子空间与直和

1.子空间

通过定义向量空间的子空间,我们可以大大扩充向量空间的例子.

1.1 定义:子空间

如果V的子集U是与V具有相同的加法恒等元,加法和标量乘法运算的向量空间,那么称U为V的**子空间**.

下面给出了判断V的子集是否为子空间的方法.

1.2 判断子空间的方法

当且仅当V的子集U满足下面三个条件时,U是V的子空间.

(1) 加法恒等元$\mathbf{0} \in U$.

(2) **对加法封闭**:对于任意$u, v \in U$,都有$u + v \in U$.

(3) **对标量乘法封闭**:对于任意$a \in \mathbb{F}, u \in U$,都有$au \in U$.

1.2 Proof.

如果U是V的子空间,那么根据向量空间的定义,U必能满足上述条件.

如果U满足上述三个条件,那么**(1)**保证了U有加法恒等元,**(2)**和**(3)**保证了U上的加法和标量乘法有意义.

对于任意的$u \in U$,在**(3)**中取$a = -1$可知$-u \in U$,于是U满足具有加法逆元的条件.

向量空间定义的其余部分,如可交换性和可结合性,既然对于V满足,那么对它的子集U也一定满足.

进而U为向量空间,于是U为V的子空间.

下面给出了一些子空间的例子.

1.3.1 例:子空间

(a) 如果$b \in \mathbb{F}$,那么当且仅当$b = 0$时,$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_3 = 5x_4 + b\}$是$\mathbb{F}^4$的子空间.

(b) 定义在$[0, 1]$上的全体连续实值函数构成的集合是$\mathbb{R}^{[0,1]}$的子空间.

(c) 定义在$\mathbb{R}$上的全体可微实值函数构成的集合是$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$的子空间.

(d) 当且仅当$b = 0$时,定义在开区间$(0, 3)$上且满足$f'(2) = b$的全体可微实值函数f构成的集合是$\mathbb{R}^{(0,3)}$的子空间.

(e) 所有满足$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$的实序列$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$构成的集合是$\mathbb{R}^{\infty}$的子空间.

需要注意的是,向量空间最小的子空间不是空集$\varnothing$而是$\{\mathbf{0}\}$. 这是因为向量空间必须包含加法恒等元$\mathbf{0}$.对应的,V的最大的子空间显然是它本身.

1.3.2 $\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^3$的子空间

(a) $\mathbb{R}^2$的子空间有且仅有$\{\mathbf{0}\}$,$\mathbb{R}^2$中所有过原点的直线,以及$\mathbb{R}^2$本身.

(b) $\mathbb{R}^3$的子空间有且仅有$\{\mathbf{0}\}$,$\mathbb{R}^3$中所有过原点的直线,$\mathbb{R}^3$中所有过原点的平面,以及$\mathbb{R}^3$本身.

证明上述命题是较为困难的.我们将它留待学习更多知识后来证明.
讨论向量空间时,我们通常只对向量空间的子空间而非任意子集感兴趣.这时,子空间的和的概念将会很有用.

1.4 定义:子空间的和

假定$V_1, V_2, \cdots, V_m$是V的子空间,则$V_1, V_2, \cdots, V_m$的**和**是由$V_1, V_2, \cdots, V_m$中元素的所有可能的和构成的集合,记作$V_1 + V_2 + \cdots + V_m$,即

$$V_1 + V_2 + \cdots + V_m = \{v_1 + v_2 + \cdots + v_m : v_i \in V_i, i = 1, 2, \cdots, m\}$$

我们可以来看一些子空间的和的例子.

1.4.1 例:子空间的和

(a) 假定

$$U = \left\{(x, 0, 0) \in \mathbb{F}^3 : x \in \mathbb{F}\right\}, W = \left\{(0, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : y \in \mathbb{F}\right\}$$

那么

$$U + W = \left\{(x, y, 0) \in \mathbb{F}^3 : x, y \in \mathbb{F}\right\}$$

(b) 假定

$$U = \left\{(x, x, y, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in \mathbb{F}\right\}, W = \left\{(x, x, x, y) \in \mathbb{F}^4 : x, y \in \mathbb{F}\right\}$$

那么

$$U + W = \left\{(x, x, y, z) \in \mathbb{F}^4 : x, y, z \in \mathbb{F}\right\}$$

我们来证明上述例子中的**(b)**.

1.4.1(b) Proof.

考虑U中的一个元素(a,a,b,b)和W中的一个元素(c,c,c,d),于是

$$(a,a,b,b)+(c,c,c,d)=(a+c,a+c,b+c,b+d)$$

这表明$U+W$中的每个元素的前两个坐标相等,于是

$$U+V\subseteq\left\{(x,x,y,z)\in\mathbb{F}^4,x,y,z\in\mathbb{F}\right\}$$

而考虑$\{(x,x,y,z)\in\mathbb{F}^4,x,y,z\in\mathbb{F}\}$中的元素$(x,x,y,z)$,有

$$(x,x,y,z)=(x,x,y,y)+(0,0,0,z-y)$$

又$(x,x,y,y)\in U,(0,0,0,z-y)\in W$,于是$(x,x,y,z)\in U+W$,从而

$$\left\{(x,x,y,z)\in\mathbb{F}^4,x,y,z\in\mathbb{F}\right\}\subseteq U+W$$

从而$U+W=\{(x,x,y,z)\in\mathbb{F}^4,x,y,z\in\mathbb{F}\}$,证毕.

接下来的结果表明,子空间的和还是子空间.并且,子空间的和是包含这些子空间的最小子空间; 如果一个子空间包含某些子空间,那么它一定包含这些子空间的和.

1.5

假定$V_1,\cdots,V_m$是V的子空间,那么$V_1+\cdots+V_m$是最小的包含$V_1,\cdots,V_m$的子空间.

1.5 Proof.

验证$V_1+\cdots+V_m$是V的子空间并不困难.

对于任意$v\in V_i,1\leqslant i\leqslant m$,在剩余的子空间中取$\mathbf{0}$,则有

$$\mathbf{0}+\cdots+v+\cdots+\mathbf{0}=v+(m-1)\mathbf{0}=v\in V_1+\cdots+V_m$$

从而$\forall i\in[1,m]\cap\mathbb{N},V_i\in V_1+\cdots+V_m$.

考虑所有包含$V_1,\cdots,V_m$的子空间,它必然包含$V_1+\cdots+V_m$.

从而$V_1+\cdots+V_m$是最小的包含$V_1,\cdots,V_m$的子空间.证毕.

设$V_1,\cdots,V_m$是V的子空间,于是$V_1+\cdots+V_m$中的每个元素都可以写成

$$v_1+\cdots+v_m$$

其中每个$v_i\in V_i$. 那么是否有一些时候,$V_1+\cdots+V_m$中的每个向量都能唯一地用上述形式表出？这种情况十分重要,所以它有专属的名字:直和.

2.直和

2.1 定义:直和

设$V_1,\cdots,V_m$是V的子空间. 如果$V_1+\cdots+V_m$中的每个元素都能用$\sum_{i=1}^{m} v_i, v_i\in V_i$的形式进行唯一表出, 那么我们称$V_1+\cdots+V_m$为**直和**,记作$V_1\oplus\cdots\oplus V_m$.

下面给出了一些直和的例子.

2.1.1 例:直和

(a) 假定

$$U=\left\{(x,y,0)\in\mathbb{F}^3:x,y\in\mathbb{F}\right\},W=\left\{(0,0,z)\in\mathbb{F}^3:z\in\mathbb{F}\right\}$$

那么$U\oplus W=\mathbb{F}^3$.

(b) 假定

$$\forall i\in[1,n]\cap\mathbb{N},V_i=\{(x_1,\cdots,x_n):x_i\in\mathbb{F},\text{其余}x_j=0\}$$

那么$V_1\oplus\cdots\oplus V_n=\mathbb{F}^n$.

这两者的证明均不困难.下面我们给出判判断子空间的和是否是直和的条件.

2.2.1 直和的条件

假设$V_1,\cdots,V_m$是V的子空间,那么$V_1+\cdots+V_m$是直和当且仅当用$v_1+\cdots+v_m$(其中$v_i\in V_i$)的方式表示$\mathbf{0}$的唯一方式是将所有v_i取$\mathbf{0}$.

2.2.1 Proof.

首先假定$V_1+\cdots+V_m$是直和,那么直和的定义就表明$v_1+\cdots+v_m=\mathbf{0}$是唯一的.

又$\forall V_i,\mathbf{0}\in V_i$,于是表出$\mathbf{0}$仅当$v_1=\cdots=v_m=\mathbf{0}$.

现在假定用$v_1+\cdots+v_m$(其中$v_i\in V_i$)的方式表示$\mathbf{0}$的唯一方式是将所有v_i取$\mathbf{0}$. 取$v\in V_1+\cdots+V_m$,不妨假定v可以由如下两种方式表出:

$$v=v_1+\cdots+v_i,v_i\in V_i$$

$$v=u_1+\cdots+u_1,u_i\in V_i$$

两式相减可得$\mathbf{0}=(v_1-u_1)+\cdots+(v_m-u_m)$.又$v_i-u_i\in V_i$, 故该等式表明$v_i-u_i=\mathbf{0}$,进而$v_1=u_1,\cdots,v_m=u_m$,所以表出方式是唯一的,从而$V_1+\cdots+V_m$为直和.

从这个定理可以很容易推出两个子空间的和为直和的条件.

2.2.2 两个子空间的直和

假定U和W是V的子空间,那么$U+W$是直和当且仅当$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$.

2.2.2 Proof.

首先假定$U+V$是直和.如果$v \in U \cap W$,那么一定有$-v \in U \cap W$.而$\mathbf{0} = v + (-v) = (-v) + v$. 由于$\mathbf{0}$被唯一表出,故仅当$v = \mathbf{0}$才可行,于是$\{\mathbf{0}\} = U \cap W$.

另一方面,假设$U \cap W = \{\mathbf{0}\}$,那么$\forall u \in U \backslash \{\mathbf{0}\}$都有$-u \in U$,从而$-u \notin W$. 于是表出$\mathbf{0}$的唯一方法是取$u = \mathbf{0} \in U, w = \mathbf{0} \in W$,从而根据**2.7.1**可以得知$U+W$为直和.

需要注意的是,上面的定理并不能推广到两个子空间以上的情形.在这些情况下,只检验两两子空间仅交于$\mathbf{0}$是不够的.

下面我们来看一些例题和拓展的定理.

Example 1.

假定U是$\mathbb{R}^2$的非空子集,为以下的命题举出反例.

(a) 若U满足对加法封闭和对取加法逆元封闭(即$\forall u \in U$有$-u \in U$),则U是$\mathbb{R}^2$的子空间.

(b) 若U满足对标量乘法封闭,则U是$\mathbb{R}^2$的子空间.

Solution.

(a) 取$U = \{(x,y) \to \mathbb{R}^2 : x, y \in \mathbb{Z}\}$,不难验证其符合题设.
然而,对于任意$u = (x_0, y_0) \in U \backslash \{(0,0)\}$和任意$a \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$,都有$au = (ax_0, ay_0) \notin U$, 于是其对标量乘法不封闭,故$U$不一定是$\mathbb{R}^2$的子空间.

(b) 取$U = \{(x,y) \to \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$,不难验证其符合题设.
然而,取$u = (0,1), v = (1,0) \in U$,有$u + v = (0,1) + (1,0) = (1,1) \notin U$,、进而$U$对加法不封闭,故$U$不一定是$\mathbb{R}^2$的子空间.

上述命题的否定告诉我们,V的子集U必须同时满足对加法和标量乘法封闭才可以得出U是V的子空间这一结论.

Example 2.1

若V_1, V_2是V的两个子空间,试证明:$V_1 \cup V_2$是V的子空间,当且仅当$V_1 \subseteq V_2$或$V_2 \subseteq V_1$.

Proof.

若$V_1, V_2, V_1 \cup V_2$均为V的子空间.

假定$\exists u \in V_1 \backslash V_2, \exists v \in V_2 \backslash V_1$,那么 $u + v \notin V_1$.若不然,根据$u + v \in V_1$可知$v \in V_1$,与上述假设不符. 同理也可以知道$u + v \notin V_2$,于是$u + v \notin V_1 \cup V_2$.

这与$V_1 \cup V_2$是V的子空间不符,因为由$u, v \in V_1 \cup V_2$必然能推出$u + v \in V_1 \cup V_2$.

于是我们知道我们的假设不符,即$V_1 \backslash V_2$和$V_2 \backslash V_1$中至少有一个为空集,从而$V_1 \subseteq V_2$或$V_2 \subseteq V_1$.

若$V_1 \subseteq V_2$或$V_2 \subseteq V_1$,那么显然有$V_1 \cup V_2 = V_1$或$V_1 \cup V_2 = V_2$. 既然V_1, V_2均为V的子空间,自然有$V_1 \cup V_2$为V的子空间.

综上可得原命题成立.

Example 2.2

若V_1, V_2, V_3是V的子空间,试证明$V_1 \cup V_2 \cup V_3$为V的子空间,当且仅当其中一个子空间包含另外两个子空间.

注意:事实上该命题成立要求域$\mathbb{F}$的特征大于2.

Proof.

充分性是显然的.现在我们来证明其必要性.

即:若$V_1 \cup V_2 \cup V_3$为V的子空间,则其中一个子空间包含另外两个子空间.

假设命题不成立,那么必然三个空间互相不包含. 否则如果有$V_1 \subseteq V_2 \cup V_3$,则有

$$V_1 \cup V_2 \cup V_3 = V_2 \cup V_3$$

于是$V_2 \cup V_3$为V的子空间.运用**Example 2.1**的结论可知$V_2 \subseteq V_3$或$V_3 \subseteq V_2$,这与反证法的假设不成立.

不失一般性地,假定$V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{\mathbf{0}\}$,令$u \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3), v \in V_2 \backslash (V_1 \cup V_3)$.

考虑$u + v$,根据定义,应当有$u + v \in V_1 \cup V_2 \cup V_3$,于是只能有$u + v \in V_3 \backslash (V_1 \cup V_2)$.

考虑$u + (u + v)$,同理可知只能有$u + (u + v) \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3)$.

于是我们有$u + (u + v) + (-u) = 2v \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3)$,即$v \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3)$.这与$v$的定义不符.

从而我们的假设不成立,因此原命题成立.

注:如果$\mathbb{F}$的特征为2,那么我们并不能从$2v \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3)$得出$v_2 \in V_1 \backslash (V_2 \cup V_3)$,因为$2v$有可能等于$\mathbf{0}$.

Example 2.3

若V是特征大于n的域$\mathbb{F}$上的向量空间,$U_1, \cdots, U_n$是V的子空间.

若$\bigoplus\limits_{i=1}^{n} U_i = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$, 则$\exists k \in [1, n]$, s.t.$U_k = \bigcup\limits_{i=1}^{n} U_i$.

> 证明过程略.(我不会告诉你是因为我不会证所以不写的)