Mid-Term Exam Review

夜未央

2026 年 1 月 2 日

1 矩阵的运算

1.1 矩阵的乘法与矩阵的分块

矩阵的加法与数乘的定义是很自然的, 这里不再列出. 我们在本章主要着眼于矩阵的乘法.

定义 1.1 矩阵乘法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$.

实际上对于上述 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ 的 (i,j) 元是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行行向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列列向量 $\boldsymbol{\beta}_j$ 的积. 至少笔者认为如此记忆会带来计算上的好处. 实际上需要根据定义计算的场景几乎只有简单矩阵的运算, 这纯粹是笔头功夫, 在考试时计算这类问题时一定要注意验算.

定理 1.2 基本矩阵的乘法 设 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是 n 级基本矩阵. 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积矩阵是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行移到第 i 行, 其余行均为 $\mathbf{0}$; 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘 $\boldsymbol{A}$ 的乘积矩阵是将 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列移到第 j 列, 其余列均为 $\mathbf{0}$.

然后我们来考虑矩阵的分块. 前面矩阵的乘法的操作单元是矩阵的元素, 自然地可以想到把子矩阵作为最小的操作单元进行计算. 于是把矩阵乘法定义中的元素换成对应规模的子矩阵, 结果仍然成立. 这就是矩阵分块的想法.

常用的分块操作有两种.

1. 将矩阵运算拆分成矩阵与列向量的运算: 考虑 $s\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $n\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 将 $\boldsymbol{B}$ 分块写为列向量的形式:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{\beta}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A\beta}_1 & \cdots & \boldsymbol{A\beta}_n\end{bmatrix}$$

在后面考虑特征向量的相关问题时经常用到这样的拆分方法.

2. 将矩阵分成四块. 说起来简单, 实际应用则充满技巧, 我们将在之后进行介绍.

1.2 矩阵乘积的秩与行列式

定理 1.3 矩阵乘积的秩 对于 $s \times n$ 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $n \times m$ 级矩阵 $\boldsymbol{B}$, 总有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB} \leqslant \min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A}, \operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$$

定理 1.4

定理 1.5 Sylvester 秩不等式 对于 $s \times n$ 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $n \times m$ 级矩阵 $\boldsymbol{B}$, 总有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB} \geqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B} - n$$

定理 1.6 方阵乘积的行列式 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵, 则

$$\det\boldsymbol{AB} = \det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$$

2 矩阵的相似和相抵

3 二次型和矩阵的合同

定义 3.1 合同 对于 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得

$$\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 合同.

在大多数情况下, 我们主要考虑对称矩阵的合同关系.

4 线性空间

5 线性映射