**1.** 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$.证明:任取$V$和$W$的基,$T$对应的矩阵都至少有$\dim \operatorname{range} T$个非零元素.

**Proof.**

设选取$V$的基为$v_1,\cdots,v_m$,选取$W$的基为$w_1,\cdots,w_n$. 根据线性映射基本定理有$\dim V = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T = m$.

若矩阵中非零元素少于$\dim \operatorname{range} T$个,那么说明至少有$\dim \operatorname{null} T + 1$列全部由0构成.

假定这些列的列号为$k$,于是$v_k = 0w_1 + \cdots + 0w_n = \mathbf{0}$.

于是至少有$\dim \operatorname{null} T + 1$个$v_k$满足$Tv_k = \mathbf{0}$,这与null $T$的定义不符.

从而命题得证.

**3.** 设$V$和$W$是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V,W)$.证明:$\dim \operatorname{range} T = 1$,当且仅当存在在$V$的一个基和$W$的一个基使得关于这些基的$\mathcal{M}(T)$的所有元素都是1.

**Proof.**

$\Leftarrow$:设$v_1,\cdots,v_m$是$V$的一组基,$w_1,\cdots,w_n$是$W$的一组基.依题设有

$$\forall k \in \{1,\cdots,m\}, Tv_k = w_1 + \cdots + w_n$$

于是$Tv_1 = \cdots = Tv_m = w_1 + \cdots + w_n$.下面我们说明$w := w_1 + \cdots + w_n$是range $T$的基.

对于任意$v \in V$,存在唯一一组标量$a_1,\cdots,a_m \in \mathbb{F}$使得$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$.于是$\forall Tv \in \operatorname{range} T$都有

$$Tv = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m = (a_1 + \cdots + a_m)\, w$$

从而$w$张成range $T$,即$\dim \operatorname{range} T = 1$.

$\Rightarrow$:由$\dim \operatorname{range} T = 1$可知

$$\exists w \in W, \text{s.t.} \forall v \in V, \exists a \in \mathbb{F}, Tv = aw$$

**3.** 设$v_1,\cdots,v_n$是$V$的基,$w_1,\cdots,w_m$是$W$的基.

**(1)** 证明:如果$S,T \in \mathcal{L}(V,W)$,那么$\mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.

**(2)** 证明:如果$T \in \mathcal{L}(V,W)$,$\lambda \in \mathbb{F}$,那么$\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

**Proof.**

**(1)** 记$\mathcal{M}(S) = A, \mathcal{M}(T) = B, \mathcal{M}(S+T) = C$.于是对于任意$k \in \{1,\cdots,m\}$都有

$$Sv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m$$

$$Tv_k = B_{1,k}w_1 + \cdots + B_{m,k}w_m$$

两式相加可得

$$(S+T)v_k = Sv_k + Tv_k = (A_{1,k} + B_{1,k})\, w_1 + \cdots + (A_{m,k} + B_{m,k})\, w_m$$

又$w_1, \cdots, w_m$是$W$的基,于是表出$(S+T)v_k$的系数应是唯一的.将上式与

$$(S+T)v_k = C_{1,k}w_1 + \cdots + C_{m,k}w_m$$

比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \cdots, m\}, C_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k}$$

又因为上式对所有$k \in \{1, \cdots, m\}$成立,于是根据矩阵加法的定义可知$A + B = C$.命题得证.

**(2)** 记$\mathcal{M}(T) = A, \mathcal{M}(\lambda T) = B$. 对于任意$k \in \{1, \cdots, n\}$有

$$\lambda T v_k = \lambda\left(A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m\right)$$

$$(\lambda T)v_k = B_{1,k}w_1 + \cdots + B_{m,k}w_m$$

又$w_1, \cdots, w_m$是$W$的基,于是表出$\lambda T v_k$的系数应是唯一的.比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \cdots, m\}, B_{j,k} = \lambda A_{j,k}$$

又因为上式对所有$k \in \{1, \cdots, m\}$成立,于是根据矩阵标量乘法的定义可知$B = \lambda A$.命题得证.

**4.** 设$D \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\right)$是微分映射,定义为$Dp = p'$. 求$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$的一组基和$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的一组基使得$D$关于这些基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

**Solution.**
不妨选取$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的标准基$1, x, x^2$.根据矩阵的定义可知此时对应的$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$的基为$x, \dfrac{1}{2}x^2, \dfrac{1}{3}x^3, 1$.

**5.** 设$V$和$W$是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.证明:存在$V$的一个基和$W$的一个基使得关于这些基的$\mathcal{M}(T)$满足除了在第$k$行第$k$列$(1 \leqslant k \leqslant \dim \operatorname{range} T)$的元素为1之外其余元素均为0.

> **Proof.**
>
> 设$\dim \operatorname{range} T$的一组基为$w_1, \cdots, w_m$.于是存在$v_1, \cdots, v_m$使得$\forall k \in \{1, \cdots, m\}$有$Tv_k = w_k$.
>
> 下面证明$v_1, \cdots, v_m$线性无关.设一组标量$a_1, \cdots, a_m$满足
>
> $$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m$$
>
> 于是$T(\mathbf{0}) = a_1 Tv_1 + \cdots + a_m Tv_m = a_1 w_1 + \cdots + a_m w_m = \mathbf{0}$.
>
> 由于$w_1, \cdots, w_m$线性无关,于是上式中各$a$均仅能为0,于是$v_1, \cdots, v_m$线性无关.
>
> 如此,我们可以把$w_1, \cdots, w_m$和$v_1, \cdots, v_m$分别扩展为$W$和$V$的基,进而这个矩阵满足题意.

> **6.** 设$v_1, \cdots, v_m$是$V$的一组基,$W$是有限维的.设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.
>
> 试证明:存在$W$的一组基$w_1, \cdots, w_n$使得$\mathcal{M}(T)$除了第一行第一列可能为1以外,第一列的所有元素均为0.

> **Proof.**
>
> 若$Tv_1 = \mathbf{0}$,那么显然第一列所有元素均为0.
>
> 若$Tv_1 \neq \mathbf{0}$,不妨设$w_1 := Tv_1 \in W$.于是$w_1$可以被扩展为$W$的一组基$w_1, \cdots, w_n$.由于$w_1, \cdots, w_n$线性无关,于是
>
> $$Tv_1 = 1w_1 + 0w_2 + \cdots + 0w_n$$
>
> 于是$\mathcal{M}(V, W)$的第一行第一列的元素为1,其余元素均为0.

> **7.** 设$w_1, \cdots, w_n$是$W$的一组基,$V$是有限维的.设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.
>
> 试证明:存在$V$的一组基$v_1, \cdots, v_m$使得$\mathcal{M}(T)$除了第一行第一列可能为1以外,第一行的所有元素均为0.

> **Proof.**
>
> 我们首先任取$V$的一组$v_1, \cdots, v_m$.
>
> 若此时矩阵的第一行均为0或仅有第一列第一行为1,其余为0,那么命题得证.
>
> 否则,我们对这组基做如下变换.
>
> $$v_1' = \frac{1}{A_{1,1}} v_1$$
> $$v_2' = v_2 - \frac{A_{1,2}}{A_{1,1}} v_1$$
> $$\cdots v_m' = v_m - \frac{A_{1,m}}{A_{1,1}} v_1$$
>
> 于是有
>
> $$Tv_1' = 1w_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{j,1} w_j$$

$$Tv'_k = 0w_1 + \sum_{j=2}^{n} A_{j,k} w_j$$

如此,矩阵的第一行就满足了题设.现在我们证明变换后的$v'_1, \cdots, v'_m$仍为$V$的基. 设一组标量$a_1, \cdots, a_m$满足

$$\begin{aligned}\mathbf{0} &= a_1 v'_1 + \cdots + a_m v'_m \\ &= \left( \frac{a_1}{A_{1,1}} - \sum_{j=2}^{m} \frac{a_j A_{1,j}}{A_{1,1}} \right) v_1 + \sum_{j=2}^{m} a_m v_m\end{aligned}$$

由于$v_1, \cdots, v_m$是$V$的基,于是它们线性无关.于是上式成立当且仅当$a_1 = \cdots = a_m = 0$.

于是$v'_1, \cdots, v'_m$线性无关,又其长度为$\dim V$,于是它为$V$的基.命题得证.

**注:**这样的思想似乎与解线性方程组的消元方法是类似的.

**8.** 设$A$是$m \times n$矩阵,$B$是$n \times p$矩阵,证明

$$(AB)_{j,\cdot} = A_{j,\cdot} B$$

对$1 \leqslant j \leqslant m$均成立.换言之,证明$AB$的第$j$行等于$A$的第$j$行乘$B$.

**Proof.**

矩阵乘法的定义表明,对于任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$有

$$(AB)_{j,k} = A_{j,\cdot} B_{\cdot,k}$$

如此,$A_{j,\cdot}B$的第$k$行的元素是上式的右端项,$(AB)_{j,\cdot}$的第$k$行的元素是上式的左端项.

于是命题得证.

**9.** 设$a = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$是$1 \times n$矩阵,$B$是$n \times p$矩阵,证明:

$$aB = a_1 B_{1,\cdot} + \cdots + a_n B_{n,\cdot}$$

换言之,证明$aB$是$B$的各行的线性组合,各行所乘的标量来自$a$.

**Proof.**

根据矩阵乘法的定义,对于任意$1 \leqslant k \leqslant p$有

$$(aB)_{1,k} = a_1 B_{1,k} + \cdots + a_n B_{n,k}$$

而$a_1 B_{1,\cdot} + \cdots + a_n B_{n,\cdot}$的第$k$列的元素也等于上面式子的值.

于是有$aB = a_1 B_{1,\cdot} + \cdots + a_n B_{n,\cdot}$,命题得证.

**10.** 给出一例使得$AB \neq BA$的$2 \times 2$矩阵$A$和$B$.

**Solution.**
不妨令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 于是$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

**11.** 证明分配性质对矩阵加法和矩阵乘法仍然成立.

**(1)** 假设矩阵$A, B, C$的大小使$A(B+C)$有意义,试证明$A(B+C) = AB + AC$.

**(2)** 假设矩阵$A, B, C$的大小使$(A+B)C$有意义,试证明$(A+B)C = AC + BC$.

**Proof.**

**(1)** 由题意不妨令$A$为$m \times n$矩阵,$B, C$均为$n \times p$矩阵.于是对于任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant p$都有

$$\begin{aligned}
(A(B+C))_{j,k} &= \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}(B+C)_{i,k} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}\left(B_{i,k} + C_{i,k}\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}B_{i,k} + \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}C_{i,k} \\
&= (AB)_{j,k} + (AC)_{j,k} \\
&= (AB+AC)_{j,k}
\end{aligned}$$

于是$A(B+C)$的第$j$行第$k$列的元素等于$(AB+AC)$的第$j$行第$k$列的元素.
于是$A(B+C) = AB + AC$,命题得证.

**(2)** 证明与**(1)**类似,在此不再赘述.

**12.** 证明矩阵乘法是可结合的.换言之,假设矩阵$A, B, C$的大小使得$(AB)C$有意义,证明$(AB)C = A(BC)$.

**Proof.**

**Method I.**

设$A$是$m \times n$矩阵,$B$是$n \times p$矩阵,$C$是$p \times q$矩阵. 根据矩阵乘法的定义,$A(BC)$和$(AB)C$都是$m \times q$矩阵.

于是对于任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant q$有

$$\begin{aligned}(A(BC))_{j,k} &= \sum_{i=1}^{n} A_{j,i}(BC)_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(A_{j,i}\sum_{r=1}^{p} B_{i,r}C_{r,k}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} A_{j,i}B_{i,r}C_{r,k}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}((AB)C)_{j,k} &= \sum_{r=1}^{p}(AB)_{j,r}C_{r,k} \\ &= \sum_{r=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{n} A_{j,i}B_{i,r}\right)C_{r,k} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{p} A_{j,i}B_{i,r}C_{r,k}\end{aligned}$$

于是$(AB)C$和$A(BC)$的对应位置的元素均相等.从而$(AB)C = A(BC)$,命题得证.

**Method II.**

设矩阵$A, B, C$分别对应线性映射$T \in \mathcal{L}(U, V), S \in \mathcal{L}(V, W), R \in \mathcal{L}(W, X)$,即$A = \mathcal{M}(T), B = \mathcal{M}(S), C = \mathcal{M}(R)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}A(BC) &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(SR) \\ &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(R) \\ &= \mathcal{M}(TS)\mathcal{M}(R) \\ &= (AB)C\end{aligned}$$

于是命题得证.

**13.** 设$A$是$n \times n$矩阵.试证明$A^3$的第$j$行第$k$列的元素为

$$\sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{j,p}A_{p,r}A_{r,k}$$

**Proof.**

根据矩阵乘法的定义有

$$\begin{aligned}A^3_{j,k} &= \sum_{p=1}^{n} A_{j,p}\left(A^2_{p,k}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n} A_{j,p}\left(\sum_{r=1}^{n} A_{p,r}A_{r,k}\right) \\ &= \sum_{p=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} A_{j,p}A_{p,r}A_{r,k}\end{aligned}$$

于是命题得证.

**14.** 设$m, n \in \mathbb{N}^*$.证明函数$A \mapsto A^{\mathrm{t}}$是从$\mathbb{F}^{m,n}$到$\mathbb{F}^{n,m}$的线性映射.

**Proof.**

设$A, B \in \mathbb{F}^{m,n}$.对于任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$有

$$(A+B)^{\mathrm{t}}_{k,j} = (A+B)_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k} = A^{\mathrm{t}}_{k,j} + B^{\mathrm{t}}_{k,j}$$

即$(A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}$,从而该映射满足可加性.

设$A \in \mathbb{F}^{m,n}, \lambda \in \mathbb{F}$.对于任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$有

$$(\lambda A)^{\mathrm{t}}_{k,j} = (\lambda A)_{j,k} = \lambda(A_{j,k}) = \lambda(A^{\mathrm{t}}_{k,j})$$

从而$(\lambda A)^{\mathrm{t}} = \lambda(A^{\mathrm{t}})$,从而该映射满足齐次性.

于是该映射是线性映射,命题得证.

**15.** 试证明:如果$A$是$m \times n$矩阵,$C$是$n \times p$矩阵,那么$(AC)^{\mathrm{t}} = C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}$.

**Proof.**

根据矩阵乘法和转置矩阵的定义,对于任意$1 \leqslant j \leqslant p, 1 \leqslant k \leqslant m$有

$$\begin{aligned}
(AC)^{\mathrm{t}}_{j,k} &= AC_{k,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} A_{k,i}C_{i,j} \\
&= \sum_{i=1}^{n} C^{\mathrm{t}}_{j,i}A^{\mathrm{t}}_{i,k} \\
&= (C^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}})_{j,k}
\end{aligned}$$

于是命题得证.

**16.** 设$A$是$m \times n$矩阵($A \neq \mathbf{0}$),证明:$A$的秩为1,当且仅当存在$(c_1, \cdots, c_m) \in \mathbb{F}^m$和$(d_1, \cdots, d_n) \in \mathbb{F}^n$使得$A_{j,k} = c_j d_k$对任意$1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n$成立.

**Proof.**

$\Rightarrow$:由题意可知$\dim \operatorname{span}(A_{\cdot,1}, \cdots, A_{\cdot,n}) = 1$,于是各$A_{\cdot,k}$互相成标量倍关系.

不妨设$A_{\cdot,k}=a_kA_{\cdot,1}$,令$c_j=A_{j,1}(1\leqslant j\leqslant m),d_k=a_k(1\leqslant k\leqslant n)$.于是

$$A_{j,k}=a_kA_{j,1}=c_jd_k$$

这就证明了$(c_1,\cdots,c_m)$和$(d_1,\cdots,d_n)$的存在性.
$\Leftarrow$:对于任意第$k$列中的第$j$行的元素有

$$A_{j,k}=c_jd_k=c_jd_1\cdot\frac{d_k}{d_1}=\frac{d_k}{d_1}A_{j,1}$$

从而$A_{\cdot,k}=\dfrac{d_k}{d_1}A_{\cdot,1}$.这表明$A$的各列都是第一列的标量倍,从而$A$的秩为1.命题得证.

**17.** 设$T\in\mathcal{L}(V)$,$u_1,\cdots,u_n$和$v_1,\cdots,v_n$是$V$的两组基.证明下列五个命题等价.

**(1)** $T$是单射.

**(2)** $\mathcal{M}(T)$的列在$\mathbb{F}^{n,1}$中线性无关.

**(3)** $\mathcal{M}(T)$的列张成$\mathbb{F}^{n,1}$.

**(4)** $\mathcal{M}(T)$的行张成$\mathbb{F}^{1,n}$.

**(5)** $\mathcal{M}(T)$的行在$\mathbb{F}^{1,n}$中线性无关.

这里的$\mathcal{M}(T)$即表示$\mathcal{M}(T,(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n))$.

**Proof.**
记$\mathcal{M}(T)=A$.
**(1)**$\Rightarrow$**(2)**:设$u\in V$和一组标量$a_1,\cdots,a_n$满足$u=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$.于是

$$Tu=a_1Tu_1+\cdots+a_nTu_n$$

由于$T$是单射,即null $T=\mathbf{0}$,于是$Tu=\mathbf{0}$当且仅当$u=\mathbf{0}$,即各$a_k=0$.这表明各$Tu_k$线性无关.
若$A$的列线性相关,那么存在$A_{\cdot,k}\in\operatorname{span}(A_{\cdot,1},\cdots,A_{\cdot,k-1})$.于是存在一组标量$b_1,\cdots,b_{k-1}$使得

$$\forall 1\leqslant j\leqslant n,A_{j,k}=b_1A_{j,1}+\cdots+b_{k-1}A_{j,k-1}$$

即

$$\forall 1\leqslant j\leqslant n,A_{j,k}v_j=b_1A_{j,1}v_j+\cdots+b_{k-1}A_{j,k-1}v_j$$

将上式求和即可得

$$Tu_k=b_1Tu_1+\cdots+b_{k-1}Tu_{k-1}$$

这与各$Tu_k$线性无关矛盾,进而$A$的各列线性无关.
**(2)**$\Rightarrow$**(1)**:只需证明null $T=\mathbf{0}$即可.为此,我们设$u:=a_1u_1+\cdots+a_nu_n\in V$.

于是

$$\begin{aligned}Tu &= a_1Tu_1+\cdots+a_nTu_n\\ &= a_1\sum_{j=1}^{n}A_{j,1}v_j+\cdots+a_n\sum_{j=1}^{n}A_{j,n}v_j\\ &= \sum_{k=1}^{n}a_kA_{1,k}v_1+\cdots+\sum_{k=1}^{n}a_kA_{n,k}v_n\end{aligned}$$

由于$v_1,\cdots,v_n$是$V$的一组基,于是$Tu=\mathbf{0}$当且仅当各$\sum_{k=1}^{n}a_kA_{j,k}=0$.这等价于$\sum_{k=1}^{n}a_kA_{\cdot,k}=\mathbf{0}$.

由于$A$的各列线性无关,于是$a_1A_{\cdot,1}+\cdots+a_nA_{\cdot,n}=\mathbf{0}$当且仅当各$a_k=0$.

于是$Tu=\mathbf{0}$当且仅当各$a_k=0$,即$u=\mathbf{0}$.于是$T$是单射.

**(2)**$\Leftrightarrow$**(3)**:由于列构成的组的长度恰为$\dim\mathbb{F}^{n,1}=n$,于是这两者均等价于$A$的各列张成$\mathbb{F}^{1,m}$,于是两者等价.

**(1)**,**(4)**和**(5)**之间的推导是类似的,在此不再赘述.