Mid-Term Exam Review

夜未央

2025 年 10 月 27 日

1　行列式

例题 1.1　设矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij}=\begin{cases} x, & |i-j|=2 \\ 0, & |i-j|\neq 2 \end{cases}$$

求 $\det \boldsymbol{A}$.

解.

例题 1.2　设矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 满足 $a_{ij}=(a_i+b_j)^{n-1}$, 求 $\det \boldsymbol{A}$.

解.　对 a_{ij} 变形可得

$$a_{ij}=(a_i+b_j)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} a_i^k b_j^{n-1-k}$$

例题 1.3　设矩阵 $\boldsymbol{A}_{n\times n}$ 的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij}=\begin{cases} 1+\cos\left(\theta_i-\varphi_j\right), & i=j \\ \cos\left(\theta_i-\varphi_j\right), & i\neq j \end{cases}$$

求 $\det \boldsymbol{A}$.

2　线性方程组的进一步理论

例题 2.1　设 $\mathbb{R}^n$ 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\lambda\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\lambda\boldsymbol{\alpha}_3,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s-\lambda\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关, 求实数 λ.

例题 2.2 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 并且

$$\boldsymbol{\beta}_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\boldsymbol{\alpha}_j, \quad i = 1, \cdots, t$$

证明: 向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_t$ 线性无关当且仅当 c_{ij} 拼成的矩阵 $\boldsymbol{C}$ 行满秩.

例题 2.3 已知线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 有解, 证明:$\boldsymbol{A}$ 的第 k 个列向量不能被其余列向量线性表出当且仅当该方程的任意解 $\boldsymbol{x}$ 的第 k 个分量相同.