1. 给出一例线性映射T满足$\dim \operatorname{null} T=3$且$\dim \operatorname{range} T=2$.

Solution.

令$T:\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^2$满足

$$T(x_1,\cdots,x_5)=(x_1,x_2)$$

于是$\operatorname{null} T=\{(0,0,x,y,z)\in\mathbb{R}^5:x,y,z\in\mathbb{R}\}$,故$\dim \operatorname{null} T=3$.

又$\operatorname{range} T=\mathbb{R}^2$,于是$\dim \operatorname{range} T=2$.这样就构造出了符合题设的线性映射$T$.

2. 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$使得$\operatorname{range} S\subseteq T$,证明$(ST)^2=\mathbf{0}$

Proof.

对于任意$v\in V$都有$S(Tv)\in \operatorname{range} S$,于是$STv\in T$,于是$T(STv)=\mathbf{0}$, 于是$S(T(STv))=S(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,进而$(ST)^2v=\mathbf{0}$. 从而$(ST)^2=\mathbf{0}$.

3. 设$v_1,\cdots,v_m$是V中一组向量,定义$T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^m,V)$为

$$T(z_1,\cdots,z_m)=z_1v_1+\cdots+z_mv_m$$

(1) 当$v_1,\cdots,v_m$张成V时,指出T具有的性质.

(2) 当$v_1,\cdots,v_m$在V中线性无关时,指出T具有的性质.

Solution.

(1) T是满射.

(2) T是单射.

4. 证明:集合$\{T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4):\dim \operatorname{null} T>2\}$不是$\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4)$的子空间.

Proof.

取$T_1,T_2\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4)$满足

$$T_1(x_1,\cdots,x_5)=(x_1,x_2,0,0),T_2(x_1,\cdots,x_5)=(0,0,x_3,x_4)$$

易知$\operatorname{null} T_1=\{(0,0,x,y,z)\in\mathbb{R}^5:x,y,z\in\mathbb{R}\}$, $\operatorname{null} T_2=\{(x,y,0,0,z)\in\mathbb{R}^5:x,y,z\in\mathbb{R}\}$.

于是$\dim \operatorname{null} T_1=\dim \operatorname{null} T_2=3>2$,故$T_1,T_2\in\{T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4):\dim \operatorname{null} T>2\}$.

然而$(T_1+T_2)(x_1,\cdots,x_5)=(x_1,x_2,x_3,x_4)$,null $(T_1+T_2)=\{(0,0,0,0,x)\in\mathbb{F}^5:x\in\mathbb{F}\}$,于是$\dim\operatorname{null}(T_1+T_2)=1$, 进而$T_1+T_2\notin\{T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4):\dim\operatorname{null}T>2\}$,于是该集合对加法不封闭,不是$\mathcal{L}(\mathbb{R}^5,\mathbb{R}^4)$的子空间.

5. 给出一例使得range $T=$ null T的$T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^4)$.

Solution.

对于任意$(x_1,x_2,x_3,x_4)\in\mathbb{R}^4$,令$T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1,x_2,0,0)$即可满足题意.

6. 试证明不存在$T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$使得range $T=$ null T.

Proof.

由线性映射基本定理可知$\dim\operatorname{range}T+\dim\operatorname{null}T=\dim V=5$.

于是不存在T满足$\dim\operatorname{range}T=\dim\operatorname{null}T$,因而range $T\neq$ null T对所有$T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^5)$成立.

7. 设V和W是有限维的且满足$2\leqslant\dim V\leqslant\dim W$,试证明$\{T\in\mathcal{L}(V,W):T\text{不是单射}\}$不是$\mathcal{L}(V,W)$的子空间.

Proof.

设$v_1,\cdots,v_n$为V的一个基,$w_1,\cdots,w_n$是W中的一组线性无关向量.

令$T_1,T_2\in\mathcal{L}(V,W)$满足

$$\begin{cases}T_1v_1=\mathbf{0}\\ T_1v_k=w_k,k\in\{2,\cdots,n\}\end{cases}\quad\begin{cases}T_2v_2=\mathbf{0}\\ T_2v_k=w_k,k\in\{1,\cdots,n\}\setminus\{2\}\end{cases}$$

不难证明T_1,T_2均不是单射.然而,对于任意一组标量$a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{F}$有

$$\begin{aligned}(T_1+T_2)(a_1v_1+\cdots+a_nv_n)&=a_1T_1v_1+\cdots+a_nT_1v_n+a_1T_2v_1+\cdots+a_nT_2v_n\\&=a_2w_2+\cdots+a_nw_n+a_1w_1+\cdots+a_nw_n\\&=a_1w_1+a_2w_2+\cdots+2a_nw_n\end{aligned}$$

因为$w_1,\cdots,w_n$线性无关,于是T_1+T_2是单射,于是该集合对加法不封闭.命题得证.

8. 设V和W是有限维的且满足$2 \leqslant \dim W \leqslant \dim V$,试证明$\{T \in \mathcal{L}(V, W) : T$不是满射$\}$不是$\mathcal{L}(V, W)$的子空间.

Proof.

设$v_1, \cdots, v_n$为V的一个基,$w_1, \cdots, w_m$是W的一个基.

令$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V, W)$满足

$$\begin{cases} T_1 v_1 = \mathbf{0} \\ T_1 v_j = w_j, j \in \{2, \cdots, m\} \\ T_1 v_k = \mathbf{0}, k \in m+1, \cdots, n \end{cases} \begin{cases} T_2 v_2 = \mathbf{0} \\ T_2 v_j = w_j, j \in \{1, \cdots, m\} \setminus \{2\} \\ T_2 v_k = \mathbf{0}, k \in m+1, \cdots, n \end{cases}$$

不难证明T_1, T_2均不是满射.然而,对于任意一组标量$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$有

$$\begin{aligned} (T_1 + T_2)(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) &= a_1 T_1 v_1 + \cdots + a_n T_1 v_n + a_1 T_2 v_1 + \cdots + a_n T_2 v_n \\ &= a_1 w_1 + a_2 w_2 + \cdots + 2a_m w_m \end{aligned}$$

由于$w_1, \cdots, w_m$是W的基,于是$T_1 + T_2$是满射,于是该集合对加法不封闭,命题得证.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$是单射,$v_1, \cdots, v_n$在V中线性无关.试证明$Tv_1, \cdots, Tv_n$在W中线性无关.

Proof.

设一组标量$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$,于是$T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) = a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n$.

由$v_1, \cdots, v_n$线性无关可得当且仅当$a_1 = \cdots = a_n = 0$时$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}$.

又$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,于是$a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n = \mathbf{0}$当且仅当$a_1 = \cdots = a_n = 0$.

于是$Tv_1, \cdots, Tv_n$在W中线性无关.

10. 设$V = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_n)$,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.试证明$\operatorname{range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_n)$.

Proof.

由于$V = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_n)$,故对于任意$v \in V$均存在一组标量$a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{F}$使得

$$v = a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n$$

于是对于任意$Tv \in \operatorname{range} T$都有

$$\begin{aligned} Tv &= T(a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n) \\ &= a_1 T v_1 + \cdots + a_n T v_n \end{aligned}$$

从而$\operatorname{range} T = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots Tv_n)$,命题得证.

11. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.
试证明:存在V的一个子空间U使得$U \cap \operatorname{null} T = \{\mathbf{0}\}$且$\operatorname{range} T = \{Tu : u \in U\}$.

Proof.
设$u_1, \cdots, v_m$为null T的一个基,于是它可以被扩展为V的一个基$u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_m$.
根据线性映射基本定理可知$Tv_1, \cdots, Tv_m$为range T的基.
于是令$U = \operatorname{span}(v_1, \cdots, v_m)$即可满足题意.

12. 设线性映射$T : \mathbb{F}^4 \to \mathbb{F}^2$使得

$$\operatorname{null} T = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{F}^4 : x_1 = 5x_2, x_3 = 7x_4\right\}$$

试证明T是满射.

Proof.
不难发现$(5, 1, 0, 0), (0, 0, 7, 1)$是null T的一个基,于是$\dim \operatorname{null} T = 2$.
由线性映射基本定理,$\dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T = 2 = \dim \mathbb{R}^2$,从而$\dim \operatorname{range} T = \mathbb{R}^2$,故$T$是满射.

13. 设U是$\mathbb{R}^8$的子空间,$\dim U = 3$,线性映射$T : \mathbb{R}^8 \to \mathbb{R}^5$且null $T = U$.试证明T是满射.

Proof.
由线性映射基本定理,$\dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T = \dim V - \dim U = 8 - 3 = 5$,于是$\operatorname{range} T = \mathbb{R}^5$,故$T$是满射.

14. 试证明:不存在$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5, \mathbb{F}^2)$使得

$$\operatorname{null} T = \left\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{F}^5 : x_1 = 3x_2 \text{且} x_3 = x_4 = x_5\right\}$$

Proof.
注意到$(3, 1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1, 1)$是null T的一个基,于是$\dim \operatorname{null} T = 2$.
根据线性映射基本定理可知$\dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} 5 - 2 = 3 > 2$,于是不存在这样的线性映射.

15. 设V上的线性映射T,满足T的零空间和值域都是有限维的.试证明:V是有限维的.

Proof.

不妨设$\dim \operatorname{null} T = n, \dim \operatorname{range} T = m$,于是$m, n \in \mathbb{N}$.

于是$\dim V = m + n \in \mathbb{N}$,故$V$是有限维的,命题得证.

16. 设V和W都是有限维的,试证明:存在V到W的单射,当且仅当$\dim V \leqslant \dim U$.

Proof.

首先证明$\dim V \leqslant \dim W$时存在这样的单射.

设$v_1, \cdots, v_n$是V的一个基,$w_1, \cdots, w_n$是W中的一组线性无关的向量.

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得$Tv_k = w_k, k \in \{1, \cdots, n\}$.

对于$v \in V$,设一组标量$a_1, \cdots, a_n$满足$v = a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$.于是

$$\begin{aligned} Tv &= T\left(a_1v_1 + \cdots + a_nv_n\right) \\ &= a_1Tv_1 + \cdots + a_nTv_n \\ &= a_1w_1 + \cdots + a_nw_n \end{aligned}$$

又$w_1, \cdots, w_n$线性无关,于是$Tv = \mathbf{0}$当且仅当$a_1 = \cdots = a_n = 0$,此时$v = \mathbf{0}$, 即$\operatorname{null} T = \{\mathbf{0}\}$,于是$T$为单射.

我们已经证明,当$\dim V > \dim W$时,不存在V到W的单射.

综上,命题得证.

17. 设V和W都是有限维的,试证明:存在V到W的满射,当且仅当$\dim V \geqslant \dim U$.

Proof.

首先证明$\dim V \geqslant \dim W$时存在这样的满射.

设$w_1, \cdots, w_m$是W的一个基,$v_1, \cdots, v_n$是V的一个基.

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$使得

$$\begin{cases} Tv_k = w_k, k \in 1, \cdots, m \\ Tv_k = \mathbf{0}, k \in m+1, \cdots, n \end{cases}$$

对于任意$w \in W$,存在一组标量$a_1, \cdots, a_m$使得$w = a_1w_1 + \cdots + a_mw_m$,于是

$$\begin{aligned} w &= a_1w_1 + \cdots + a_mw_m \\ &= a_1Tv_1 + \cdots + a_mTv_m \\ &= T\left(a_1v_1 + \cdots + a_mv_m\right) \end{aligned}$$

又$v_1,\cdots,v_m$线性无关,于是$a_1v_1+\cdots+a_mv_m$唯一对应了V中的一个向量. 于是T为满射.

我们已经证明,当$\dim V<\dim W$时,不存在V到W的满射.

综上,命题得证.

18. 设V和W都是有限维的,U是V的子空间.试证明:存在$T\in\mathcal{L}(V,W)$使得$\operatorname{null}T=U$,当且仅当$\dim U\geqslant\dim V-\dim W$.

Proof.

设$u_1,\cdots,u_m$为U的一组基,于是它可以被扩展为V的一组基$u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_n$.

于是$\dim U=m,\dim V=m+n$.

一方面,当$\dim U\geqslant\dim V-\dim W$时有$\dim W\geqslant n$,于是存在$w_1,\cdots,w_n$在$W$中线性无关.

令$T\in\mathcal{L}(V,W)$满足

$$\begin{cases}Tu_j=\mathbf{0},j\in\{1,\cdots,m\}\\ Tv_k=w_k,k\in\{1,\cdots,n\}\end{cases}$$

于是$\operatorname{null}T=\operatorname{span}(u_1,\cdots,u_m)=U$,于是存在这样的$T$满足题意.

另一方面,当存在$T\in\mathcal{L}(V,W)$使得$\operatorname{null}T=U$时,应对于任意$v\in V\backslash U$有$Tv\neq\mathbf{0}$.

即对于任意$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$和不全为0的$b_1,\cdots,b_n\in\mathbb{F}$,都有

$$\begin{aligned}Tv&=T(a_1u_1+\cdots+a_mu_m+b_1v_1+\cdots+b_nv_n)\\&=T(a_1u_1+\cdots+a_mu_m)+T(b_1v_1+\cdots+b_nv_n)\\&=b_1Tv_1+\cdots+b_nTv_n\end{aligned}$$

若$\dim W<n$,必然$Tv_1,\cdots,Tv_n$线性相关,于是存在这样的$b_1,\cdots,b_n$使得$Tv=\mathbf{0}$,矛盾.

于是$\dim W\geqslant n$,即$\dim U\geqslant\dim V-\dim W$.

综上,命题得证.

19. 设W是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V,W)$.试证明:T是单射,当且仅当存在$S\in\mathcal{L}(W,V)$使得ST是V上的恒等算子.

Proof.

若T是单射,对于任意$w\in\operatorname{range}T$都存在唯一的$v\in V$使得$Tv=w$.

设$\operatorname{range}T$的基为$w_1,\cdots,w_m$,它可以被扩展为W的一组基$w_1,\cdots,w_m,u_1,\cdots,u_n$.

定义映射$S:V\to W$满足

$$\begin{cases}Sw_k=v_k,k\in\{1,\cdots,m\}\text{ 且}Tv_k=w_k\\ Su_j=\mathbf{0},j\in\{1,\cdots,n\}\end{cases}$$

容易验证S是线性映射.

于是对于任意$v \in V$都有$ST(v) = S(Tv) = Sw = v$,即存在这样的S使得ST为V上的恒等算子.

若存在$S \in \mathcal{L}(W, V)$使得ST为V上的恒等算子,那么对于任意$v_1, v_2 \in V$有

$$STv_1 = S(Tv_1) = v_1, STv_2 = S(Tv_2) = v_2$$

于是$Tv_1 = Tv_2$当且仅当$v_1 = v_2$(否则S会将一个向量映射为两个不同的值),从而T是单射.

综上,命题得证.

20. 设W是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.试证明:T是满射,当且仅当存在$S \in \mathcal{L}(W, V)$使得TS是W上的恒等算子.

Proof.

若T是满射,于是对于任意$w \in W$都存在$v \in V$使得$Tv = w$.

定义映射$S : W \to V$满足$\forall w \in W, Sw = v$其中$Tv = w$(如果存在多个满足条件的v,则任取一个即可).容易验证S是线性的.

于是$TSw = Tv = w$,从而存在这样的S使得TS是W上的恒等算子.

若存在线性映射S使得TS是W上的恒等算子,那么对于任意$w \in W$均有$TSw = T(Sw) = w$.

于是range $T = W$,因而T是满射.

综上,命题得证.

21. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V, W)$,U是W的子空间. 试证明:集合$\{v \in V : Tv \in U\}$是V的子空间,且满足

$$\dim \{v \in V : Tv \in U\} = \dim \operatorname{null} T + \dim(U \cap \operatorname{range} T)$$

Proof.

我们先证明$\{v \in V : Tv \in U\}$是V的子空间.记这个集合为S.

对于$v_1, v_2 \in S$,不妨令$Tv_1 = u_1, Tv_2 = u_2$.因为U是W的子空间,于是

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2 = u_1 + u_2 \in U$$

从而$v_1 + v_2 \in S$,即S对加法封闭.

验证S对乘法封闭也是类似的,在这里略去.

未完待续.

22. 设U和V是有限维向量空间,$S \in \mathcal{L}(V, W)$和$T \in \mathcal{L}(U, V)$,试证明

$$\dim \operatorname{null} ST \leqslant \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{null} T$$

Proof.

根据线性映射基本定理,我们有

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{null} ST &= \dim U - \dim \operatorname{range} ST \\ &= \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{range} T - \dim \operatorname{range} ST \\ &\leqslant \dim \operatorname{null} T + \dim V - \dim \operatorname{range} ST \\ &= \dim \operatorname{null} T + \dim \operatorname{null} S + \dim \operatorname{range} S - \dim \operatorname{range} ST\end{aligned}$$

我们只需证明$\dim \operatorname{range} S \geqslant \dim \operatorname{range} ST$.

对于任意$w \in \operatorname{range} ST$,都存在$u \in U$使得$STu = w$.于是对于任意$w$总存在 V中的向量Tu使得S将其映射到w.从而$\operatorname{range} ST \subseteq \operatorname{range} S$,于是$\dim \operatorname{range} ST \leqslant \dim \operatorname{range} S$,命题得证.

23. 设U和V是有限维向量空间,$S \in \mathcal{L}(V, W)$和$T \in \mathcal{L}(U, V)$,试证明

$$\dim \operatorname{range} ST \leqslant \min \{\dim \operatorname{range} S, \dim \operatorname{range} T\}$$

Proof.

在**22.**中我们已经证明了$\dim \operatorname{range} ST \leqslant \dim \operatorname{range} S$.

设$v_1, \cdots, v_m$是$\operatorname{range} T$的一组基.容易知道$\operatorname{range} ST = \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_m)$.

于是我们有$\dim \operatorname{range} ST = \dim \operatorname{range} \operatorname{span}(Tv_1, \cdots, Tv_m) \leqslant m$.

这就证明了$\dim \operatorname{range} ST \leqslant \dim \operatorname{range} T$.

命题得证.

24. 回答下列问题.

(1) 设$\dim V = 5$,且$S, T \in \mathcal{L}(V)$使得$ST = \mathbf{0}$.试证明:$\dim \operatorname{range} TS \leqslant 2$.

(2) 给出一例:$S, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5), ST = \mathbf{0}$且$\dim \operatorname{range} ST = 2$.

(1) Proof.

假定$\dim \operatorname{range} TS > 2$. 根据**23.**可得$\dim \operatorname{range} T > 2, \dim \operatorname{range} S > 2$.

从而$\dim \operatorname{null} T \leqslant 2, \dim \operatorname{null} S \leqslant 2$.

由于$\dim \operatorname{null} T \leqslant 2$,于是至多有两个基向量$v_k$满足$Tv_k = \mathbf{0}$.

设$v_1, \cdots, v_5$为V的一组基.设$v = v_1 + \cdots + v_5 \in V$.

不妨假定$Tv_1, \cdots, Tv_3 \neq \mathbf{0}$,于是$STv = STv_1 + \cdots + STv_3$.

由于$v_1, \cdots, v_5$线性无关,于是$Tv_1, \cdots, Tv_3$线性无关.

由于$\dim \operatorname{null} S \leqslant 2$,于是至多有两个$Tv_k$满足$S(Tv_k) = \mathbf{0}$.

不妨假定$STv_1 \neq \mathbf{0}$,这与$ST = \mathbf{0}$矛盾.于是命题得证.

(2) Solution.

略.

25. 设W是有限维的,$S, T \in \mathcal{L}(V, W)$.证明:$\operatorname{null} S \subseteq \operatorname{null} T$,当且仅当存在$E \in \mathcal{L}(W)$使得$T = ES$.

Proof.

当$\operatorname{null} S \subseteq \operatorname{null} T$时,假定$v_1, \cdots, v_m$是$\operatorname{null} S$的一组基,$v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_n$是$\operatorname{null} T$的一组基.

再假定$v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_n, w_1, \cdots, w_k$是$V$的一组基.