

Linear Algebra Done Right 3C

1. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明: 任取 V 和 W 的基, T 对应的矩阵都至少有 $\dim \text{range } T$ 个非零元素.

Proof.

设选取 V 的基为 v_1, \dots, v_m , 选取 W 的基为 w_1, \dots, w_n . 根据线性映射基本定理有 $\dim V = \dim \text{range } T + \dim \text{null } T = m$.

若矩阵中非零元素少于 $\dim \text{range } T$ 个, 那么说明至少有 $\dim \text{null } T + 1$ 列全部由 0 构成.

假定这些列的列号为 k , 于是 $v_k = 0w_1 + \dots + 0w_n = \mathbf{0}$.

于是至少有 $\dim \text{null } T + 1$ 个 v_k 满足 $Tv_k = \mathbf{0}$, 这与 $\text{null } T$ 的定义不符.

从而命题得证.

3. 设 V 和 W 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 证明: $\dim \text{range } T = 1$, 当且仅当存在在 V 的一个基和 W 的一个基使得关于这些基的 $\mathcal{M}(T)$ 的所有元素都是 1.

Proof.

\Leftarrow : 设 v_1, \dots, v_m 是 V 的一组基, w_1, \dots, w_n 是 W 的一组基. 依题设有

$$\forall k \in \{1, \dots, m\}, Tv_k = w_1 + \dots + w_n$$

于是 $Tv_1 = \dots = Tv_m = w_1 + \dots + w_n$. 下面我们说明 $w := w_1 + \dots + w_n$ 是 $\text{range } T$ 的基.

对于任意 $v \in V$, 存在唯一一组标量 $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ 使得 $v = a_1v_1 + \dots + a_mv_m$. 于是 $\forall Tv \in \text{range } T$ 都有

$$Tv = a_1Tv_1 + \dots + a_mTv_m = (a_1 + \dots + a_m)w$$

从而 w 张成 $\text{range } T$, 即 $\dim \text{range } T = 1$.

\Rightarrow : 由 $\dim \text{range } T = 1$ 可知

$$\exists w \in W, \text{ s.t. } \forall v \in V, \exists a \in \mathbb{F}, Tv = aw$$

3. 设 v_1, \dots, v_n 是 V 的基, w_1, \dots, w_m 是 W 的基.

(1) 证明: 如果 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么 $\mathcal{M}(S + T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.

(2) 证明: 如果 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, $\lambda \in \mathbb{F}$, 那么 $\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

Proof.

(1) 记 $\mathcal{M}(S) = A, \mathcal{M}(T) = B, \mathcal{M}(S + T) = C$. 于是对于任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 都有

$$Sv_k = A_{1,k}w_1 + \dots + A_{m,k}w_m$$

$$Tv_k = B_{1,k}w_1 + \dots + B_{m,k}w_m$$

两式相加可得

$$(S + T)v_k = Sv_k + Tv_k = (A_{1,k} + B_{1,k})w_1 + \dots + (A_{m,k} + B_{m,k})w_m$$

又 w_1, \dots, w_m 是 W 的基, 于是表出 $(S + T)v_k$ 的系数应是唯一的. 将上式与

$$(S + T)v_k = C_{1,k}w_1 + \dots + C_{m,k}w_m$$

比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, C_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k}$$

又因为上式对所有 $k \in \{1, \dots, m\}$ 成立, 于是根据矩阵加法的定义可知 $A + B = C$. 命题得证.

(2) 记 $\mathcal{M}(T) = A, \mathcal{M}(\lambda T) = B$. 对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$\lambda Tv_k = \lambda(A_{1,k}w_1 + \dots + A_{m,k}w_m)$$

$$(\lambda T)v_k = B_{1,k}w_1 + \dots + B_{m,k}w_m$$

又 w_1, \dots, w_m 是 W 的基, 于是表出 λTv_k 的系数应是唯一的. 比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \dots, m\}, B_{j,k} = \lambda A_{j,k}$$

又因为上式对所有 $k \in \{1, \dots, m\}$ 成立, 于是根据矩阵标量乘法的定义可知 $B = \lambda A$. 命题得证.

4. 设 $D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$ 是微分映射, 定义为 $Dp = p'$. 求 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的一组基和 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一组基使得 D 关于这些基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.

不妨选取 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的标准基 $1, x, x^2$. 根据矩阵的定义可知此时对应的 $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ 的基为 $x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, 1$.

5. 设 V 和 W 是有限维的, $T \in \mathcal{L}(V, W)$.证明:存在 V 的一个基和 W 的一个基使得关于这些基的 $\mathcal{M}(T)$ 满足除了在第 k 行第 k 列($1 \leq k \leq \dim \text{range } T$)的元素为1之外其余元素均为0.

Proof.

设 $\dim \text{range } T$ 的一组基为 w_1, \dots, w_m .于是存在 v_1, \dots, v_m 使得 $\forall k \in \{1, \dots, m\}$ 有 $Tv_k = w_k$.

下面证明 v_1, \dots, v_m 线性无关.设一组标量 a_1, \dots, a_m 满足

$$\mathbf{0} = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

于是 $T(\mathbf{0}) = a_1 T v_1 + \dots + a_m T v_m = a_1 w_1 + \dots + a_m w_m = \mathbf{0}$.

由于 w_1, \dots, w_m 线性无关,于是上式中各 a 均仅能为0,于是 v_1, \dots, v_m 线性无关.

如此,我们可以把 w_1, \dots, w_m 和 v_1, \dots, v_m 分别扩展为 W 和 V 的基,进而这个矩阵满足题意.

6. 设 v_1, \dots, v_m 是 V 的一组基, W 是有限维的.设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

试证明:存在 W 的一组基 w_1, \dots, w_n 使得 $\mathcal{M}(T)$ 除了第一行第一列可能为1以外,第一列的所有元素均为0.

Proof.

若 $T v_1 = \mathbf{0}$,那么显然第一列所有元素均为0.

若 $T v_1 \neq \mathbf{0}$,不妨设 $w_1 := T v_1 \in W$.于是 w_1 可以被扩展为 W 的一组基 w_1, \dots, w_n .由于 w_1, \dots, w_n 线性无关,于是

$$T v_1 = 1 w_1 + 0 w_2 + \dots + 0 w_n$$

于是 $\mathcal{M}(V, W)$ 的第一行第一列的元素为1,其余元素均为0.

7. 设 w_1, \dots, w_n 是 W 的一组基, V 是有限维的.设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.

试证明:存在 V 的一组基 v_1, \dots, v_m 使得 $\mathcal{M}(T)$ 除了第一行第一列可能为1以外,第一行的所有元素均为0.

Proof.

我们首先任取 V 的一组 v_1, \dots, v_m .

若此时矩阵的第一行均为0或仅有第一列第一行为1,其余为0,那么命题得证.

否则,我们对这组基做如下变换.

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{1}{A_{1,1}} v_1 \\ v'_2 &= v_2 - \frac{A_{1,2}}{A_{1,1}} v_1 \\ \dots v'_m &= v_m - \frac{A_{1,m}}{A_{1,1}} v_1 \end{aligned}$$

于是有

$$Tv'_1 = 1w_1 + \sum_{j=2}^n A_{j,1}w_j$$

$$Tv'_k = 0w_1 + \sum_{j=2}^n A_{j,k}w_j$$

如此,矩阵的第一行就满足了题设.现在我们证明变换后的 v'_1, \dots, v'_m 仍为 V 的基. 设一组标量 a_1, \dots, a_m 满足

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= a_1v'_1 + \dots + a_mv'_m \\ &= \left(\frac{a_1}{A_{1,1}} - \sum_{j=2}^m \frac{a_j A_{1,j}}{A_{1,1}} \right) v_1 + \sum_{j=2}^m a_m v_m \end{aligned}$$

由于 v_1, \dots, v_m 是 V 的基,于是它们线性无关.于是上式成立当且仅当 $a_1 = \dots = a_m = 0$.

于是 v'_1, \dots, v'_m 线性无关,又其长度为 $\dim V$,于是它为 V 的基.命题得证.

注:这样的思想似乎与解线性方程组的消元方法是类似的.

8. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵,证明

$$(AB)_{j,\cdot} = A_{j,\cdot}B$$

对 $1 \leq j \leq m$ 均成立.换言之,证明 AB 的第 j 行等于 A 的第 j 行乘 B .

Proof.

矩阵乘法的定义表明,对于任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ 有

$$(AB)_{j,k} = A_{j,\cdot}B_{\cdot,k}$$

如此, $A_{j,\cdot}B$ 的第 k 行的元素是上式的右端项, $(AB)_{j,\cdot}$ 的第 k 行的元素是上式的左端项.

于是命题得证.

9. 设 $a = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ 是 $1 \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵,证明:

$$aB = a_1B_{1,\cdot} + \dots + a_nB_{n,\cdot}$$

换言之,证明 aB 是 B 的各行的线性组合,各行所乘的标量来自 a .

Proof.

根据矩阵乘法的定义,对于任意 $1 \leq k \leq p$ 有

$$(aB)_{1,k} = a_1B_{1,k} + \dots + a_nB_{n,k}$$

而 $a_1 B_{1,\cdot} + \cdots + a_n B_{n,\cdot}$ 的第 k 列的元素也等于上面式子的值.

于是有 $aB = a_1 B_{1,\cdot} + \cdots + a_n B_{n,\cdot}$,命题得证.

10. 给出一例使得 $AB \neq BA$ 的 2×2 矩阵 A 和 B .

Solution.

不妨令 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. 于是 $AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

11. 证明分配性质对矩阵加法和矩阵乘法仍然成立.

(1) 假设矩阵 A, B, C 的大小使 $A(B+C)$ 有意义,试证明 $A(B+C) = AB + AC$.

(2) 假设矩阵 A, B, C 的大小使 $(A+B)C$ 有意义,试证明 $(A+B)C = AC + BC$.

Proof.

(1) 由题意不妨令 A 为 $m \times n$ 矩阵, B, C 均为 $n \times p$ 矩阵.于是对于任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq p$ 都有

$$\begin{aligned}(A(B+C))_{j,k} &= \sum_{i=1}^n A_{j,i}(B+C)_{i,k} \\&= \sum_{i=1}^n A_{j,i}(B_{i,k} + C_{i,k}) \\&= \sum_{i=1}^n A_{j,i}B_{i,k} + \sum_{i=1}^n A_{j,i}C_{i,k} \\&= (AB)_{j,k} + (AC)_{j,k} \\&= (AB+AC)_{j,k}\end{aligned}$$

于是 $A(B+C)$ 的第 j 行第 k 列的元素等于 $(AB+AC)$ 的第 j 行第 k 列的元素.

于是 $A(B+C) = AB + AC$,命题得证.

(2) 证明与(1)类似,在此不再赘述.

12. 证明矩阵乘法是可结合的.换言之,假设矩阵 A, B, C 的大小使得 $(AB)C$ 有意义,证明 $(AB)C = A(BC)$.

Proof.

Method I.

设 A 是 $m \times n$ 矩阵, B 是 $n \times p$ 矩阵, C 是 $p \times q$ 矩阵. 根据矩阵乘法的定义, $A(BC)$ 和 $(AB)C$ 都是 $m \times q$ 矩阵.

于是对于任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq q$ 有

$$\begin{aligned}(A(BC))_{j,k} &= \sum_{i=1}^n A_{j,i}(BC)_{i,k} \\ &= \sum_{i=1}^n \left(A_{j,i} \sum_{r=1}^p B_{i,r} C_{r,k} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^p A_{j,i} B_{i,r} C_{r,k}\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}((AB)C)_{j,k} &= \sum_{r=1}^p (AB)_{j,r} C_{r,k} \\ &= \sum_{r=1}^p \left(\sum_{i=1}^n A_{j,i} B_{i,r} \right) C_{r,k} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{r=1}^p A_{j,i} B_{i,r} C_{r,k}\end{aligned}$$

于是 $(AB)C$ 和 $A(BC)$ 的对应位置的元素均相等. 从而 $(AB)C = A(BC)$, 命题得证.

Method II.

设矩阵 A, B, C 分别对应线性映射 $T \in \mathcal{L}(U, V), S \in \mathcal{L}(V, W), R \in \mathcal{L}(W, X)$, 即 $A = \mathcal{M}(T), B = \mathcal{M}(S), C = \mathcal{M}(R)$. 于是我们有

$$\begin{aligned}A(BC) &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(SR) \\ &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(R) \\ &= \mathcal{M}(TS)\mathcal{M}(R) \\ &= (AB)C\end{aligned}$$

于是命题得证.

13. 设 A 是 $n \times n$ 矩阵. 试证明 A^3 的第 j 行第 k 列的元素为

$$\sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n A_{j,p} A_{p,r} A_{r,k}$$

Proof.

根据矩阵乘法的定义有

$$\begin{aligned}A_{j,k}^3 &= \sum_{p=1}^n A_{j,p} (A_{p,k}^2) \\ &= \sum_{p=1}^n A_{j,p} \left(\sum_{r=1}^n A_{p,r} A_{r,k} \right) \\ &= \sum_{p=1}^n \sum_{r=1}^n A_{j,p} A_{p,r} A_{r,k}\end{aligned}$$

于是命题得证.

14. 设 $m, n \in \mathbb{N}^*$. 证明函数 $A \mapsto A^t$ 是从 $\mathbb{F}^{m,n}$ 到 $\mathbb{F}^{n,m}$ 的线性映射.

Proof.

设 $A, B \in \mathbb{F}^{m,n}$. 对于任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ 有

$$(A+B)^t_{k,j} = (A+B)_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k} = A^t_{k,j} + B^t_{k,j}$$

即 $(A+B)^t = A^t + B^t$, 从而该映射满足可加性.

设 $A \in \mathbb{F}^{m,n}, \lambda \in \mathbb{F}$. 对于任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ 有

$$(\lambda A)^t_{k,j} = (\lambda A)_{j,k} = \lambda(A_{j,k}) = \lambda(A^t_{k,j})$$

从而 $(\lambda A)^t = \lambda(A^t)$, 从而该映射满足齐次性.

于是该映射是线性映射, 命题得证.

15. 试证明: 如果 A 是 $m \times n$ 矩阵, C 是 $n \times p$ 矩阵, 那么 $(AC)^t = C^t A^t$.

Proof.

根据矩阵乘法和转置矩阵的定义, 对于任意 $1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq m$ 有

$$\begin{aligned} (AC)^t_{j,k} &= AC_{k,j} \\ &= \sum_{i=1}^n A_{k,i} C_{i,j} \\ &= \sum_{i=1}^n C^t_{j,i} A^t_{i,k} \\ &= (C^t A^t)_{j,k} \end{aligned}$$

于是命题得证.

16. 设 A 是 $m \times n$ 矩阵 ($A \neq \mathbf{0}$), 证明: A 的秩为 1, 当且仅当存在 $(c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{F}^m$ 和 $(d_1, \dots, d_n) \in \mathbb{F}^n$ 使得 $A_{j,k} = c_j d_k$ 对任意 $1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq n$ 成立.

Proof.

\Rightarrow : 由题意可知 $\dim \text{span}(A_{\cdot,1}, \dots, A_{\cdot,n}) = 1$, 于是各 $A_{\cdot,k}$ 互相成标量倍关系.

不妨设 $A_{.,k} = a_k A_{.,1}$, 令 $c_j = A_{j,1}$ ($1 \leq j \leq m$), $d_k = a_k$ ($1 \leq k \leq n$). 于是

$$A_{j,k} = a_k A_{j,1} = c_j d_k$$

这就证明了 (c_1, \dots, c_m) 和 (d_1, \dots, d_n) 的存在性.

\Leftarrow : 对于任意第 k 列中的第 j 行的元素有

$$A_{j,k} = c_j d_k = c_j d_1 \cdot \frac{d_k}{d_1} = \frac{d_k}{d_1} A_{j,1}$$

从而 $A_{.,k} = \frac{d_k}{d_1} A_{.,1}$. 这表明 A 的各列都是第一列的标量倍, 从而 A 的秩为 1. 命题得证.

17. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, u_1, \dots, u_n 和 v_1, \dots, v_n 是 V 的两组基. 证明下列五个命题等价.

- (1) T 是单射.
- (2) $\mathcal{M}(T)$ 的列在 $\mathbb{F}^{n,1}$ 中线性无关.
- (3) $\mathcal{M}(T)$ 的列张成 $\mathbb{F}^{n,1}$.
- (4) $\mathcal{M}(T)$ 的行张成 $\mathbb{F}^{1,n}$.
- (5) $\mathcal{M}(T)$ 的行在 $\mathbb{F}^{1,n}$ 中线性无关.

这里的 $\mathcal{M}(T)$ 即表示 $\mathcal{M}(T, (u_1, \dots, u_n), (v_1, \dots, v_n))$.

Proof.

记 $\mathcal{M}(T) = A$.

(1) \Rightarrow (2): 设 $u \in V$ 和一组标量 a_1, \dots, a_n 满足 $u = a_1 u_1 + \dots + a_n u_n$. 于是

$$Tu = a_1 Tu_1 + \dots + a_n Tu_n$$

由于 T 是单射, 即 $\text{null } T = \mathbf{0}$, 于是 $Tu = \mathbf{0}$ 当且仅当 $u = \mathbf{0}$, 即各 $a_k = 0$. 这表明各 Tu_k 线性无关.

若 A 的列线性相关, 那么存在 $A_{.,k} \in \text{span}(A_{.,1}, \dots, A_{.,k-1})$. 于是存在一组标量 b_1, \dots, b_{k-1} 使得

$$\forall 1 \leq j \leq n, A_{j,k} = b_1 A_{j,1} + \dots + b_{k-1} A_{j,k-1}$$

即

$$\forall 1 \leq j \leq n, A_{j,k} v_j = b_1 A_{j,1} v_j + \dots + b_{k-1} A_{j,k-1} v_j$$

将上式求和即可得

$$Tu_k = b_1 Tu_1 + \dots + b_{k-1} Tu_{k-1}$$

这与各 Tu_k 线性无关矛盾, 进而 A 的各列线性无关.

(2) \Rightarrow (1): 只需证明 $\text{null } T = \mathbf{0}$ 即可. 为此, 我们设 $u := a_1 u_1 + \dots + a_n u_n \in V$.

于是

$$\begin{aligned}Tu &= a_1Tu_1 + \cdots + a_nTu_n \\&= a_1 \sum_{j=1}^n A_{j,1}v_j + \cdots + a_n \sum_{j=1}^n A_{j,n}v_j \\&= \sum_{k=1}^n a_k A_{1,k}v_1 + \cdots + \sum_{k=1}^n a_k A_{n,k}v_n\end{aligned}$$

由于 v_1, \cdots, v_n 是 V 的一组基,于是 $Tu = \mathbf{0}$ 当且仅当各 $\sum_{k=1}^n a_k A_{j,k} = 0$.这等价于 $\sum_{k=1}^n a_k A_{.,k} = \mathbf{0}$.

由于 A 的各列线性无关,于是 $a_1 A_{.,1} + \cdots + a_n A_{.,n} = \mathbf{0}$ 当且仅当各 $a_k = 0$.

于是 $Tu = \mathbf{0}$ 当且仅当各 $a_k = 0$,即 $u = \mathbf{0}$.于是 T 是单射.

(2) \Leftrightarrow (3):由于列构成的组的长度恰为 $\dim \mathbb{F}^{n,1} = n$,于是这两者均等价于 A 的各列张成 $\mathbb{F}^{1,m}$,于是两者等价.

(1),(4)和(5)之间的推导是类似的,在此不再赘述.