上三角矩阵

1.上三角矩阵

我们在之前对矩阵的研究中着重强调了基的选取.现在在研究算子时,我们着重考虑仅用一个基来描述它.

1.1 定义:算子的矩阵

设$T \in \mathcal{L}(V)$.T关于V的基$v_1, \cdots, v_m$的矩阵是$n \times n$矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n,1} & \cdots & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

其中的元素$A_{j,k}$由$Tv_k = A_{1,k}v_1 + \cdots + A_{n,k}v_n$定义.

我们约定,在未说明选取的基时,默认采取标准基.

为了使矩阵的研究变得简单,我们总是希望一个矩阵有尽可能多的0.我们已经知道存在V的一组基使得$\mathcal{M}(T)$的第一列除第一个元素一定为0.那么是否能重复这样的操作使得这个矩阵的某一部分都是0呢?为此,我们定义上三角矩阵.

1.2 定义:上三角矩阵

称一个方阵为**上三角矩阵**,若其中所有位于对角线以下的元素为0.

形象地说,上三角矩阵应具有如下形式.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

我们马上就会看到将对角线上的元素记为λ_k的合理性.

1.3 上三角矩阵的条件

设$T \in \mathcal{L}(V)$且$v_1, \cdots, v_n$是V的一个基.那么以下几条结论等价.

(a) T关于$v_1, \cdots, v_n$的矩阵是上三角矩阵.

(b) 对任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$在$T$下不变.

(c) 对任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$.

Proof.

先假设**(a)**成立.根据上三角矩阵的定义,$Tv_k = A_{1,k}v_1 + \cdots + A_{k,k}v_k \in \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$,于是**(c)**成立.

假设**(c)**成立,那么必然有$Tv_k = a_1v_1 + \cdots + a_kv_k$,从而$\mathcal{M}(T)$第$k$列在第$k$行后均为0,于是**(a)**成立.

而根据不变的定义,**(b)**与**(c)**是等价的.

综上可知**(a)(b)**和**(c)**等价.

于是我们可以得出一个有关上三角矩阵的简单等式.

1.4 具有上三角矩阵的算子的等式

设$T \in \mathcal{L}(V)$且存在V的一组基使得T关于该基有上三角矩阵.设矩阵的对角线元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$,则有

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I) = \mathbf{0}$$

Proof.

令$v_1, \cdots, v_n$为V的一个基,且T关于该基有上三角矩阵,其对角线上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

于是$Tv_1 = \lambda_1 v_1$,即$(T - \lambda_1 I)v_1 = \mathbf{0}$.因此对于任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_k I)v_1 = \mathbf{0}$.

注意到$(T_2 - \lambda_2 I)v_2 \in \mathrm{span}(v_1)$,于是$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I)v_2 = \mathbf{0}$.进一步地,对于任意$2 \leqslant k \leqslant n$有$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_k I)v_2 = \mathbf{0}$.

重复上面的操作,我们知道对于任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_n I)\, v_k = \mathbf{0}$.

因为这算子把每个基向量都映到零向量,于是这算子是零映射.

由算子的矩阵找到算子的特征值是困难的.然而根据上述定理,我们可以根据上三角矩阵简单地找到特征值.

1.5 由上三角矩阵确定特征值

设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基具有上三角矩阵,那么T的特征值恰为该矩阵对角线的各元素.

Proof.

令$v_1, \cdots, v_n$为V的一个基,且T关于该基有上三角矩阵,其对角线上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

首先$Tv_1 = \lambda_1 v_1$,于是λ_1是T的特征值.

对于任意$2 \leqslant k \leqslant n$,我们有$(T - \lambda_k I)v_k \in \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_{k-1})$.

于是$T - \lambda_k I$将$\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$映成$\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_{k-1})$.于是限制于$\mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$的算子$T - \lambda_k I$不是单射.

于是存在$v \in \mathrm{span}(v_1, \cdots, v_k)$且$v \neq \mathbf{0}$使得$(T - \lambda_k I)v = 0$,从而$\lambda_k$是$T$的特征值.

我们已经证明了各λ_k均为T的特征值.现在我们证明T没有其余特征值.

令$q=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$,于是根据**1.4**可知$q(T)=\mathbf{0}$.于是$q$是$T$的最小多项式的多项式倍,因而它包含$T$的最小多项式的所有零点.即$q$的零点包含所有$T$的特征值.

1.6 存在上三角矩阵的充要条件

设V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$.那么T关于V的某个基具有上三角矩阵,当且仅当T的最小多项式等于$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$,其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}$.

Proof.

$\Rightarrow$:设T关于V的某个基具有上三角矩阵,令$\alpha_1,\cdots,\alpha_n$代表该矩阵对角线上的元素.定义多项式$q\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$为

$$q(z)=(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$$

于是q是T的最小多项式p的多项式倍,因而T的最小多项式$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$一定具有$p(z)=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$的形式,其中$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\}\subseteq\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$.

$\Leftarrow$:设T的最小多项式$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$为$p(z)=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$.我们对$m$进行归纳法.

若$m=1$,那么$T-\lambda_1 I=\mathbf{0}$,于是$T=\lambda_1 I$.这表明T关于V的任意基的矩阵都是上三角矩阵.

当$m>1$时,设欲证结论对所有$k<m$都成立.令

$$U=\text{range }(T-\lambda_m I)$$

那么U在T下是不变的.那么$T|_U$是U上的算子.

对于任意$u\in U$,存在$v\in V$使得$u=(T-\lambda_m I)v$,并且

$$(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_{m-1}I)u=(T-\lambda_1)\cdots(T-\lambda_m)v=\mathbf{0}$$

由此,$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_{m-1})$是$T|_U$的最小多项式的多项式倍.

于是$T|_U$的最小多项式为至多$m-1$个形如$z-\lambda_k$的一次项乘积.

由归纳假设,存在U的基$u_1,\cdots,u_M$使得$T|_U$关于该基有上三角矩阵.于是对于任意$1\leqslant k\leqslant M$,据**1.3**有

$$Tu_k=(T|_U)(u_k)\in\text{span}(u_1,\cdots,u_k)$$

将$u_1,\cdots,u_M$扩展为V的一组基$u_1,\cdots,u_M,v_1,\cdots,v_N$.对于任意$1\leqslant k\leqslant N$有

$$Tv_k=(T-\lambda_m I)v_k+\lambda_m v_k$$

由U的定义可知$(T-\lambda_m I)v_k\in U=\text{span}(u_1,\cdots,u_M)$,于是上式表明

$$Tv_k\in\text{span}(u_1,\cdots,u_M,v_1,\cdots,v_k)$$

再次根据**1.3**可知T关于$u_1,\cdots,u_M,v_1,\cdots,v_N$的矩阵是上三角矩阵.

在上面的证明中,$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$即为$T$的上三角矩阵的对角线元素(尽管可能有重复).于是我们可以得出复空间上的算子总有上三角矩阵.

1.7 复空间上的算子都有上三角矩阵

设V是有限维复向量空间且$T \in \mathcal{L}(V)$,那么T关于V的某个基具有上三角矩阵.

Proof.

根据代数基本定理,T的最小多项式总能写作**1.6**要求的形式,于是T具有上三角矩阵.

我们需要注意的是,尽管如果T关于V的基$v_1, \cdots, v_n$具有上三角矩阵,但我们只能确保v_1是T的特征向量.至于后面的v_k,我们需要除了对角线上的元素外其余元素均为0才可以.