

# 1 矩阵的运算

## 1.1 矩阵的加法, 数乘和乘法

**定义 1.1 矩阵的加法** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{m \times n}$ , 令

$$C = (a_{ij} + b_{ij})_{m \times n}$$

则称  $C$  是  $A$  与  $B$  的和, 记作  $C = A + B$ .

**定义 1.2 矩阵的数乘** 设  $A = (a_{ij})_{m \times n}$ , 对于  $k \in K$ , 令

$$A = (k_{ij})_{m \times n}$$

则称  $M$  是  $k$  与矩阵  $A$  的数量积, 记作  $M = kA$ .

**定义 1.3 矩阵的乘法** 设  $A = (a_{ij})_{s \times n}$ ,  $B = (b_{ij})_{n \times m}$ , 令

$$C = (c_{ij})_{m \times n}$$

其中

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

则称  $C$  是  $A$  与  $B$  的积, 记作  $C = AB$ .

矩阵乘法满足结合律, 但不满足交换律.

**定义 1.4 恒等矩阵** 对角线元素为 1, 其余元素均为 0 的  $n \times n$  级矩阵称作  $n$  阶恒等矩阵, 记作  $I_n$ .

**定义 1.5 可交换矩阵** 如果  $n$  级方阵  $A$  和  $B$  满足

$$AB = BA$$

则称  $A$  和  $B$  是可交换的.

## 1.2 特殊矩阵

### 1.2.1 对角矩阵

**定义 1.6 对角矩阵** 除主对角线上的元素以外, 其它元素均为 0 的矩阵称作对角矩阵, 记作  $\text{diag}\{a_1, \dots, a_n\}$ , 其中  $a_1, \dots, a_n$  为对角线上的元素.

**定理 1.7 对角矩阵的乘法** 用对角矩阵  $D$  左乘矩阵  $A$ , 相当于用  $D$  的主对角元乘  $A$  的各行, 即

$$\begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \gamma_1 \\ \vdots \\ d_n \gamma_n \end{bmatrix}$$

用对角矩阵  $D$  右乘矩阵  $A$ , 相当于用  $D$  的主对角元乘  $A$  的各列, 即

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \cdots & \alpha_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \alpha_1 & \cdots & d_n \alpha_n \end{bmatrix}$$

### 1.2.2 基本矩阵

**定义 1.8 基本矩阵** 只有一个元素是 1, 其它元素均为 0 的矩阵称作基本矩阵.  $(i, j)$  元为 1 的基本矩阵记作  $E_{ij}$ .

**定理 1.9 基本矩阵的乘法** 用  $E_{ij}$  左乘矩阵  $A$  就相当于把  $A$  的第  $j$  行移到第  $i$  行, 其余行均为  $0$ ; 用  $E_{ij}$  右乘矩阵  $A$  就相当于把  $A$  的第  $i$  列移到第  $j$  列, 其余列均为  $0$ .

### 1.2.3 上/下三角矩阵

**定义 1.10 上/下三角矩阵** 主对角线下/上方元素均为 0 的方阵称作上/下三角矩阵.

**定理 1.11 上/下三角矩阵的乘法** 上/下三角矩阵的乘积仍为上/下三角矩阵, 并且主对角线上的元素等于各矩阵主对角线上对应元素的乘积.

### 1.2.4 初等矩阵

**定义 1.12 初等矩阵** 由单位矩阵经过一次初等行(列)变换所得到的矩阵称作初等矩阵.

根据单位矩阵和基本矩阵的乘法即可推导出有关初等矩阵的乘法. 事实上, 初等矩阵与其对应的初等行(列)变换是等价的.

### 1.2.5 对称矩阵与斜对称矩阵

**定义 1.13 对称矩阵** 如果矩阵  $A$  满足  $A = A^t$ , 则称  $A$  为对称矩阵.

**定理 1.14 对称矩阵的乘法** 设  $A$  和  $B$  都是数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  级对称矩阵, 则  $AB$  为对称矩阵当且仅当  $A$  与  $B$  可交换.

**定义 1.15 斜对称矩阵** 如果矩阵  $A$  满足  $A = -A^t$ , 则称  $A$  为斜对称矩阵.

**定理 1.16 斜对称矩阵的行列式** 设  $A$  为数域  $\mathbb{K}$  上的  $n$  级斜对称矩阵, 则当  $n$  为奇数时,  $\det(A) = 0$ .

证明. 因为  $A^t = -A$ , 于是

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^n \det A = -\det A$$

于是

$$\det A = 0$$

□