Linear Algebra Done Right 5C

1. 证明或给出一反例:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且T^2关于V的某个基有上三角矩阵,那么T关于V的某个基有上三角矩阵.

Solution.
令$V = \mathbb{R}^2$,$T : (x, y) \mapsto (-y, x)$.于是$T^2 + I = \mathbf{0}$,因而$T^2$关于标准基有上三角矩阵

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

然而T没有特征值,因而不存在关于T的上三角矩阵.

2. 设A, B是$n \times n$的上三角矩阵,A的对角线元素为$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$,$B$的对角线元素为$\beta_1, \cdots, \beta_n$.

(1) 证明:$A + B$是上三角矩阵,其对角线元素为$\alpha_1 + \beta_1, \cdots, \alpha_n + \beta_n$.

(2) 证明:AB是上三角矩阵,其对角线元素为$\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_n\beta_n$.

Proof.

(1) 根据矩阵加法的知识易知.

(2) 对于任意$1 \leqslant k < j \leqslant n$有

$$(AB)_{j,k} = \sum_{r=1}^{n} A_{j,r} B_{r,k}$$

由于任意$1 \leqslant r \leqslant n$必然满足$j > r$或$r > k$,于是$A_{j,r}, B_{r,k}$中至少有一个为0,于是$(AB)_{j,k} = 0$,因而$AB$是上三角矩阵.对于对角线上的元素,有

$$(AB)_{k,k} = \sum_{r=1}^{n} A_{k,r} B_{r,k}$$

当且仅当$r = k$时$A_{k,r}B_{r,k} = \alpha_k\beta_k$,否则$A_{k,r}B_{r,k} = 0$.于是$AB$的对角线上的元素为$\alpha_1\beta_1, \cdots, \alpha_n\beta_n$.

3. 设$T \in \mathcal{L}(V)$可逆,且T关于V的一组基$v_1, \cdots, v_n$的矩阵是上三角矩阵,其对角线上元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.证明:$T^{-1}$关于这基的矩阵也是上三角矩阵,其对角线上元素为$\dfrac{1}{\lambda_1}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$.

Proof.

由题意对任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$Tv_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$.

对$Tv_1 = \lambda_1 v_1$两边作用T^{-1},整理可得$T^{-1}v_1 = \lambda_1^{-1}v$.

对$Tv_2 = A_{1,2}v_1 + \lambda v_2$两边作用$T^{-1}$,同理可得$T^{-1}v_2 = \lambda_2^{-1}v_2 + A_{1,1}^{-1}v_1$.

依次同理对式子变形可知对任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$T^{-1}v_k \in \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$.

于是T^{-1}关于$v_1, \cdots, v_n$的矩阵是上三角矩阵,其对角线上元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.证明:$T^{-1}$关于这基的矩阵也是上三角矩阵,其对角线上元素为$\dfrac{1}{\lambda_1}, \cdots, \dfrac{1}{\lambda_n}$.

4. 给出一例:一个算子关于某个基的对角线上只有0,但是可逆.

Solution.

令$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$关于其标准基的矩阵为$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$,则$T$可逆.

5. 给出一例:一个算子关于某个基的对角线上均为非零元素,但是不可逆.

Solution.

令$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$关于其标准基的矩阵为$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,则$T$不可逆.例如,$T(-1,-1) = (0,0)$.

6. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:如果$1 \leqslant k \leqslant \dim V$,那么$V$有在$T$下不变的$k$维子空间.

Proof.

考虑到T关于V的某个基$v_1, \cdots, v_{\dim V}$具有上三角矩阵.

于是对于任意$1 \leqslant k \leqslant \dim V$都有$\operatorname{span}(v_1, \cdots, v_k)$在$T$下不变.

7. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$且$v \in V$.

(1) 存在唯一的最低次首一多项式p_v使得$p_v(T)v = \mathbf{0}$.

(2) T的最小多项式是p_v的多项式倍.

Proof.

(1) 对于V中的向量组$v, Tv, \cdots, T^{\dim V}v$,由于其长度为$\dim V+1$,于是这向量组线性相关. 根据线性相关性引理可知,存在最小的m使得$T^m v \in \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{m-1}v)$.

于是设$T^m v = a_0 v + a_1 T v_1 + \cdots + a_{m-1}T^{m-1}v$.令$p_v(z) = -\sum\limits_{i=0}^{m-1} a_i z^i + z^m$,于是$p_v$是使得$p_v(T)v = \mathbf{0}$的次数最低的首一多项式.

现在设首一多项式$q \in \mathcal{P}(\mathbb{F})$满足$q(T)v = \mathbf{0}$,且$\deg q = \deg p_v$.于是$(p_v - q)(T)v = \mathbf{0}$.

若$q \neq p_v$,则整理系数后$p_v - q$是次数更低的满足$(p_v - q)(T)v = \mathbf{0}$的多项式,这与$p_v$次数最低不符.于是$q = p_v$,因而这样的首一多项式是唯一的.

(2) 设$U = \operatorname{span}(v, Tv, \cdots, T^{\deg p - 1}v)$,则$U$在$T$下不变.于是$p_v$是限制于$U$上的算子$T|_U$的最小多项式. 于是$T$的最小多项式是$T|_U$的最小多项式$p_v$的多项式倍.

8. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$,且存在$v \in V (v \neq \mathbf{0})$使得$T^2 v + 2Tv + 2v = \mathbf{0}$.

(1) 证明:如果$\mathbb{F} = \mathbb{R}$,那么T关于任意V的基都没有上三角矩阵.

(2) 证明:如果$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,那么T关于某个V的基的上三角矩阵的对角线上有$-1 \pm \mathrm{i}$.

Proof.

(1) 由**5C.8**可知T的最小多项式是$z^2 + 2z + 2$的多项式倍.

如果T关于V的某个基具有上三角矩阵,那么它的最小多项式必然可以分解为一次项之积.然而$z^2 + 2z + 2$在$\mathbb{R}$上不能被继续分解,于是T关于任意基都不存在上三角矩阵.

(2) 由**5C.8**可知T的最小多项式是$z^2 + 2z + 2$的多项式倍.

这多项式的零点为$-1 \pm \mathrm{i}$,因此T的特征值包括$-1 \pm \mathrm{i}$.自然,这上三角矩阵的对角线上有$-1 \pm \mathrm{i}$.

9. 设B是方阵,其元素为复数.证明:存在元素为复数的可逆方阵A使得$A^{-1}BA$是上三角矩阵.

Proof.

设B是T关于V的一组基$v_1, \cdots, v_n$的矩阵.

由于复向量空间的线性映射一定存在上三角矩阵,于是设T关于V的另一组基$u_1, \cdots, u_n$具有上三角矩阵C.

令$A = \mathcal{M}(I, (u_1, \cdots, u_n), (v_1, \cdots, v_n))$,据换基公式有$C = A^{-1}BA$,因而$A^{-1}BA$是上三角矩阵.

10. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$v_1, \cdots, v_n$是V的基.证明下列命题等价.

(a) T关于$v_1, \cdots, v_n$的矩阵是下三角的.

(b) 对任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$\operatorname{span}(v_k, \cdots, v_n)$在$T$下不变.

(c) 对任意$1 \leqslant k \leqslant n$,都有$Tv_k \in \operatorname{span}(v_k, \cdots, v_n)$.

Proof.

令$u_k = v_{n+1-k}$.将T和$u_1, \cdots, u_n$视为对象,于是这与我们证明上三角矩阵的条件中的三个命题等价.

11. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,且V是有限维的.证明:对任意$T \in \mathcal{L}(V)$,都存在V的一组基使得T关于该基有下三角矩阵.

Proof.

存在V的一组基$v_1, \cdots, v_n$使得T关于该基有上三角矩阵.令$u_k = v_{n+1-k}$,则T关于$u_1, \cdots, u_n$的矩阵即为下三角矩阵.

12. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个基具有上三角矩阵,且U是V的在T下不变的子空间.

(1) 证明:$T|_U$关于U的某个基具有上三角矩阵.

(2) 证明:T/U关于V/U的某个基具有上三角矩阵.

Proof.

(1) 由于T具有上三角矩阵,于是T的最小多项式p应为$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$的形式.
由于U在T下不变,于是p是$T|_U$的最小多项式q的多项式倍,因而q也具有上面的形式,因而$T|_U$也有上三角矩阵.

(2) 据**5B.25**可知T的最小多项式是T/U的最小多项式的多项式倍.于是,出于与**(1)**相同的原因,T/U也有上三角矩阵.

13. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.设存在V的在T下不变的子空间U,使得$T|_U, T/U$分别关于$U, V/U$的某个基具有上三角矩阵.证明:T关于V的某组基具有上三角矩阵.

Proof.

设p, q分别为$T|_U, T/U$的最小多项式.由题意,p, q都具有$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$的形式.

由**5B.25**可知pq是T的最小多项式r的多项式倍,因而r也具有上述形式,于是T关于V的某组基具有上三角矩阵.

14. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:T关于V的某个基具有上三角矩阵,当且仅当T'关于V'的某个基具有上三角矩阵.

Proof.

由**5B.28**可知T,T'的最小多项式相同,因而如果其中一者具有上三角矩阵,必然具有$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_n)$的形式,于是两者均关于各自空间的某组基具有上三角矩阵.