线性映射与矩阵乘法

1.将线性映射视为矩阵乘法

之前我们定义了线性映射的矩阵,现在我们定义向量的矩阵.

1.1 定义:向量的矩阵

假设$v \in V$且$v_1, \cdots, v_n$是V的基.v关于这基的**矩阵**是$n \times 1$矩阵

$$\mathcal{M}(v) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

其中$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$满足$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$.

回忆一下定义线性映射的矩阵的每一列,实际上就是一个向量.

1.2 矩阵的列是映成空间的向量

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,$v_1, \cdots, v_n$是V的基,$w_1, \cdots, w_m$是W的基. 对于任意$k \in \{1, \cdots, n\}$,$\mathcal{M}(T)$的第k列记作$\mathcal{M}(T)_{\cdot,k}$, 就等于$\mathcal{M}(Tv_k)$.

下面的结果展示了线性映射的矩阵,向量的矩阵以及矩阵乘法是怎样联系在一起的.

1.3 线性映射可以视作矩阵乘法

假设$T \in \mathcal{L}(V, W)$且$v \in V$.假设$v_1, \cdots, v_n$是V的基,$w_1, \cdots, w_m$是W的基.那么

$$\mathcal{M}(Tv) = \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$$

Proof.

假设$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$,其中$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$.于是

$$Tv = b_1 Tv_1 + \cdots + b_n Tv_n$$

于是

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(Tv) &= b_1 \mathcal{M}(Tv_1) + \cdots + b_n \mathcal{M}(Tv_n) \\ &= b_1 \mathcal{M}(T)_{\cdot,1} + \cdots + b_n \mathcal{M}(T)_{\cdot,n} \\ &= \mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v) \end{aligned}$$

式中最后一个等号是矩阵乘法的定义.

上面这个式子是联通矩阵乘法和线性映射的最重要的式子. 因为$\mathcal{M}$是同构,于是我们可以把Tv和$\mathcal{M}(Tv)$等同起来看, 于是Tv就可以视作$\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(v)$.这表明我们在研究这两者时, 可以把它们进行互相转化而简化问题.
需要注意的一点是,同构得到的矩阵依赖于基的选取.我们尽量选择简单的基(例如标准基)使得问题得到进一步的简化.
现在我们有如下命题.

1.4 线性映射的值域和矩阵的秩

假设V和W是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么$\dim \operatorname{range} T$等于$\mathcal{M}(T)$的秩.

Proof.

假设$v_1, \cdots, v_n$是V的基,$w_1, \cdots, w_m$是W的基.
将$w \in W$对应到$\mathcal{M}(w)$的线性映射$\mathcal{M}$是同构,它将W映成由$m \times 1$向量构成的空间$\mathbb{F}^{m,1}$.
我们在之前的习题知道$\operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n) = \operatorname{range} T$.
将$\mathcal{M}$作用于等式两端可知 $\mathcal{M}$将$\operatorname{range} T$映成$\operatorname{span}(\mathcal{M}(Tv_1), \cdots, \mathcal{M}(Tv_k))$.
根据秩的定义,$\mathcal{M}(T)$的秩等于$\operatorname{range} \operatorname{span}(\mathcal{M}(Tv_1), \cdots, \mathcal{M}(Tv_k))$,又后者与$\operatorname{range} T$同构,于是原命题成立.

2.换基

我们之前所定义的线性映射和向量的矩阵都依赖于基的选取.那么选取不同的基是否会造成不一样的结果呢?为此,我们先来看矩阵的逆.了解矩阵的逆之前,我们需要知道恒等矩阵.

2.1 恒等矩阵

设$n \in \mathbb{N}^*$.仅对角线上(行号和列号相等的位置)的元素为1而其余各元素均为0的$n \times n$矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

为**恒等矩阵**I.

恒等算子$I \in \mathcal{L}(V)$关于V的每个基的矩阵都是恒等矩阵I.
如果A是与I大小相同的方阵,那么$AI = IA = A$.

2.2 定义:可逆的,逆

我们称方阵A是**可逆的**,如果存在与之大小相同的方阵B使得$AB = BA = I$.
我们称B是A的**逆**且将其记为A^{-1}.

用证明线性映射的逆唯一的方法也可以证明矩阵的逆唯一.因此,A^{-1}的记号是合理的.

可逆方阵的乘积也是可逆的.对于大小相同的可逆方阵A和C,有$(AC)^{-1}=C^{-1}A^{-1}$.这是因为

$$(AC)(C^{-1}A^{-1})=A(CC^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

类似的,可以得到$(C^{-1}A^{-1})AC=I$.

2.3 线性映射之积的乘法

设$T\in\mathcal{L}(U,V)$且$S\in\mathcal{L}(V,W)$.在相同空间选取的基相同的情况下,有$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)$.

更严谨地说,设$u_1,\cdots,u_m$是U的基,$v_1,\cdots,v_n$是V的基且$w_1,\cdots,w_p$是W的基,那么

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}\left(ST,(u_1,\cdots,u_m),(w_1,\cdots,w_p)\right)\\=&\mathcal{M}\left(S,(v_1,\cdots,v_n),(w_1,\cdots,w_p)\right)\mathcal{M}(T,(u_1,\cdots,u_m),(v_1,\cdots,v_n))\end{aligned}$$

对于恒等算子关于不同的基的矩阵,我们有如下命题.

2.4 恒等算子关于两个基的矩阵

假设$u_1,\cdots,u_n$和$v_1,\cdots,v_n$是V的两个基, 那么矩阵

$$\mathcal{M}\left(I,(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n)\right)\quad\text{和}\quad\mathcal{M}\left(I,(v_1,\cdots,v_n),(u_1,\cdots,u_n)\right)$$

都是可逆的,且互为对方的逆.

Proof.

在**2.3**中将各w_k替换成各u_k并将S和T替换成I可得

$$I=\mathcal{M}\left(I,(v_1,\cdots,v_n),(u_1,\cdots,u_n)\right)\mathcal{M}(I,(u_1,\cdots,u_m),(v_1,\cdots,v_n))$$

将u与v互换有

$$I=\mathcal{M}(I,(u_1,\cdots,u_m),(v_1,\cdots,v_n))\mathcal{M}\left(I,(v_1,\cdots,v_n),(u_1,\cdots,u_n)\right)$$

于是就证明了上述结果.

这告诉我们线性映射的基是可以更换的.为此,我们有换基公式. 我们把$\mathcal{M}(T,(u_1,\cdots,u_n),(u_1,\cdots,u_n))$简记为$\mathcal{M}(T,(u_1,\cdots,u_n))$.

2.5 换基公式

设$T\in\mathcal{L}(V)$.假设$u_1,\cdots,u_n$和$v_1,\cdots,v_n$分别是V的两组基,令

$$A=\mathcal{M}\left(T,(u_1,\cdots,u_n)\right),B=\mathcal{M}\left(T,(v_1,\cdots,v_n)\right)$$

且$C=\mathcal{M}\left(T,(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n)\right)$.那么

$$A=C^{-1}BC$$

Proof.

由**2.3**可得

$$A=C^{-1}\mathcal{M}\left(T,(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n)\right)$$

又

$$\mathcal{M}\left(T,(u_1,\cdots,u_n),(v_1,\cdots,v_n)\right)=BC$$

于是

$$A=C^{-1}BC$$

2.6 逆的矩阵等于矩阵的逆

设$v_1,\cdots,v_n$是V的基且$T\in\mathcal{L}$可逆,那么$\mathcal{M}\left(T^{-1}\right)=\left(\mathcal{M}(T)\right)^{-1}$,式中两个矩阵都是关于基$v_1,\cdots,v_n$的.