向量空间的基本定义

1.向量空间

定义向量空间的动机源于$\mathbb{F}^n$中加法和标量乘法的性质:各种交换律,结合律,恒等元和逆元等. 将向量空间定义为一个集合V,我们所说的加法和标量乘法应当有如下定义:

1.1 定义:加法,标量乘法

(1) 集合V上的加法是一个函数,它将每一对$u, v \in V$对应到一个元素$u + v \in V$.

(2) 集合V上的标量乘法是一个函数,它将每个$\lambda \in \mathbb{F}$和每个$v \in V$对应到一个元素$\lambda v \in V$.

现在我们可以据此来定义向量空间.

1.2 定义:向量空间

一个**向量空间**是一个集合V,V上的加法和标量乘法满足下列性质.

(1) **可交换性**:对于任意$u, v \in V$,都有$u + v = v + u$.

(2) **可结合性**:对于任意$u, v, w \in V$以及任意$a, b \in \mathbb{F}$,都有$(u + v) + w = u + (v + w)$以及$(ab)v = a(bv)$.

(3) **加法恒等元**:对于任意$v \in V$,都存在$\mathbf{0} \in V$使得$v + \mathbf{0} = v$.

(4) **加法逆元**:对于任意$v \in V$,都存在$w \in V$使得$v + w = \mathbf{0}$.

(5) **乘法恒等元**:对于任意$v \in V$,都有$1v = v$.

(6) **分配性质**:对于任意$u, v \in V$以及任意$a, b \in \mathbb{F}$,都有$a(u + v) = au + av$以及$(a + b)v = av + bv$.

向量空间上的标量乘法依赖于$\mathbb{F}$的选取.因此我们需要更精确地描述时会说V是$\mathbb{F}$上的向量空间. 例如,$\mathbb{R}^n$是$\mathbb{R}$上的向量空间,$\mathbb{C}^n$是$\mathbb{C}$上的向量空间.
由向量空间的定义可以引出一些有关的性质.

1.3.1 加法恒等元唯一

一个向量空间有唯一的加法恒等元.

1.3.1 Proof.

假定$\mathbf{0}$和$\mathbf{0}'$是同一个向量空间V的加法恒等元,那么

$$\mathbf{0}' = \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{0}' = \mathbf{0}$$

三个等号成立依次是因为:$\mathbf{0}$是加法恒等元;可交换性;$\mathbf{0}'$是加法恒等元.
于是$\mathbf{0}' = \mathbf{0}$,从而V中只有一个加法恒等元.

1.3.2 加法逆元唯一

一个向量空间有唯一的加法逆元.

1.3.2 Proof.

设向量空间V,令$v \in V$,假定w和w'均为v的加法逆元.于是

$$w = w + \mathbf{0} = w + (v + w') = (w + v) + w' = \mathbf{0} + w' = w'$$

于是$w = w'$,命题得证.

由于加法逆元是唯一的,我们作如下定义.

1.3.3 定义:$-v, w - v$

令$v, w \in V$,那么

(1) $-v$表示v的加法逆元.

(2) $w - v$表示$w + (-v)$.

1.3.4 向量与0进行标量乘法

对于任意$v \in V$,都有$0v = \mathbf{0}$.

1.3.4 Proof.

我们有

$$0v = (0 + 0)v = 0v + 0v$$

在此式两边同时加上$-0v$即可得到$0v = \mathbf{0}$.

1.3.5 数与加法恒等元0相乘

对于任意$a \in \mathbb{F}$,都有$a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

1.3.5 Proof.

我们有

$$a\mathbf{0} = a(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = a\mathbf{0} + a\mathbf{0}$$

两边同时加上$-a\mathbf{0}$即可得到$a\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

向量空间中的元素并不一定是n元数组,它还可以是很多不同类型的对象.

1.4 记号:$\mathbb{F}^S$

(1) 如果S是一个集合,那么$\mathbb{F}^S$表示所有函数$f: S \to \mathbb{F}$构成的集合.

(2) 对于$f, g \in \mathbb{F}^S$,它们的和$f + g \in \mathbb{F}^S$是由下式定义的函数:

$$\forall x \in S, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

(3) 对于$\lambda \in \mathbb{F}$和$f \in \mathbb{F}^S$,它们的标量乘法所得的乘积$\lambda f \in \mathbb{F}^S$是由下式定义的函数:

$$\forall x \in S, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

1.4.1

试证明:$\mathbb{F}^S$是$\mathbb{F}$上的向量空间,其中S非空.

1.4.1 Proof.

我们一一验证**1.2**中的性质.

(1) 对于任意$f, g \in \mathbb{F}^S$,对于任意$x \in S$,总有

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = g(x) + f(x) = (g + f)(x)$$

即$f + g = g + f$.

(2) 对于任意$f, g, h \in \mathbb{F}^S$,对于任意$x \in S$,总有

$$((f + g) + h)(x) = (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)) = (f + (g + h))(x)$$

即$(f + g) + h = f + (g + h)$.

(3) 定义$\mathbf{0}(x) = 0, \forall x \in S$.于是,对于任意$f \in \mathbb{F}^S$,对于任意$x \in S$,总有

$$(f + \mathbf{0})(x) = f(x) + 0 = f(x)$$

即$f + \mathbf{0} = f$.

(4) 对于任意$f \in \mathbb{F}^S$,总存在函数$g : S \to \mathbb{F}$满足$\forall x \in S, g(x) = -f(x)$.于是对于任意$x \in S$,总有

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = f(x) - f(x) = 0 = \mathbf{0}(x)$$

即$f + g = \mathbf{0}$.

同理,后面两条都是不难验证的,此处便略去证明过程.

从而$\mathbb{F}^S$是一个向量空间.

不难发现,向量空间$\mathbb{F}^n$实际上是$\mathbb{F}^S$的一个特例,其中$S=\{1,2,\cdots,n\}$. 对于每个$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{F}^n$,我们记函数$f(k)=x_k, k\in\{1,2,\cdots,n\}=S$, 那么$f$自然满足$f\in\mathbb{F}^S$.