对偶

1.对偶空间和线性映射

映射到标量域$\mathbb{F}$的线性映射在线性代数中扮演着特殊的角色,于是,我们赋予它特殊的名称.

1.1 定义:线性泛函

V上的**线性泛函**是从V到$\mathbb{F}$的线性映射.

换言之,V上的线性泛函T是$\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$的元素.同样地,$\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$也有特殊的名称和记号.

1.2 定义:对偶空间

V的对偶空间V'是V上全体线性泛函构成的向量空间.换言之,$V'=\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$.

以及,对偶空间的维数和原空间相同.

1.3 对偶空间的维数

假设V是有限维向量空间,那么V'也是有限维的,且满足$\dim V=\dim V'$.

Proof.

我们知道$\dim(\mathcal{L}(V,W))=(\dim V)(\dim W)$.于是

$$\dim V'=\dim V\cdot\dim\mathbb{F}=\dim V$$

1.4 定义:对偶基

若$v_1,\cdots,v_m$是V的一组基,那么$v_1,\cdots,v_m$的对偶基是V'中的元素$\phi_1,\cdots,\phi_m$构成的组,其中各ϕ_k是满足

$$\phi_k(v_j)=\begin{cases}1,j=k\\0,j\neq k\end{cases}$$

的线性泛函.

上述命题给了我们一种表示线性组合的系数的方法.

1.5 对偶基和线性组合的系数

假设$v_1,\cdots,v_m$是V的基,$\phi_1,\cdots,\phi_m$是其对偶基,那么对于任意$v\in V$都有

$$v=\phi_1(v)v_1+\cdots+\phi_m(v)v_m$$

上述命题是容易证明的.现在我们来说明对偶基是对偶空间的基.

1.6 对偶基是对偶空间的基

假设V是有限维的,那么V的基的对偶基是V'的基.

Proof.

设$v_1, \cdots, v_m$是V的基,$\phi_1, \cdots, \phi_m$是其对偶基.设$a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$满足

$$a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m = \mathbf{0}$$

对于各$k \in \{1, \cdots, m\}$有

$$(a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m)(v_k) = a_k$$

即$\mathbf{0}v_k = a_k$,于是$a_k = 0$,进而$\phi_1, \cdots, \phi_m$线性无关.

由于$\phi_1, \cdots, \phi_m$是V'中长度为$\dim V'$的线性无关组,进而$\phi_1, \cdots, \phi_m$是V'的基.

1.7 对偶映射

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,T的对偶映射是由下式定义的线性映射$T' \in \mathcal{L}(W', V')$:对任意$\phi \in W'$有

$$T'(\phi) = \phi \circ T$$

1.8 对偶映射的代数性质

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.那么

(1) 对于所有$S \in \mathcal{L}(V, W)$,都有$(S+T)' = S' + T'$.

(2) 对于所有$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$(\lambda T)' = \lambda T'$.

(3) 对于所有$S \in \mathcal{L}(W, U)$,都有$(ST)' = T'S'$.

(1)和**(2)**的证明留给读者.我们接下来证明**(3)**.

Proof.

设$\phi \in U'$,那么

$$(ST)'(\phi) = \phi \circ (ST) = (\phi \circ S) \circ T = T'(\phi \circ S) = T'(S'(\phi)) = (T'S')(\phi)$$

上式表明对于任意$\phi \in U'$都有$(ST)(\phi) = (T'S')(\phi)$,于是$ST = T'S'$.

2.对偶的零空间和值域

我们将用range T, null T来刻画range T', null T'.我们首先给出如下定义.

2.1 定义:零化子

对于$U \subseteq V$,U的**零化子**U^0定义为

$$U^0 = \{\phi \in V' : \forall u \in U, \phi(u) = 0\}$$

2.2 零化子是子空间

设$U \subseteq V$,那么U^0是V'的子空间.

Proof.

注意到$\mathbf{0} \in U^0$.

设$\phi, \psi \in U^0$,那么$\phi, \psi \in V'$且对于任意$u \in U$都有$\phi(u) = \psi(u) = 0$.于是

$$(\phi + \psi)(u) = \phi(u) + \psi(u) = 0 + 0 = 0$$

这表明$\phi + \psi \in U^0$,于是U^0对加法封闭.

类似地可以证明U^0对标量乘法封闭.

2.3 零化子的维数

设V是有限维的且U是V的一个子空间,那么$\dim U^0 = \dim V - \dim U$.

Proof.

当然可以采取选取U的基然后扩充的方式进行证明.这里我们给出另外的一种做法.

令$i \in \mathcal{L}(U, V)$是包含映射,满足对于任意$u \in U, i(u) = u$.

于是i'是V'到U'的线性映射.由线性映射基本定理可知

$$\dim \text{range } i' + \dim \text{null } i' = \dim V'$$

根据定义可知null $i' = U^0$,又$\dim V' = \dim V$,于是

$$\dim \text{range } i' = \dim V - \dim U^0$$

对于任意$\phi \in U'$,都可以被扩充为V上的线性泛函ψ满足$i'(\psi) = \phi$,于是$\phi \in \text{range } i'$.

由此range $i' = U'$.又$\dim U' = \dim U$,代入上式可得

$$\dim U + \dim U^0 = \dim V$$

有了上面的命题,我们就可以用零化子的大小衡量子空间的大小.

2.4 零化子等于$\{\mathbf{0}\}$或整个空间的条件

设V是有限维的,且U是V的一个子空间.那么

(1) $U^0 = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow U = V$.

(2) $U^0 = V' \Leftrightarrow U = \{\mathbf{0}\}$.

上述命题的证明是容易的.我们现在来看T'的零空间.

2.5 对偶映射的零空间

设V和W是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$.那么

(1) $\text{null } T' = (\text{range } T)^0$.

(2) $\dim \text{null } T' = \dim \text{null } T + \dim W - \dim V$.

Proof.

设$\phi \in \text{null } T'$.于是$\mathbf{0} = T'(\phi) = \phi \circ T$.于是对任意$v \in V$都有$0 = (\phi \circ T)(v) = \phi(Tv)$.

于是$\phi \in (\text{range } T)^0$.这意味着$\text{null } T' \subseteq (\text{range } T)^0$.

现在设$\phi \in (\text{range } T)^0$.于是对于每个$v \in V$都有$\phi(Tv) = 0$.

于是$\mathbf{0} = T'(\phi)$,即$\phi \in \text{null } T'$.这表明$(\text{range } T)^0 \subseteq \text{null } T$.

综上可知$\text{null } T = (\text{range } T)^0$.并且由此可以推出上面所示的等式.

2.6 T是满射等价于T'是单射

设V和W是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么T是满射等价于T'是单射.

Proof.

我们有

$$T\text{是满射} \Leftrightarrow \text{range } T = W \Leftrightarrow (\text{range } T)^0 = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow \text{null } T' = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow T'\text{是单射}$$

2.7 T'**的值域**

设V和W是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$.那么

(1) $\dim \operatorname{range} T' = \dim \operatorname{range} T$.

(2) $\operatorname{range} T' = (\operatorname{null} T)^0$.

Proof.

(1) 我们有$\dim \operatorname{range} T' = \dim W' - \dim \operatorname{null} T' = \dim W - \dim(\operatorname{range} T)^0 = \dim \operatorname{range} T$.

(2) 先设$\phi \in \operatorname{range} T'$.于是存在$\psi \in W'$使得$\phi = T'(\psi)$成立.对于任意$v \in \operatorname{null} T$,都有

$$\phi(v) = (T'(\psi))(v) = (\psi \circ T)(v) = \psi(Tv) = \psi(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

于是$\phi \in (\operatorname{null} T)^0$,即$\operatorname{range} T' \in (\operatorname{null} T)^0$.而

$$\dim \operatorname{range} T' = \dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T = \dim(\operatorname{null} T)^0$$

于是$\operatorname{range} T'$与$(\operatorname{null} T)^0$的维数相同.这表明$\operatorname{range} T' = (\operatorname{null} T)^0$.

于是我们有如下与**2.6**相似的命题.

2.8 T**是单射等价于**T'**是满射**

设V和W是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么T是单射等价于T'是满射.

Proof.

我们有

$$T\text{是单射} \Leftrightarrow \operatorname{null} T = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow (\operatorname{null} T)^0 = V' \Leftrightarrow \operatorname{range} T' = V' \Leftrightarrow T'\text{是满射}$$

3.线性映射的对偶的矩阵

下面的结论告诉了我们线性映射的对偶和矩阵的转置之间的关系.

3.1 T'**的矩阵是**T**的矩阵的转置**

设V和W是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么$\mathcal{M}(T') = (\mathcal{M}(T))^{\mathrm{t}}$

Proof.

令$A = \mathcal{M}(T), C = \mathcal{M}(T')$.设$1 \leqslant j \leqslant m$且$1 \leqslant k \leqslant n$. 由$\mathcal{M}(T')$定义可知

$$T'(\psi_j) = \sum_{r=1}^{n} C_{r,j}\phi_r$$

将上式作用于v_k有$(\psi_j \circ T)(v_k) = \sum_{r=1}^{n} C_{r,j}\phi_r(v_k) = C_{k,j}$.

我们还可以写出

$$\begin{aligned}(\psi_j \circ T)(v_k) &= \psi_j(Tv_k) \\ &= \psi_j\left(\sum_{r=1}^{m} A_{r,k}w_r\right) \\ &= \sum_{r=1}^{m} A_{r,k}\psi_j(w_r) \\ &= A_{j,k}\end{aligned}$$

于是$C_{k,j} = A_{j,k}$,从而$C = A^{\mathrm{t}}$.

现在,我们给出另一种证明矩阵的列秩等于行秩的方法.之前我们已经用行与列的线性组合的知识说明了这一点.

Proof.

记目标矩阵为A.定义$T : \mathbb{F}^{n,1} \to \mathbb{F}^{m,1}$为$Tx = Ax$.于是$\mathcal{M}(T) = A$,于是

$$A\text{的列秩} = \dim \operatorname{range} T = \dim \operatorname{range} T' = \mathcal{M}(T')\text{的列秩} = A^{\mathrm{t}}\text{的列秩} = A\text{的行秩}$$

于是命题就得证.