线性代数 B 第七次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 5.5

1 对于下列实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$, 求正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 为对角矩阵.

(1)

$$\begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ 2 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

(4)

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

解.

(1) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+3 & -4 \\ -2 & -4 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 2 & -2 \\ 2 & \lambda+3 & -4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & 4 & -2 \\ 2 & \lambda+7 & -4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda+8)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -8$.

考虑特征值 1 对应的特征向量, 有

$$\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & -4 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

正交化后可得

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & 1 \end{bmatrix}$$

考虑特征值 -8 对应的特征向量, 有

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -8 & 2 & -2 \\ 2 & -5 & -4 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -2 & -4 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -2 & -4 & -5 \\ 0 & -9 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是令

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -\frac{2\sqrt{5}}{5} & \frac{2\sqrt{5}}{15} & -\frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{5}}{5} & \frac{4\sqrt{5}}{15} & -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \operatorname{diag}\{1, 1, -8\}$.

(4) 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & \lambda-4 & 1-(\lambda-4)^2 \\ 0 & \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 0 & 1 & \lambda-4 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} -1 & \lambda-4 & 1-(\lambda-4)^2 \\ \lambda-4 & 0 & \lambda-4 \\ 1 & \lambda-4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} (\lambda-4)^2-2 & \lambda-4 & 1-(\lambda-4)^2 \\ 0 & 0 & \lambda-4 \\ 2 & \lambda-4 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)\begin{vmatrix} (\lambda-4)^2-2 & \lambda-4 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(\lambda-2)(\lambda-6)$$

故 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $2, 4, 6$.

考虑特征值 2 对应的特征向量, 有

$$2\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

考虑特征值 4 对应的特征向量, 有

$$4\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0&1\\-1&0&1&0\\0&1&0&-1\\1&0&-1&0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&0\\0&-1&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1&0&1&0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0&1&0&1\end{bmatrix}$$

考虑特征值 6 对应的特征向量, 有

$$6\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2&-1&0&1\\-1&2&1&0\\0&1&2&-1\\1&0&-1&2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&-1&2\\0&-1&2&-3\\0&2&0&2\\0&1&2&-1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

其基础解系为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1&-1&1&1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

于是令

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&-\frac{1}{2}\\-\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{2}}{2}&0&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&0&\frac{\sqrt{2}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}\{2,4,4,6\}$.

3 证明: 如果实矩阵 $\boldsymbol{A}$ 正交相似于对角矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}$ 一定是对称矩阵.

证明. 依题设, 存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}$. 对两边取转置可得

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{T}^{-1})^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}$$

由正交矩阵的性质有 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{T}^{\mathrm{t}}$; 由对角矩阵的性质有 $\boldsymbol{D}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{D}$. 从而 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{D}$, 于是

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{A}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵. □

5 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵, 并且 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 那么 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是幂零矩阵, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值一定为 0. 由于所有实对称矩阵一定正交相似于对角矩阵, 于是存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}=\operatorname{diag}\{0,\cdots,0\}=\boldsymbol{0}$$

从而

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{0}\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{0}$$

□

习题 6.1

1(2) 用正交替换把下列 $\mathbb{R}$ 上的二次型化为标准形:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 2x_1x_2 - 2x_3x_4$$

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$$

考虑特征值 1 对应的特征向量, 有

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

考虑特征值 -1 对应的特征向量, 有

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

于是令

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

即有 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \mathrm{diag}\{1, 1, -1, -1\}$. 令

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2$$

2 做直角坐标变换, 将下述二次曲线 S 的方程化为标准方程, 并且指出它是什么二次曲线:

$$4x^2 + 8xy + 4y^2 + 13x + 3y + 4 = 0$$

解. 这方程的二次项部分的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

于是 $\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda(\lambda - 8)$. 对特征值 0, 特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$; 对特征值 8, 特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$. 令

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

做正交替换

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

则二次曲线的方程为

$$8x'^2 + 8\sqrt{2}x' - 5\sqrt{2}y' + 4 = 0$$

配方可得

$$5\sqrt{2}y' = 8\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

即

$$y' = \frac{4\sqrt{2}}{5}\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

S 是抛物线.

10 证明: 斜对称矩阵的秩一定是偶数.

证明. 首先证明 $\mathbb{K}$ 上的斜对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 一定合同于下述形式的分块对角矩阵:

$$\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S}, \cdots, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{0}, \cdots, \boldsymbol{0}\}$$

其中 $\boldsymbol{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 做数学归纳法.

当 $n = 1$ 时 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$, 命题显然成立.

当 $n = 2$ 时总有

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{1} \cdot a^{-1}} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{1} \cdot a^{-1}]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A} \simeq \boldsymbol{S}$.

当 $n \geqslant 3$ 时, 假定命题对所有阶数小于 n 的斜对称矩阵都成立. 现在考虑 n 阶斜对称矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. 现在分情况讨论.

i. $\boldsymbol{A}$ 左上角的二级子矩阵 $\boldsymbol{A}_1$ 可逆. 于是将 $\boldsymbol{A}$ 写作分块矩阵的形式并做行列变换可得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ -\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{A}_3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\mathbf{2} + (\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1})\mathbf{1}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\mathbf{2} - \mathbf{1}(\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2)]{} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

从而

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1} & \boldsymbol{I}_{n-2} \end{bmatrix} \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_2 & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

而

$$(\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1})^{\mathrm{t}} = (\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{t}})^{-1}\boldsymbol{A}_2 = -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2$$

因而

$$\boldsymbol{A} \simeq \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}$$

而

$$(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2)^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{A}_3^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{A}_1^{-1})^{-1}\boldsymbol{A}_2 = -(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2)$$

从而根据归纳假设, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_1, \boldsymbol{C}_2$ 使得

$$\boldsymbol{C}_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{S}, \quad \boldsymbol{C}_2^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{A}_3 + \boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{A}_2)\boldsymbol{C}_2 = \boldsymbol{D}_2$$

其中 $\boldsymbol{D}_2$ 是上述形式的矩阵. 令

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{S} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{D}_2\end{bmatrix}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}_2\}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\}$$

成立.

ii. $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{0}$, 但存在 $a_{ij}\neq 0(i=1,2)$. 将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行加到第 i 行上, 再将第 j 列加到第 i 列上, 即可使得 $\boldsymbol{A}_1\neq\boldsymbol{0}$. 由合同的传递性, 这种情形与 **i.** 相同, 故得证.

iii. $\boldsymbol{A}_1=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{0}$. 由归纳假设, 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}_2$ 使得

$$\boldsymbol{C}_2^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_3\boldsymbol{C}_2=\boldsymbol{D}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 是上述形式的矩阵. 我们有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{n-2}\\ \boldsymbol{I}_2 & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\\ \boldsymbol{I}_{n-2} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

并且

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_3 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}_2\}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\}$$

于是

$$\boldsymbol{A}\simeq\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_3 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\simeq\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\boldsymbol{D}_2\}=\operatorname{diag}\{\boldsymbol{S},\cdots,\boldsymbol{S},\boldsymbol{0},\cdots,\boldsymbol{0}\}$$

于是得证.

综上可知引理成立. 由于合同的矩阵具有相等的秩, 因此斜对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩必为偶数, 原命题得证. □

习题 6.2

3 将所有 n 阶实对称矩阵组成的集合按照合同关系分类, 可以分成多少类?

解. 秩为 k 的矩阵有 $k+1$ 个合同类, 分别对应正惯性指数 $p=0,\cdots,k$. 于是总的合同类数目为

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

6 证明: 一个 n 元实二次型可以分解成两个实系数一次齐次多项式的乘积当且仅当它的秩为 2 且符号差为 0, 或它的秩为 1.

证明. $\Leftarrow$: 考虑 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$, 做非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 变为其规范形, 则各 y_k 都是关于 $x_1,\cdots,x_n$ 的实系数一次齐多项式, 显然它们的线性组合也是.

若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_k\cdot y_k$, 成立.

若 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$ 且符号差为 0, 则 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_k^2-y_l^2=(y_k+y_l)(y_k-y_l)$, 成立.

$\Rightarrow$: 假定

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\left(\sum_{i=1}^{n}a_ix_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_ix_i\right)$$

如果

$$\begin{bmatrix}b_1 & \cdots & b_n\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}=k\begin{bmatrix}a_1 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$$

并且 $a_i\neq 0$, 则令

$$x_j=y_j,\quad j\neq i$$
$$x_i=\frac{1}{a_i}\left(y_i-\sum_{j\neq i}a_jy_j\right)$$

这是非退化线性变换. 此时有 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=a_iy_i^2$, 它的秩为 1.

否则以这两个向量为列向量的矩阵必有不为 0 的二阶子式. 不妨设 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$. 考虑变换

$$\begin{cases}y_1=a_1x_1+\cdots+a_nx_n\\ y_2=b_1x_1+\cdots+b_nx_n\\ y_j=x_j,\quad j>2\end{cases}$$

这一方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行列式 $|\boldsymbol{C}|=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{y}$ 可得

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_1y_2$$

再做非退化线性变换

$$y_1=z_1+z_2,\quad y_2=z_1-z_2,\quad y_j=z_j(j>2)$$

则

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=z_1^2-z_2^2$$

于是该二次型的秩为 2, 符号差为 0.

综上所述, 原命题得证. □

习题 6.3

4 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, 它的 n 个特征值的绝对值中最大者记为 $S_r(\boldsymbol{A})$. 证明: 当 $t > S_r(\boldsymbol{A})$ 时, $t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵.

证明. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和对应的特征值 λ, 首先有

$$(t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})\boldsymbol{\alpha} = (t+\lambda)\boldsymbol{\alpha}$$

因此 $t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $t+\lambda$. 由于 $t > S_r(\boldsymbol{A}) = \max\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$, 从而 $t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A}$ 的全部特征值均为正, 因此它是正定的. □

6(1) 判断下列二次型是否正定:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 5x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

解. 这一二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

有

$$\begin{vmatrix} 5 \end{vmatrix} = 5 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 26 > 0, \quad \begin{vmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 84 > 0$$

于是题设二次型正定.

9 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 那么存在唯一的正定矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}^2$.

证明. *存在性*: 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, 则存在正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{T}$$

并且 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 非负. 令

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}$$

则

$$\boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix} \boldsymbol{T} = \boldsymbol{A}$$

唯一性: 假定存在正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{A}$. 设正交矩阵 $\boldsymbol{T}$ 和 $\boldsymbol{S}$ 使得

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{T}^{-1}\operatorname{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\boldsymbol{T}$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{S}^{-1}\operatorname{diag}\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\boldsymbol{S}$$

于是

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\operatorname{diag}\{\gamma_1^2,\cdots,\gamma_n^2\}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}^{-1}\operatorname{diag}\{\beta_1^2,\cdots,\beta_n^2\}\boldsymbol{S}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\gamma_1^2,\cdots,\gamma_n^2$ 和 $\beta_1^2,\cdots,\beta_n^2$. 适当调换 $\beta_1,\cdots,\beta_n$ 的下标可得 $\gamma_i^2=\beta_i^2(i=1,\cdots,n)$, 又因为 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都正定, 因此 $\gamma_i=\beta_i(i=1,\cdots,n)$. 于是令上述对角矩阵为 $\boldsymbol{D}$, 则有

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}$$

则有

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^{-1}$$

令 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^{-1}=(r_{ij})$, 则有

$$r_{ij}\gamma_j^2=\gamma_i^2r_{ij}$$

若 $r_{ij}\neq 0$, 则 $\gamma_i^2=\gamma_j^2$, 从而 $\gamma_i=\gamma_j$, 从而 $r_{ij}\gamma_i=\gamma_jr_{ij}$. 当 $r_{ij}=0$ 时该关系显然也成立. 于是

$$\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^{-1}\operatorname{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}=\operatorname{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\boldsymbol{S}\boldsymbol{T}^{-1}$$

即

$$\boldsymbol{T}^{-1}\operatorname{diag}\{\gamma_1,\cdots,\gamma_n\}\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}^{-1}\operatorname{diag}\{\beta_1,\cdots,\beta_n\}\boldsymbol{S}$$

于是

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}$$

因而这样的矩阵是唯一的. □

12 证明: n 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 负定当且仅当它的偶数阶顺序主子式全大于 0, 奇数阶顺序主子式全小于 0.

证明.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\text{负定} &\Leftrightarrow \text{-}\boldsymbol{A}\text{正定}\\
&\Leftrightarrow (-\boldsymbol{A})\begin{pmatrix}1,\cdots,k\\1,\cdots,k\end{pmatrix}>0,\quad \forall k=1,\cdots,n\\
&\Leftrightarrow (-1)^k\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1,\cdots,k\\1,\cdots,k\end{pmatrix}>0,\quad \forall k=1,\cdots,n\\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\text{的偶数阶顺序主子式全大于0, 奇数阶顺序主子式全小于0.}
\end{aligned}$$

□

习题 7.1

1(3) 判断下述集合对于所指的运算是否构成 $\mathbb{R}$ 上的线性空间: 区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数的集合, 记作 $C[a,b]$, 对于函数的加法和数量乘法.

解. 构成. 任取 $f,g,h\in C[a,b]$ 有

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=g(x)+f(x)=(g+f)(x)$$

$$[(f+g)+h](x)=f(x)+g(x)+h(x)=[f+(g+h)](x)$$

$$(f+0)(x)=f(x)+0(x)=f(x)$$

规定 $(-f)(x)=-f(x)$, 则有

$$(f+(-f))(x)=f(x)+(-f(x))=0$$

规定 $1(x)=1$, 则有

$$(1f)(x)=1\cdot f(x)=f(x)$$

任取 $k,l\in\mathbb{R}$ 有

$$[(kl)f](x)=k(lf(x))=[k(lf)](x)$$

$$[(k+l)f](x)=kf(x)+lf(x)$$

$$[k(f+g)](x)=k(f+g)(x)=kf(x)+kg(x)=(kf+kg)(x)$$

于是 $C[a,b]$ 是 $\mathbb{R}$ 上的线性空间.

2(2) 判断 $\mathbb{R}$ 上的线性空间 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中的下列函数是否线性无关:

$$1,\cos x,\cos 2x,\cos 3x$$

解. 考虑

$$a1+b\cos x+c\cos 2x+d\cos 3x=0,\forall x\in\mathbb{R}$$

分别取 $x=0,\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}$ 可得

$$\begin{cases} a-b+c-d=0\\ a+\frac{1}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c=0\\ a+\frac{\sqrt{2}}{2}b-\frac{\sqrt{2}}{2}b=0\\ a-c=0\end{cases}$$

解得 $a=b=c=d=0$, 从而上述函数组在 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中线性无关.

3 求下面的线性空间的基和维数: 所有正实数构成的集合 $\mathbb{R}^+$, 定义如下的加法 $\oplus$ 和乘法 $\otimes$:

$$a \oplus b = ab, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^+$$

$$k \otimes a = a^k, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+, k \in \mathbb{R}$$

解. 它的一组基为 $\{\mathrm{e}\}$, 维数为 1. 证明如下: 对任意 $x \in \mathbb{R}^+$ 都有

$$x = \mathrm{e}^{\ln x} = \ln x \otimes \mathrm{e}$$

于是任意 $x \in \mathbb{R}^+$ 都能用 e 线性表出, 因而 $\{\mathrm{e}\}$ 是该空间的一组基.

4 将 $\mathbb{C}$ 看作 $\mathbb{R}$ 上的线性空间, 求它的一个基和维数以及任一复数 $z = a + b\mathrm{i}$ 在这个基下的坐标.

解. $\mathbb{C}$ 的一组基为 $\{1, \mathrm{i}\}$, 其维数为 2. 这是因为任一复数 $z = a + b\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ 都有

$$z = a \cdot 1 + b \cdot \mathrm{i}$$

于是 z 是上述向量的线性组合, 并且在 $\mathbb{R}$ 上不存在 k 使得 $1 = k\mathrm{i}$, 因此这两个向量线性无关, 从而得证.
另外, 该复数的坐标即为 (a, b).

8 说明 $\mathbb{K}$ 上的所有 n 阶上三角矩阵组成的集合 W 对于矩阵的加法和数量乘法构成 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 并求它的一个基和维数.

解. 对于任意 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in W$, 都有

$$(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})_{ij} = \boldsymbol{A}_{ij} + \boldsymbol{B}_{ij} = 0 + 0 = 0, \quad \forall i > j$$

从而 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} \in W$. 对于任意 $k \in \mathbb{K}$ 又有

$$(k\boldsymbol{A})_{ij} = k\boldsymbol{A}_{ij} = k \cdot 0 = 0, \quad \forall i > j$$

于是 $k\boldsymbol{A} \in W$. 进而根据矩阵加法和数乘的性质不难知道 W 是线性空间.
W 的一组基为 $\{\boldsymbol{E}_{ij}\}(1 \leqslant j < i \leqslant n)$. 对于任一 $\boldsymbol{A} \in W$ 都有

$$\boldsymbol{A} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{ij} \boldsymbol{E}_{ij}$$

并且当 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ 时总有 $a_{ij} = 0$. 因此上述组是 W 的一组基, 其维数则为 $\dfrac{n(n+1)}{2}$

9 已知 $\mathbb{K}^3$ 的两组基:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix}2 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\end{bmatrix}$$

求基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 到基 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 的过渡矩阵 $\boldsymbol{P}$, 并求向量 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix}2 & 5 & 3\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 分别在这两组基下的坐标 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{y}$.

解. 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \boldsymbol{\beta}_2 & \boldsymbol{\beta}_3\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}$$

对矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$ 做初等行变换, 当左半边为 $\boldsymbol{I}$ 时右半边即为 $\boldsymbol{P}$, 即

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & -2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ -1 & -3 & -2\\ 2 & 4 & 4\end{bmatrix}$$

解线性方程组

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$$

可得

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}1\\ 0\\ 2\end{bmatrix}$$

从而

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix}2\\ -5\\ 10\end{bmatrix}$$

10 证明: 在数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间 V 中, 如果每个向量都能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 那么 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 是 V 的一组基.

证明. 依题意 $V = \mathrm{span}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n\}$, 因此只需说明它们线性无关即可. 考虑 $k_1, \cdots, k_n \in \mathbb{K}$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$$

如果存在 $k_i \neq 0$, 则

$$\boldsymbol{\alpha}_i = -\frac{1}{k_i}\sum_{j\neq i} k_j\boldsymbol{\alpha}_j$$

于是将 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 从上述向量组中去除后, 剩下的 $n-1$ 个向量也张成 V, 即 $\dim V \leqslant n-1$. 这与题设矛盾, 因此上述向量组线性无关, 因而是 V 的基. □