1 n 维向量空间 K^n

1.1 向量空间及其子空间

定义 1.1 n 维向量空间 设 K 为数域, 则所有 n 维向量组成的集合

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

称为 n 维向量空间.

定义 1.2 子空间 如果 $U \subseteq K^n$ 满足

1. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in U, \quad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in U.$

2. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in U, k \in K, \quad k\boldsymbol{\alpha} \in U.$

则称 U 为 K^n 的一个子空间.

定义 1.3 张成空间 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的所有线性组合构成的集合 W 是 K^n 的一个子空间, 称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 张成的空间, 记为

$$W = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$$

上述证明均略.

1.2 线性相关与线性无关

定义 1.4 线性相关 称 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in K$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

定义 1.5 线性无关 称 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 如果

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$.

显然, K^n 中的向量组要么线性相关, 要么线性无关.

1.3 极大线性无关组与向量组的秩

定义 1.6 极大线性无关组 设 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则其中的一个线性无关子组, 且任一向量加入该子组后都变成线性相关, 称为该向量组的一个极大线性无关组.

定义 1.7 等价的向量组 设向量组 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}, \mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\}$. 如果 $\mathcal{A}$ 中的每个向量都能由 $\mathcal{B}$ 线性表出, 且 $\mathcal{B}$ 中的每个向量也都能由 $\mathcal{A}$ 线性表出, 则称向量组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ **等价**, 记为 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

定理 1.8 向量组和它的极大线性无关组等价.

证明. 考虑向量组 $\mathcal{A} = \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 假定它的一个极大线性无关组为 $\mathcal{B} = \boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r (r \leqslant s)$. 对于任意 $1 \leqslant i \leqslant s$ 有

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 1\boldsymbol{\alpha}_i + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_s$$

于是向量组 $\mathcal{B}$ 的每个向量都能由 $\mathcal{A}$ 线性表出. 同样, 对于任意 $1 \leqslant i \leqslant r$, $\mathcal{A}$ 中的 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 也能由 $\mathcal{B}$ 线性表出. 现在考虑 $r < j \leqslant s$. 根据极大线性无关组的定义,$\boldsymbol{\alpha}_j$ 总是能由 $\mathcal{B}$ 线性表出. 因此 $\mathcal{A}$ 中的每个向量都能由 $\mathcal{B}$ 线性表出. 综上, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. □

从上面的定理可以很容易地得出下面的推论.

推论 1.9 向量组的任意两个极大线性无关组等价.

定理 1.10 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 如果 $r > s$, 那么向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关.

证明. 考虑 $\boldsymbol{\beta}_i$ 由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出的表达式:

$$\boldsymbol{\beta}_i = a_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + a_{is}\boldsymbol{\alpha}_s$$

其中 $1 \leqslant i \leqslant r$. 考虑 $k_1, \cdots, k_r$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + \cdots + k_r\boldsymbol{\beta}_r = \mathbf{0}$$

即

$$(k_1 a_{11} + \cdots + k_r a_{r1})\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + (k_1 a_{1s} + \cdots + k_r a_{rs})\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

为使得上式成立, 考虑齐次线性方程组

$$\begin{cases} k_1 a_{11} + k_2 a_{21} + \cdots + k_r a_{r1} = 0 \\ k_1 a_{12} + k_2 a_{22} + \cdots + k_r a_{r2} = 0 \\ \qquad\qquad\vdots \\ k_1 a_{1s} + k_2 a_{2s} + \cdots + k_r a_{rs} = 0 \end{cases}$$

这是一个有 r 个未知数和 s 个方程的齐次线性方程组, 由于 $r > s$, 所以它有非零解. 取一组非零解, 即可证得 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性相关. □

上述命题的逆否命题如下.

推论 1.11 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出. 如果向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性无关, 那么 $r \leqslant s$.

从上面的推论容易得到下面的定理.

定理 1.12 向量组的两个极大线性无关组含有向量的数目相等.

这就引出了秩的概念.

定义 1.13 秩 设 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 的一个极大线性无关组含 r 个向量, 则称 r 为该向量组的秩, 记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s)$.
此外, 规定由零向量构成的向量组的秩为 0.

有关向量组的秩有一些重要的性质和定理.

定理 1.14 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 当且仅当 $\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = s$.

证明. 易得. □

定理 1.15 设向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 则

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\} \leqslant \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$$

证明. 取它们的极大线性无关组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$. 由前面的推论知 $t \leqslant m$. 所以

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\} = t \leqslant m = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$$

□

定理 1.16 设向量组 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 满足 $\operatorname{rank} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{B}$, 且 $\mathcal{A}$ 可以由 $\mathcal{B}$ 线性表出, 则 $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$.

证明. 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 分别为 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 的极大线性无关组. 由线性表出的传递性可得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 可以由 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出. 任取 $1 \leqslant i \leqslant r$, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_i$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 线性表出. 根据前面的引理可知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r, \boldsymbol{\beta}_i$ 线性相关, 并且由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关, 所以 $\boldsymbol{\beta}_i$ 可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性表出. 因此 $\mathcal{B}$ 中的每个向量都能由 $\mathcal{A}$ 线性表出. 综上, $\mathcal{A} \simeq \mathcal{B}$. □