

1 线性方程组

2 行列式

例题 2.1 设 $n \geq 2$, n 级矩阵 \mathbf{A} 的元素都是 1 或者 -1 .

1. \mathbf{A} 的行列式 $\det \mathbf{A}$ 一定是偶数.
2. 在 $n = 3$ 的时候, 求 $\det \mathbf{A}$ 的最大值.
3. 当 $n \geq 3$ 时, 证明:

$$|\det \mathbf{A}| \leq (n-1)!(n-1)$$

证明.

1. 首先证明 $\det \mathbf{A}$ 为偶数.

方法一: 考虑行列式的定义:

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i}$$

由于 $a_{ij_i} = \pm 1$, 于是

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^n a_{ij_i} = \pm 1$$

又因为 $j_1 \cdots j_n$ 的排列数目共有 $n!$ 种, 当 $n \geq 2$ 时 $n!$ 为偶数. 于是 $\det \mathbf{A}$ 是偶数个 1 或 -1 相加的结果, 于是一定为偶数.

方法二: 采用数学归纳法. 当 $n = 2$ 时, 不难有

$$\det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

由于 $a_{ij} = \pm 1$, 于是 $a_{11}a_{22} = \pm 1, a_{12}a_{21} = \pm 1$. 无论何种情况, 都有 $\det \mathbf{A} = -2, 0, 2$, 为偶数.

当 $n \geq 3$ 时, 将行列式按照第一行展开, 有

$$\det \mathbf{A} = \sum_{i=1}^n a_{1i} A_{1i}$$

余子式 A_{1i} 也是由 $-1, 1$ 组成的行列式, 按照归纳假设, A_{1i} 均为偶数. 又因为 $a_{1i} = \pm 1$, 于是 $\det \mathbf{A}$ 为 n 个偶数相加减的结果, 当然也是偶数. 于是命题得证.

2. 当 $n = 3$ 时, $\det \mathbf{A}$ 一共有 6 项, 并且它们只能取 ± 1 . 因此, $\det \mathbf{A}$ 能取到的最大值为 6, 并且此时

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{13}a_{22}a_{31} = -1$$

分别将各行的三项相乘可得

$$\prod_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} = 1, \quad \prod_{1 \leq i, j \leq 3} a_{ij} = -1$$

这是矛盾的. 因此 $\det \mathbf{A}$ 无法取到 6, 又因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

于是 $\det \mathbf{A}$ 的最大值为 4.

3. 采用数学归纳法. 当 $n = 3$ 时, 有

$$\det \mathbf{A} \leq 4 = (3-1)!(3-1)$$

将 $\det \mathbf{A}$ 按照第一行展开可得

$$\det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n a_{1j} A_{1j} \leq \sum_{j=1}^n |a_{1j}| |A_{1j}| \leq n(n-2)!(n-2) < (n-2)! (n^2 - 2n + 1) = (n-1)!(n-1)$$

于是命题得证. □

例题 2.2 计算以下行列式的值.

1.

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{1n} + a_{11} & a_{11} + a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} + a_{1n} \\ a_{2n} + a_{21} & a_{21} + a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} + a_{n1} & a_{n1} + a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} + a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解.

1. 将第一列减去第二列可得

$$\begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ a_2 + b_1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n + b_1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 - b_2 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ b_1 - b_2 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1 - b_2 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

$$= (b_1 - b_2) \begin{vmatrix} 1 & a_1 + b_2 & \cdots & a_1 + b_n \\ 1 & a_2 + b_2 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n + b_2 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

同样地, 将第 2 列减去第 3 列, 可以得到

$$LHS = (b_1 - b_2)(b_2 - b_3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_1 + b_n \\ 1 & 1 & \cdots & a_2 + b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n + b_n \end{vmatrix}$$

既然第一列与第二列相同, 因此原行列式的值为 0.

2. 将行列式每列拆成两列的和. 如果第一列保留 a_{i1} , 那么第二列只能保留 a_{i2} (否则两列相同, 行列式值为 0). 依次类推, 可得第 j 列只能保留 a_{ij} ; 如果第一列保留 a_{in} , 那么最后一列只能保留 $a_{i(n-1)}$, 依次类推, 可得第 j 列只能保留 $a_{i(j-1)}$. 因此, 原行列式可拆成两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{1n} + a_{11} & a_{11} + a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} + a_{1n} \\ a_{2n} + a_{21} & a_{21} + a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} + a_{n1} & a_{n1} + a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} + a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{2n} & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

将第二个行列式的第一列移到最后一列共需 $n-1$ 次对换, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{1n} + a_{11} & a_{11} + a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} + a_{1n} \\ a_{2n} + a_{21} & a_{21} + a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} + a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} + a_{n1} & a_{n1} + a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)} + a_{nn} \end{vmatrix} = (1 + (-1)^{n-1}) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. 方法一: 将第 n 列减去第 $n-1$ 列可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & 0 \end{vmatrix}$$

按照最后一列展开, 仍然把第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列可得

$$LHS = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}$$

重复上面的操作, 可得

$$LHS = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+3} |n| = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}} n$$

方法二: 将第 j 列减去第 $j-1$ 列, 于是原行列式的右下部分全部为 0. 按照行列式的定义有

$$LHS = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n$$

例题 2.3 设 $n \geq 2$, 求下面行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

解. 考虑 $n+1$ 阶行列式

$$\tilde{D}_{n+1}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

这行列式的 $(n, n+1)$ 元的余子式即为 D_n , 于是只需考虑 y^{n-1} 的系数即可. 又 \tilde{D}_{n+1} 本身为范德蒙德行列式, 于是

$$\tilde{D}_{n+1}(y) = (y - x_1) \cdots (y - x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

于是

$$(-1)^{n+(n+1)} D_n = -(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

从而

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \right)$$

例题 2.4 求下面行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

将 \tilde{D}_n 按第一行展开即可得 $\tilde{D}_n = D_n$. 现在将 \tilde{D}_n 的第 j 行 ($1 < j \leq n+1$) 减去第 1 行可得

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

右边两个行列式都可以拆解成范德蒙德行列式的形式, 于是有

$$\begin{aligned} D_n = \tilde{D}_n &= 2 \prod_{k=1}^n x_k \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) - \prod_{k=1}^n (x_k - 1) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i) \left(2 \prod_{k=1}^n x_k - \prod_{k=1}^n (x_k - 1) \right) \end{aligned}$$

如果遇到一行 (列) 中只有一个元素与其它的不同, 就可以考虑将这个元素进行拆项.

例题 2.5 设 $n \geq 2, a_i \neq 0, i = 1, \dots, n$. 计算以下行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

将 \tilde{A}_n 按第一列展开可得 $\tilde{A}_n = A_n$. 现在将 \tilde{A}_n 的第 i 行 ($1 < j \leq n+1$) 减去第 1 行可得

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式, 于是

$$A_n = \tilde{A}_n = (-1)^n \left(1 - \sum_{k=1}^n \frac{x_k}{a_k} \right) \left(\prod_{k=1}^n a_k \right)$$

例题 2.6 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 行减去第 $i-1$ 行 ($i > 1$) 可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第 i 行减去第 $i-1$ 行 ($i > 2$) 可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

按照行列式的定义, 只有第一行选择 $n-1$, 第二行选择 1, 后面所有行选择 2 才能使得求和的项不为 0. 于是

$$A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

例题 2.7 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 行减去第 $i-1$ 行有

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 i 列减去第 1 列有

$$A_n =$$