对偶

1.对偶空间和线性映射

映射到标量域$\mathbb{F}$的线性映射在线性代数中扮演着特殊的角色,于是,我们赋予它特殊的名称.

1.1 定义:线性泛函

V上的**线性泛函**是从V到$\mathbb{F}$的线性映射.

换言之,V上的线性泛函T是$\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$的元素.同样地,$\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$也有特殊的名称和记号.

1.2 定义:对偶空间

V的对偶空间V'是V上全体线性泛函构成的向量空间.换言之,$V'=\mathcal{L}(V,\mathbb{F})$.

以及,对偶空间的维数和原空间相同.

1.3 对偶空间的维数

假设V是有限维向量空间,那么V'也是有限维的,且满足$\dim V=\dim V'$.

Proof.

我们知道$\dim(\mathcal{L}(V,W))=(\dim V)(\dim W)$.于是

$$\dim V'=\dim V\cdot\dim\mathbb{F}=\dim V$$

1.4 定义:对偶基

若$v_1,\cdots,v_m$是V的一组基,那么$v_1,\cdots,v_m$的对偶基是V'中的元素$\phi_1,\cdots,\phi_m$构成的组,其中各ϕ_k是满足

$$\phi_k(v_j)=\begin{cases}1,j=k\\0,j\neq k\end{cases}$$

的线性泛函.

上述命题给了我们一种表示线性组合的系数的方法.

1.5 对偶基和线性组合的系数

假设$v_1,\cdots,v_m$是V的基,$\phi_1,\cdots,\phi_m$是其对偶基,那么对于任意$v\in V$都有

$$v=\phi_1(v)v_1+\cdots+\phi_m(v)v_m$$

上述命题是容易证明的.现在我们来说明对偶基是对偶空间的基.

1.6 对偶基是对偶空间的基

假设V是有限维的,那么V的基的对偶基是V'的基.

Proof.

设$v_1, \cdots, v_m$是V的基,$\phi_1, \cdots, \phi_m$是其对偶基.设$a_1, \cdots, a_m \in \mathbb{F}$满足

$$a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m = \mathbf{0}$$

对于各$k \in \{1, \cdots, m\}$有

$$(a_1\phi_1 + \cdots + a_m\phi_m)(v_k) = a_k$$

即$\mathbf{0}v_k = a_k$,于是$a_k = 0$,进而$\phi_1, \cdots, \phi_m$线性无关.

由于$\phi_1, \cdots, \phi_m$是V'中长度为$\dim V'$的线性无关组,进而$\phi_1, \cdots, \phi_m$是V'的基.

1.7 对偶映射

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,T的对偶映射是由下式定义的线性映射$T' \in \mathcal{L}(W', V')$:对任意$\phi \in W'$有

$$T'(\phi) = \phi \circ T$$

1.8 对偶映射的代数性质

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.那么

(1) 对于所有$S \in \mathcal{L}(V, W)$,都有$(S+T)' = S' + T'$.

(2) 对于所有$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$(\lambda T)' = \lambda T'$.

(3) 对于所有$S \in \mathcal{L}(W, U)$,都有$(ST)' = T'S'$.