

北京大学数学科学学院 2022-23 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

是否正定, 并说明理由.

2 实二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 的矩阵为 A , 其特征值为 1(二重), -1. 属于特征值 1 的特征向量是

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求属于特征值 -1 的全部特征向量.

(2) 求 A .

3 将二次型

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz$$

做正交替换化为标准形.

4 设 $\mathcal{A} : M_2(\mathbb{K}) \mapsto M_2(\mathbb{K})$ 对任意 $X \in M_2(\mathbb{K})$ 都有

$$\mathcal{A}(X) = X^t$$

(1) 证明: \mathcal{A} 是线性变换.

(2) 求 \mathcal{A} 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的矩阵.

5 证明: 任意 \mathbb{C} 上的 n 级矩阵 A , 总存在 \mathbb{C} 上的 n 级上三角矩阵 B 使得 A 与 B 相似.

6 证明: 所有二级正交矩阵均可表示为

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

中的一种, 其中 $\theta \in \mathbb{R}$.