线性代数 B 第六次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 4.5

2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{A} \neq \boldsymbol{0}$. 证明: 存在一个 $n \times m$ 非零矩阵 $\boldsymbol{B}$, 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\det \boldsymbol{A} = 0$.

证明. 设 $\boldsymbol{B}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m$, 则根据矩阵的分块乘法可知

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{A\beta}_m\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A} = 0 &\Leftrightarrow \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}\text{有非零解}\\ &\Leftrightarrow \text{存在非零的}\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\text{使得}\boldsymbol{A\beta}_i = \boldsymbol{0}\\ &\Leftrightarrow \text{存在非零的}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m\end{bmatrix}\text{使得}\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{0}\end{aligned}$$

□

3 设 $\boldsymbol{B}$ 为 n 级矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $n \times m$ 行满秩矩阵, 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{0}$, 那么 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

(2) 如果 $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C}$, 那么 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$.

证明. 首先证明当 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和 $n \times m$ 矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 满足 $\boldsymbol{XY} = \boldsymbol{0}$ 时 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} + \operatorname{rank} \boldsymbol{Y} \leqslant n$.

当 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$ 时显然成立.

当 $\boldsymbol{X} \neq \boldsymbol{0}$ 时, 设 $\boldsymbol{Y}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m$, 则它们都是 $\boldsymbol{Xy} = \boldsymbol{0}$ 的解. 设 $\boldsymbol{Xy} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 W, 于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{Y} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_m\} \leqslant \dim W = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{X}$$

从而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{X} + \operatorname{rank} \boldsymbol{Y} \leqslant n$.

(1) 根据前述结论有

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} \leqslant n - \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = n - n = 0$$

于是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{C}$ 当且仅当 $(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$. 根据 **(1)** 的结论可知 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{I} = \boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$.

$\square$

5 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $s\times n$ 矩阵, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$; $\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 其列向量组是 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_m$; $\boldsymbol{C}$ 是 $s\times m$ 矩阵, 其列向量组是 $\boldsymbol{\delta}_1,\cdots,\boldsymbol{\delta}_m$. 证明: $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}$ 当且仅当 $\boldsymbol{\beta}_j$ 是线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\delta}_j$ 的解对所有 $j=1,\cdots,m$ 成立.

证明. 根据矩阵的分块乘法可知

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{A\beta}_m\end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{C}&\Leftrightarrow\begin{bmatrix}\boldsymbol{A\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{A\beta}_m\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\delta}_m\end{bmatrix}\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{A\beta}_j=\boldsymbol{\delta}_j,\quad\forall j=1,\cdots,m\\&\Leftrightarrow\boldsymbol{\beta}_j\text{是}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\delta}_j\text{的解},\quad\forall j=1,\cdots,m\end{aligned}$$

$\square$

6 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 $s\times n$ 矩阵, $\boldsymbol{\beta}$ 是 $\mathbb{R}^s$ 中的任一列向量. 证明: n 元线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}$ 一定有解.

证明. 题设方程有解当且仅当 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$. 而

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$$

另一方面 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}$ 是 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$ 的子矩阵, 因此

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\leqslant\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$$

从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\beta}\end{bmatrix}$, 因此题设方程一定有解. $\square$

8 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n\geqslant 2)$ 级矩阵, 证明:

$$\det\boldsymbol{A}^*=(\det\boldsymbol{A})^{n-1}$$

证明. 如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, 那么结论显然. 现在假设 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{0}$, 则有 $\boldsymbol{AA}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I}$.
如果 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, 上式两边取行列式可得 $|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^n$, 从而 $|\boldsymbol{A}^*|=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
如果 $\det\boldsymbol{A}=0$, 则有 $\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{0}$, 于是根据 **3.** 的结论可知 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*\leqslant n$; 并且 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}>0$. 于是 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}^*<n$, 因而 $\det\boldsymbol{A}^*=0=|\boldsymbol{A}|^{n-1}$.
综上, 命题得证. $\square$

9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n(n \geqslant 2)$ 级矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = \begin{cases} n, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n \\ 1, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1 \\ 0, & \operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n-1 \end{cases}$$

证明. 当 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n$ 时根据 **8.** 的结论可得 $\det \boldsymbol{A}^* = (\det \boldsymbol{A})^{n-1} \neq 0$, 从而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = n$.

当 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1$ 时 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{0}$, 根据 **3.** 的结论可知 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* \leqslant n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 1$, 又 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 阶非零的代数余子式, 于是 $\boldsymbol{A}^* \neq \boldsymbol{0}$, 于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = 1$.

当 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} < n-1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的所有 $n-1$ 阶代数余子式均为 0, 从而 $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{0}$, 从而 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}^* = 0$. □

10 证明: 分块对角矩阵 $\boldsymbol{A} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1, \cdots, \boldsymbol{A}_s\}$ 可逆当且仅当主对角线上的所有子矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{A}$ 可逆时有

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_s^{-1}\}$$

证明. 设矩阵

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} & \cdots & \boldsymbol{B}_{1s} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} & \cdots & \boldsymbol{B}_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{B}_{s1} & \boldsymbol{B}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{B}_{ss} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{B}_{ii}$ 与 $\boldsymbol{A}_i$ 的阶数相同, 记为 r_i.

$\Rightarrow$: 当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时, 不妨设 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}$. 根据分块矩阵的乘法可得

$$\boldsymbol{I} = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{ki} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{ii}$$

$$\boldsymbol{0} = \sum_{k=1}^{s} \boldsymbol{A}_{ik}\boldsymbol{B}_{kj} = \boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{ij}, \quad i \neq j$$

于是存在 $\boldsymbol{B}_{ii}$ 使得 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{ii} = \boldsymbol{I}$, 因此 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆.

又因为 $\boldsymbol{A}_i$ 可逆并且 $\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{B}_{ij} = \boldsymbol{0}$, 于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B}_{ij} \leqslant r_i - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}_i = 0$, 于是 $\boldsymbol{B}_{ij} = \boldsymbol{0}$. 从而 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上所有子矩阵 $\boldsymbol{A}_i$ 均可逆, 并且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_s^{-1}\}$.

$\Leftarrow$: 根据分块矩阵的乘法有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{A}_s^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{r_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \boldsymbol{I}_{r_s} \end{bmatrix} = \boldsymbol{I}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \operatorname{diag}\{\boldsymbol{A}_1^{-1}, \cdots, \boldsymbol{A}_s^{-1}\}$. □

12 设矩阵

$$B = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1 \\ B_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

其中 B_1, B_2 分别为 r 阶, s 阶矩阵. 证明: B 可逆当且仅当 B_1 和 B_2 均可逆, 并且 B 可逆时有

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1^{-1} \\ B_2^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

证明. 设

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{bmatrix}$$

其中 C_2, C_3 分别为 r 阶, s 阶矩阵.

$\Rightarrow$: 当 B 可逆时, 不妨设 $BC = I$, 则有

$$BC = \begin{bmatrix} B_1C_3 & B_1C_4 \\ B_2C_1 & B_2C_2 \end{bmatrix} = I$$

于是 $B_1C_3 = I_r$, $B_2C_2 = I_s$, 从而 B_1, B_2 均可逆. 于是 $C_1 = \mathbf{0}$, $C_4 = \mathbf{0}$, 因此有

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1^{-1} \\ B_2^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

$\Leftarrow$: 根据分块矩阵的乘法可知

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1 \\ B_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} B^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & B_1^{-1} \\ B_2^{-1} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & I_s \end{bmatrix} = I$$

于是 B 可逆. □

14 设 A, B 分别是 $s \times n$, $n \times s$ 矩阵, 证明:

$$|I_s - AB| = |I_n - BA|$$

证明.

$$\begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{bmatrix} \xrightarrow{2-A\cdot 1} \begin{bmatrix} I_n & B \\ \mathbf{0} & I_s - AB \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} I_n & \mathbf{0} \\ -A & I_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & B \\ A & I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & B \\ \mathbf{0} & I_s - AB \end{bmatrix}$$

两边取行列式, 根据分块上/下三角矩阵的性质可得

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_s \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{AB}|$$

同样地有

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_s \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}_s \end{vmatrix} = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}|$$

从而

$$|\boldsymbol{I}_s - \boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{I}_n - \boldsymbol{BA}|$$

□

习题 4.6

1(5) 判断下列矩阵是否是正交矩阵:

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

解. 考虑上述矩阵的列向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{t}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{t}} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{t}} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

于是上述矩阵是正交矩阵.

3 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{T}$ 是 n 阶正交矩阵, 则 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是对称矩阵.

证明.

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\left(\boldsymbol{T}^{-1}\right)^{\mathrm{t}}$$

又因为 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵, 于是 $\boldsymbol{T}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{T}^{-1}$; $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 于是 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{A}$. 于是

$$\left(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\right)^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$$

于是 $\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ 是对称矩阵. □

4 证明: 如果 $\mathbb{R}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 具有下列三个性质中的任意两个, 则它必具有三个性质: $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵.

证明. 如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵, 则

$$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{I}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵, 则

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$$

在上式两端左乘 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 可得

$$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$$

从而 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}$ 是对称矩阵且 $\boldsymbol{A}$ 是对合矩阵, 则

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{I}$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 是正交矩阵. □

7 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^4$ 中将下列向量单位化:

(1) $\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

(2) $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

解.

(1)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} \frac{3\sqrt{26}}{26} & 0 & -\frac{\sqrt{26}}{26} & \frac{2\sqrt{26}}{13} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

(2)

$$\varepsilon_2=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{30}}{6} & \frac{\sqrt{30}}{30} & -\frac{\sqrt{30}}{15} & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

9 证明: 在欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 如果向量 $\boldsymbol{\beta}$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的每个向量都正交, 则 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意线性组合也正交.

证明. 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意线性组合

$$\boldsymbol{\alpha}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

则有

$$(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha})=k_1(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_1)+\cdots+k_s(\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}_s)=0k_1+\cdots+0k_s=0$$

于是 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 的任意线性组合正交. □

13 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正交矩阵, 证明: 对于欧几里得空间 $\mathbb{R}^n$ 中的任一列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 都有

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$$

证明.

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}|^2=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{\alpha}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\alpha})=|\boldsymbol{\alpha}|^2$$

从而

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}|=|\boldsymbol{\alpha}|$$

□

习题 5.1

1(3) 求下列矩阵的相抵标准型:

$$\begin{bmatrix}1 & -2\\ -3 & 6\\ 2 & -4\end{bmatrix}$$

解. 注意到

$$\begin{bmatrix}-2\\ 6\\ -4\end{bmatrix}=-2\begin{bmatrix}1\\ -3\\ 2\end{bmatrix}$$

于是上述矩阵的秩为 1, 其相抵标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2 证明: $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r(r \neq 0)$ 当且仅当存在 $s \times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}$ 与 $r \times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$$

证明. $\Rightarrow$: 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准型

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

于是存在 s 级矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_1 \\ \boldsymbol{Q}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1$$

其中 $\boldsymbol{P}_1$ 是 $\boldsymbol{P}$ 的前 r 列满秩矩阵构成的子矩阵, $\boldsymbol{Q}_1$ 是 $\boldsymbol{Q}$ 的前 r 行构成的子矩阵. 由于 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 因此 $\boldsymbol{P}_1$ 的列向量组线性无关, 于是 $\operatorname{rank}\boldsymbol{P}_1 = r$. 同理 $\operatorname{rank}\boldsymbol{Q}_1 = r$. 于是存在 $s \times r$ 列满秩矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 与 $r \times n$ 行满秩矩阵 $\boldsymbol{Q}_1$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{Q}_1$.

$\Leftarrow$: 一方面有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{P} = r$$

另一方面根据 Sylvester 秩不等式有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} \geqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{P} + \operatorname{rank}\boldsymbol{Q} - r = r$$

从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A} = \operatorname{rank}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q} = r$. □

5 设 $\boldsymbol{C}$ 是 $s \times r$ 列满秩矩阵, $\boldsymbol{D}$ 是 $r \times m$ 行满秩矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} = r$$

证明. 一方面有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{C} = r$$

下面证明 Sylvester 秩不等式, 即

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{C}\boldsymbol{D} \geqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{C} + \operatorname{rank}\boldsymbol{D} - r$$

将 $\boldsymbol{C}$ 做相抵标准型分解可得

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

于是

$$\boldsymbol{CD} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\boldsymbol{QD} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P}\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{H}_1$ 是 $\boldsymbol{QD}$ 的前 r 行构成的矩阵. 又因为 $\boldsymbol{P}$ 是可逆的, 于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{CD} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \operatorname{rank} \boldsymbol{H}_1$$

又

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{D} = \operatorname{rank} \boldsymbol{QB} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{H}_1$ 作为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix}$ 的 r 行的子矩阵, 其行向量组的极大线性无关组在扩充为 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix}$ 的行向量组的极大线性无关组时增加的行向量均属于 $\boldsymbol{H}_2$, 于是

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} - \operatorname{rank} \boldsymbol{H}_1 \leqslant n - s$$

从而

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{CD} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{C} + \operatorname{rank} \boldsymbol{D} - r$$

综上可知 $\operatorname{rank} \boldsymbol{CD} = r$. □

习题 5.2

3 证明: 如果 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_2$, 那么

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$$

证明. 由于 $\boldsymbol{A}_1 \sim \boldsymbol{B}_1$, $\boldsymbol{A}_2 \sim \boldsymbol{B}_2$, 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_2$ 使得

$$\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1^{-1}, \quad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_2^{-1}$$

根据前面的分块对角矩阵的逆矩阵的性质可知

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2^{-1} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{P}_1^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{P}_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{A}_2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix}$$

□

5 对于 $\mathbb{K}$ 上的多项式 f 以及 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 证明: 如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 那么 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$.

证明. 如果 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 则存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{PAP}^{-1} = \boldsymbol{B}$. 于是对 $m \in \mathbb{Z}^*$ 有

$$\boldsymbol{B}^m = \left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)^m = \underbrace{\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)\cdots\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)}_{m\text{个}} = \boldsymbol{PA}^m\boldsymbol{P}^{-1}$$

于是对任一多项式 f 总有

$$\boldsymbol{P}f(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-1} = \sum_{m=0}^{M} a_m \boldsymbol{PA}^m\boldsymbol{P}^{-1} = \sum_{m=0}^{M} a_m \boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{B})$$

从而 $f(\boldsymbol{A}) \sim f(\boldsymbol{B})$. □

8 证明: 与幂等矩阵相似的矩阵仍然是幂等矩阵.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 为幂等矩阵, $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 则

$$\boldsymbol{B}^2 = \left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right)\left(\boldsymbol{PAP}^{-1}\right) = \boldsymbol{PA}^2\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{PAP}^{-1} = \boldsymbol{B}$$

于是 $\boldsymbol{B}$ 仍为幂等矩阵. □

10 证明: 与幂零矩阵相似的矩阵仍然是幂零矩阵, 并且其幂零指数相同.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 为幂零矩阵, 其幂零指数为 t, $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵, 令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{PAP}^{-1}$, 则 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$. 前面已经证得

$$\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{PA}^m\boldsymbol{P}^{-1}$$

当 $m < t$ 时 $\boldsymbol{A}^m \neq \boldsymbol{0}$, 又因为 $\boldsymbol{P}$ 可逆, 于是 $\boldsymbol{B}^m \neq 0$. 当 $m \geqslant t$ 时 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{0}$, 从而 $\boldsymbol{B}^m = \boldsymbol{0}$. 于是 $\boldsymbol{B}$ 是幂零矩阵, 其幂零指数为 t. □

习题 5.3

1(2) 求 $\mathbb{K}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量, 其中

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 2 \\ -2 & -14 & -3 \end{bmatrix}$$

解.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)\left[\lambda^2-6\lambda+9\right] = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1 和 3.

对于特征值 1, 解线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} -1 & -3 & -2 \\ -1 & -7 & -2 \\ 2 & 14 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是对应于特征值 1 的特征向量构成的集合为 $\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 : k_1 \in \mathbb{R}, k_1 \neq 0\}$.

对于特征值 3, 解线性方程组 $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -1 & -5 & -2 \\ 2 & 14 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 0 & 8 & 4 \\ 0 & 10 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是对应于特征值 3 的特征向量构成的集合为 $\{k_2\boldsymbol{\alpha}_2 : k_2 \in \mathbb{R}, k_1 \neq 0\}$.

2 求 $\mathbb{C}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值和特征向量. 如果把 $\boldsymbol{A}$ 看成 $\mathbb{R}$ 上的矩阵, 它有没有特征值? 有多少个特征值? 这里 $\boldsymbol{A}$ 分别如下:

(1)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(2)

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{bmatrix}$$

解.

(1)

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & \lambda-1\end{vmatrix}=\lambda-2\lambda+4$$

其特征值分别为 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$.

对于特征值 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$, 解线性方程组 $((1+\sqrt{3}\mathrm{i})\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3}\mathrm{i} & \sqrt{3}\\ -\sqrt{3} & \sqrt{3}\mathrm{i}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 1\\ -1 & \mathrm{i}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & -\mathrm{i}\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是对应于特征值 $1+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的特征向量构成的集合为 $\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 : k_1\in\mathbb{C}, k_1\neq 0\}$. 同理可知对应于特征值 $1-\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的特征向量构成的集合为 $\{k_2\boldsymbol{\alpha}_2 : k_1\in\mathbb{C}, k_2\neq 0\}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-\mathrm{i} & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

如果 $\mathbb{K}=\mathbb{R}$, 则上述矩阵没有特征值.

(2)

$$\begin{aligned}|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|&=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -7 & 3\\ 2 & \lambda+5 & -2\\ 4 & 10 & \lambda-3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-3 & -7 & 3\\ 2 & \lambda+5 & -2\\ 0 & -2\lambda & \lambda+1\end{vmatrix}\\ &=(\lambda+1)\begin{vmatrix}\lambda-3 & -7\\ 2 & \lambda+5\end{vmatrix}+2\lambda\begin{vmatrix}\lambda-3 & 3\\ 2 & -2\end{vmatrix}\\ &=(\lambda+1)(\lambda^2+2\lambda-1)-4\lambda^2\\ &=\lambda^3-\lambda^2+\lambda-1\\ &=(\lambda-1)(\lambda^2+1)\end{aligned}$$

于是其特征值分别为 $1, \mathrm{i}, -\mathrm{i}$.

对于特征值 1, 解线性方程组 $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix}-2 & -7 & 3\\ 2 & 6 & -2\\ 4 & 10 & -2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 3 & -1\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是对应于特征值 1 的特征向量构成的集合为 $\{k_1\boldsymbol{\alpha}_1 : k_1 \in \mathbb{C}, k_1 \neq 0\}$.

对于特征值 i, 解线性方程组 $(\mathrm{i}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} \mathrm{i}-3 & -7 & 3 \\ 2 & \mathrm{i}+5 & -2 \\ 4 & 10 & \mathrm{i}-3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & \mathrm{i}+5 & -2 \\ 0 & -2\mathrm{i}+4 & 3\mathrm{i}-1 \\ 0 & -2\mathrm{i} & \mathrm{i}+1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1-2\mathrm{i} \\ 0 & 2 & \mathrm{i}-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

其基础解系为

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i}-1 & 1-\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是对应于特征值 i 的特征向量构成的集合为 $\{k_2\boldsymbol{\alpha}_2 : k_2 \in \mathbb{C}, k_2 \neq 0\}$. 同理对应于特征值 $-\mathrm{i}$ 的特征向量构成的集合为 $\{k_3\boldsymbol{\alpha}_3 : k_3 \in \mathbb{C}, k_3 \neq 0\}$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -2\mathrm{i}-1 & 1+\mathrm{i} & 2 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

5 证明: n 阶幂等矩阵一定有特征值, 并且其特征值为 1 或 0.

解. 设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶幂等矩阵, 则对任一 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 有

$$\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

令 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\beta}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$$

如果 $\boldsymbol{\beta} \neq \boldsymbol{0}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 1, 对应的一个特征向量即为 $\boldsymbol{\beta}$.

如果 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{0}$, 则有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{A}$ 有特征值 0, 对应的一个特征向量即为 $\boldsymbol{\alpha}$.

于是命题得证.

6 证明: $\mathbb{C}$ 上周期为 m 的周期矩阵的特征值都是 m 次单位根.

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{C}$ 上的周期为 m 的周期矩阵, λ 是其一个特征值, 对应的一个特征向量是 $\boldsymbol{\alpha}$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^{m-1}(\lambda\boldsymbol{\alpha}) = \cdots = \lambda^m\boldsymbol{\alpha}$$

另一方面又有 $\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{I}$, 于是

$$\lambda^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{A}^m\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 因此总有 $\lambda^m = 1$, 于是 λ 是 m 次单位根. □

7 证明: 方阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 有相同的特征多项式和特征值.

证明. 注意到

$$(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{\mathrm{t}} = (\lambda \boldsymbol{I})^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = \lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{t}$$

又因为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})^{\mathrm{t}}$$

于是

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}) = \det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$$

从而二者具有相同的特征多项式, 因而具有相同的特征值. □

设 $\boldsymbol{A}$ 是一个 n 阶正交矩阵, 证明:

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 有特征值, 那么其特征值为 1 或 -1.

(2) 如果 n 为奇数且 $\det \boldsymbol{A} = 1$, 那么 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

(3) 如果 $\det \boldsymbol{A} = -1$, 那么 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

证明. **(1)** 假定 $\lambda \in \mathbb{K}$ 和 $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n$ 且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda \boldsymbol{\alpha}$. 我们前面已经证明

$$|\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$$

于是

$$|\lambda||\boldsymbol{\alpha}| = |\boldsymbol{\alpha}|$$

由于 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 于是 $|\lambda| = 1$, 从而 $\lambda = \pm 1$.

(2) 有

$$|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{A} - \boldsymbol{I}| = (-1)^n |\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = -|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$$

于是 $|\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 因而 1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

(3) 有

$$|-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} - \boldsymbol{A}| = |-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} + \boldsymbol{I}| = |\boldsymbol{A} + \boldsymbol{I}| = -|-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}|$$

于是 $|-\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}| = 0$, 因而 -1 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个特征值.

□

习题 5.4

2 设 $\boldsymbol{A}=[a_{ij}]$ 是 n 阶上三角矩阵, 证明:

(1) $\boldsymbol{A}$ 的主对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元两两不等, 则 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

证明. **(1)** 注意到

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-a_{11} & \cdots & -a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda-a_{nn}\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-a_{ii})$$

从而 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式的全部根为 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元, 于是 $\boldsymbol{A}$ 的全部主对角元是 $\boldsymbol{A}$ 的全部特征值.

(2) 如果 $\boldsymbol{A}$ 的主对角元两两不等, 则其有 n 个两两不等的特征值, 因而 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

□

3 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{bmatrix}$, 求 $\boldsymbol{A}^m(m\in\mathbb{Z}^*)$.

解.

$$|\lambda \boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -2\\ 1 & \lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda-3)$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 2 和 3, 其对应的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$$

令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$$

则

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}2^m & 0\\ 0 & 3^m\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}2^m & 0\\ 0 & 3^m\end{bmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2^m & 0\\ 0 & 3^m\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 2^m-3^m & 2\cdot 3^m-2\cdot 2^m\\ 2^m-3^m & 2\cdot 3^m-2^m\end{bmatrix}$$

6 证明: 不为零矩阵的幂零矩阵不可对角化.

证明. 假定非零的幂零矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的幂零指数为 r, 并且其可对角化. 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{D}$$

其中 $\boldsymbol{P}$ 的各列为 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量, $\boldsymbol{D}$ 是对角矩阵, 其主对角元为 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. 从而

$$\boldsymbol{D}^r=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}^r\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{0}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$$

于是对角矩阵 $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$. 这意味着 $\boldsymbol{A}$ 的特征值均为 0, 从而 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{A}$ 非零的假设矛盾, 因此 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化. $\square$