线性代数 B 第四次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 3.4

1(1) 计算下面的矩阵的秩, 并求出其列向量组的一个极大线性无关组.

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -4 & 5 \\ 4 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 对原矩阵做初等行变换:

$$\text{原矩阵} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{11}{3} & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & -6 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 6 & -9 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{36}{11} & \frac{49}{11} \\ 0 & 0 & \frac{72}{11} & -\frac{98}{11} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 36 & -49 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是原矩阵的秩为 3, 其列向量组的一个极大线性无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

2(2) 求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

解. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_2 = -\boldsymbol{\alpha}_1$. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量构成的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 15 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是向量组的秩为 2, 其一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$.

2(3) 求下列向量组的秩及其一个极大线性无关组.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

解. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量构成的矩阵:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ -1 & -7 & -3 & -9 \\ 2 & 8 & 0 & 6 \\ 3 & 9 & -3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & -4 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是向量组的秩为 2, 其一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

3 对于 λ 的不同值, 求下面矩阵的秩.

$$\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 对原矩阵做初等行变换:

$$\text{原矩阵} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 10-\lambda & -5 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-2\lambda & \lambda+2 & 1 \\ 0 & 9-3\lambda & \lambda-3 & 0 \end{bmatrix}$$

只有最后一行有可能为零行, 并且要求 $\lambda = 3$. 于是

$$\text{原矩阵的秩} = \begin{cases} 2, & \lambda = 3 \\ 3, & \lambda \neq 3 \end{cases}$$

4 证明: 一个矩阵的任意子矩阵的秩不会超过这个矩阵的秩.

证明. 设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵 $\boldsymbol{B}$, 记 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = a, \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = b$. 于是 $\boldsymbol{B}$ 至少有一个非零的 b 阶子式. 由于 $\boldsymbol{B}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的子矩阵, 于是按照相同的取法,$\boldsymbol{A}$ 中也至少存在一个非零的 b 阶子式, 于是 $a \geqslant b$. □

5 求下列 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩及其列向量组的一个极大线性无关组.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & \mathrm{i}^{m} & \mathrm{i}^{2m} & \mathrm{i}^{3m} & \mathrm{i}^{4m} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+1} & \mathrm{i}^{2(m+1)} & \mathrm{i}^{3(m+1)} & \mathrm{i}^{4(m+1)} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+2} & \mathrm{i}^{2(m+2)} & \mathrm{i}^{3(m+2)} & \mathrm{i}^{4(m+2)} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+3} & \mathrm{i}^{2(m+3)} & \mathrm{i}^{3(m+3)} & \mathrm{i}^{4(m+3)} \end{bmatrix}$$

其中 m 是正整数.

解. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的前四列构成的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & \mathrm{i}^{m} & \mathrm{i}^{2m} & \mathrm{i}^{3m} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+1} & \mathrm{i}^{2(m+1)} & \mathrm{i}^{3(m+1)} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+2} & \mathrm{i}^{2(m+2)} & \mathrm{i}^{3(m+2)} \\ 1 & \mathrm{i}^{m+3} & \mathrm{i}^{2(m+3)} & \mathrm{i}^{3(m+3)} \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} \left(\mathrm{i}^{m+j} - \mathrm{i}^{m+i}\right) = \mathrm{i}^{m} \prod_{0 \leqslant i < j \leqslant 3} \left(\mathrm{i}^{j} - \mathrm{i}^{i}\right) \neq 0$$

于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 4$, 其列向量组的一个极大线性无关组为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} \mathrm{i}^{m} \\ \mathrm{i}^{m+1} \\ \mathrm{i}^{m+2} \\ \mathrm{i}^{m+3} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} \mathrm{i}^{2m} \\ \mathrm{i}^{2(m+1)} \\ \mathrm{i}^{2(m+2)} \\ \mathrm{i}^{2(m+3)} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} \mathrm{i}^{3m} \\ \mathrm{i}^{3(m+1)} \\ \mathrm{i}^{3(m+2)} \\ \mathrm{i}^{3(m+3)} \end{bmatrix}$$

习题 3.5

2 判断下列线性方程组有没有解, 有多少解:

$$\begin{cases} x_1 + a x_2 + a^2 x_3 + \cdots + a^{n-1} x_n = b_1 \\ x_1 + a^2 x_2 + a^4 x_3 + \cdots + a^{2(n-1)} x_n = b_2 \\ \qquad \vdots \\ x_1 + a^s x_2 + a^{2s} x_3 + \cdots + a^{s(n-1)} x_n = b_s \end{cases}$$

其中 $s < n, a \neq 0$, 且当 $0 < r < s$ 时 $a^r \neq 1$.

解. 考虑系数矩阵的前 s 列构成的矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & \cdots & a^s \\ 1 & a^2 & \cdots & a^{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a^s & \cdots & a^{s^2}\end{bmatrix}$$

有

$$\det \boldsymbol{A}=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant s}\left(a^j-a^i\right)$$

由题意, 对任意 $1\leqslant i<j\leqslant s$ 都有 $a^j-a^i=a^i\left(a^{j-i}-1\right)\neq 0$, 于是 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$. 于是 $\mathrm{rank}\boldsymbol{A}=s<n$, 原方程组有解, 并且有无穷多个解.

4 已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于以下矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & b_n \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_n & 0\end{bmatrix}$$

证明: 上述线性方程组有解.

证明. 考虑方程组的增广矩阵

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} & b_n\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 是 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 的子矩阵, 而 $\tilde{\boldsymbol{A}}$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的子矩阵. 由 **习题 3.4.4** 可知

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}\leqslant \mathrm{rank}\ \tilde{\boldsymbol{A}}\leqslant \mathrm{rank}\ \boldsymbol{B}$$

由题意可知

$$\mathrm{rank}\ \boldsymbol{A}=\mathrm{rank}\ \boldsymbol{B}$$

于是

$$\text{rank } \boldsymbol{A} = \text{rank } \tilde{\boldsymbol{A}}$$

于是原方程有解. □

习题 3.6

1(1) 求下列齐次线性方程组的基础解系和解集:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \\ -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ -x_1 - 11x_2 + 2x_3 - 5x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

解. 对方程组的系数矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ -5 & 1 & -2 & 3 \\ -1 & -11 & 2 & -5 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 14 & -3 & 7 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & -14 & 3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{14} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是原方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{5}{14}x_3 + \frac{1}{2}x_4 \\ x_2 = \frac{3}{14}x_3 - \frac{1}{2}x_4 \end{cases}$$

自由变量为 x_3, x_4. 于是原方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 14 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

其解集为

$$W = \{k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 : k_1, k_2 \in K\}$$

1(3) 求下列齐次线性方程组的基础解系和解集:

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ -3x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0 \\ -2x_1 + 15x_2 - 6x_3 + 13x_4 = 0 \end{cases}$$

解. 对方程组的系数矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 2 & -5 & 1 & -3 \\ -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ -2 & 15 & -6 & 13 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -9 & 3 & -9 \\ 0 & 10 & -5 & 10 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

自由变量为 x_4, 于是原方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

其解集为

$$W = \{k\boldsymbol{\eta} : k \in K\}$$

2 证明: 设 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是 n 元齐次线性方程组的一个基础解系, 则与 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 等价的线性无关向量组也是该方程组的一个基础解系.

证明. 设 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_t$ 是与 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 等价的线性无关向量组, 则根据等价的定义可知存在一组数 $k_{11}, \cdots, k_{tt}$ 使得对任意 $1 \leqslant i \leqslant t$ 都有

$$\boldsymbol{\eta}_i = \sum_{j=1}^{t} k_{ij} \boldsymbol{\zeta}_j$$

对于该方程组的任意一个解 $\boldsymbol{\alpha}$, 都有

$$\alpha = a_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + a_t\boldsymbol{\eta}_t = \sum_{j=1}^{t} \left[\left(\sum_{i=1}^{t} a_i k_{ij} \right) \boldsymbol{\zeta}_j \right]$$

于是 α 可以用 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_t$ 线性表示. 又由于 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_t$ 线性无关, 于是 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_t$ 是该方程组的一个基础解系. □

3 证明: 设 n 元齐次方程组的系数矩阵的秩为 $r(r < n)$, 则它的任意 $n - r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系.

证明. 根据本节书中的定理, 上述线性方程组的每个基础解系所含解的个数均为 $n - r$. 考虑某个基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 以及题中所取的 $n - r$ 个线性无关的解 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_{n-r}$. 由于 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 是该方程组的解, 于是它们可以用 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表出. 又因为这两个向量组的秩相等, 于是它们等价, 因而根据上面的 **2.** 可得 $\boldsymbol{\zeta}_1, \cdots, \boldsymbol{\zeta}_{n-r}$ 也是该方程组的一个基础解系. □

习题 3.7

1(1) 求下列非齐次线性方程组的解集:

$$\begin{cases} x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 11 \\ -3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ -x_1 - 9x_2 - 4x_4 = 17 \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$$

解. 对方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ -3 & 1 & -4 & 2 & -5 \\ -1 & -9 & 0 & -4 & 17 \\ 5 & 3 & 6 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & -28 & -4 & 14 & -56 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{9}{7} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & -14 & 2 & -7 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是该方程的特解为

$$\boldsymbol{\gamma}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} -9 & 1 & 7 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是该方程组的解集为

$$W = \{\boldsymbol{\gamma}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + k_2\boldsymbol{\eta}_2 : k_1, k_2 \in K\}$$

4 证明: 如果 $\boldsymbol{\gamma}_0$ 是 n 元非齐次线性方程组的一个特解, $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_t$ 是导出组的一个基础解系. 令

$$\boldsymbol{\gamma}_i = \boldsymbol{\gamma}_0 + \boldsymbol{\eta}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, t$$

则方程的任意解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都可以表示为

$$\boldsymbol{\gamma} = u_0\boldsymbol{\gamma}_0 + \cdots + u_t\boldsymbol{\gamma}_t$$

其中 $u_0 + \cdots + u_t = 1$.

证明. 对方程的任意解 $\boldsymbol{\gamma}$ 都有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\gamma} &= \boldsymbol{\gamma}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{\eta}_t \\ &= \frac{1+k_1+\cdots+k_t}{1+k_1+\cdots+k_t}\boldsymbol{\gamma}_0 + k_1\boldsymbol{\eta}_1 + \cdots + k_t\boldsymbol{\eta}_t \\ &= \frac{1}{1+k_1+\cdots+k_t}\boldsymbol{\gamma}_0 + \frac{k_1}{1+k_1+\cdots+k_t}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\gamma}_0) + \cdots + \frac{k_t}{1+k_1+\cdots+k_t}(\boldsymbol{\eta}_t+\boldsymbol{\gamma}_0) \\ &= \frac{1}{1+k_1+\cdots+k_t}\boldsymbol{\gamma}_0 + \frac{k_1}{1+k_1+\cdots+k_t}\boldsymbol{\gamma}_1 + \cdots + \frac{k_t}{1+k_1+\cdots+k_t}\boldsymbol{\gamma}_t \\ &= u_0\boldsymbol{\gamma}_0 + \cdots + u_t\boldsymbol{\gamma}_t\end{aligned}$$

于是命题得证. □

习题 3.8

1 设 $r < n$, 令

$$U = \left\{\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_r & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}} : a_i \in K, i = 1, 2, \cdots, r\right\}$$

说明 U 是 K^n 的子空间, 并给出 U 的一个基和维数.

解. 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 的第 i 个分量为 1, 其余分量均为 0. 不难看出 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 并且对任意 $\boldsymbol{\alpha} \in U$, 都有

$$\boldsymbol{\alpha} = a_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_r\boldsymbol{\alpha}_r$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 是 U 的一个基, 并且 $\dim U = r$.

4 求下述矩阵的列空间的一个基和维数:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

解. 对原矩阵做初等行变换:

$$\text{原矩阵} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & -13 & 10 & 36 \\ 0 & 1 & 3 & -4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 & -7 \\ 0 & -1 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 49 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是列空间的基为前三个列向量, 维数为 3.