1. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$.证明:任取V和W的基,T对应的矩阵都至少有$\dim \operatorname{range} T$个非零元素.

Proof.

设选取V的基为$v_1, \cdots, v_m$,选取W的基为$w_1, \cdots, w_n$. 根据线性映射基本定理有$\dim V = \dim \operatorname{range} T + \dim \operatorname{null} T = m$.

若矩阵中非零元素少于$\dim \operatorname{range} T$个,那么说明至少有$\dim \operatorname{null} T + 1$列全部由0构成.

假定这些列的列号为k,于是$v_k = 0w_1 + \cdots + 0w_n = \mathbf{0}$.

于是至少有$\dim \operatorname{null} T + 1$个$v_k$满足$Tv_k = \mathbf{0}$,这与null T的定义不符.

从而命题得证.

3. 设V和W是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V,W)$.证明:$\dim \operatorname{range} T = 1$,当且仅当存在在$V$的一个基和$W$的一个基使得关于这些基的$\mathcal{M}(T)$的所有元素都是1.

Proof.

$\Leftarrow$:设$v_1, \cdots, v_m$是V的一组基,$w_1, \cdots, w_n$是W的一组基.依题设有

$$\forall k \in \{1, \cdots, m\}, Tv_k = w_1 + \cdots + w_n$$

于是$Tv_1 = \cdots = Tv_m = w_1 + \cdots + w_n$.下面我们说明$w := w_1 + \cdots + w_n$是range T的基.

对于任意$v \in V$,存在唯一一组标量$a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$使得$v = a_1v_1 + \cdots + a_mv_m$.于是$\forall Tv \in \operatorname{range} T$都有

$$Tv = a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m = (a_1 + \cdots + a_m)\, w$$

从而w张成range T,即$\dim \operatorname{range} T = 1$.

$\Rightarrow$:由$\dim \operatorname{range} T = 1$可知

$$\exists w \in W, \text{s.t.} \forall v \in V, \exists a \in \mathbb{F}, Tv = aw$$

3. 设$v_1, \cdots, v_n$是V的基,$w_1, \cdots, w_m$是W的基.

(1) 证明:如果$S, T \in \mathcal{L}(V,W)$,那么$\mathcal{M}(S+T) = \mathcal{M}(S) + \mathcal{M}(T)$.

(2) 证明:如果$T \in \mathcal{L}(V,W)$,$\lambda \in \mathbb{F}$,那么$\mathcal{M}(\lambda T) = \lambda \mathcal{M}(T)$.

Proof.

(1) 记$\mathcal{M}(S) = A, \mathcal{M}(T) = B, \mathcal{M}(S+T) = C$.于是对于任意$k \in \{1, \cdots, m\}$都有

$$Sv_k = A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m$$

$$Tv_k = B_{1,k}w_1 + \cdots + B_{m,k}w_m$$

两式相加可得

$$(S+T)v_k = Sv_k + Tv_k = (A_{1,k} + B_{1,k})\, w_1 + \cdots + (A_{m,k} + B_{m,k})\, w_m$$

又$w_1, \cdots, w_m$是W的基,于是表出$(S+T)v_k$的系数应是唯一的.将上式与

$$(S+T)v_k = C_{1,k}w_1 + \cdots + C_{m,k}w_m$$

比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \cdots, m\}, C_{j,k} = A_{j,k} + B_{j,k}$$

又因为上式对所有$k \in \{1, \cdots, m\}$成立,于是根据矩阵加法的定义可知$A + B = C$.命题得证.

(2) 记$\mathcal{M}(T) = A, \mathcal{M}(\lambda T) = B$. 对于任意$k \in \{1, \cdots, n\}$有

$$\lambda T v_k = \lambda\, (A_{1,k}w_1 + \cdots + A_{m,k}w_m)$$

$$(\lambda T)v_k = B_{1,k}w_1 + \cdots + B_{m,k}w_m$$

又$w_1, \cdots, w_m$是W的基,于是表出$\lambda T v_k$的系数应是唯一的.比较系数可得

$$\forall j \in \{1, \cdots, m\}, B_{j,k} = \lambda A_{j,k}$$

又因为上式对所有$k \in \{1, \cdots, m\}$成立,于是根据矩阵标量乘法的定义可知$B = \lambda A$.命题得证.

4. 设$D \in \mathcal{L}\left(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}), \mathcal{P}_2(\mathbb{R})\right)$是微分映射,定义为$Dp = p'$. 求$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$的一组基和$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的一组基使得$D$关于这些基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solution.
不妨选取$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的标准基$1, x, x^2$.根据矩阵的定义可知此时对应的$\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$的基为$x, \dfrac{1}{2}x^2, \dfrac{1}{3}x^3, 1$

5. 设V和W是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.证明:存在V的一个基和W的一个基使得关于这些基的$\mathcal{M}(T)$满足除了在第k行第k列$(1 \leqslant k \leqslant \dim \operatorname{range} T)$的元素为1之外其余元素均为0.

Proof.

设$\dim \operatorname{range} T$的一组基为$w_1,\cdots,w_m$.于是存在$v_1,\cdots,v_m$使得$\forall k\in\{1,\cdots,m\}$有$Tv_k=w_k$.

下面证明$v_1,\cdots,v_m$线性无关.设一组标量$a_1,\cdots,a_m$满足

$$\mathbf{0}=a_1v_1+\cdots+a_mv_m$$

于是$T(\mathbf{0})=a_1Tv_1+\cdots+a_mTv_m=a_1w_1+\cdots+a_mw_m=\mathbf{0}$.

由于$w_1,\cdots,w_m$线性无关,于是上式中各a均仅能为0,于是$v_1,\cdots,v_m$线性无关.

如此,我们可以把$w_1,\cdots,w_m$和$v_1,\cdots,v_m$分别扩展为W和V的基,进而这个矩阵满足题意.

6. 设$v_1,\cdots,v_m$是V的一组基,W是有限维的.设$T\in\mathcal{L}(V,W)$.

试证明:存在W的一组基$w_1,\cdots,w_n$使得$\mathcal{M}(T)$除了第一行第一列可能为1以外,第一列的所有元素均为0.

Proof.

若$Tv_1=\mathbf{0}$,那么显然第一列所有元素均为0.

若$Tv_1\neq\mathbf{0}$,不妨设$w_1:=Tv_1\in W$.于是w_1可以被扩展为W的一组基$w_1,\cdots,w_n$.由于$w_1,\cdots,w_n$线性无关,于是

$$Tv_1=1w_1+0w_2+\cdots+0w_n$$

于是$\mathcal{M}(V,W)$的第一行第一列的元素为1,其余元素均为0.

7. 设$w_1,\cdots,w_n$是W的一组基,V是有限维的.设$T\in\mathcal{L}(V,W)$.

试证明:存在V的一组基$v_1,\cdots,v_m$使得$\mathcal{M}(T)$除了第一行第一列可能为1以外,第一行的所有元素均为0.

Proof.

我们首先任取V的一组$v_1,\cdots,v_m$.

若此时矩阵的第一行均为0或仅有第一列第一行为1,其余为0,那么命题得证.

否则,我们有