北京大学数学科学学院 2024-25 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

2(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵.

3(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正, 负惯性指数.

设 $V_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \rangle$, $V_2 = \langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3 \rangle$ 为 $\mathbb{K}^4$ 的子空间, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基和维数.

5(15') 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基, 而 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 和 $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3$ 是 V 的另外两组基, 已知

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

分别是基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 $\boldsymbol{\delta}_1, \boldsymbol{\delta}_2, \boldsymbol{\delta}_3$ 和到基 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵. 再设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 其在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$

下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5 & -10 & -4\\ 7 & 12 & 4\\ -2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

(2) 求基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3$ 的过渡矩阵.

6(10') 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

为分块矩阵, 其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为方阵.

(1) 问当 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足什么条件时 $\boldsymbol{X}$ 可逆, 并证明你的结论.

(2) 设 $\boldsymbol{X}$ 可逆, 求其逆矩阵, 假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是已知的矩阵.

7(15') 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 其在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(1) 求 V 上的线性变换 $\mathcal{A}\mathcal{B}-\mathcal{B}\mathcal{A}$.

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的所有特征值及其特征子空间, 证明 V 可以表示成这些特征子空间的直和.

(3) 试判断是否存在 V 的基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 使得 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵均为对角矩阵, 并说明理由.

8(9') 考虑实二次型

$$Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz+2yz$$

其中 λ 为参数. 请回答下面的问题并证明你的结论:

(1) 当 $\lambda=1$ 时, $Q(x,y,z)$ 为何种二次型.

(2) 当且仅当 λ 取何值时, 存在不全为零的 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 使得

$$Q(x,y,z)=(ax+by+cz)^2$$

9(6') 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 满足

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 3y+z \\ y+3z \end{bmatrix}, \quad \forall \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

问是否存在 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1, \quad \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \quad \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = 4\boldsymbol{\alpha}_3$$

并证明你的结论.