

北京大学数学科学学院 2023-24 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(10') 判断下面的方程组是否有解. 如果有解, 给出方程组的全部解; 如果无解, 请给出理由.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

2(10') 已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ a_1x_1 + (a_2 + b)x_2 + \cdots + a_nx_n = 0 \\ \cdots \\ a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + (a_n + b)x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$.

- (1) 计算上述方程组的系数矩阵的行列式.
- (2) 讨论 a_1, \cdots, a_n, b 满足何种条件时 **a.** 方程仅有零解; **b.** 方程组有非零解.
- (3) 当方程组有非零解时, 求出方程的一个基础解系.

3(15') 计算下面的行列式:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

4(13') 求下面行列式中所有元素的代数余子式之和:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

5(10') 已知向量组

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

求该向量组的一个极大线性无关组.

6(12') 求下列 n 级方阵的秩:

$$\begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$$

7(10') 给定 n 个两两不同的数 a_1, \dots, a_n . 设 b_1, \dots, b_n 为任意的 n 个数, 证明: 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$ 成立.

8(10') 设 5 级方阵 M 满足 $\det M \neq 0$. 试证明: 存在一个 5 级上三角矩阵 B 满足 $\det B \neq 0$ 使得 BM 有如下性质: 对于任一 $1 \leq i \leq 5$, 都有且仅有 BM 的一行满足该行的前 $i-1$ 个位置为 0, 第 i 个位置不为 0.