1. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$可逆,证明T^{-1}可逆,且有$(T^{-1})^{-1}=T$.

Proof.

假设$v_1,v_2 \in V$且$Tv_1=w_1,Tv_2=w_2$.于是$T^{-1}w_1=v_1,T^{-1}w_2=v_2$.

从而$T^{-1}w_1=T^{-1}w_2$必有$v_1=v_2$,于是必有$w_1=Tv_1=Tv_2=w_2$,即T^{-1}是单射.

对于任意$v \in V$都有$T^{-1}(Tv)=v$,于是range $T^{-1}=V$,进而T^{-1}是满射.

综上,T^{-1}可逆.下面证明$(T^{-1})^{-1}=T$.注意到$T^{-1}T=I,TT^{-1}=I$.

于是根据定义可知T是T^{-1}的逆,进而$T=(T^{-1})^{-1}$.

命题得证.