零空间和值域

1.零空间和单射性

1.1 定义:零空间

对于$T \in \mathcal{L}(V, W)$,T的零空间null T是V中所有被T映射到$\mathbf{0}$的向量构成的集合,即

$$\text{null } T = \{v \in V : Tv = \mathbf{0}\}$$

接下来的结果说明,每个线性映射的子空间,都是其定义空间的子空间.特别的,任意线性映射的子空间均包含$\mathbf{0}$.

1.2 零空间是子空间

假设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么null T是V的子空间.

Proof.

因为T是线性映射,于是$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,于是$\mathbf{0} \in \text{null } T$.

对于任意$u, v \in \text{null } T$有$T(u+v) = Tu + Tv = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$,于是$u + v \in \text{null } T$,因而null T对加法封闭.

对于任意$v \in \text{null } T$和任意$\lambda \in \mathbb{F}$有$T(\lambda v) = \lambda Tv = \lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$,于是$\lambda v \in \text{null } T$,因而null T对标量乘法封闭.

于是我们可以得知null T为V的子空间.

我们很快就会看到下面这条定义和零空间的紧密关系.

1.3 定义:单射

对于$T : V \to W$,若$Tu = Tv$当且仅当$u = v$,那么称T为单射.

这里的单射指的就是一个函数值唯一对应一个自变量.我们也可以说单射T是**一对一的**.
我们现在有如下定理表明单射和零空间之间的关系.

1.4 单射与零空间

对于$T \in \mathcal{L}(V, W)$,T是单射当且仅当null $T = \{\mathbf{0}\}$.

Proof.

首先假设T是单射.由线性映射的定义可知$T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$,于是$Tv = \mathbf{0}$当且仅当$v = \mathbf{0}$,于是null $T = \mathbf{0}$.

假设null $T = \{\mathbf{0}\}$.对于$u, v \in V$且$Tu = Tv$,我们有

$$T(u - v) = Tu - Tv = \mathbf{0}$$

于是$u-v=\mathbf{0}$,即$u=v$.于是对于任意u,v,当且仅当$u=v$时$Tu=Tv$,从而T为单射.

2.值域和满射性

类比于一般的函数,线性映射也有值域的概念.

2.1 定义:值域

对于$T\in\mathcal{L}(V,W)$,T的**值域**range T是Tv所有可能取值的集合,即

$$\text{range } T=\{Tv:v\in V\}$$

接下来的结果表明,每个线性映射的值域都是映射到的向量空间的子空间.

2.2 值域是子空间

对于$T\in\mathcal{L}(V,W)$,range T是W的子空间.

因为T是线性映射,于是$T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$,于是$\mathbf{0}\in\text{null } T$.

对于任意$w_1,w_2\in\text{range } T$,都存在$v_1,v_2\in V$使得$Tv_1=w_1,Tv_2=w_2$,于是

$$w_1+w_2=Tv_1+Tv_2=T(v_1+v_2)\in\text{range } T$$

从而range T对加法封闭.

对于任意$w\in\text{range } T$,都存在$v\in V$使得$Tv=w$.对于任意$\lambda\in\mathbb{F}$,总有

$$\lambda w=\lambda Tv=T(\lambda v)\in\text{range } T$$

从而range T对标量乘法封闭.

综上,range T是W的子空间.

有了单射的定义以及上面的定理,我们可以知道有一种特殊的单射:其值域恰好为映射到的子空间.

2.3 定义:满射

如果$T:V\to W$满足range $T=W$,那么称T为满射.

容易看出,是否为满射取决于映射的目标空间的选取.

3.线性映射基本定理

3.1 线性映射基本定理

假定V是有限维的且$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么range T是有限维的,且

$$\dim V = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$$

Proof.

令$u_1, \cdots, u_m$是null T的一个基. 由于null T是T的子空间,于是$u_1, \cdots, u_m$在V中线性无关,因而可以被扩展为V的一个基

$$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$$

我们只需证明range T是有限维的且$\dim \text{range } T = n$.为此,我们证明$Tv_1, \cdots, Tv_n$为range T的基.

对于任意$v \in V$,存在唯一的一组标量$a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{F}$使得

$$v = a_1u_1 + \cdots + a_mu_m + b_1v_1 + \cdots + b_nv_n$$

注意到$u_1, \cdots, u_m \in \text{null } T$,于是$a_kTu_k = \mathbf{0}, 1 \leqslant k \leqslant m$.于是

$$Tv = b_1Tv_1 + \cdots + b_nTv_n$$

由于v的选取是任意的,于是我们知道range $T = \text{span } (Tv_1, \cdots, Tv_n)$,于是range T是有限维的.

现在我们来证明$Tv_1, \cdots, Tv_n$线性无关.假定一组标量$c_1, \cdots, c_n \in \mathbb{F}$使得

$$c_1Tv_1 + \cdots + c_nTv_n = \mathbf{0}$$

于是

$$T(c_1v_1 + \cdots + c_nv_n) = \mathbf{0}$$

于是$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n \in \text{null } T$.于是存在一组标量$d_1, \cdots, d_m$使得

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = d_1u_1 + \cdots + d_mu_m$$

注意到$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$线性无关,于是上式中各$c$和$d$均为0.

这样我们知道$Tv_1, \cdots, Tv_n$线性无关,因而为range T的一组基.

于是$\dim V = m + n = \dim \text{null } T + \dim \text{range } T$,命题得证.

根据线性映射基本定理,我们可以知道维数和单射,满射的关系.

3.2 映射到更低维空间上的线性映射不是单射

假设V和W均为有限维向量空间且$\dim V > \dim W$,于是任意$T \in \mathcal{L}(V, W)$均不是单射.

Proof.

据线性映射基本定理有

$$\dim \operatorname{null} T = \dim V - \dim \operatorname{range} T \geqslant \dim V - \dim W > 0$$

这表明$\operatorname{null} T$包含除了$\mathbf{0}$之外的向量,于是T不是单射.

3.3 映射到更高维空间上的线性映射不是满射

假设V和W均为有限维向量空间且$\dim V < \dim W$,于是任意$T \in \mathcal{L}(V, W)$均不是满射.

Proof.

根据线性映射基本定理有

$$\dim \operatorname{range} T = \dim V - \dim \operatorname{null} T \leqslant \dim V < \dim W$$

这表明$\dim \operatorname{range} T < \dim W$,这意味着$\operatorname{range} T \neq W$,于是$T$不是满射.

应用这样的思想,我们可以给出关于线性方程组的推论.首先,我们将**齐次线性方程组**是否有非零解这一问题用线性映射的语言书写.

固定正整数m, n,令$A_{j,k} \in \mathbb{F}(j \in \{1, \cdots, m\}, k \in \{1, \cdots, n\})$.考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{1,k} x_k = 0 \\ \cdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n} A_{m,k} x_k = 0 \end{cases}$$

这里的齐次指的是方程右端的常数项均为0.显然,$x_1 = \cdots = x_n = 0$是上述方程组的一个解.我们要考虑的是上述方程组的非零的解.

观察这个式子,和我们证明$T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$具有一定形式所用到的方程组几乎一致.定义$T : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$满足

$$T(x_1, \cdots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} A_{1,k} x_k, \cdots, \sum_{k=1}^{n} A_{m,k} x_k \right)$$

于是上述方程等价于$T(x_1, \cdots, x_n) = \mathbf{0}$,这个方程的解集显然是$\operatorname{null} T$. 当$T$不是单射时,意味着$\operatorname{null} T > \{\mathbf{0}\}$.接下来的定理给出了保证$T$不是单射的条件.

3.4 齐次线性方程组具有非零解的条件

未知数个数多于方程个数的齐次线性方程组具有非零解.

在上面的方程中,未知数个数为n,方程个数为m.由**3.2**可知当$n > m$时T不是单射,于是命题成立.

现在我们来考虑更一般的情况,即常数项不全为0的线性方程组.列出相似的方程组,有

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} A_{1,k}x_k = c_1 \\ \cdots \\ \sum_{k=1}^{n} A_{m,k}x_k = c_m \end{cases}$$

于是该方程组等价于$T(x_1, \cdots, x_n) = (c_1, \cdots, c_m)$. 当常数项$c_1, \cdots, c_m$任意变化时,我们知道如果$T$是满射,那么将保证该方程组一定有解,否则可能出现无解的情况.

3.4 齐次线性方程组具有非零解的条件

方程数多于未知数个数的线性方程组并不一定有解.

在上面的方程中,未知数个数为n,方程个数为m.由**3.2**可知当$n < m$时T不是满射,于是命题成立.

现在,我们来看一些例题.

Example 1.