内积和范数

1.内积

首先说明定义内积的动机.对于二维空间中的向量$v=(x,y)$,其**范数**(即我们所说的模长)为

$$||v||=\sqrt{x^2+y^2}$$

尽管高于三维的情况我们并不能想象出来,但是我们仍然可以定义$\mathbb{R}^n$中的向量$v=(x_1,\cdots,x_n)$的范数为

$$||v||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$$

范数并不是线性的.为了将线性引入我们的讨论,我们引入向量的点积.

> **1.1 定义:点积**
>
> 对$u,v\in\mathbb{R}^n$,u和v的点积记作$u\cdot v$,由
>
> $$u\cdot v=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$
>
> 定义.其中$u=(x_1,\cdots,x_n),v=(y_1,\cdots,y_n)$.

$\mathbb{R}^n$上的点积满足如下性质.

(1) 对所有$x\in\mathbb{R}^n$,$||x||^2=x\cdot x$.

(2) 对所有$x\in\mathbb{R}^n$,$x\cdot x\geqslant 0$,当且仅当$x=\mathbf{0}$时等号成立.

(3) 对于固定的$y\in\mathbb{R}^n$,映射$T:x\mapsto x\cdot y$是线性映射.

(4) 对所有$x,y\in\mathbb{R}^n$,都有$x\cdot y=y\cdot x$.

为了将我们的讨论扩展到复向量空间上,定义$z\in\mathbb{C}^n$的范数为

$$||z||=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}z_i\bar{z_i}}$$

我们想让$||z||^2$视作z与自身的内积,于是上式表明$z,w\in\mathbb{C}^n$的内积应由

$$z\cdot w=z_1\bar{w_1}+\cdots+z_n\bar{w_n}$$

定义.这同时表明复向量空间上的内积不满足交换律,而满足$z\cdot w=\overline{w\cdot z}$.

由此,我们可以定义实向量空间或复向量空间上的内积.

1.2 定义:内积

V上的内积是一个函数,任意$u,v\in V$构成的有序对(u,v)对应至一个标量$\langle u,v\rangle\in\mathbb{F}$,并满足如下性质.

(1) **正性**:对所有$v\in V$,$\langle v,v\rangle\geqslant 0$.

(2) **定性**:$\langle v,v\rangle=0$当且仅当$v=\mathbf{0}$.

(3) **第一位可加性**:对所有$u,v,w\in V$,都有$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$.

(4) **第一位齐次性**:对所有$\lambda\in\mathbb{F}$和所有$u,v\in V$,均有$\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$.

(5) **共轭对称性**:对所有$u,v\in V$,均有$\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.

有些时候,物理学家们要求齐次性在第二位上成立而不是第一位.

我们说到的点积就是内积的一个典型的例子,这也称为**欧几里得内积**.

1.3 定义:内积空间

一个**内积空间**是带有内积的向量空间V.

当我们讨论$\mathbb{F}^n$时,如无特殊说明,都应假设其上定义的内积是欧几里得内积.

1.4 内积的性质

内积具有如下性质.

(1) 对于固定的$y\in V$,映射$T:x\mapsto\langle x,y\rangle$是线性映射.

(2) 对于任意$v\in V$,都有$\langle\mathbf{0},v\rangle=\langle v,\mathbf{0}\rangle=0$.

(3) 对所有$u,v,w\in V$,都有$\langle u,v+w\rangle=\langle u,v\rangle+\langle u,w\rangle$.

(4) 对所有$\lambda\in\mathbb{F}$和所有$u,v\in V$,均有$\langle u,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle u,v\rangle$.

2.范数

我们定义内积的最初动机来源于$\mathbb{R}^2$上的向量的范数.现在我们会看到每种内积都能确定对应的范数.

2.1 定义:范数

对$v\in V$,v的**范数**$||v||$定义为

$$||v||=\sqrt{\langle v,v\rangle}$$

如同我们之前提到的模长的定义,范数具有以下的基本性质.

2.2 范数的基本性质

设$v \in V$.于是

(1) $||v|| = 0$当且仅当$v = \mathbf{0}$.

(2) 对所有$\lambda \in \mathbb{F}$,均有$||\lambda v|| = |\lambda|||v||$.

上面的**(2)**告诉我们研究范数的平方通常比研究范数本身要容易一些. 现在我们给出一个关键的定义:正交.

2.3 定义:正交

称两个向量$u, v \in V$是**正交的**,如果$\langle u, v\rangle = 0$.

根据点积的定义,$\mathbb{R}^2$和$\mathbb{R}^3$中垂直的向量就是正交的.于是在特殊的情况下,你也可以视正交为表达垂直的一种更为酷炫的说法. 我们从简单地结论开始研究正交性.在研究的过程中,可以时刻利用垂直的几何直观帮助我们理解问题.

2.4 正交性和0向量

$\mathbf{0}$与V中的任意向量正交.特别地,它是V中唯一与自身正交的向量.

以及,我们从勾股定理出发可以得到以下等式.

2.5 勾股定理(毕达哥拉斯定理)

若$u, v \in V$正交,那么$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2$.

Proof.

设$\langle u, v\rangle = 0$,于是

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle \\ &= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\ &= ||u||^2 + ||v||^2 \end{aligned}$$

在这一定理的帮助下,我们可以对向量进行正交分解.设$u, v \in V$且均不为$\mathbf{0}$.我们想要把u用v和与v正交的w线性表出.于是令$c \in \mathbb{F}$,则有$u = cv + (u - cv)$.只需令v与$u - cv$正交即可.于是

$$0 = \langle u - cv, v\rangle = \langle u, v\rangle - c||v||^2$$

于是$c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}$,即

$$u = \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2} + \left(u - \frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\right)$$

于是我们就得到了正交分解的形式.

2.6 正交分解

设$u, v \in V$且$v \neq \mathbf{0}$.取$c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}$且$w = u - \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v$,那么

$$u - cv + w \text{ 且 } \langle w, v\rangle = 0$$

我们利用正交分解来证明Cauchy-Schwarz不等式.

2.7 Cauchy-Schwarz不等式

设$u, v \in V$,那么

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

当且仅当u, v成标量倍的关系时等号成立.

Proof.

若$v = \mathbf{0}$,那么欲证结论当然成立.

若$v \neq \mathbf{0}$,那么考虑u的正交分解$u = \dfrac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v + w$.根据勾股定理有

$$||u^2|| = \left|\left|\frac{\langle u, v\rangle}{||v||^2}v\right|\right|^2 + ||w||^2 = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2} + ||w^2|| \geqslant \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{||v||^2}$$

整理后开平方根即可得欲证等式.特别地,等号成立当且仅当$w = \mathbf{0}$,这表明$u = cv$,即u是v的标量倍.

由此,我们可以推出两个重要的式子.

2.8 三角不等式与平行四边形等式

设$u, v \in V$,那么

(1) $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||$.

(2) $||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2\left(||u||^2 + ||v||^2\right)$.