

1 n 维向量空间

例题 1.1 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -9 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 11 \\ 17 \end{pmatrix}$$

1. 求向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 的一个极大线性无关组.
2. 判断 β 是否可以由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出. 如果可以, 给出所有的线性表出方式.

解. 考虑以 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为列向量的矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 6 \\ -5 & -3 & 1 & 2 \\ -9 & -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

对 A 做初等行变换可得

$$A \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 14 & 18 \\ 0 & 7 & -14 & -18 \\ 0 & -7 & 14 & 18 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & -7 & 14 & 18 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是上述向量组的一个极大线性无关组为 α_1, α_2 .

考虑方程

$$x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + x_3\alpha_3 + x_4\alpha_4 = \beta$$

对应线性方程组的增广矩阵

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{bmatrix}$$

对 B 做初等行变换可得

$$B \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 7 & -14 & -18 & -14 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - \frac{8}{7}x_4 \\ x_2 = -2 + 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

因此 β 可以被 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性表出, 且所有的线性表出方式为

$$\beta = -\left(1 + a + \frac{8}{7}b\right)\alpha_1 + \left(-2 + 2a + \frac{18}{7}b\right)\alpha_2 + a\alpha_3 + b\alpha_4, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

例题 1.2 设

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

求 x, y, z 使得 \mathbf{A} 的行向量组与 \mathbf{B} 的行向量组等价.

解. 对 \mathbf{A} 做初等行变换可得

$$\mathbf{A} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & -2 & -2 & z-x \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & 0 & 8 & 5x-2y+z \end{bmatrix}$$

例题 1.3 求 λ 的值使矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩最小.

解. 对 \mathbf{A} 做初等行变换可得

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 5\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 矩阵的秩为 2, 否则矩阵的秩为 3. 于是 $\lambda = 0$.

例题 1.4 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关. 令

$$\beta_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4, \quad \beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 4\alpha_3 + \alpha_4,$$

$$\beta_3 = 3\alpha_1 + 4\alpha_2 + 1\alpha_3 + 2\alpha_4, \quad \beta_4 = 4\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha_3 + 3\alpha_4.$$

判断向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 是否线性无关.

解. 假定向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性相关, 于是存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1\beta_1 + k_2\beta_2 + k_3\beta_3 + k_4\beta_4 = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{aligned} & (k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4)\alpha_1 + (2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4)\alpha_2 \\ & + (3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4)\alpha_3 + (4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4)\alpha_4 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

由于向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 于是

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ 4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4 = 0 \end{cases}$$

这线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

于是原方程仅有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 这与 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为 0 矛盾. 于是向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ 线性无关

例题 1.5 设向量组

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. 证明: α_1, α_2 线性无关.

2. 将 α_1, α_2 扩充为 $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组.

解. 考虑向量

$$\beta_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \beta_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以 β_1, β_2 为列向量的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

于是 β_1, β_2 线性无关, 因而它们的延伸组 α_1, α_2 线性无关.

注意到 $\alpha_3 = \alpha_2 - \alpha_1$. 将 α_4 加入 α_1, α_2 中, 考虑前三个分量有

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$$

于是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 线性无关. 将 α_5 加入 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 中, 有

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 4 & 7 & -11 \\ \frac{13}{2} & 3 & -1 & -7 \\ \frac{39}{2} & 7 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{13}{2} \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & -16 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 2 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 780 \neq 0$$

于是 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 线性无关. 根据前面的讨论, 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4, \alpha_5$ 即 $\alpha_1, \dots, \alpha_5$ 的一个极大线性无关组.

例题 1.6 证明: 对于向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ 总有

$$\text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r \} \leq \text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_s \} + \text{rank} \{ \beta_1, \dots, \beta_r \}$$

证明. 考虑向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 和 β_1, \dots, β_r 各自的一个极大线性无关组 $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ 和 β_1, \dots, β_q , 则有

$$\text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_s \} = p, \quad \text{rank} \{ \beta_1, \dots, \beta_r \} = q$$

依定义, 向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r$ 中的所有向量都能由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q$ 线性表出. 于是

$$\text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta_1, \dots, \beta_r \} \leq \text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \} \leq p + q$$

于是命题得证. □

例题 1.7 设

$$\beta_i = \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \alpha_j, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

证明:

$$\text{rank} \{ \alpha_1, \dots, \alpha_n \} = \text{rank} \{ \beta_1, \dots, \beta_n \}$$

证明. 记

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}, \quad \mathcal{B} = \{\beta_1, \dots, \beta_n\}$$

由 β_i 的定义可得向量组 \mathcal{B} 能由向量组 \mathcal{A} 线性表出. 注意到

$$\alpha_i = \sum_{j=1}^n \alpha_j - \sum_{1 \leq j \leq n, j \neq i} \alpha_j = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \beta_j - \beta_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

于是 \mathcal{A} 能由向量组 \mathcal{B} 线性表出. 于是 \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 等价, 从而

$$\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \mathcal{B}$$

命题得证. □

例题 1.8 设向量 β 可以由向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性表出, 但不能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出. 证明:

$$\text{rank } \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\} = \text{rank } \{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta\}$$

证明. 记

$$\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_s\}, \quad \mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, \beta\}$$

对于 \mathcal{B} 中的每个向量而言, 有

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + \dots + 0\alpha_{s-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i-1$$

并且由题意, β 可以由 \mathcal{A} 线性表出. 于是 \mathcal{B} 可以由 \mathcal{A} 线性表出.

另一方面, 对于 \mathcal{A} 中的每个向量而言, 同样有

$$\alpha_i = 0\alpha_1 + \dots + 1\alpha_i + \dots + 0\alpha_{s-1}, \quad i = 1, 2, \dots, i-1$$

考虑 β 由 \mathcal{A} 线性表出的式子:

$$\beta = k_1\alpha_1 + \dots + k_{s-1}\alpha_{s-1} + k_s\alpha_s$$

如果 $k_s = 0$, 那么意味着 β 能由 $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ 线性表出, 这与题意矛盾. 于是 $k_s \neq 0$, 从而

$$\alpha_s = -\frac{k_1}{k_s}\alpha_1 - \dots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\alpha_{s-1} - \frac{1}{k_s}\beta$$

于是 α_s 能由 \mathcal{B} 线性表出, 从而 \mathcal{A} 能由 \mathcal{B} 线性表出.

综上, \mathcal{A} 与 \mathcal{B} 等价, 从而

$$\text{rank } \mathcal{A} = \text{rank } \mathcal{B}$$

命题得证. □

例题 1.9 设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 分别为 $s \times n, l \times m, s \times m$ 矩阵.

1. 证明:

$$\text{rank} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} \geq \text{rank } \mathbf{A} + \text{rank } \mathbf{B}$$

2. 证明: 如果 $\text{rank } \mathbf{A} = s, \text{rank } \mathbf{B} = l$, 则以上不等式取到等号.

3. 证明: 如果 $\text{rank } \mathbf{A} = n, \text{rank } \mathbf{B} = m$, 则以上不等式取到等号.

证明. 考虑

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix}$$

的阶数最大的非零子式 M . 这一子式也可以写做如下形式:

$$M = \begin{vmatrix} A & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$$

其中 $A, B, C, 0$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 和 $\mathbf{0}$ 的子式. 根据分块矩阵的行列式的性质可知

$$M = AB$$

于是 A, B 均非零. □

例题 1.10 求以下 n 级方阵的秩:

$$\mathbf{A}_n(x) = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$$

解. 注意到

$$\det \mathbf{A}_n(x) = \begin{vmatrix} x + (n-1)a & a & \cdots & a \\ x + (n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x + (n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x + (n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x + (n-1)a] (x-a)^{n-1}$$

当 $x = a = 0$ 时 $\mathbf{A}_n(x)$ 由零向量组成, 于是 $\text{rank } \mathbf{A}_n(x) = 0$.

当 $a \neq 0$ 时, 分以下几种情况讨论.

当 $x = a$ 时, $\det \mathbf{A}_n(x) = 0$, 并且不难注意到 \mathbf{A} 的列向量均相同, 于是 $\text{rank } \mathbf{A} = 1$.

当 $x = (1-n)a$ 时, $\det \mathbf{A}_n(x) = 0$, 并且 $\mathbf{A}_n(x)$ 的 $(1, 1)$ 元的余子式

$$A_{11} = \det \mathbf{A}_{n-1}(x) = [x + (n-2)a] (x-a)^{n-1} = (-a)(-na)^{n-1} \neq 0$$

于是 $\text{rank } \mathbf{A}_n(x) = n - 1$.

当 $x \neq a, (1 - n)a$ 时, $\det \mathbf{A}_n(x) \neq 0$, 于是 $\text{rank } \mathbf{A}_n(x) = n$.

综上所述有

$$\text{rank } \mathbf{A}_n(x) = \begin{cases} 0, & x = a = 0 \\ 1, & x = a \neq 0 \\ n - 1, & x = (1 - n)a, a \neq 0 \\ n, & x \neq a, (1 - n)a \end{cases}$$

例题 1.11 设数域 \mathbb{K} 中一个 $s \times n$ 的矩阵 \mathbf{A} 的秩为 $r > 0$. 证明: \mathbf{A} 的任何 r 个线性无关的行与任何 r 个线性无关的列交出的 r 阶子式一定非零.