向量空间的积和商

1.向量空间的积

通常,我们讨论与多个向量空间有关的命题时都约定它们在相同的域上.

1.1 定义:向量空间的积

设$V_1,\cdots,V_m$都是$\mathbb{F}$上的向量空间.**乘积**$V_1\times\cdots\times V_m$定义为

$$V_1\times\cdots\times V_m=\{(v_1,\cdots,v_m):v_1\in V_1,\cdots,v_m\in V_m\}$$

$V_1\times\cdots\times V_m$上的加法和标量乘法的定义不再赘述.

1.2 向量空间的积是向量空间

设$V_1,\cdots,V_m$都是$\mathbb{F}$上的向量空间,那么$V_1\times\cdots\times V_m$也是$\mathbb{F}$上的向量空间.

这一点也是容易证明的.

1.3 向量空间之积的维数

设$V_1,\cdots,V_m$都是$\mathbb{F}$上的有限维向量空间,那么$V_1\times\cdots\times V_m$也是$\mathbb{F}$上的有限维向量空间,其维数满足

$$\dim(V_1\times\cdots\times V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$$

1.4 积与直和

设$V_1,\cdots,V_m$都是V的子空间,由下式定义线性映射$\Gamma:V_1\times\cdots\times V_m\to V_1+\cdots+V_m$:

$$\Gamma(v_1,\cdots,v_m)=v_1+\cdots+v_m$$

那么$V_1+\cdots+V_m$是直和,当且仅当Γ是单射.

上面的命题根据单射和直和的定义不难得到.于是我们有如下命题.

1.5 直和与维数

设V是有限维向量空间,$V_1,\cdots,V_m$都是V的子空间,那么$V_1+\cdots+V_m$是直和,当且仅当

$$\dim(V_1+\cdots+V_m)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$$

Proof.

1.4中的Γ是满射,于是根据线性映射基本定理,Γ是单射,当且仅当

$$\dim\left(V_1+\cdots+V_m\right)=\dim\left(V_1\times\cdots\times V_m\right)$$

结合**1.3**可得$V_1+\cdots+V_m$是直和,当且仅当

$$\dim\left(V_1,\cdots,V_m\right)=\dim V_1+\cdots+\dim V_m$$

命题得证.

2.商空间

我们首先定义向量与子集之和.

2.1 定义:向量与子集之和,平移

设$v\in V$且$U\subseteq$,那么$v+U$是一个由下式定义的V的子集

$$v+U=\{v+u:u\in U\}$$

我们称$v+U$是U的一个**平移**.

有了这样的概念,我们就可以来定义商空间.

2.2 定义:商空间

设U是V的子空间,那么**商空间**V/U是由U的所有平移构成的集合,即

$$V/U=\{v+U:v\in V\}$$

商空间是否也是向量空间?为此,我们首先需要下面这个命题.

2.3 子空间的平移的关系

设U是V的一个子空间且$v,w\in V$.那么

$$v-w\in U\Leftrightarrow v+U=w+U\Leftrightarrow(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$$

即子空间的两个平移要么相等要么不相交.

Proof.

若$v-w\in U$,那么任意$u\in U$都有

$$v+u=w+(u+(v-w))\in w+U$$

于是$v+U\subseteq w+U$.同理可得$w+U\subseteq v+U$,于是$v+U=w+U$.

而$v+U=w+U$显然表明$(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$.

现在设$(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$,于是存在$u_1,u_2\in U$使得

$$v+u_1=w+u_2$$

于是$v-w=u_2-u_1\in U$,这表明从$(v+U)\cap(w+U)\neq\varnothing$可以推出$v-w\in U$.

命题得证.

现在我们可以来定义V/U上的加法和标量乘法了.

2.4 定义:商空间上的加法和标量乘法

设U是V的一个子空间.那么V/U上的加法和标量乘法分别由如下两式定义.

(1) 对于任意$v,w\in V$,$(v+U)+(w+U)=(v+w)+U$.

(2) 对于任意$\lambda\in\mathbb{F}$和任意$v\in V$,$\lambda(v+U)=(\lambda v)+U$.

Proof.

上面的加法和标量乘法定义可能是有问题的,即U的同一个平移可能存在不同的表达方式.

为此,我们先来证明加法结果的唯一性.假定$v_1,v_2,w_1,w_2\in V$满足

$$v_1+U=v_2+U,w_1+U=w_2+U$$

我们必须证明$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$.

由**2.3**可得$v_1-v_2\in U$且$w_1-w_2\in U$.由于U是V的子空间,从而U对加法是封闭的.

于是$(v_1-v_2)+(w_1-w_2)\in U$,即$(v_1+w_1)-(v_2+w_2)\in U$.

再次利用**2.3**可知$(v_1+w_1)+U=(v_2+w_2)+U$,即我们定义的加法是唯一的.

对于标量乘法结果唯一的证明,其过程是类似的,这里就不再赘述.

于是我们知道上面定义的加法和标量乘法都是符合逻辑的.

接下来的概念系那个引出V/U的计算方法.

2.5 定义:商映射

设U是V的一个子空间,**商映射**$\pi : V \to V/U$是由下式定义的线性映射

$$\forall v \in V, \pi(v) = v + U$$

根据商映射的定义,我们就知道了商空间的维数.

2.6 商空间的维数

设V是有限维的,U是V的子空间,那么

$$\dim V/U = \dim V - \dim U$$

Proof.

令$\pi : V \to V/U$表示V到V/U的线性映射.那么$\text{null } \pi = U, \text{range } \pi = V/U$,于是根据线性映射基本定理有

$$\dim V = \dim \text{range } \pi + \dim \text{null } \pi = \dim U + \dim V/U$$

于是命题得证.

V上的每个线性映射都能在$V/\text{null } T$上引出一个线性映射$\tilde{T}$.我们现在给出其定义.

2.7 记号:$\tilde{T}$

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.$\tilde{T} : V/(\text{null } T) \to W$由下式定义

$$\tilde{T}(v + \text{null } T) = Tv$$

下面的结果说明,我们可以将$\tilde{T}$看作T的修改版.

2.7 $\tilde{T}$的零空间和值域

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么

(1) $T \circ \pi = T$,其中π是将V映成$V/(\text{null } T)$的商映射.

(2) $\tilde{T}$是单射.

(3) range $\tilde{T}$ = range T.

(4) $V/(\text{null } T)$与range T同构.