北京大学数学科学学院 2024-25 学年第二学期线性代数 B 期中试题

1 求下列线性方程组的导出组的基础解系, 方程组的特解和通解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ -x_1-2x_2+2x_3+4x_4=5 \end{cases}$$

2 求方程组

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+(\lambda-3)x_2+2x_3=1 \\ 2x_2+(\lambda-4)x_3=-3 \end{cases}$$

的解集与 λ 的关系.

3 计算下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

4 现有以下一向量组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}5\\-1\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-3\\4\\1\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\-1\\7\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{bmatrix}6\\2\\1\\5\end{bmatrix}$$

(1) 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

(2) 求上述向量组的所有包含 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 的极大线性无关组.

5 现有行列式

$$A=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

写出 A 的一个子式, 使得它为 A 的最高阶非零子式, 并证明你的结论.

6 已知某 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 其 $(2,3)$ 元的代数余子式 $A_{23} \neq 0$. 求该线性方程组的解集.

7 设 $n > 100$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关? 证明你的结论.

8 现有矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & a & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & b & 6 \end{bmatrix}$$

求 a, b 使得 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$.

9 求以下行列式的值:

$$\begin{vmatrix} x + a_1 b_1 & a_1 b_2 & \cdots & a_1 b_n \\ a_2 b_1 & x_2 + a_2 b_2 & \cdots & a_2 b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n b_1 & a_n b_2 & \cdots & x_n + a_n b_n \end{vmatrix}$$