维数

1.维数的定义

到目前为止,我们一直讨论着有限维向量空间,却始终没有明确地定义向量空间的维数. 一个合理的维数的定义,至少从直观上来看,应该使$\mathbb{F}^n$的维数为n.

注意到$\mathbb{F}^n$的标准基

$$(1,0,\cdots,0),(0,1,\cdots,0),\cdots,(0,\cdots,0,1)$$

的长度恰好为n. 于是,我们想把维数定义为基的长度.然而在这之前,我们需要明确这样的定义不会带来歧义,即首先要证明一个有限维向量空间的任意两个基的长度相等.

1.1 基的长度不依赖于基的选取

一个有限维向量空间的任意两个基的长度相等.

Proof.

假设V是有限维的,B_1,B_2是V的两个基.于是

(a) B_1在V中线性无关,B_2张成V,于是B_1的长度不大于B_2的长度.

(b) B_2在V中线性无关,B_1张成V,于是B_2的长度不大于B_1的长度.

综上,B_1与B_2的长度相等,命题得证.

于是基于上述想法的定义不会产生矛盾.如此,我们便可以给出维数的正式定义了.

1.2 定义:维数,$\dim V$

一个有限维向量空间的**维数**是这个向量空间的任意一个基的长度,记为$\dim V$.

基于前面的证明,我们知道有限维向量空间的子空间也一定是有限维的.它们之间的维数实际上满足如下定理.

1.3 子空间的维数

如果U是有限维向量空间V的子空间,那么$\dim U\leqslant\dim V$.

Proof.

假定U是有限维向量空间V的子空间,B_1,B_2分别为U,V的一组基.

那么B_1是V中的线性无关组,B_2是V的一个张成组.于是B_1的长度不大于B_2,即$\dim U\leqslant\dim V$.

这里有一点是需要说明的.向量空间的维数与$\mathbb{F}$的选取密切相关. $\mathbb{C}$作为$\mathbb{R}$上的向量空间,其维数为2,标准基为$(1,\mathrm{i})$;而$\mathbb{C}$作为$\mathbb{C}$上的向量空间时,其维数为1,标准基为1. 事实上,这与我们定义向量空间的标量乘法时选取的标量λ的

取值密切相关.

2.用维数判断基

我们已经知道,为了确定V中一个向量组是V的基,根据定义必须确定该向量组线性无关且张成V. 下面的两个结论表明,在确定V的维数之后,有更简单的条件判断基.

2.1 长度恰当的线性无关组是一个基

假设V是有限维的,那么V中每个长度为$\dim V$的线性无关的向量组都是V的一个基.

Proof.

我们知道每个V中的线性无关组都可以被扩充为V的一个基.然而,V中的每个基的长度均为$\dim V$. 于是这里的扩充是平凡情况下的,即没有向量被加进向量组,从而该向量组是V的一个基.

2.2 长度恰当的张成组是一个基

假设V是有限维的,那么V中每个长度为$\dim V$的张成组都是V的一个基.

Proof.

我们知道每个V中的张成组都可以被削减为V的一个基.然而,V中的每个基的长度均为$\dim V$. 于是这里的削减是平凡情况下的,即没有向量从向量组中被剔除,从而该向量组是V的一个基.

根据**2.1**的结论,我们很容易有如下的推论.

2.3 空间中与其维数相等的子空间等于该空间

假设V是有限维的,U是V的子空间且$\dim U = \dim V$,那么$U = V$.

令$u_1, \cdots, u_n$是U的基,那么$n = \dim U$,根据前提条件又有$n = \dim V$.

显然$u_1, \cdots, u_n$在V中线性无关,又$n = \dim V$,于是根据**2.1**可知$u_1, \cdots, u_n$是V的基. 于是我们有$U = V = \operatorname{span}(u_1, \cdots, u_n)$,从而命题成立.

3.子空间的维数

我们有如下计算子空间之和的维数公式.

3.1 子空间之和的维数公式

如果V_1和V_2是一个有限维向量空间的子空间,那么

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Proof.

令$v_1,\cdots,v_m$是$V_1\cap V_2$的一个基,于是它在V_1中线性无关, 因此可被扩充为V_1的一个基$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j$.

同理它也可以被扩充为V_2的一个基$v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_k$.

下面证明$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j,w_1,\cdots,w_k$是$V_1+V_2$的一个基.

不难发现span $(v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j,w_1,\cdots,w_k)=V_1+V_2$.

我们只需证明$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j,w_1,\cdots,w_k$线性无关即可.假定

$$\mathbf{0}=a_1v_1+\cdots+a_mv_m+b_1u_1+\cdots+b_ju_j+c_1w_1+\cdots+c_kw_k$$

其中各a,b,c均为标量.我们将上式移项可得

$$c_1w_1+\cdots+c_kw_k=-a_1v_1-\cdots-a_mv_m-b_1u_1-\cdots-b_ju_j$$

这表明$c_1w_1+\cdots+c_kw_k\in V_1$.又因为各$w$均在$V_2$中,于是$c_1w_1+\cdots+c_kw_k\in V_1\in V_1\cap V_2$.

由于$v_1,\cdots,v_m$是$V_1\cap V_2$的基,于是存在一组标量$d_1,\cdots,d_m$使得

$$c_1w_1+\cdots+c_kw_k=d_1v_1+\cdots+d_mv_m$$

又因为$v_1,\cdots,v_m,w_1,\cdots,w_k$线性无关,于是上式中各$c,d$均只能为0.进而我们有

$$\mathbf{0}=a_1v_1+\cdots+a_mv_m+b_1u_1+\cdots+b_ju_j$$

又因为$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j$线性无关,于是上式中各$a,b$均只能为0.

于是$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_j,w_1,\cdots,w_k$线性无关,进而我们有

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2)&=m+j+k\\&=(m+j)+(m+k)-m\\&=\dim V_1+\dim V_2-\dim(V_1\cap V_2)\end{aligned}$$

以及,我们有接下来的一些例题.

Example 1.

设$v_1,\cdots,v_m$在V中线性无关,$w\in V$,证明

$$\dim\operatorname{span}\ (v_1+w,\cdots,v_m+w)\geqslant m-1$$

Proof.

注意到对于任意$2 \leqslant k \leqslant m$有

$$v_k - v_1 = (v_k + w) - (v_1 + w)$$

于是$v_k - v_1 \in \operatorname{span}\,(v_1 + w, \cdots, v_m + w)$.

又$v_1, \cdots, v_m$在V中线性无关,故$v_2 - v_1, \cdots, v_m - v_1$在$V$中线性无关.

从而我们有$\dim \operatorname{span}\,(v_1 + w, \cdots, v_m + w) \geqslant m - 1$,命题得证.

Example 2.

设$m \in \mathbb{N}^*$,对于$0 \leqslant k \leqslant m$,定义

$$p_k(x) = x^k(1-x)^{m-k}$$

证明:$p_0, \cdots, p_m$是$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$的一组基.

Proof.

我们先来证明对于$m \in \mathbb{N}^*$,$f_0, \cdots, f_m \in \mathcal{P}_m(\mathbb{F})$,其中$f_k$是次数为$k$的多项式, 那么$f_0, \cdots, f_m$是$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$的一组基.

不妨设$f_k = a_{k,0}x^0 + \cdots + a_{k,k}x^k$.于是存在一组$b_0, \cdots, b_m$使得

$$\mathbf{0}(x) = b_0 f_0(x) + \cdots + b_m f_m(x)$$

当且仅当每个x^k的系数为0时,上式才成立.于是我们有方程组

$$\begin{cases} b_m a_{m,m} = 0 \\ b_m a_{m,m-1} + b_{m-1}a_{m-1,m-1} = 0 \\ b_m a_{m,m-2} + b_{m-1}a_{m-1,m-2} + b_{m-2}a_{m-2,m-2} = 0 \\ \cdots \\ b_m a_{m,0} + \cdots + b_0 a_{0,0} = 0 \end{cases}$$

又$a_{k,k} \neq 0$.于是从上到下依次解每个方程,可知方程组的唯一解是$b_m = \cdots = b_0 = 0$, 进而用$f_0, \cdots, f_m$线性表出$\mathbf{0}(x)$的方式是唯一的,于是$f_0, \cdots, f_m$线性无关.

又$\dim \mathcal{P}_m(\mathbb{F}) = m + 1$,根据**2.1**可知,$f_0, \cdots, f_m$是$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$的一个基.

特别地,题设的$p_0, \cdots, p_m$自然也是$\mathcal{P}_m(\mathbb{F})$的一个基.

Example 3.

设V_1, V_2, V_3是有限维空间V的子空间,$\sum\limits_{i=1}^{3} \dim V_i > 2\dim V$. 试证明:$\bigcap\limits_{i=1}^{3} V_i \neq \{\mathbf{0}\}$.

Proof.

不妨设$v_1,\cdots,v_n$为V的一个基.

自然地,对于任意V_i,向量组$v_1,\cdots,v_n$都可以被视作V_i的张成组而被削减为V_i的基.

即我们可以在$v_1,\cdots,v_n$任意地选取一些元素使得它们构成V_i的基.

我们一共需要选$\sum\limits_{i=1}^{3}\dim V_i$个元素,又$\sum\limits_{i=1}^{3}\dim V_i > 2\dim V$, 于是根据容斥原理,必然存在一个$v_k$被选择了三次,即$\exists v_k$, s.t.$v_k \in V_1\cap V_2\cap V_3$,从而命题得证.

Example 4.

设U是有限维向量空间V的子空间且$U \neq V$.令$n = \dim V, m = \dim U$.试证明:V存在这样的$n-m$个子空间,其中每个子空间维数都为$n-1$而它们的交集为U.

Proof.

设$u_1,\cdots,u_m$为U的一个基,于是$v_1,\cdots,v_m$在V中线性无关,因而可以被扩充为V的一个基

$$u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_{n-m}$$

于是我们设V的子空间W_k的基为上面的基除去v_k后的组.

这样的W_k一共有$n-m$个,且$\dim W_k = n-1$.我们只需证明$\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i = U$即可.

对于V中的元素w,存在唯一的一组标量$a_1,\cdots,a_m,b_1,\cdots,b_{n-m}$使得

$$w = a_1u_1+\cdots+a_mu_m+b_1v_1+\cdots+b_{n-m}v_{n-m}$$

当且仅当$b_1=\cdots=b_{n-m}=0$时$w\in\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$.

否则,若$b_k\neq 0$,则必然有$w\notin W_k$.

又U为任意W_k的子空间,于是$U\subseteq\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i$.

综上,存在这样的$n-m$个子空间$W_1,\cdots,W_{n-m}$使得$\bigcap\limits_{i=1}^{k} W_i = U$,命题成立.

Example 5.

假定V_1,V_2,V_3是有限维向量空间V的子空间.试证明

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3) = &\dim V_1+\dim V_2+\dim V_3\\ &-\frac{\dim(V_1\cap V_2)+\dim(V_1\cap V_3)+\dim(V_2\cap V_3)}{3}\\ &-\frac{\dim\left((V_1+V_2)\cap V_3\right)+\dim\left((V_1+V_3)\cap V_2\right)+\dim\left((V_2+V_3)\cap V_1\right)}{3}\end{aligned}$$

Proof.

我们知道

$$\begin{aligned}\dim(V_1+V_2+V_3) &= \dim(V_1+V_2)+\dim V_3-\dim\left((V_1+V_2)\cap V_3\right)\\ &= \dim V_1+\dim V_2+\dim V_3-\dim(V_1\cap V_2)-\dim\left((V_1+V_2)\cap V_3\right)\end{aligned}$$

同理可知

$$\dim(V_1+V_2+V_3) = \dim V_1+\dim V_2+\dim V_3-\dim(V_1\cap V_3)-\dim\left((V_1+V_3)\cap V_2\right)$$

$$\dim(V_1+V_2+V_3) = \dim V_1+\dim V_2+\dim V_3-\dim(V_2\cap V_1)-\dim\left((V_2+V_3)\cap V_1\right)$$

将上面三式相加之后即得题中的结果.