1 二次型

例题 1.1 求实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$$

的秩和正惯性指数.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&\frac{t}{2}&t\\ \frac{t}{2}&1&2\\ t&2&0\end{bmatrix}$$

它的顺序主子式分别为

$$\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}\\ \frac{t}{2}&1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{4},\quad \begin{vmatrix}1&\frac{t}{2}&t\\ \frac{t}{2}&1&2\\ t&2&0\end{vmatrix}=t^2-4$$

如果 $t^2=4$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不满秩. 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 $(1,1)$ 元的余子式非零, 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, 正惯性指数为 1.

如果 $t^2\neq 4$, 则矩阵满秩, 只需判断 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的正负. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\lambda^3-2\lambda^2+\left(-\frac{5t^2}{4}-3\right)\lambda+(4-t^2)$$

设它的三个实根为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 则有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2,\quad \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=-\frac{5t^2}{4}-3,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=t^2-4$$

前两个式子表明三个根中有正数也有负数. 如果 $t^2>4$, 则正惯性指数为 1; 如果 $t^2<4$, 则正惯性指数为 2.

例题 1.2 判断当参数 a 满足什么条件时, 实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

是正定的.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a&1&1\\ 1&a&1\\ 1&1&a\end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$\begin{aligned}\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix}\lambda-a & -1 & -1\\ -1 & \lambda-a & -1\\ -1 & -1 & \lambda-a\end{vmatrix}\\ &= (\lambda-a)(\lambda-a-1)(\lambda-a+1)+(-\lambda+a-1)-(\lambda-a+1)\\ &= (\lambda-a+1)(\lambda^2-(2a+1)\lambda+a^2+a-2)\\ &= (\lambda-a+1)^2(\lambda-a-2)\end{aligned}$$

上述二次型正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于零, 即

$$a-1>0,\quad a+2>0$$

从而 $a>1$.

例题 1.3 设实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_2x_3+2ax_1x_3$$

可以做非退化线性变换成为

$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+4y_3^2+2y_1y_2$$

求 a 的值和相应的非退化线性变换.

解. 二次型 $g=(y_1+y_2)^2+4y_3^2$, 其秩和正惯性指数均为 2. 考虑二次型 f 对应的矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & a & a\\ a & 1 & a\\ a & a & 1\end{bmatrix}$$

于是

$$\det\boldsymbol{A}=(1-a^2)-a(a-a^2)+a(a^2-a)=(a-1)^2(2a+1)$$

当 $a=1$ 时, $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=1$, 不存在相应的变换, 于是只能有 $a=-\dfrac{1}{2}$. 现在求相应的非退化线性变换:

$$\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{1}{2}\\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4}\\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4}\\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \frac{3}{4} & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

于是令

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

然后令 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$, 就有 $f(x_1, x_2, x_3) = z_1^2 + \dfrac{3}{4} z_2^2$, 再令

$$\boldsymbol{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 + y_2 \\ \frac{16}{\sqrt{3}} y_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即可.

例题 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 阶数相同的实对称矩阵. 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 都是对角矩阵.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 因此它合同于 $\boldsymbol{I}_n$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$$

由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 也是实对称矩阵, 因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}$$

也为对角矩阵. 令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}$ 为可逆矩阵, 则有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

于是存在可逆的 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 均为对角矩阵. □

例题 1.5 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 是两个半正定矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = 0$.

证明. $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: 现在假设 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) = 0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的, 因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_s, 0, \cdots, 0\}\boldsymbol{P}$$

令

$$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}} \operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \cdots, \sqrt{\lambda_s}, 0, \cdots, 0\}\boldsymbol{P}$$

则

$$\boldsymbol{S}^2 = \boldsymbol{A}$$

同理构造 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^2=\boldsymbol{B}$. 并且 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 都是半正定矩阵. 于是

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{SSB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{SBS})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{BS})$$

$\boldsymbol{S}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{BS}$ 是一个半正定矩阵, 它的迹为 0 说明它的特征值全部为 0; 它又可以对角化, 于是 $\boldsymbol{SBS}=\boldsymbol{STTS}=\boldsymbol{0}$. 而 $\boldsymbol{ST}(\boldsymbol{ST})^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{STTS}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{SSTT}=\boldsymbol{0}$. □

例题 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定实矩阵. 证明: 存在对角元均为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}$.

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 做归纳.

当 $n=1$ 时, 命题显然成立.

当 $n>1$ 时, 根据归纳假设, 命题对所有阶数小于 n 的矩阵均成立. 将 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}_1$ 的顺序主子式也是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式, 因此 $\boldsymbol{A}_1$ 也是正定矩阵, 于是存在对角元均为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{L}_1$ 使得 $\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{A}_1$. 由于 $\boldsymbol{L}_1$ 的对角元为正数, 于是 $\det\boldsymbol{L}_1>0$, 因此 $\boldsymbol{L}_1$ 可逆.

考虑行列变换

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}_1(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

由于 $\det\boldsymbol{A}>0,\det\boldsymbol{A}_1>0$, 于是

$$a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0$$

记上式为 b. 而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}$$

于是令

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}$, 归纳可知命题对所有正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都成立. □

例题 1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 证明: 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

是负定的.

证明. 只需证明对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f(\boldsymbol{x})<0$ 即可. 根据前一题的变换方式, 注意到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{x}^{t}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$f(\boldsymbol{x})=-\det\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 因此 $\det\boldsymbol{A}>0, \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$, 因此 $f(\boldsymbol{x})<0$, 于是题设二次型负定. □

例题 1.8 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵. 证明:

$$\det\boldsymbol{A}\leqslant\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$ 时命题显然成立.

当 $n>1$ 时对 $\boldsymbol{A}$ 分块如下:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

考虑行列变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}_1(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha})\leqslant a_{nn}\det\boldsymbol{A}_1\leqslant a_{nn}\prod_{i=1}^{n-1}a_{ii}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

□

例题 1.9 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵. 证明:

$$(\det\boldsymbol{C})^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}c_{ji}^2\right)$$

证明. 首先注意到 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵, 于是利用上一问的结论即可得证. □

例题 1.10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是阶数相同的半正定矩阵. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant\max\{\det\boldsymbol{A},\det\boldsymbol{B}\}$$

证明. 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 都不是正定矩阵, 那么 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{B} = 0$, 而 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ 也是半正定矩阵, 因此其行列式非负, 于是命题得证.

现在不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵. 由前面题目的结论可知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^t \boldsymbol{A} \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^t \boldsymbol{B} \boldsymbol{C}$ 都是对角矩阵, 不妨分别设为 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}$, 并且对角元都非负. 于是

$$\det \boldsymbol{S} = \prod_{i=1}^{n} s_{ii} = (\det \boldsymbol{C})^2 \det \boldsymbol{A}$$

$$\det \boldsymbol{T} = \prod_{i=1}^{n} t_{ii} = (\det \boldsymbol{C})^2 \det \boldsymbol{B}$$

$$\det(\boldsymbol{S} + \boldsymbol{T}) = \prod_{i=1}^{n} (s_{ii} + t_{ii}) = (\det \boldsymbol{C})^2 \det(\boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B})$$

而

$$\prod_{i=1}^{n} (s_{ii} + t_{ii})^2 \geqslant \max \left\{ \prod_{i=1}^{n} s_{ii}, \prod_{i=1}^{n} t_{ii} \right\}$$

并且 $(\det \boldsymbol{C})^2 > 0$. 于是

$$\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \geqslant \max\{\det \boldsymbol{A}, \det \boldsymbol{B}\}$$

命题得证. □