# 北京大学数学科学学院 2023-24 学年第一学期线性代数 B 期中试题

**1(10')** 判断下面的方程组是否有解. 如果有解, 给出方程组的全部解; 如果无解, 请给出理由.

$$\begin{cases} x_1+x_3=1 \\ 3x_1+x_2+2x_3+x_4=2 \\ x_1+2x_2-x_3+2x_4=2 \\ -x_2+x_3-x_4=0 \end{cases}$$

解. 对该方程的增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

增广矩阵中存在形如 $0=d$ 的行, 于是原方程组无解.

**2(10')** 已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1+b)\,x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ a_1x_1+(a_2+b)\,x_2+\cdots+a_nx_n=0 \\ \cdots \\ a_1x_1+a_2x_2+\cdots+(a_n+b)\,x_n=0 \end{cases}$$

其中 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

**(1)** 计算上述方程组的系数矩阵的行列式.

**(2)** 讨论 $a_1,\cdots,a_n,b$ 满足何种条件时 **a.** 方程仅有零解; **b.** 方程组有非零解.

**(3)** 当方程组有非零解时, 求出方程的一个基础解系.

解.

**(1)** 设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的每一行的和均为 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i+b$, 于是将第二列及以后的列加到第一列上即可得

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+b & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{n} a_i+b & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i+b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2+b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n+b \end{vmatrix}$$

注意到第一列均为 1, 于是将第二行及以后的行减去第一行可得

$$\det \boldsymbol{A}=\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right)\begin{vmatrix}1 & a_2 & \cdots & a_n\\ 0 & b & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right)\begin{vmatrix}b & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & b\end{vmatrix}=\left(\sum_{i=1}^n a_i+b\right)b^{n-1}$$

**(2)** 齐次方程仅有零解要求 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^n a_i+b\neq 0$ 且 $b\neq 0$. 于是 $a_1+\cdots+a_n+b\neq 0$ 且 $b\neq$ 时原方程仅有零解;$a_1+\cdots+a_n+b=0$ 或 $b=0$ 时原方程有非零解.

**3(15')** 计算下面的行列式: 求下面行列式的值:

$$A_n=\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1\\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1\\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0\end{vmatrix}$$

**4(13')** 求下面行列式中所有元素的代数余子式之和:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

**5(10')** 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}3\\4\\-2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-5\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}5\\0\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}3\\3\\-3\end{bmatrix}$$

求该向量组的一个极大线性无关组.

**6(12')** 求下列 $n$ 级方阵的秩:

$$\begin{bmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{bmatrix}$$

**7(10')** 给定 $n$ 个两两不同的数 $a_1, \cdots, a_n$. 设 $b_1, \cdots, b_n$ 为任意的 $n$ 个数, 证明: 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$ 成立.

**8(10')** 设 5 级方阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\det \boldsymbol{M} \neq 0$. 试证明: 存在一个 5 级上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\det \boldsymbol{B} \neq 0$ 使得 $\boldsymbol{BM}$ 有如下性质: 对于任一 $1 \leqslant i \leqslant 5$, 都有且仅有 $\boldsymbol{BM}$ 的一行满足该行的前 $i-1$ 个位置为 0, 第 $i$ 个位置不为 0.