的,在此不再赘述.

$\Leftarrow$:对于任意$(u, Tu), (v, Tv) \in \mathcal{G}(T)$有$(u, Tu) + (v, Tv) = (u + v, Tu + Tv) \in \mathcal{G}(T)$.

这就要求对于任意$u, v \in V$,$T(u + v) = Tu + Tv$,从而T满足可加性.

证明T的齐次性的过程也是类似的,在此不再赘述.

2. 设$V_1, \cdots, V_m$是向量空间,使得$V_1 \times \cdots \times V_m$是有限维的.试证明:对于任意$1 \leqslant k \leqslant m$,$V_k$都是有限维的.

Proof.

对于任意V_k,选取它的一组基.这组基的长度必然小于等于$V_1 \times \cdots \times V_m$的基的长度.

于是各V_k都是有限维的.

3. 设$V_1, \cdots, V_m$是向量空间.证明$\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m, W)$和$\mathcal{L}(V_1, W) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_m, W)$是同构向量空间.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}(V_1 \times \cdots \times V_m), W) &= \dim(V_1 \times \cdots \times V_m) \cdot (\dim W) \\ &= (\dim V_1 + \cdots + \dim V_m)(\dim W)\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathcal{L}(V_1, W) \times \cdots \times \mathcal{L}(V_m, W)\right) &= \dim(\mathcal{L}(V_1, W)) + \cdots + \dim(\mathcal{L}(V_m, W)) \\ &= (\dim V_1)(\dim W) + \cdots + (\dim V_m)(\dim W) \\ &= (\dim V_1 + \cdots + \dim V_m)(\dim W)\end{aligned}$$

于是两者维数相同,因而它们同构.

4. 设$W_1,\cdots,W_m$是向量空间.证明$\mathcal{L}(V,W_1\times\cdots\times W_m)$和$\mathcal{L}(V,W_1)\times\cdots\times\mathcal{L}(V,W_m)$是同构向量空间.

Proof.

这与**(3)**相类似,不再赘述.

5. 对于$m\in\mathbb{N}^*$,定义V^m为

$$V^m=\underbrace{V\times\cdots\times V}_{m\text{个}V}$$

试证明:V^m与$\mathcal{L}(\mathbb{F}^m,V)$是同构向量空间.

Proof.

我们有

$$\dim V^m=\underbrace{\dim V+\cdots+\dim V}_{m\text{个}V}=m\dim V$$

又有

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbb{F}^m,V))=(\dim(\mathbb{F}^n))(\dim V)=m\dim V$$

于是两者维数相同,因而它们同构.

6. 设$v,x\in V$,U,W是V的子空间,使得$v+U=x+W$.试证明:$U=W$.

Proof.

由$v+U=x+W$可知对于任意$u\in U$,存在$w\in W$使得$v+u=x+w$,反之亦是同理.

令$u=\mathbf{0}$可知存在$w\in W$使得$v=x+w$.同理存在$u\in U$使得$v+u=x$.

于是$v-x=w\in W$且$v-x=-u\in U$.

于是对于任意$u\in U$,存在w使得$v+u=x+w$,就有$u=x+w-v=w-(v-x)\in W$,于是$U\subseteq W$.

同理可以证明$W\subseteq U$.综上可知$U=W$,命题得证.

7. 令$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+3y+5z=0\}$.设$V\subseteq\mathbb{R}^3$.试证明:$V$是$U$的平移,当且仅当存在$c\in\mathbb{R}$使得$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+3y+5z=c\}$.

Proof.

$\Rightarrow$:由于A是U的平移,不妨设$p:=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3$使得$V=p+U$.

于是对于任意$v:=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$都存在$u:=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$使得$v=p+u$.

于是任意$v \in V$都满足$v = (p_1 + u_1, p_2 + u_2, p_3 + u_3)$,而

$$2(p_1 + u_1) + 5(p_2 + u_2) + 3(p_3 + u_3) = (2p_1 + 5p_2 + 3p_3) + (2u_1 + 5u_2 + 3u_3) = (2p_1 + 5p_2 + 3p_3)$$

于是令$c = 2p_1 + 5p_2 + 3p_3$,对于任意$v = (v_1, v_2, v_3)$都有$v_1 + v_2 + v_3 = c$.这就要求V具有题设的形式.
$\Leftarrow$:设$p = \left(-\frac{c}{10}, -\frac{c}{10}, -\frac{c}{10}\right)$.
对于任意$v := (v_1, v_2, v_3) \in V$,都有$v + p = \left(v_1 - \frac{c}{10}, v_2 - \frac{c}{10}, v_3 - \frac{c}{10}\right)$.而

$$2\left(v_1 - \frac{c}{10}\right) + 5\left(v_2 - \frac{c}{10}\right) + 3\left(v_3 - \frac{c}{10}\right) = 2v_1 + 5v_2 + 3v_3 - c = 0$$

这就说明$v + p \in U$.
对于任意$u := (u_1, u_2, u_3)$,亦有$u - p = \left(u_1 + \frac{c}{10}, u_2 + \frac{c}{10}, u_3 + \frac{c}{10}\right) \in V$.
这就表明$p + V = U$,即V是U的一个平移.

8. 回答下列问题.

(1) 设$T \in \mathcal{L}(V, W), c \in W$.试证明:$\{x \in V : Tx = c\}$是$\varnothing$或null T的平移.

(2) 解释线性方程组的解集为什么是空集或者$\mathbb{F}^n$的某个子空间的平移.

Proof.

(1) 若T是单射,那么存在唯一$v \in V$使得$Tv = c$.这时$\{x \in V : Tx = c\} = v + \varnothing$.
若T不是单射,假定某一$v \in V$满足$Tv = c$,那么对于任意$u \in \operatorname{null} T$都有$T(u + v) = Tu + Tv = c$.
又对于任意$u \in V$满足$Tu = c$,总有$T(u - v) = Tu - Tv = \mathbf{0}$.于是总有$u - v \in \operatorname{null} T$.
综上可知$\{x \in V : Tx = c\} = v + \operatorname{null} T$.

(2) 考虑一个有n个方程和m个未知数的线性方程组.
对于$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^m, \mathbb{F}^n)$和$c \in \mathbb{F}^n$,解集为$\{x \in \mathbb{F}^m : Tx = c\}$.
于是该解集要么为空集的平移,要么为$\mathbb{F}^m$的子空间的平移.

9. 证明:V的一非空子集A是V的某个子空间的平移，当且仅当$\lambda v + (1 - \lambda)w \in A$对所有$v, w \in A$和所有$\lambda \in \mathbb{F}$成立.

Proof.
$\Rightarrow$:设$V = x + U$,其中$x \in V$,U是V的子空间.
对于任意$v, w \in A$,都存在$u_1, u_2 \in U$使得$x + u_1 = v, x + u_2 = w$.于是

$$\lambda v + (1 - \lambda)w = \lambda(x + u_1) + (1 - \lambda)(x + u_2) = x + \lambda u_1 + (1 - \lambda)u_2$$

而$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in U$,于是$x+\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in A$,命题得证.

$\Leftarrow$:我们只需证明$\exists v\in A$使得$-v+A$是子空间.

首先,由于$v\in A$,于是$v-v=\mathbf{0}\in -v+A$.

设$x\in -v+A$,于是存在$u\in A$使得$x=u-v$.对于任意$\lambda\in\mathbb{F}$有

$$\lambda u+(1-\lambda)v=\lambda(u-v)+v=\lambda x+v\in A$$

于是$\lambda x\in -v+A$,即$-v+A$对标量乘法封闭.

对于任意$x_1,x_2\in -v+A$,总存在$u_1,u_2\in A$使得$x_1=u_1-v,x_2=u_2-v$.令$\lambda=\dfrac{1}{2}$,于是

$$\frac{1}{2}u_1+\frac{1}{2}u_2=\frac{1}{2}(x_1+v)+\frac{1}{2}(x_2+v)=\left(\frac{1}{2}x_1+\frac{1}{2}x_2\right)+v\in A$$

于是$\dfrac{1}{2}x_1+\dfrac{1}{2}x_2\in -v+A$.由于$-v+A$对标量乘法封闭,于是$x_1+x_2\in -v+A$,于是$-v+A$对加法封闭.

综上可知$-v+A$是子空间,从而$A=v+(-v+A)$是子空间的平移.

10. 设$A_1=v+U_1$且$A_2=w+U_2$,其中$v,w\in V$,U_1,U_2是V的子空间.试证明:$A_1\cap A_2$是V的某个子空间的平移或空集.

Proof.

若$v-w\in U_1\cap U_2$,则$A_1\cap A_2=v+(U_1\cap U_2)=w+(U_1\cap U_2)$,自然是子空间的平移.

若$v-w\notin U_1\cap U_2$,则$A_1\cap A_2=\varnothing$.

11. 设$U=\{(x_1,x_2,\cdots)\in\mathbb{F}^\infty:x_k\neq 0$仅对有限多个$k$成立$\}$.

(1) 试证明U是$\mathbb{F}^\infty$的子空间.

(2) 试证明$\mathbb{F}^\infty/U$是无限维的.

Proof.

(1) 首先有$\mathbf{0}=(0,0,\cdots)\in U$.

对于任意$v,u\in U$,假设v,u中的非零元素分别有m,n个.那么$v+u$中的非零元素数目必然不超过$m+n$个,于是$u+v\in U$.

对于任意$v\in U$和任意$\lambda\in\mathbb{F}$,λv中的非零元素要么有m个,要么没有非零元素.于是$\lambda v\in U$.

综上,U对加法和标量乘法封闭且有加法恒等元,于是U是$\mathbb{F}^\infty$的子空间.

(2) 考虑一组向量$(0,1,1,\cdots),(1,0,1,\cdots),\cdots$.各$v_k$的第$k$个元素为0,其余均为1.

显然$v_1,\cdots\notin V$且线性无关.于是$v_1+U,\cdots$可以作为$\mathbb{F}^\infty/U$的一组基.这基的长度是无限的,于是$\mathbb{F}^\infty/U$自

然是无限维的.

12. 设$v_1,\cdots,v_m\in V$.令

$$A=\{\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_mv_m:\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}\text{且}\lambda_1+\cdots+\lambda_m=1\}$$

(1) 证明:A是V的某个子空间的平移.

(2) 证明:如果B是V的某个子空间的平移且$\{v_1,\cdots,v_m\}\subseteq B$,那么$A\subseteq B$.

(3) 证明:A是V的某个子空间的平移,且该子空间的维数小于m.

Proof.

(1) 我们可以利用**(9)**的结论证明之.

设$u_1=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_mv_m,u_2=\beta_1v_1+\cdots+\beta_mv_m$,其中$\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i=\sum\limits_{i=1}^n\beta_i=1$.于是$u_1,u_2\in A$.

我们有$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2=\sum\limits_{i=1}^m\left(\lambda\alpha_i+(1-\lambda)\beta_i\right)v_i$.

又$\sum\limits_{i=1}^m\lambda\alpha_i+(1-\lambda)\beta_i=\lambda\sum\limits_{i=1}^m\alpha_i+(1-\lambda)\sum\limits_{i=1}^m\beta_i=\lambda+(1-\lambda)=1$,于是$\lambda u_1+(1-\lambda)u_2\in A$.

根据**(9)**可知A是V中某个子空间的平移.

(2) 假定$B=v+U$,记$u_k=v_k-v\in U,1\leqslant k\leqslant m$.

现在,对于任意$w:=\sum\limits_{i=1}^m\lambda_iv_i\in A$,都有

$$w=\sum_{i=1}^m\lambda_i(v+u_i)=v+\sum_{i=1}^m u_i$$

又$\sum_{i=1}^m u_i\in U$,于是$w\in B$,进而$A\subseteq B$.

(3) 注意到$v_m\in A$.设U满足$U+v_m=A$,即$U=A-v_m$,于是对于任意$u:=\sum\limits_{i=1}^m\lambda_iv_i-v_m\in U$有

$$u=\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i-v_m=\sum_{i=1}^m\lambda_iv_i-\sum_{i=1}^m\lambda_iv_m=\sum_{i=1}^{m-1}\lambda_i(v_i-v_m)$$

其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1}\in\mathbb{F}$.这表明$U=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_{m-1})$,于是$\dim U\leqslant m-1<m$.

13. 设U是V的子空间,使得V/U是有限维的.证明V和$U\times(V/U)$同构.

Proof.

假定$v_1+U,\cdots,v_m+U$是V/U的一组基.于是$v_1,\cdots,v_m$线性无关且均不属于U.

考虑$x:=\sum_{i=1}^{m}c_iv_i$.假定$x\in U$,那么$x+U=U=\mathbf{0}_{V/U}$.

又$x+U=\sum_{i=1}^{m}c_i(v_i+U)=\mathbf{0}_{V/U}$当且仅当$c_1=\cdots=c_m=0$.于是当且仅当$c_1=\cdots=c_m=0$时$x\in U$.

现在,对于任意$v\in V$,我们证明存在$u\in U$和$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$使得$v=u+\sum_{i=1}^{m}a_iv_i$.

假定$u_0\in U$,于是$v+u_0\in v+U$.

又知存在$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$使得$v+U=\sum_{i=1}^{m}a_i(v_i+U)=\sum_{i=1}^{m}a_iv_i+U$.

于是存在$u_1\in U$使得$v+u_0=\sum_{i=1}^{m}a_iv_i+u_1$.

于是存在$u:=u_1-u_0\in U$使得$v=u+\sum_{i=1}^{n}a_iv_i$.

现在我们证明上述表示方法是唯一的.设$v\in V$使得$v=u_1+\sum_{i=1}^{m}a_iv_i=u_2+\sum_{i=1}^{m}b_iv_i$.

两式相减有$u_2-u_1=\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)v_i$.而$u_2-u_1\in U$,于是$\sum_{i=1}^{m}(a_i-b_i)v_i=\mathbf{0}$.

从而只能有各$a_k=b_k$,$u_1=u_2$,于是上述表示方法是唯一的.

现在,我们证明映射$T:v:=u+\sum_{i=1}^{m}a_iv_i\mapsto\left(u,\sum_{i=1}^{m}a_i(v_i+U)\right)$是线性的.

(a) $T\mathbf{0}=(\mathbf{0}_U,\mathbf{0}_{V/U})=\mathbf{0}_{U\times(V/U)}$.

(b) 对于任意$v_1:=u_1+\sum_{i=1}^{m}a_iv_i,v_2:=u_2+\sum_{i=1}^{m}b_iv_i\in V$有

$$\begin{aligned}T(v_1+v_2)&=T((u_1+u_2)+\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)v_i)\\&=\left(u_1+u_2,\sum_{i=1}^{m}(a_i+b_i)(v_i+U)\right)\\&=\left(u_1,\sum_{i=1}^{m}a_i(v_i+U)\right)+\left(u_2,\sum_{i=1}^{m}b_i(v_i+U)\right)\\&=Tv_1+Tv_2\end{aligned}$$

于是T具有可加性.

(c) 证明T具有齐次性的过程是类似的,在此便不再赘述.

于是T是V到$U\times(V/U)$的线性映射.

观察T的定义,可知T既是单射又是满射.于是T是这两个空间的一个同构,即V和$U\times(V/U)$是同构的.

14. 设U和W是V的子空间,且$V=U\oplus W$.设$w_1,\cdots,w_m$是W的基,证明$w_1+U,\cdots,w_m+U$是V/U的基.

Proof.

对于任意$v\in V$,由于$V=U\oplus W$,于是存在唯一的$w\in W$和$u\in U$使得$v=w+u$.

于是$v+U=w+u+U=w+U$.对于任意$v+U\in V/U$,设此v对应的$w:=a_1w_1+\cdots+a_mw_m\in W$,则

$$v+U=w+U=(a_1w_1+\cdots+a_mw_m)+U=\sum_{i=1}^{m}a_i(w_i+U)$$

下面证明$w_1+U,\cdots,w_i+U$线性无关.在上式中令$v=\mathbf{0}$,则

$$\mathbf{0}+U=\mathbf{0}_{V/U}=\sum_{i=1}^{m}a_i(w_i+U)$$

当且仅当$a_1=\cdots=a_m=0$成立,于是$w_1+U,\cdots,w_m+U$线性无关.

综上可知$w_1+U,\cdots,w_m+U$是V/U的基.命题得证.

15. 设U是V的子空间,$v_1+U,\cdots,v_m+U$是V/U的基,$u_1,\cdots,u_n$是U的基.试证明$v_1,\cdots,v_mu_1,\cdots,u_n$是$V$的基.

Proof.

不难得知$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$线性无关.我们只需证明这向量组张成$V$即可.

对于任意$v\in V$,设$v+U=\sum\limits_{i=1}^{m}a_i(v_i+U)=\sum\limits_{i=1}^{m}a_iv_i+U$.

于是$u:=v-\sum\limits_{i=1}^{m}a_iv_i\in U$.设$u=\sum_{j=1}^{n}b_ju_j$,则有

$$v=\sum_{i=1}^{m}a_iv_i+\sum_{j=1}^{n}b_ju_j$$

于是$V=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n)$,进而这向量组是$V$的基.

16. 设$\varphi\in\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$,$\varphi\neq\mathbf{0}$.证明$\dim V/(\operatorname{null}\varphi)=1$.

Proof.

考虑$\tilde{\varphi}:V/(\operatorname{null}\varphi)\to W$满足$\tilde{\varphi}(v+\operatorname{null}\varphi)=\varphi v$.

根据前面的定理可知$\tilde{\varphi}$是单射且range $\varphi=$ range $\tilde{\varphi}$.

这表明$\tilde{\varphi}$是将$V/(\operatorname{null}\varphi)$映射成range φ的同构.又$\dim\operatorname{range}\varphi=\dim\mathbb{F}=1$,于是$\dim V/(\operatorname{null}\varphi)=1$.

17. 设U是V的子空间,使得$\dim V/U = 1$.证明:存在$\varphi \in \mathcal{L}(V, \mathbb{F})$使得$\operatorname{null} \varphi = U$.

Proof.

设V/U的基为$v + U$.对于任意$w \in V$,都有$w + U = a(v + U) = av + U$.令$\varphi$满足

$$\varphi w = a : w + U = av + U$$

于是$\varphi w = \mathbf{0}$当且仅当$w + U = U$,即$w \in U$.于是$\operatorname{null} \varphi = U$.命题得证.

18. 设U是V的子空间,使得V/U是有限维的.

(1) 证明:若W是V的有限维子空间使得$V = U + W$,那么$\dim W \geqslant \dim V/U$.

(2) 证明:存在V的有限维子空间W使得$\dim W = \dim V/U$且$V = U \oplus W$.

Proof.

(1) 对于任意$v \in V$都存在$w \in W, u \in U$使得$v = w + u$.
不妨设V/U的一组基为$v_1 + U, \cdots, v_m + U$.
由于$V = U + W$,于是对于任意$1 \leqslant k \leqslant m$,都存在$w_k \in W, u_k \in U$使得$v_k = w_k + u_k$.
即$v_k + U = (w_k + u_k) + U = w_k + U$.对于任意$v + U \in V/U$有

$$v + U = \sum_{i=1}^{m} a_i(v_i + U) = \sum_{i=1}^{m} a_i(w_i + U) = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i\right) + U$$

于是$w_1, \cdots, w_m$线性无关,否则表出$\mathbf{0}_{V/U}$的标量$a_1, \cdots, a_m$将不唯一.
于是$w_1, \cdots, w_m$是W中长度为m的线性无关组,因而$\dim W \geqslant m = \dim V/U$.

(2) 在**(1)**中令$W = \operatorname{span}(w_1, \cdots, w_m)$即可.
如此,对于任意$v \in V$,都有$v + U = \left(\sum_{i=1}^{m} a_i w_i\right) + U$,即$v - \sum_{i=1}^{m} w_k \in U$.
又$v = \mathbf{0}$当且仅当$a_1 = \cdots = a_m = 0$,这表明$U + W$是直和.

19. 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$且U是V的子空间.令π表示V到V/U的商映射.证明:存在$S \in \mathcal{L}(V/U, W)$使得$T = S \circ \pi$当且仅当$U \subseteq \operatorname{null} T$.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意$u \in U$,都有$Tu = S(\pi u) = S\mathbf{0} = \mathbf{0}$.于是$u \in \operatorname{null} T$,这表明$U \subseteq \operatorname{null} T$.
$\Leftarrow$:设对于任意$v \in V$都有$S(v + U) = Tv$.我们现在证明S是线性映射.

(a) $S\mathbf{0}_{V/U} = S(\mathbf{0}_V + U) = T\mathbf{0}_V = \mathbf{0}_W$.于是$S\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

(b) 对于任意$v, w \in V$,都有$S((v+w)+U) = T(v+w) = Tv + Tw = S(v+U) + T(w+U)$,于是$S$满足可加性.

(c) 对于任意$v \in V$和任意$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$S(\lambda v + U) = T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda S(v+U)$,于是$S$满足齐次性.

这样的S自然是线性映射.