行列分解和矩阵的秩

1.行秩和列秩

我们从定义域每个矩阵都相关的两个非负整数开始.

> **1.1 定义:行秩,列秩**
>
> 假定A是$m\times n$矩阵,其各元素属于$\mathbb{F}$.
>
> **(a)** A的**列秩**是A的各列在$\mathbb{F}^{m,1}$中的张成空间的维数.
>
> **(b)** A的**行秩**是A的各行在$\mathbb{F}^{1,n}$中的张成空间的维数.

如果A是$m\times n$矩阵,那么A的列秩不超过n(因为A有n列)也不超过m(因为$\dim\mathbb{F}^{m,1}=m$).同样地,A的行秩也不超过$\min\{m,n\}$. 我们以下面这个简单的矩阵为例.

$$A=\begin{pmatrix}4&7&1&8\\3&5&2&9\end{pmatrix}$$

于是A的列秩是$\mathbb{F}^{2,1}$中的

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix},\begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}\right)$$

的维数.组中的各向量不成标量倍数关系,又$\dim\mathbb{F}^{2,1}=2$,于是上述张成空间的维数为2,因而A的列秩为2.
同样的,A的行秩是$\mathbb{F}^{1,4}$中的

$$\operatorname{span}\left(\begin{pmatrix}4&7&1&8\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3&5&2&9\end{pmatrix}\right)$$

的维数.同样可以看出这个张成空间的维数是2,即A的行秩为2.

2.转置

我们现在来定义矩阵的转置.

> **2.1 定义:转置**
>
> 矩阵A的转置记为A^{t},是互换A的行和列所得的矩阵. 具体来说,如果A是$m\times n$矩阵,那么A^{t}是$n\times m$矩阵, 其中各元素由
>
> $$\left(A^{\mathrm{t}}\right)_{k,j}=A_{j,k}$$
>
> 给出.

矩阵的转置具有很好的代数性质.

2.2 转置矩阵的代数性质

(1) 对于任意$m \times n$矩阵A, B,都有$(A+B)^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}} + B^{\mathrm{t}}$.

(2) 对于任意$m \times n$矩阵A和任意$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$(\lambda A)^{\mathrm{t}} = \lambda A^{\mathrm{t}}$.

(3) 对于任意$m \times n$矩阵A和$n \times p$矩阵C,都有$(AC)^{\mathrm{t}} = C^{\mathrm{t}} A^{\mathrm{t}}$.

我们将在后面证明之.

3.行列分解与矩阵的秩

接下来的结果将是用于证明行秩等于列秩的主要工具.

3.1 行列分解

假设A是$m \times n$矩阵,其中各元素均在$\mathbb{F}$中且列秩$c \geqslant 1$.

那么存在各元素属于$\mathbb{F}$的$m \times c$矩阵C和$c \times n$矩阵R使得$A = CR$成立.

Proof.

A的各列都是$m \times 1$矩阵.于是由A的各列构成的组$A_{\cdot,1}, \cdots, A_{\cdot,n}$可以被削减为$A$的各列的张成空间的一个基.由列秩的定义,这个基的长度为c.将该基中的c个列向量合在一起就形成了$m \times c$矩阵C.

如果$k \in \{1, \cdots, n\}$,那么A的第k列是C的各列的线性组合,于是令该线性组合中的系数组成一个$c \times n$矩阵的第k列, 并记该矩阵为R.那么根据矩阵乘法可以视为列的线性组合的性质,我们知道$A = CR$.

我们在之前给出的例子中,行秩恰好等于列秩.接下来的结论表明这一点对每个矩阵都成立.

3.2 列秩等于行秩

假设$A \in \mathbb{F}^{m,n}$,那么A的行秩与列秩相等.

Proof.

令c表示A的列秩.令$A = CR$是矩阵的行列分解,于是A的每一行都是R的各行的线性组合. 因为R有c行,于是A的行秩不大于c.

将上述论述应用于A^{t},可以得出

$$A\text{的列秩} = A^{\mathrm{t}}\text{的行秩} \leqslant A^{\mathrm{t}}\text{的列秩} = A\text{的行秩}$$

于是A的行秩等于列秩.

于是我们知道列秩等于行秩,因而我们无需使用行秩或列秩这两个属于,用更简单的**秩**描述代替它们.

3.3 定义:秩

矩阵$A \in \mathbb{F}^{m,n}$的**秩**是A的列秩(或行秩).

下面,我们来看一些例题.

Example 1.

设矩阵$A \in \mathbb{F}^{m,n}$是列满秩的.试证明:AA^{t}是列满秩的.