1 矩阵的运算

1.1 矩阵的加法, 数乘和乘法

定义 1.1 矩阵的加法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 1.2 矩阵的数乘 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 对于 $k\in K$, 令

$$\boldsymbol{A}=(k_ij)_{m\times n}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 是 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{M}=k\boldsymbol{A}$.

定义 1.3 矩阵的乘法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵乘法满足结合律, 但不满足交换律.

定义 1.4 恒等矩阵 对角线元素为 1, 其余元素均为 0 的 $n\times n$ 级矩阵称作 n 阶恒等矩阵, 记作 $\boldsymbol{I}_n$.

定义 1.5 可交换矩阵 如果 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

1.2 特殊矩阵

1.2.1 对角矩阵

定义 1.6 对角矩阵 除主对角线上的元素以外, 其它元素均为 0 的矩阵称作**对角矩阵**, 记作 $\mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$, 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 为对角线上的元素.

定理 1.7 对角矩阵的乘法 用对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 相当于用 $\boldsymbol{D}$ 的主对角元乘 $\boldsymbol{A}$ 的各行, 即

$$\begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{\gamma}_1 \\ \vdots \\ d_n\boldsymbol{\gamma}_n \end{bmatrix}$$

用对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 相当于用 $\boldsymbol{D}$ 的主对角元乘 $\boldsymbol{A}$ 的各列, 即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & d_n\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

1.2.2 基本矩阵

定义 1.8 基本矩阵 只有一个元素是 1, 其它元素均为 0 的矩阵称作基本矩阵. (i, j) 元为 1 的基本矩阵记作 $\boldsymbol{E}_{ij}$.

定理 1.9 基本矩阵的乘法 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行移到第 i 行, 其余行均为 $\mathbf{0}$; 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列移到第 j 列, 其余列均为 $\mathbf{0}$.

1.2.3 上/下三角矩阵

定义 1.10 上/下三角矩阵 主对角线下/上方元素均为 0 的方阵称作**上/下三角矩阵**.

定理 1.11 上/下三角矩阵的乘法 上/下三角矩阵的乘积仍为上/下三角矩阵, 并且主对角线上的元素等于各矩阵主对角线上对应元素的乘积.

1.2.4 初等矩阵

定义 1.12 初等矩阵 由单位矩阵经过一次初等行 (列) 变换所得到的矩阵称作**初等矩阵**.

根据单位矩阵和基本矩阵的乘法即可推导出有关初等矩阵的乘法. 事实上, 初等矩阵与其对应的初等行 (列) 变换是等价的.

1.2.5 对称矩阵与斜对称矩阵

定义 1.13 对称矩阵 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

定理 1.14 对称矩阵的乘法 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级对称矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

定义 1.15 斜对称矩阵 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**斜对称矩阵**.

定理 1.16 斜对称矩阵的行列式 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级斜对称矩阵, 则当 n 为奇数时,$\det(\boldsymbol{A})=0$.

证明. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{A}$, 于是

$$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\det(-\boldsymbol{A})=(-1)^n\det\boldsymbol{A}=-\det\boldsymbol{A}$$

于是

$$\det\boldsymbol{A}=0$$

□

1.3 矩阵乘积的秩与行列式

定理 1.17 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $s\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵, 则

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n & \cdots & b_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出, 从而

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

利用这一结论有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

因此

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}\}$$

命题得证. □

定理 1.18 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵, 则

$$\det \boldsymbol{AB} = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$$