

北京大学数学科学学院 2025-26 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(13') 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为规范型, 写出其正惯性指数和负惯性指数.

解. 该二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

对 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ 的上半部分做成对行列变换, 下半部分做对应的列变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\quad} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

其正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0.

直接配方应当也可以.

2(18') 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 \mathbf{A} 的逆.

(2) 求 \mathbf{A} 的特征值.

(3) 判断 \mathbf{A} 是否可对角化.

解.

(1) 对 $[\mathbf{A} \quad \mathbf{I}]$ 做初等行变换可得

$$\left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{ccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \right]$$

于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(2) 注意到 $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4}\mathbf{A}$, 于是

$$\mathbf{A}^2 = 4\mathbf{I}$$

设 \mathbf{A} 的特征值为 λ , 对应的一个特征向量为 \mathbf{x} , 则有

$$\mathbf{0} = (\mathbf{A}^2 - 4\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{A}(\mathbf{Ax}) - 4\mathbf{Ix} = \mathbf{A}(\lambda\mathbf{x}) - 4\mathbf{x} = (\lambda^2 - 4)\mathbf{x}$$

由于 $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, 于是 $\lambda^2 - 4 = 0$, 于是 $\lambda = \pm 2$. 于是 \mathbf{A} 的特征值为 2 和 -2.

(3) 注意到 \mathbf{A} 是实对称矩阵, 而实对称矩阵都可以正交对角化, 所以 \mathbf{A} 可对角化.

3(20') 设线性空间 V 是由所有形如

$$\begin{bmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & d & -c \\ -c & -d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{bmatrix}$$

的 4×4 矩阵和矩阵的加法和数量乘法构成的线性空间. 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定义线性映射 $f: V \rightarrow V$ 为 $f(\mathbf{X}) = \mathbf{AX}$ 对所有 $\mathbf{X} \in V$ 成立.

(1) 写出 V 的一组基.

(2) 求出 f 在上述基下的矩阵.

解.

(1) V 的一组基为

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 经过计算有

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{E}_1$$

$$\mathbf{A}\mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_4, \quad \mathbf{A}\mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{E}_3$$

于是 f 在上述基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4(10') 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和 \mathbf{B} 分别是 m 级方阵和 p 级方阵. 定义 mp 级方阵

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

- (1) 证明: 如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 可逆, 那么 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 也可逆.
- (2) 证明: 如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是对称矩阵且正定, 那么 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 也是正定矩阵.

证明. 考虑 m 级方阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ 和 p 级方阵 \mathbf{D} . 于是

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}\mathbf{D} & \cdots & c_{1m}\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}\mathbf{D} & \cdots & c_{mm}\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

根据分块矩阵的乘法可知上述矩阵的第 (i, j) 个块为

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj} \mathbf{B} \mathbf{D}$$

于是

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \mathbf{D})$$

注意到

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) = (\mathbf{A} \mathbf{A}^{-1}) \otimes (\mathbf{B} \mathbf{B}^{-1}) = \mathbf{I}_m \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{mp}$$

于是 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 可逆, 其逆为 $\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}$.

(2) 由于 \mathbf{A}, \mathbf{B} 都是正定矩阵, 于是存在 m 级可逆矩阵 \mathbf{P} 和 p 级可逆矩阵 \mathbf{Q} 使得

$$\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P} = \mathbf{C} = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$$

$$\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q} = \mathbf{D} = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_p\}, \quad \mu_1, \dots, \mu_p > 0$$

由于 \mathbf{P}, \mathbf{Q} 均可逆, 于是根据上一问的结论, $\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}$ 也可逆. 于是

$$(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q})^t (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) = (\mathbf{P}^t \mathbf{A} \mathbf{P}) \otimes (\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$$

依照定义, $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ 是分块对角矩阵, 每个对角块 $\lambda_i \mathbf{D}$ 是对角元为 $\lambda_i \mu_j$ 的对角矩阵. 而 $\lambda_i \mu_j > 0$, 于是 $\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}$ 是对角元全为正数的对角矩阵. 从而 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 正定.

□

5(10') 设 n 级方阵 \mathbf{A} 满足

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

证明: 存在可逆的 n 级下三角矩阵 \mathbf{B} 使得 $\mathbf{B} \mathbf{A}$ 为上三角矩阵.

证明. 这是矩阵的 LU 分解.

对 \mathbf{A} 的阶数 n 做归纳. 当 $n = 1$ 时, 令 $\mathbf{B} = \mathbf{I}$ 即可使命题成立.

当 $n \geq 2$ 时, 对 \mathbf{A} 分块如下:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 \mathbf{A}_1 是 \mathbf{A} 的前 $n - 1$ 行和 $n - 1$ 列构成的子矩阵, 并且根据题设可知 \mathbf{A}_1 可逆. 依归纳假设, 存在可逆的 \mathbf{B}_1 使得 $\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1$ 为上三角矩阵. 考虑

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为了使右边的矩阵成为上三角矩阵, 考虑分块行列变换

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^t \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{v}^t & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 \mathbf{u} \\ \mathbf{0} & a_{nn} - \mathbf{v}^t \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{u} \end{bmatrix}$$

由于 $\mathbf{B}_1 \mathbf{A}_1$ 是上三角矩阵, 因此上述等式右端的矩阵即为上三角矩阵. 令

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{v}^t \mathbf{A}_1^{-1} \mathbf{B}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 1 \end{bmatrix}$$

\mathbf{B} 是两个可逆下三角矩阵的乘积, 因此也是可逆的下三角矩阵. 根据前面的证明, \mathbf{BA} 为上三角矩阵. 于是归纳可知命题成立. \square

6(10') 设 n 级实方阵 \mathbf{A} 的特征多项式可以写成一次多项式的乘积, 证明: \mathbf{A} 与某一下三角矩阵相似.

证明. 对 \mathbf{A} 的阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, 命题显然成立.

当 $n \geq 2$ 时, 考虑 \mathbf{A} 的一个特征值 λ 和对应的特征向量 α , 将 α 扩充为 \mathbb{K}^n 的一组基, 并据此构造可逆矩阵 \mathbf{P} 使得其第一列为 α . 于是有

$$\mathbf{AP} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^t & \mathbf{X} \end{bmatrix}$$

这里 \mathbf{X} 是 $n-1$ 级方阵. 由于 \mathbf{A} 与 $\begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^t & \mathbf{X} \end{bmatrix}$ 相似, 因此它们有相同的特征多项式, 所以

$$\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{A}) = \det \left(\mu \mathbf{I} - \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{x}^t & \mathbf{X} \end{bmatrix} \right) = \det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & \mathbf{0} \\ -\mathbf{x}^t & \mu \mathbf{I} - \mathbf{X} \end{bmatrix} = (\mu - \lambda) \det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{X})$$

左边的式子是一次项的乘积, 因而 $\det(\mu \mathbf{I} - \mathbf{X})$ 也是一次项的乘积. 根据归纳假设, 存在 $n-1$ 级可逆矩阵 \mathbf{Q} 和 $n-1$ 级下三角矩阵 \mathbf{U} 使得

$$\mathbf{X} = \mathbf{QUQ}^{-1}$$

于是

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{x}^t & \mathbf{U} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

令

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1}$$

则 \mathbf{RAR}^{-1} 为下三角矩阵. \square

7(10') 设 n 级半正定对称矩阵 \mathbf{A} 的秩为 2, 证明: 存在线性无关的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\mathbf{A} = [\boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\beta}] [\boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\beta}]^t$$

证明. 由于 \mathbf{A} 的秩为 2 且半正定, 因此存在 n 级可逆矩阵 \mathbf{P} 使得

$$\mathbf{A} = \mathbf{P} \operatorname{diag}\{\lambda, \mu, 0, \dots, 0\} \mathbf{P}^t, \quad \lambda, \mu \geq 0$$

设 \mathbf{P} 的前两列向量分别为 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$, 则有

$$\mathbf{A} = \lambda \mathbf{p}_1 \mathbf{p}_1^t + \mu \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_2^t$$

设 $\boldsymbol{\alpha} = \sqrt{\lambda} \mathbf{p}_1, \boldsymbol{\beta} = \sqrt{\mu} \mathbf{p}_2$, 则

$$\mathbf{A} = \boldsymbol{\alpha}^t \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}^t \boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\beta}] [\boldsymbol{\alpha} \ \boldsymbol{\beta}]^t$$

□

8(9') 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性映射. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$\mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}, \quad \mathcal{A}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}), \mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}), \dots, \mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.

证明. 考虑 k_0, \dots, k_n 使得

$$k_0 \boldsymbol{\alpha} + k_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}) + \dots + k_n \mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

在两边作用 n 次 \mathcal{A} 并将 $\mathcal{A}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$ 代入可得

$$k_0 \mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

而 $\mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}$, 于是 $k_0 = 0$.

在两边作用 $n-1$ 次 \mathcal{A} 可得

$$k_0 \mathcal{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) + k_1 \mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

由于 $k_0 = 0$ 且 $\mathcal{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}$, 于是 $k_1 = 0$.

依次在两边作用 i 次 \mathcal{A} 可证得 $k_{n-i} = 0$. 于是上式成立当且仅当 $k_1 = \dots = k_n = 0$, 从而题设向量组线性无关.

□