1. 证明:$\mathbb{R}^2$的子空间恰有$\{\mathbf{0}\}$,$\mathbb{R}^2$中所有过原点的直线,以及$\mathbb{R}^2$本身.

Proof.

设U为$\mathbb{R}^2$的子空间,那么$\dim U=0,1,2$.

若$\dim U=0$,那么显然有$U=\{\mathbf{0}\}$.

若$\dim U=2$,又$\dim\mathbb{R}^2=2$,于是$U=\mathbb{R}^2$.

若$\dim U=1$,那么对于任意非零的$x\in U$都有$U=\{kx:k\in\mathbb{R}\}$,即过原点的直线.

综上,命题得证.

2. 证明:$\mathbb{R}^3$的子空间恰有$\{\mathbf{0}\}$,$\mathbb{R}^3$中所有过原点的直线,$\mathbb{R}^3$中所有过原点的平面,以及$\mathbb{R}^3$本身.

Proof.

设U为$\mathbb{R}^2$的子空间,那么$\dim U=0,1,2,3$.

若$\dim U=0,1,3$,则情况与**1.**类似,不再赘述.

若$\dim U=2$,那么存在两个线性无关的$x,y\in U$使得$U=\{k_1x+k_2y:k_1,k_2\in\mathbb{R}\}$,即$\mathbb{R}^3$中过原点的平面.

综上,命题得证.

3.

(a) 令$U=\{p\in\mathcal{P}_4(\mathbb{F}):p(6)=0\}$,求$U$的一个基.

(b) 将**(a)**中的基扩充为$\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$的一个基.

(c) 求$\mathcal{P}_4(\mathbb{F})$的一个子空间$W$使得$\mathcal{P}_4(\mathbb{F})=U\oplus W$.