线性代数 B 第五次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 4.1

3 设 $\boldsymbol{I}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{J}$ 是元素全为 1 的 n 阶矩阵, 设

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix}$$

试把 $\boldsymbol{M}$ 表示成 $x\boldsymbol{I} + y\boldsymbol{J}$ 的形式.

解. 不难发现

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k-\lambda & & & \\ & k-\lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & k-\lambda \end{bmatrix} = (k-\lambda)\boldsymbol{I} + \lambda\boldsymbol{J}$$

于是可知

$$x = k - \lambda, \quad y = \lambda$$

4(1) 计算

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

解.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$$

4(12) 计算

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解.

$$原式 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka_2 & 0 & 0 \\ kb_2 & 0 & 0 \\ kc_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

5 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA}$.

解.

$$\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB} - \boldsymbol{BA} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

8 如果 n 级方阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{0}$, 求 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2)$.

解.

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}^2) = \boldsymbol{I}^2 + \boldsymbol{IB} + \boldsymbol{IB}^2 - \boldsymbol{BI} - \boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^3 = \boldsymbol{I}$$

10 证明: 如果 $\boldsymbol{A} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})$, 那么 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 当且仅当 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}$.

证明. $\Rightarrow$: 由 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 可知

$$\boldsymbol{0} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I})(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{I})$$

于是 $\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 即 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}$.

$\Leftarrow$: 由 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{I}$ 可知

$$\boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{A} = \frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2 + 2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{I}) = \frac{1}{4}(\boldsymbol{B}^2 - \boldsymbol{I}) = \boldsymbol{0}$$

于是 $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. $\square$

习题 4.2

2 证明: 两个 n 级下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵, 并且乘积矩阵的主对角元等于因子矩阵相应主对角元的乘积.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 均为 n 级下三角矩阵, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}a_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}b_{kl}\boldsymbol{E}_{kl}\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}a_{ij}b_{kl}\boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{E}_{kl}\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}a_{ij}b_{jl}\boldsymbol{E}_{il}\end{aligned}$$

于是总有 $l\leqslant j\leqslant i$, 因此 $\boldsymbol{AB}$ 是下三角矩阵. 特别地, 当 $i=j=l$ 时有

$$(\boldsymbol{AB})_{ii}=a_{ij}b_{jl}=a_{ii}b_{ii}$$

于是主对角元等于因子矩阵对应主对角元的乘积. □

3 证明: 与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵.

证明. 设待求矩阵为 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. 特别的,$\boldsymbol{A}$ 与基本矩阵 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 可交换, 于是总有

$$\begin{bmatrix}0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{j1}&\cdots&a_{jn}\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&\cdots&a_{1i}&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&a_{ni}&\cdots&0\end{bmatrix}$$

于是总有 $a_{j1}=\cdots=a_{j(j-1)}=a_{j(j+1)}=\cdots=a_{jn}=0$, $a_{1i}=\cdots=a_{(i-1)i}=a_{(i+1)i}=\cdots=a_{ni}=0$, $a_{jj}=a_{ii}$ 对所有 $1\leqslant i,j\leqslant n$ 成立.

满足上述要求的矩阵除主对角元外均为 0, 并且主对角元均相等. 于是 $\boldsymbol{A}$ 是数量矩阵, 得证. □

4 证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 $s\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 均为对称矩阵.

证明. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=(a'_{ij})$, 则 $a'_{ij}=a_{ji}$. 考虑 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=(b_{ij})$ 的元素:

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a'_{kj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}a_{jk}=\sum_{k=1}^{n}a'_{jk}a_{ki}=b_{ji}$$

于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 是对称矩阵. 将上述结论应用于 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 可得 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 也是对称矩阵. 于是命题得证. □

7 证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是任一 n 级方阵, 则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 是对称矩阵,$\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 是斜对称矩阵.

证明. 记 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=(b_{ij})$, $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=(c_{ij})$, 则

$$b_{ij}=a_{ij}+a_{ji}=a_{ji}+a_{ij}=b_{ji}$$

$$c_{ij}=a_{ij}-a_{ji}=-(a_{ji}-a_{ij})=-c_{ji}$$

于是 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是斜对称矩阵, 得证. □

习题 4.3

3 证明: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级方阵, 则 $\det \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=(\det \boldsymbol{A})^2$.

证明. 有

$$\det \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\det \boldsymbol{A}\cdot\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\det \boldsymbol{A}\cdot\det \boldsymbol{A}=(\det \boldsymbol{A})^2$$

得证. □

5 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵, 且满足

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{I},\quad \det \boldsymbol{A}=-1,$$

则 $\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=0$.

证明. 有

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{A})=\det \boldsymbol{A}\det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{I})$$

而 $(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{I})^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{I}$, 于是

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=-\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$$

于是

$$\det(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})=0$$

□

7 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+x_3^k(k=0,1,2,3,4)$, 矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2\\ s_1 & s_2 & s_3\\ s_2 & s_3 & s_4\end{bmatrix}$$

证明:

$$\det \boldsymbol{A} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j)^2$$

证明. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的 (i, j) 元为 s_{i+j-2}. 设

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

于是 $b_{ik} = x_k^{i-1}$, $c_{kj} = x_k^{j-1}$. 于是有

$$a_{ij} = x_1^{i+j-2} + x_2^{i+j-2} + x_3^{i+j-2} = \sum_{k=1}^{3} b_{ik} c_{kj}$$

于是 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$, 因而

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} \det \boldsymbol{C} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j) \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant 3} (x_i - x_j)^2$$

□

习题 4.4

1 数量矩阵 $k\boldsymbol{I}$ 何时可逆? 何时不可逆? 当 $k\boldsymbol{I}$ 可逆时, 求其逆矩阵.

解. 有

$$\det k\boldsymbol{I} = k \det \boldsymbol{I} = k$$

于是当且仅当 $k \neq 0$ 时 $k\boldsymbol{I}$ 可逆, 否则不可逆. 当 $k \neq 0$ 时有

$$(k\boldsymbol{I})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{I}$$

3(2) 判断下列矩阵是否可逆, 如果可逆则求出其逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^* = -\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{A}^*$ 也可逆, 并求 $(\boldsymbol{A}^*)^{-1}$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 于是

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$$

令 $\boldsymbol{B} = \dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$, 则有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^* = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}(\det \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{I}$$

同理可证 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. 于是 $\boldsymbol{A}^*$ 可逆, 其逆矩阵为 $\dfrac{1}{\det \boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}$. □

5 证明: 如果 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 可逆, 并求出其逆矩阵.

证明. 由 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{0}$ 可知

$$\boldsymbol{I}^3 - \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{I}$$

于是

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2) = \boldsymbol{I}$$

于是 $\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$ 可逆, 且 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2$. □

7 证明: 如果 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $2\boldsymbol{A}^4 - 5\boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} + 2\boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并求出 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

证明. 由题意可知

$$-2\boldsymbol{I} = 2\boldsymbol{A}^4 - 5\boldsymbol{A}^2 + 4\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(2\boldsymbol{A}^3 - 5\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{I})$$

于是

$$\boldsymbol{A}\left(-\boldsymbol{A}^3 + \frac{5}{2}\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}\right) = \boldsymbol{I}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{A}^{-1} = -\boldsymbol{A}^3 + \dfrac{5}{2}\boldsymbol{A} - 2\boldsymbol{I}$. □

8 证明: 可逆的对称 (斜对称) 矩阵的逆依然是对称 (斜对称) 矩阵.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵, 则 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$. 于是

$$\boldsymbol{A}^{-1} = (\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}})^{-1} = (\boldsymbol{A}^{-1})^{\mathrm{t}}$$

于是 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也是对称矩阵.

设 $\boldsymbol{B}$ 为斜对称矩阵, 则 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}$. 于是

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(-\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}})^{-1}=(-\boldsymbol{B}^{-1})^{\mathrm{t}}$$

于是 $\boldsymbol{B}^{-1}$ 也是斜对称矩阵. □

9(1) 求下列矩阵的逆:

$$\begin{bmatrix}1&0&-1\\-2&1&3\\3&-1&2\end{bmatrix}$$

解. 有

$$\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\-2&1&3&0&1&0\\3&-1&2&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\0&-1&5&-3&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\0&0&6&-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&1&0&0\\0&1&1&2&1&0\\0&0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{5}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\0&1&0&\frac{13}{6}&\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

于是题设矩阵的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix}\frac{5}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\\\frac{13}{6}&\frac{5}{6}&-\frac{1}{6}\\-\frac{1}{6}&\frac{1}{6}&\frac{1}{6}\end{bmatrix}$$

10(2) 解下列矩阵方程:

$$\boldsymbol{X}\begin{bmatrix}3&-1&2\\1&0&-1\\-2&1&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&0&-2\\-1&4&1\end{bmatrix}$$

解. 首先有

$$\begin{bmatrix}3&-1&2&1&0&0\\1&0&-1&0&1&0\\-2&1&4&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&-1&5&1&-3&0\\0&1&2&0&2&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&2&0&2&1\\0&0&7&1&-1&1\end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0&1&0\\0&1&2&0&2&1\\0&0&1&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{1}{7}&\frac{6}{7}&\frac{1}{7}\\0&1&0&-\frac{2}{7}&\frac{16}{7}&\frac{5}{7}\\0&0&1&\frac{1}{7}&-\frac{1}{7}&\frac{1}{7}\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{20}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{57}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix}$$