1 二次型与矩阵的合同

1.1 二次型和它的标准形

定义 1.1 二次型 数域 $\mathbb{K}$ 上的一个 n 元**二次型**是系数在 $\mathbb{K}$ 中的 n 个变量的齐二次多项式, 其一般形式为

$$f(x_1,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$$

其中 $a_{ij}=a_{ij}$. 称矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为该二次型的矩阵.

如果令 $\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}$, 则有 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

定义 1.2 二次型的等价 设 $f(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 和 $g(x_1,\cdots,x_n)=\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 分别是数域 $\mathbb{K}$ 上的两个 n 元二次型, 如果存在变量的线性替换

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为可逆矩阵, 使得 $g(y_1,\cdots,y_n)=f(x_1,\cdots,x_n)$, 则称上述两个二次型是**等价的**.

定义 1.3 矩阵的合同 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})$, 如果存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}\in M_n(\mathbb{K})$, 使得

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**合同的**.

定义 1.4 二次型的标准形 如果二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 等价于一个只含平方项的二次型 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$, 那么称后者为前者的**标准形**.

定义 1.5 矩阵的合同标准形 如果对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 合同于一个对角矩阵 $\boldsymbol{D}$, 那么称后者为前者的**合同标准形**.

定理 1.6 数域 $\mathbb{K}$ 上的任一对称矩阵都合同于某个对角矩阵.

证明. 采用数学归纳法, 对对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 进行归纳.

当 $n=1$ 时, 结论显然成立. 现在设 $n>1$, 并且 $n-$ 级的对称矩阵都合同于某个对角矩阵. 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

i. $a_{11}\neq 0$. 把 $\boldsymbol{A}$ 写作分块矩阵的形式并做初等行列变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11} & \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{A}_1-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a_{11} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_1-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\end{bmatrix}$$

记 $\boldsymbol{A}_2=\boldsymbol{A}_1-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}$, 则根据上述变换可得

$$\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{I}_{n-1}\end{bmatrix}\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$$

由于

$$\begin{bmatrix}1 & \mathbf{0}\\ -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{I}_{n-1}\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}1 & -a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{I}_{n-1}\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}\simeq\begin{bmatrix}a_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_2\end{bmatrix}$$

由于

$$\boldsymbol{A}_2^{\mathrm{t}}=\left(\boldsymbol{A}_1-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\right)^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{A}_1^{\mathrm{t}}-a_{11}^{-1}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{A}_2$$

于是 $\boldsymbol{A}_2$ 是 $n-1$ 级对称矩阵. 根据归纳假设可知存在对角矩阵 $\boldsymbol{D}_1$ 使得 $\boldsymbol{A}_2\simeq\boldsymbol{D}_1$, 从而

$$\boldsymbol{A}_1\simeq\begin{bmatrix}a_{11} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}$$

ii. $a_{11}=0$ 且存在 $a_{ii}\neq 0$. 将第 1 行与第 i 行互换, 第 1 列与第 i 列互换, 得到矩阵 $\boldsymbol{B}$, 则 $\boldsymbol{B}\simeq\boldsymbol{A}$ 且 $\boldsymbol{B}$ 满足情况 (i), 从而 $\boldsymbol{A}$ 合同于某个对角矩阵.

iii. $a_{ii}=0$ 对所有 $i=1,2,\cdots,n$ 均成立. 如果 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$, 则结论显然成立. 否则, 存在 $a_{ij}\neq 0(i\neq j)$, 那么将第 j 行加到第 i 行, 再将第 j 列加到第 i 列, 得到矩阵 $\boldsymbol{C}$, 则 $\boldsymbol{C}\simeq\boldsymbol{A}$ 且 $c_{ii}=2a_{ij}\neq 0$, 从而 $\boldsymbol{A}$ 合同于某个对角矩阵.

于是归纳可知命题成立. □

定理 1.7 数域 $\mathbb{K}$ 上的任一 n 元二次型都等价于某个只含平方项的二次型.

证明. 由前面的定理立刻可知. □

于是又可以得出一种求二次型的标准形的方法. 对于 $\mathbb{K}$ 上的二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 考虑如下变换:

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{I}\end{bmatrix}\xrightarrow[\text{对}\boldsymbol{I}\text{仅做列变换}]{\text{对}\boldsymbol{A}\text{做成对行列变换}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{D}=\operatorname{diag}\{d_1,\cdots,d_n\}$, 则有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}$$

令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{y}$ 即可得二次型的标准形为 $\boldsymbol{y}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{y}$.

定义 1.8 二次型的秩 $\mathbb{K}$ 上的 n 元二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的任一标准形中平方项的个数称为该二次型的**秩**, 它等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩.

1.2 实二次型的规范形

定义 1.9 实二次型的规范形 实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的形如

$$z_1^2+\cdots+z_p^2-z_{p+1}^2-\cdots-z_r^2$$

的标准形称为该实二次型的**规范形**.

定理 1.10 惯性定理 n 元实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形是唯一的.

证明. 设实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的秩为 r. 假定 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 分别经过两个非退化线性变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$ 变换为两个规范形

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

现在来证明 $p=q$. 做非退化线性变换 $\boldsymbol{z}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{y}$ 可知

$$y_1^2+\cdots+y_p^2-y_{p+1}^2-\cdots-y_r^2=z_1^2+\cdots+z_q^2-z_{q+1}^2-\cdots-z_r^2$$

设 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{B}=(g_{ij})$. 如果 $p>q$, 那么应当可以找到非零的 $\boldsymbol{y}$ 使得等式左端为正而右端非正. 为此, 令

$$\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}\beta_1 & \cdots & \beta_p & 0 & \cdots & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

其中 $k_1,\cdots,k_p$ 是待定的不全为 0 的数. 现在考虑线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}\beta_1+\cdots+g_{1p}\beta_p=0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ g_{q1}\beta_1+\cdots+g_{qp}\beta_p=0 \end{cases}$$

由于 $q<p$, 因此上述齐次方程有非零解, 记作 $\boldsymbol{\beta}_0$. 取 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{\beta}_0$, 则有

$$z_i=g_{i1}\beta_1+\cdots+g_{ip}\beta_p=0 \quad (i=1,2,\cdots,q)$$

因此等式右端非正. 而等式左端由于 $\boldsymbol{y}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\beta_{p+1}=\cdots=\beta_n=0$, 所以左端为正, 这就产生矛盾, 于是 $p\leqslant q$. 同理可证 $q\leqslant p$, 从而 $p=q$. 于是上述实二次型的规范形是唯一的. □

定义 1.11 正惯性指数和负惯性指数 实二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的规范形中正平方项的个数称为该实二次型的**正惯性指数**, 负平方项的个数称为该实二次型的**负惯性指数**.

推论 1.12 任一 n 级实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都合同于对角矩阵 $\mathrm{diag}\{1,\cdots,1,-1,\cdots,-1,0,\cdots,0\}$, 其中 1 的个数等于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正惯性指数,-1 的个数等于 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的负惯性指数. 这一对角矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的合同规范形.

而对于复二次型, 由于 -1 是 1 的平方, 因此复二次型的规范形总是形如

$$z_1^2+z_2^2+\cdots+z_r^2$$

的形式, 其中 r 为该复二次型的秩.

1.3 正定二次型和正定矩阵

定义 1.13 正定二次型 n 元二次型