Linear Algebra Done Right 5B

1. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:9是T^2的特征值,当且仅当3或-3是T的特征值.

Proof.

$$9\text{是}T^2\text{的特征值} \Leftrightarrow T^2 - 9I = \mathbf{0} \Leftrightarrow (T-3I)(T+3I) = \mathbf{0} \Leftrightarrow 3\text{或}-3\text{是}T\text{的特征值}$$

2. 设V是一复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$没有特征值.证明:V的每个在T下不变的子空间不是$\{\mathbf{0}\}$就是无限维的.

Proof.
首先易知$T\mathbf{0} = \mathbf{0}$,于是$\{\mathbf{0}\}$在T下不变.
设U为V的一有限维子空间.若U在T下不变,则将T限制在U上的$T|_U$是U上的算子.
根据**5.19**可知$T|_U$存在特征值,于是T存在特征值,这与题意不符.于是不存在有限维的U使得U在T下不变.
由题意,T的不变子空间不是$\{\mathbf{0}\}$就是无限维的.

3. 设$n \in \mathbb{N}*$,且$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$定义为$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} x_k\right)$.

(1) 求出T的所有特征值和特征向量.

(2) 求出T的最小多项式.

Proof.

(1) T的特征值为$1, \cdots, n$.其中k对应的特征向量是这样的向量:其中有k个相同的非零元素,其余位置均为0.

(2) $p(x) = (x-1)\cdots(x-n)$.

4. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,$T \in \mathcal{L}(V)$,$p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$,$\alpha \in \mathbb{C}$.证明:$\alpha$是$p(T)$的特征值,当且仅当$\alpha = p(\lambda)$对$T$的某个特征值$\lambda$成立.

Proof.
$\Rightarrow$:令$q = p - \alpha \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$,于是$q(T) = p(T) - \lambda I = \mathbf{0}$.
于是$q(T)$是T的最小多项式的多项式倍.因此,$q(\lambda) = 0$,于是$\alpha = p(\lambda)$.
$\Leftarrow$:由题意$T - \lambda I = \mathbf{0}$,于是$p(T - \lambda I) = p(T) - p(\lambda)I = \mathbf{0}$,于是$\alpha = p(\lambda)$是$p(T)$的特征值.

5. 给出一例$\mathbb{R}^2$上的算子用以说明将**5B.4**的$\mathbb{C}$替换为$\mathbb{R}$后结论将不再成立.

Solution.

令$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$为$T(x,y) = (-y,x)$,令$p(x) = x^2$.于是$p(T) = -I$,其特征值为$-1$.而$T$没有特征值.

6. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$定义为$T(w,z) = (-z,w)$,求$T$的特征值.

Solution.

注意到$T^2 = -I$,于是T的最小多项式为$p(z) = z^2 + 1$.

若$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,则T的特征值为$\pm\mathrm{i}$.若$\mathbb{F} = \mathbb{R}$,则T没有特征值.

7. 回答下列问题.

(1) 给出一例$S,T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$使得$ST$和$TS$的最小多项式不同.

(2) 设V是有限维的,且$S,T \in \mathcal{L}(V)$.证明:如果S,T中至少有一个可逆,那么ST和TS的最小多项式相同.

Proof.

(1) 令$S(x,y) = (x,0), T(x,y) = (0,x)$.于是$ST(x,y) = (0,0), TS(x,y) = (0,x)$.

于是$ST = \mathbf{0}$,其最小多项式为$p(x) = x$.而$p(TS) = TS \neq \mathbf{0}$,于是$ST$和$TS$的最小多项式不同.

(2) 不妨设S可逆.首先,$(TS)^0 = I = SIS^{-1} = S^{-1}(ST)^0S$. 假定$(TS)^k = S^{-1}(ST)^kS$,那么

$$(TS)^{k+1} = (TS)^k(TS) = S^{-1}(ST)^kS(TS) = S^{-1}(ST)^k(ST)S = S^{-1}(ST)^{k+1}S$$

于是对于任意$k \in \mathbb{N}$都有$(TS)^k = S^{-1}(ST)^kS$.于是对于任意$p \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$有$p(TS) = S^{-1}p(ST)S$.

设$p,q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$分别是$ST,TS$的最小多项式.

于是$p(TS) = S^{-1}p(ST)S = \mathbf{0}$,且$\mathbf{0} = q(TS) = S^{-1}q(ST)S$,即$q(ST) = \mathbf{0}$.

于是ST和TS的最小多项式相同.

8. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$是"逆时针旋转1度"这一算子,求$T$的最小多项式.

Solution.

考虑$v := (x,y) \in \mathbb{R}^2$且$v \neq (0,0)$.根据$T$的几何意义有

$$Tv = \frac{1}{2\cos\frac{\pi}{180}}(T^2v + v)$$

于是$(T^2-2\cos\dfrac{\pi}{180}T+I)v=\mathbf{0}$对任意$v\in V$成立.
即T的最小多项式为$p(x)=x^2-2\cos\dfrac{\pi}{180}x+1$.

9. 设$T\in\mathcal{L}(V)$使得关于V的某个基的T的矩阵的所有元素都是有理数.解释为什么T的最小多项式的所有系数都是有理数.

Proof.
设T的最小多项式为$p:=\sum\limits_{i=0}^{m}a_ix_i$,其中$a_m=1$.记$T$关于$V$的基$v_1,\cdots,v_n$的矩阵$A=\mathcal{M}(T)$,于是$p(A)=\mathbf{0}$.
因此我们有$\sum\limits_{i=0}^{m-1}a_i(A^i)_{j,k}=-(A^m)_{j,k}$对所有$1\leqslant j,k\leqslant n$成立.
由于$\mathbb{Q}$对四则运算封闭,于是对于任意$i\in\mathbb{N}$,矩阵A^i的各元素均为有理数.
根据Gaussion消元法,如果这关于$a_0,\cdots,a_{m-1}$有解,那么它们必然是有理数.而最小多项式的存在保证了这方程组有解.
于是T的最小多项式的所有系数都是有理数.

10. 设V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$,且$v\in V$.证明:

$$\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^mv)=\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^{\dim -1}v)$$

对任意$m\geqslant\dim V-1$成立.

Proof.
考虑T的最小多项式$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$,那么$\deg p\leqslant\dim V$.不妨令$\deg p=n,p(z)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_iz^i$.
当$m=\dim V-1$时命题显然成立.对于$m\geqslant\dim V$,假定命题对所有更小的m都成立.
设$q(z)=z^{m-n}\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$,于是$qp$仍为首一多项式,且满足$(qp(T))v=\mathbf{0}=\sum\limits_{i=m-n}^{m}a_iT^iv$.
于是$T^mv=-\sum\limits_{i=m-n}^{m-1}a_iT^iv$,这表明$T^mv\in\operatorname{span}(T^{m-n}v,\cdots,T^{m-1}v)\subseteq\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^{m-1},v)$.
于是$\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^mv)=\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^{m-1}v)=\operatorname{span}(v,Tv,\cdots,T^{\dim V-1}v)$.归纳可知命题对所有$m$均成立.

11. 设V是二维向量空间,$T\in\mathcal{L}(V)$,且T关于V的某个基的矩阵是$\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$.

(1) 证明:$T^2-(a+d)T+(ad-bc)I=\mathbf{0}$.

(2) 证明:T的最小多项式为

$$\begin{cases} z-a,\text{若}b=c=0\text{且}a=d \\ z^2-(a+d)z+(ad-bc),\text{其它} \end{cases}$$

Proof.

(1) 设$A=\mathcal{M}(T)$,于是$A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix}$.于是

$$\begin{aligned} & A^2-(a+d)A+(ad-bc)I \\ =& \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ac+cd \\ ab+bd & ad+d^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} \\ =& \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

于是$T^2-(a+d)T+(ad-bc)I=\mathbf{0}$.

(2) 由**(1)**可知$q(z)=z^2-(a+d)z+(ad-bc)\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$满足$q(T)=\mathbf{0}$.于是$q$是$T$的最小多项式的多项式倍.
若$b=c=0$且$a=d$,则有$q(z)=z^2-2az+a^2=(z-a)^2$.
于是$q(T)=(T-aI)^2=\mathbf{0}$当且仅当$T-aI=\mathbf{0}$,于是此时T的最小多项式为$p(z)=z-a$.
否则,T必然不是恒等算子I的标量倍,因而$T-xI=\mathbf{0}$对任意$x\in\mathbb{F}$都不成立.于是T的最小多项式至少是二次的.又因为最小多项式的存在唯一性,于是q必然是T的最小多项式.

12. 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$为$T(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n)$.求$n$的最小多项式.

Solution.

由**5A.42**可知T的特征值为$1,2,\cdots,n$.于是T的最小多项式为$p(z)=(z-1)\cdots(z-n)$.

13. 设$T\in\mathcal{L}(V)$且$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$.证明:存在唯一的$r\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$使得$p(T)=r(T)$且$\deg r<\deg q$,其中$q$为$T$的最小多项式.

Proof.

多项式的带余除法表明存在唯一的$s,r\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$且$\deg r<\deg q$使得$p=sq+r$.
此时$(p-r)(T)=(sq)(T)=\mathbf{0}$,即$p(T)=r(T)$.

14. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$有最小多项式$4+5z-6z^2-7z^3+2z^4+z^5$.求T^{-1}的最小多项式.

Solution.

设$p(z) := 4+5z-6z^2-7z^3+2z^4+z^5 \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$.于是$p(T) = \mathbf{0}$.

另一方面有$p(T)(T^{-1})^5 = 4T^{-5}+5T^{-4}-6T^{-3}-7T^{-2}+2T^{-1}+I = \mathbf{0}$.

于是T^{-1}的最小多项式为$q(z) = z^5+\dfrac{5}{4}z^4-\dfrac{3}{2}z^3-\dfrac{7}{4}z^2+\dfrac{1}{2}z+\dfrac{1}{4}$.

15. 设V是一有限维复向量空间($\dim V > 0$),且$T \in \mathcal{L}(V)$.定义$f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$为$f(\lambda) = \dim \operatorname{range}\,(T-\lambda I)$.试证明:$f$不是连续函数.

Proof.

首先,由于V是一复向量空间,于是T必然存在特征值.不妨设其中一个特征值为λ_0.

由**5A.11**可知存在$\delta > 0$使得对任意满足$0 < |\lambda_0-\lambda| < \delta$的$\lambda \in \mathbb{F}$都有$T-\lambda I$可逆,即$f(\lambda) = \dim \operatorname{range}\,(T-\lambda I) = \dim V$.

而$f(\lambda_0) = \dim \operatorname{range}\,(T-\lambda_0 I) < \dim V$,于是$f(x)$在$x=\lambda$处不连续.

16. 设$a_1, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{F}$.令$T$为$\mathbb{F}^n$上的算子,$T$关于标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & & & & & -a_0 \\ 1 & 0 & & & & -a_1 \\ & 1 & \ddots & & & -a_2 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 0 & -a_{n-2} \\ & & & & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

该矩阵除了对角线下方那条线(其中都是1)和最后一列(其中有些也可能是0)以外的所有元素均为0.

证明:T的最小多项式为$a_0+a_1z+\cdots+a_{n-1}z^{n-1}+z^n$.

Proof.

设$\mathbb{F}^n$的标准基为$e_1, \cdots, e_n$.

由题意可知对于任意$1 \leqslant k < n$有$Te_k = e_{k+1}$,即$T^k e_1 = e_{k+1}$.

而$Te_n = -a_0e_1+\cdots-a_{n-1}e_n$.于是

$$T^n e_1 = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k T^k e_1$$

即

$$\left(T^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kT^k\right)e_1=\mathbf{0}$$

将此式两边作用T可知

$$T\left(T^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kT^k\right)e_1=\left(T^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kT^k\right)(Te_1)=\left(T^n+\sum_{k=0}^{n-1}a_kT^k\right)e_2=\mathbf{0}$$

于是对于任意$1\leqslant j\leqslant n$都有$\left(T^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kT^k\right)e_j=\mathbf{0}$.

于是$T^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kT^k=\mathbf{0}$.于是$T$的最小多项式为$z^n+\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_kz^k$.

17. 设V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$,且p是T的最小多项式.设$\lambda\in\mathbb{F}$,证明:$T-\lambda I$的最小多项式是定义为$q(z)=p(z+\lambda)$的多项式q.

Proof.

首先有$q(T-\lambda I)=p(T-\lambda I+\lambda I)=p(T)=\mathbf{0}$.

不妨令s为$T-\lambda I$的最小多项式,易知$\deg s\leqslant\deg q=\deg p$.

定义$r\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$满足$r(z)=s(z-\lambda)$.于是$r(T)=s(T-\lambda I)=\mathbf{0}$.于是$\deg r\leqslant\deg p=\deg s$.

综上可知$\deg q=\deg s$.又因为q是首一的且是s的多项式倍,于是$q=s$,即q是$T-\lambda I$的最小多项式.

18. 设V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$,且p是T的最小多项式.设$\lambda\in\mathbb{F}$且$\lambda\neq0$,证明:λT的最小多项式是定义为$q(z)=\lambda^{\deg p}p\left(\dfrac{z}{\lambda}\right)$的多项式$q$.

Proof.

设λT的最小多项式为s.由$q(\lambda T)=\lambda^{\deg p}p(T)=\mathbf{0}$可知$q$是$s$的多项式倍,且$\deg s\leqslant\deg q=\deg p$.

设$r(z)=\lambda^{-\deg p}s(z\lambda)$,于是$r(T)=\lambda^{-\deg p}s(\lambda T)=\mathbf{0}$.于是$\deg r\leqslant\deg p=\deg s$.

综上可知$\deg q=\deg s$.又因为q是首一的且是s的多项式倍,于是$q=s$,即q是λT的最小多项式.

19. 设V是有限维的,且$T\in\mathcal{L}(V)$.令$\mathcal{E}$为V的子空间,满足$\mathcal{E}=\{q(T):q\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\}$.证明:$\dim\mathcal{E}$等于$T$的最小多项式的次数.

Proof.

设T的最小多项式为$p(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m-1} z^{m-1} + z^m$.令$q(z) = z^m - p(z)$,则$T^m = q(T) - p(T) = q(T)$.
设$I, T, \cdots, T^{m-1}$是$\mathcal{E}$中的向量组.于是

$$c_0 I + c_1 T + \cdots + c_{m-1} T^{m-1} = \mathbf{0}$$

当且仅当$c_0 = \cdots = c_{m-1} = 0$.否则这将构成$T$的一个次数小于$m$的最小多项式,这与我们的假设不符.
于是$I, T, \cdots, T^{m-1}$线性无关.又对于任意$k \geqslant m$都有

$$T^k = T^{k-m} T^m = T^{k-m} q(T)$$

每次做上述代换均可将次数降低1.反复递降,可知对任意$k \geqslant m$都有$T^k \in \operatorname{span}(I, T, \cdots, T^{m-1})$.
于是$I, T, \cdots, T^{m-1}$是$\mathcal{E}$的一组基,进而$\dim \mathcal{E} = m$.

20. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$,其特征值为$3, 5, 8$.证明:$(T - 3I)^2 (T - 5I)^2 (T - 8I)^2 = \mathbf{0}$.

Proof.

记$q(z) = (z-3)^2 (z-5)^2 (z-8)^2$.设$p$是$T$的最小多项式且$s \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$满足

$$p(z) = s(z)(z-3)(z-5)(z-8)$$

其中$\deg \leqslant 1$.
由于$3, 5, 8$是T仅有的特征值,于是s要么没有零点,要么零点是T的特征值,于是$s \in \{1, z-3, z-5, z-8\}$.
于是q一定是p的多项式倍,因而$q(T) = \mathbf{0}$.

21. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:T的最小多项式的次数最高为$1 + \dim \operatorname{range} T$.

Proof.

设p是T的最小多项式,q是$T|_{\operatorname{range} T}$的最小多项式.
对于任意$v \in V$有$q(T)(Tv) = q(T|_{\operatorname{range} T})(Tv) = \mathbf{0}$.这表明$q(T)T = \mathbf{0}$,因而

$$\deg p \leqslant \deg(zq(z)) = 1 + \deg q \leqslant 1 + \dim \operatorname{range} T$$

22. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$,证明:T可逆当且仅当$I \in \operatorname{span}(T, T^2, \cdots, T^{\dim V})$.

Proof.

设T的最小多项式为$p := z^m + c_{m-1}z^{m-1} + \cdots + c_1 z + c_0$,其中$m \leqslant \dim V$.于是

$$T\text{可逆} \Leftrightarrow p\text{的常数项不为}0 \Leftrightarrow I = -\frac{c_1 T + \cdots + c^{m-1}T^{m-1} + T^m}{c_0} \Leftrightarrow I \in \operatorname{span}(T, \cdots, T^{\dim V})$$

23. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:对任意$v \in V$都有$\operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{\dim V-1}v)$在$T$下不变.

Proof.

设T的最小多项式为$p(z) := a_0 + a_1 z + \cdots + a_{m-1}z^{m-1} + z^m$.

于是对于任意$v \in V$都有$T^m v = -\left(a_0 v + \cdots + a_{m-1}T^{m-1}v\right) \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{m-1}v)$.

而对于任意$k \geqslant m$有$T^{k+1}v = T^{k-m}T^m v = -T^{k-m}\left(a_0 v + \cdots + a_{m-1}T^{m-1}v\right) \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^k v)$.

归纳可得对任意$k \geqslant m$有$T^k v \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^m v)$.

特别地,由于$m \leqslant \dim V$,于是$\operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{\dim V-1}) = \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{m-1}v)$.

于是对于任意$u \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{\dim V-1}v)$都有$Tu \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{\dim V-1}v)$,故这空间在$T$下不变.

24. 设V是一有限维复向量空间.设$T \in \mathcal{L}(V)$,使得T的特征值有且仅有5和6.证明

$$(T - 5I)^{\dim V-1}(T - 6I)^{\dim V-1} = \mathbf{0}$$

Proof.

设p是T的最小多项式.由于p的零点一定是T的特征值,于是$p(z) = 0$当且仅当$z = 5$或6.

于是$p(z)$只能为形如$p(z) = (z-5)^\alpha (z-6)^\beta$的形式,其中$\alpha, \beta \geqslant 1$且$\alpha + \beta \leqslant \dim V$.

于是$1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant \dim V - 1$,因而题设的多项式是$p$的多项式倍,命题得证.

25. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$,且U是V的在T下的不变子空间.

(1) 证明:T的最小多项式是T/U的最小多项式的多项式倍.

(2) 设$p, q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$分别是$T|_U$和$T/U$的最小多项式.证明:$pq$是$T$的最小多项式的多项式倍.

Proof.

(1) 设$s, r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$分别为$T, T/U$的最小多项式.考虑商映射$\pi : v \mapsto v + U \in \mathcal{L}(V, V/U)$. 对于任意$k \in \mathbb{N}$,都有$\pi(T^k v) = T^k v + U = (T/U)^k (v + U) = (T/U)^k (\pi v)$.于是

$$s(T/U)(v+U) = s(T/U)(\pi v) = \pi(s(T)v) = \pi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

于是$s(T/U) = \mathbf{0}$,因而s是r的多项式倍.

(2) 设V的子空间W使得$V = W \oplus U$.对于任意$u \in U$有$p(T|_U)u = \mathbf{0}$.
于是对于任意$w \in W$有

$$\pi(q(T)w) = q(T/U)(w+U) = \mathbf{0}$$

即$q(T)w \in U$,于是$p(T)q(T)w = \mathbf{0}$.
对于任意$u \in U$,亦有$q(T)p(T)u = q(T)\mathbf{0} = \mathbf{0}$.
于是对于任意$v := w + u \in V$有$pq(T)v = p(T)q(T)w + q(T)p(T)u = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$,即$pq(T) = \mathbf{0}$.
因此pq是T的最小多项式的多项式倍.命题得证.

26. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$,且U是V的在T下的不变子空间.证明:T的特征值构成的集合A等于$T|_U$的特征值构成的集合B与T/U的特征值构成的集合C的并集.

Proof.
由**5B.25**可知,若令p, q和r分别为$T|_U, T/U$和T的最小多项式,那么pq是r的多项式倍.
于是r的零点一定是pq的零点,因此$A \subseteq B \cup C$.
假定$T|_U$有一特征值λ和对应的特征向量$u \in U$,则有$Tu = \lambda u$.
由于$U \subseteq V$,于是T自然也有λ这一特征值,于是$B \subseteq A$.
由**5A.38**可知T/U的每个特征值都是T的特征值,于是$C \subseteq A$.
于是$A = B \cup C$,命题得证.

27. 设$\mathbb{F} = \mathbb{R}$,V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:$T_{\mathbb{C}}$的最小多项式等于T的最小多项式.

Proof.
首先有$(T_{\mathbb{C}})^k(u + \mathrm{i}v) = (T_{\mathbb{C}})^{k-1}(Tu + \mathrm{i}Tv) = (T_{\mathbb{C}})^{k-2}(T^2u + \mathrm{i}T^2v) = \cdots = T^k u + \mathrm{i}T^k v$.
设p, q分别是$T, T_{\mathbb{C}}$的最小多项式.
对于任意$u + \mathrm{i}v \in V_{\mathbb{C}}$,都有$q(T_{\mathbb{C}})(u + \mathrm{i}v) = q(T)u + \mathrm{i}q(T)v = \mathbf{0}$.
于是$q(T) = \mathbf{0}$,因而q是p的多项式倍.

对于任意$u, v \in V$,都有$p(T)u + \mathrm{i}pT(v) = p(T_{\mathbb{C}})(u + \mathrm{i}v) = \mathbf{0}$.

于是$p(T_{\mathbb{C}}) = \mathbf{0}$,因而$p$是$q$的多项式倍.

于是$p = q$,因而两者的最小多项式相同.

28. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:T'的最小多项式与T的最小多项式相同.

Proof.

设V的一组基$v_1, \cdots, v_m$与其对偶基$\phi_1, \cdots, \phi_m$.设T, T'的最小多项式分别为p, q.

对于任意$\phi \in V'$和任意$k \in \mathbb{N}$有$(T')^k(\phi) = (T')^{k-1}(\phi)T = (T')^{k-2}(\phi)T^2 = \cdots = \phi \circ T^k$.

于是对任意$r \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$有$r(T')(\phi) = \phi \circ r(T)$.因此,对于任意$\phi \in V'$有

$$p(T')(\phi) = \phi \circ p(T) = \phi \circ \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

于是p是q的多项式倍.对于任意$v \in V$和$\phi \in V'$有

$$\phi \circ q(T)v = (q(T')\phi)v = \mathbf{0}v = \mathbf{0}$$

由于ϕ的选取是任意的,于是$q(T)v = \mathbf{0}$,于是q是p的多项式倍.

于是$p = q$,因而两者的最小多项式相同.

29. 若V是一有限维向量空间,且$\dim V \geqslant 2$,证明:T上的每个算子都有二维的不变子空间.

Proof.

我们对结论进行归纳证明.

当$\dim V = 2$时,可以将V视为这一不变子空间,于是命题成立.

现在假设命题对所有维数不大于k的向量空间都成立.对于V满足$\dim V = k + 1$,设$T \in \mathcal{L}(V)$.

不妨令p是T的最小多项式,于是$1 \leqslant \deg p \leqslant k + 1$.

如果p有零点,即T有特征值,根据**5A.39**可知存在V的在T下不变的子空间U使得$\dim U = k$.

根据归纳假设,存在U的在$T|_U$下不变的二维子空间,于是V存在T下的不变的二维子空间.

如果p没有零点,那么T没有特征值,即$\mathbb{F} = \mathbb{R}$.于是根据代数基本定理可知p可以写作一系列二次项的乘积,即

$$p(z) = (z^2 + b_1 z + c_1) \cdots (z^2 + b_n z + c_n)$$

由于$p(T) = \mathbf{0}$,于是必然存在$k \in \{1, \cdots, n\}$使得$T^2 + b_k T + c_k I$不是单射.

于是存在$v \in V$使得$Tv^2 + b_k Tv + c_k v = \mathbf{0}$,即$Tv^2 \in \operatorname{span}(v, Tv)$.

又T没有特征值,于是v和Tv线性无关,因而$\dim(v, Tv) = 2$.这就表明$\operatorname{span}(v, Tv)$是$T$下不变的二维子空间.

归纳可知命题对所有$k \geqslant 2$成立.