1. 设T是V到W的函数.T的**图(Graph)**是$V\times W$的子集,定义为

$$\mathcal{G}(T)=\{(v,Tv)\in V\times W: v\in V\}$$

证明:T是线性映射,当且仅当$\mathcal{G}(T)$是$V\times W$的子空间.

Proof.

$\Rightarrow$:对任意$u,v\in V$,都有$Tu+Tv=T(u+v)$.于是对于任意$(v,Tv),(u,Tu)\in\mathcal{G}(T)$有

$$(u,Tu)+(v,Tv)=(u+v,Tu+Tv)=(u+v,T(u+v))$$

于是$\mathcal{G}(T)$对加法封闭.

证明它对标量乘法也封闭的过程是类似的,在此不再赘述.

$\Leftarrow$:对于任意$(u,Tu),(v,Tv)\in\mathcal{G}(T)$有$(u,Tu)+(v,Tv)=(u+v,Tu+Tv)\in\mathcal{G}(T)$.

这就要求对于任意$u,v\in V$,$T(u+v)=Tu+Tv$,从而T满足可加性.

证明T的齐次性的过程也是类似的,在此不再赘述.

2. 设$V_1,\cdots,V_m$是向量空间,使得$V_1\times\cdots\times V_m$是有限维的.试证明:对于任意$1\leqslant k\leqslant m$,$V_k$都是有限维的.

Proof.

对于任意V_k,选取它的一组基.这组基的长度必然小于等于$V_1\times\cdots\times V_m$的基的长度.

于是各V_k都是有限维的.

3. 设$V_1,\cdots,V_m$是向量空间.证明$\mathcal{L}(V_1\times\cdots\times V_m,W)$和$\mathcal{L}(V_1,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_m,W)$是同构向量空间.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}\dim(\mathcal{L}(V_1\times\cdots\times V_m),W)&=\dim(V_1\times\cdots\times V_m)\cdot(\dim W)\\&=(\dim V_1+\cdots+\dim V_m)(\dim W)\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\dim\left(\mathcal{L}(V_1,W)\times\cdots\times\mathcal{L}(V_m,W)\right)&=\dim(\mathcal{L}(V_1,W))+\cdots+\dim(\mathcal{L}(V_m,W))\\&=(\dim V_1)(\dim W)+\cdots+(\dim V_m)(\dim W)\\&=(\dim V_1+\cdots+\dim V_m)(\dim W)\end{aligned}$$

于是两者维数相同,因而它们同构.

4. 设$W_1,\cdots,W_m$是向量空间.证明$\mathcal{L}(V,W_1\times\cdots\times W_m)$和$\mathcal{L}(V,W_1)\times\cdots\times\mathcal{L}(V,W_m)$是同构向量空间.

Proof.

这与**(3)**相类似,不再赘述.

5. 对于$m\in\mathbb{N}^*$,定义V^m为

$$V^m=\underbrace{V\times\cdots\times V}_{m个V}$$

试证明:V^m与$\mathcal{L}(\mathbb{F}^m,V)$是同构向量空间.

Proof.

我们有

$$\dim V^m=\underbrace{\dim V+\cdots+\dim V}_{m个V}=m\dim V$$

又有

$$\dim(\mathcal{L}(\mathbb{F}^m,V))=(\dim(\mathbb{F}^n))(\dim V)=m\dim V$$

于是两者维数相同,因而它们同构.

6. 设$v,x\in V$,U,W是V的子空间,使得$v+U=x+W$.试证明:$U=W$.

Proof.

由$v+U=x+W$可知对于任意$u\in U$,存在$w\in W$使得$v+u=x+w$,反之亦是同理.

令$u=\mathbf{0}$可知存在$w\in W$使得$v=x+w$.同理存在$u\in U$使得$v+u=x$.

于是$v-x=w\in W$且$v-x=-u\in U$.

于是对于任意$u\in U$,存在w使得$v+u=x+w$,就有$u=x+w-v=w-(v-x)\in W$,于是$U\subseteq W$.

同理可以证明$W\subseteq U$.综上可知$U=W$,命题得证.

7. 令$U=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+3y+5z=0\}$.设$V\subseteq\mathbb{R}^3$.试证明:$V$是$U$的平移,当且仅当存在$c\in\mathbb{R}$使得$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:2x+3y+5z=c\}$.

Proof.

$\Rightarrow$:由于A是U的平移,不妨设$p:=(p_1,p_2,p_3)\in\mathbb{R}^3$使得$V=p+U$.

于是对于任意$v:=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbb{R}^3$都存在$u:=(u_1,u_2,u_3)\in\mathbb{R}^3$使得$v=p+u$.

于是任意$v \in V$都满足$v = (p_1 + u_1, p_2 + u_2, p_3 + u_3)$,而

$$2(p_1 + u_1) + 5(p_2 + u_2) + 3(p_3 + u_3) = (2p_1 + 5p_2 + 3p_3) + (2u_1 + 5u_2 + 3u_3) = (2p_1 + 5p_2 + 3p_3)$$

于是令$c = 2p_1 + 5p_2 + 3p_3$,对于任意$v = (v_1, v_2, v_3)$都有$v_1 + v_2 + v_3 = c$.这就要求V具有题设的形式.

$\Leftarrow$:设$p = \left(-\dfrac{c}{10}, -\dfrac{c}{10}, -\dfrac{c}{10}\right)$.

对于任意$v := (v_1, v_2, v_3) \in V$,都有$v + p = \left(v_1 - \dfrac{c}{10}, v_2 - \dfrac{c}{10}, v_3 - \dfrac{c}{10}\right)$.而

$$2\left(v_1 - \frac{c}{10}\right) + 5\left(v_2 - \frac{c}{10}\right) + 3\left(v_3 - \frac{c}{10}\right) = 2v_1 + 5v_2 + 3v_3 - c = 0$$

这就说明$v + p \in U$.

对于任意$u := (u_1, u_2, u_3)$,亦有$u - p = \left(u_1 + \dfrac{c}{10}, u_2 + \dfrac{c}{10}, u_3 + \dfrac{c}{10}\right) \in V$.

这就表明$p + V = U$,即V是U的一个平移.

8. 回答下列问题.

(1) 设$T \in \mathcal{L}(V, W), c \in W$.试证明:$\{x \in V : Tx = c\}$是$\varnothing$或null T的平移.

(2) 解释线性方程组的解集为什么是空集或者$\mathbb{F}^n$的某个子空间的平移.

Proof.

(1) 若T是单射,那么存在唯一$v \in V$使得$Tv = c$.这时$\{x \in V : Tx = c\} = v + \varnothing$.

若T不是单射,假定某一$v \in V$满足$Tv = c$,那么对于任意$u \in \operatorname{null} T$都有$T(u + v) = Tu + Tv = c$.

又对于任意$u \in V$满足$Tu = c$,总有$T(u - v) = Tu - Tv = \mathbf{0}$.于是$u - v \in \operatorname{null} T$.

综上可知$\{x \in V : Tx = c\} = v + \operatorname{null} T$.