北京大学数学科学学院 2021-22 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(20') 求 a 为何值时, 下述线性方程组有 **a.** 唯一解; **b.** 无解; **c.** 无穷多解? 在有无穷多解的情况下写出解集的结构.

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

2(10') 判断 $\mathbb{R}^3$ 中下列子集是否为 $\mathbb{R}^3$ 的子空间, 并说明理由.

(1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(2) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$.

(3) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$.

(4) $\left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 5x_3)^2 = 0\right\}$.

3(10') 找出一个非零的 3×3 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PA}$ 为简化行阶梯形矩阵, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4(20') 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 和线性无关的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 满足如下关系:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\beta}_1 - 2\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_1 - 2\boldsymbol{\beta}_2 - \boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 \\ 5\boldsymbol{\beta}_1 - 3\boldsymbol{\beta}_2 + 9\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_3 \\ -2\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2 - 4\boldsymbol{\beta}_3 = \boldsymbol{\alpha}_4 \end{cases}$$

求出所有满足 $\updownarrow_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \updownarrow_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \updownarrow_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \updownarrow_4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的向量 $\begin{bmatrix} \updownarrow_1 & \updownarrow_2 & \updownarrow_3 & \updownarrow_4 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

5(10') 设 $\boldsymbol{E}_{i,i+1} (i = 1, \cdots, n-1)$ 是 $n \times n$ 的基本矩阵. 证明:

(1) 如果 $|i - j| > 1$, 那么 $\boldsymbol{E}_{i,i+1}\boldsymbol{E}_{j,j+1} = \boldsymbol{E}_{j,j+1}\boldsymbol{E}_{i,i+1}$.

(2) 如果 $|i - j| = 1$, 那么 $\boldsymbol{E}_{i,i+1}^2\boldsymbol{E}_{j,j+1} - 2\boldsymbol{E}_{i,i+1}\boldsymbol{E}_{j,j+1}\boldsymbol{E}_{i,i+1} + \boldsymbol{E}_{i,i+1}\boldsymbol{E}_{j,j+1}^2 = \boldsymbol{0}$.

6(10') 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{1 \leqslant i,h \leqslant n}$ 是 n 级方阵,A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix} = \det \boldsymbol{A} + x \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} A_{ij}$$

7(10') 令 $f(t) = \sum\limits_{k=0}^{n-1} t^k x_k$. 设 $\zeta^0, \zeta^1, \cdots, \zeta^{n-1} \in \mathbb{C}$ 是所有 n 次单位根. 证明:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} f\left(\zeta^i\right)$$

8(10') 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{P}$ 均为 n 级方阵, 矩阵 $\boldsymbol{P}$ 为若干 $\boldsymbol{P}(i,j)$ 型初等矩阵的成绩. 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP}'$. 判断 a_{ij} 在 $\boldsymbol{A}$ 中的代数余子式 A_{ij} 是否等于 b_{ij} 在 $\boldsymbol{B}$ 中的代数余子式 B_{ij}, 并说明理由.