1 n 维向量空间

例题 1.1 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\\-9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-4\\6\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\11\\17\end{pmatrix}$$

1. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

2. 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 如果可以, 给出所有的线性表出方式.

解. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\3&-1&5&6\\-5&-3&1&2\\-9&-4&-1&0\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\0&-7&14&18\\0&7&-14&-18\\0&-7&14&18\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\0&-7&14&18\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是上述向量组的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

考虑方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

对应线性方程组的增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\3&-1&5&6&-1\\-5&-3&1&2&11\\-9&-4&-1&0&17\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\0&-7&14&18&14\\0&7&-14&-18&-14\\0&-7&14&18&14\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\0&-7&14&18&14\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - \dfrac{8}{7}x_4 \\ x_2 = -2 + 2x_3 + \dfrac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出, 且所有的线性表出方式为

$$\boldsymbol{\beta} = -\left(1 + a + \frac{8}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-2 + 2a + \frac{18}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + a\boldsymbol{\alpha}_3 + b\boldsymbol{\alpha}_4, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

例题 1.2 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

求 x, y, z 使得 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & -2 & -2 & z-x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & 0 & 8 & 5x-2y+z \end{bmatrix}$$

例题 1.3 求 λ 的值使矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩最小.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 5\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 矩阵的秩为 2, 否则矩阵的秩为 3. 于是 $\lambda = 0$.

例题 1.4 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 + 3\boldsymbol{\alpha}_3 + 4\boldsymbol{\alpha}_4, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + 4\boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + 4\boldsymbol{\alpha}_2 + 1\boldsymbol{\alpha}_3 + 2\boldsymbol{\alpha}_4, \quad \boldsymbol{\beta}_4 = 4\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 是否线性无关.

解. 假定向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关, 于是存在不全为 0 的 k_1, k_2, k_3, k_4 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1 + k_2\boldsymbol{\beta}_2 + k_3\boldsymbol{\beta}_3 + k_4\boldsymbol{\beta}_4 = \mathbf{0}$$

即

$$\begin{aligned} &(k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_1 + (2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_2 \\ &+ (3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_3 + (4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_4 = \mathbf{0} \end{aligned}$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 于是

$$\begin{cases} k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 0 \\ 2k_1 + 3k_2 + 4k_3 + k_4 = 0 \\ 3k_1 + 4k_2 + k_3 + 2k_4 = 0 \\ 4k_1 + k_2 + 2k_3 + 3k_4 = 0 \end{cases}$$

这线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & -2 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

于是原方程仅有零解, 即 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$, 这与 k_1, k_2, k_3, k_4 不全为 0 矛盾. 于是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3, \boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关

例题 1.5 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

1. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

2. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组.

解. 考虑向量

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$$

以 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 为列向量的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix}3&4\\-1&3\end{vmatrix}=13\neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 因而它们的延伸组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_1$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 加入 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 考虑前三个分量有

$$\begin{vmatrix}3&4&7\\-1&3&-1\\2&7&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4&7\\-1&3&-1\\0&0&-4\end{vmatrix}=-4\begin{vmatrix}3&4\\-1&3\end{vmatrix}=-52\neq 0$$

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 将 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 加入 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 中, 有

$$\begin{vmatrix}3&4&7&1\\-1&3&-1&2\\2&7&2&5\\-5&2&0&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13&4&7&-11\\\frac{13}{2}&3&-1&-7\\\frac{39}{2}&7&2&-16\\0&2&0&0\end{vmatrix}=2\cdot\frac{13}{2}\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix}2&7&-11\\1&-1&-7\\3&2&-16\end{vmatrix}=13\begin{vmatrix}2&7&-11\\1&-1&-7\\0&-4&2\end{vmatrix}=780\neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 根据前面的讨论, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4,\boldsymbol{\alpha}_5$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组.

例题 1.6 证明: 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 总有

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\leqslant\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}+\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}$$

证明. 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 各自的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$, 则有

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=p,\quad \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}=q$$

依定义, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r$ 中的所有向量都能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q$ 线性表出. 于是

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_r\}\leqslant\operatorname{rank}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_p,\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_q\right\}\leqslant p+q$$

于是命题得证. □

例题 1.7 设

$$\boldsymbol{\beta}_i=\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}\boldsymbol{\alpha}_j,\quad i=1,2,\cdots,n$$

证明:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\}=\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$$

证明. 记

$$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n\},\quad \mathcal{B}=\{\boldsymbol{\beta}_1,\cdots,\boldsymbol{\beta}_n\}$$

由 $\boldsymbol{\beta}_i$ 的定义可得向量组 $\mathcal{B}$ 能由向量组 $\mathcal{A}$ 线性表出. 注意到

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\alpha}_j-\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq i}\boldsymbol{\alpha}_j=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{\beta}_j-\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

于是 $\mathcal{A}$ 能由向量组 $\mathcal{B}$ 线性表出. 于是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 等价, 从而

$$\text{rank }\ \mathcal{A}=\text{rank }\ \mathcal{B}$$

命题得证. □

例题 1.8 设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 但不能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 证明:

$$\text{rank}\,\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\}=\text{rank}\,\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}\}$$

证明. 记

$$\mathcal{A}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s\},\quad \mathcal{B}=\{\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\boldsymbol{\beta}\}$$

对于 $\mathcal{B}$ 中的每个向量而言, 有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+1\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\quad i=1,2,\cdots,i-1$$

并且由题意, $\boldsymbol{\beta}$ 可以由 $\mathcal{A}$ 线性表出. 于是 $\mathcal{B}$ 可以由 $\mathcal{A}$ 线性表出.

另一方面, 对于 $\mathcal{A}$ 中的每个向量而言, 同样有

$$\boldsymbol{\alpha}_i=0\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+1\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+0\boldsymbol{\alpha}_{s-1},\quad i=1,2,\cdots,i-1$$

考虑 $\boldsymbol{\beta}$ 由 $\mathcal{A}$ 线性表出的式子:

$$\boldsymbol{\beta}=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

如果 $k_s=0$, 那么意味着 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出, 这与题意矛盾. 于是 $k_s\neq 0$, 从而

$$\boldsymbol{\alpha}_s=-\frac{k_1}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_1-\cdots-\frac{k_{s-1}}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1}-\frac{1}{k_s}\boldsymbol{\beta}$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 能由 $\mathcal{B}$ 线性表出, 从而 $\mathcal{A}$ 能由 $\mathcal{B}$ 线性表出.

综上, $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 等价, 从而

$$\text{rank }\ \mathcal{A}=\text{rank }\ \mathcal{B}$$

命题得证. □

例题 1.9 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 分别为 $s \times n, l \times m, s \times m$ 矩阵.

1. 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \geqslant \operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\ \boldsymbol{B}$$

2. 证明: 如果 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} = s, \operatorname{rank}\ \boldsymbol{B} = l$, 则以上不等式取到等号.

3. 证明: 如果 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} = n, \operatorname{rank}\ \boldsymbol{B} = m$, 则以上不等式取到等号.

证明. 考虑

$$\boldsymbol{M} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

的阶数最大的非零子式 M. 这一子式也可以写做如下形式:

$$M = \begin{vmatrix}A & C\\ 0 & B\end{vmatrix}$$

其中 $A, B, C, 0$ 分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{0}$ 的子式. 根据分块矩阵的行列式的性质可知

$$M = AB$$

于是 A, B 均非零. □

例题 1.10 求以下 n 级方阵的秩:

$$\boldsymbol{A}_n(x) = \begin{bmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{bmatrix}$$

解. 注意到

$$\det \boldsymbol{A}_n(x) = \begin{vmatrix}x+(n-1)a & a & \cdots & a\\ x+(n-1)a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x+(n-1)a & a & \cdots & x\end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\begin{vmatrix}1 & a & \cdots & a\\ 0 & x-a & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & x-a\end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}$$

当 $x = a = 0$ 时 $\boldsymbol{A}_n(x)$ 由零向量组成, 于是 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x) = 0$.

当 $a \neq 0$ 时, 分以下几种情况讨论.

当 $x = a$ 时, $\det \boldsymbol{A}_n(x) = 0$, 并且不难注意到 $\boldsymbol{A}$ 的列向量均相同, 于是 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} = 1$.

当 $x = (1-n)a$ 时, $\det \boldsymbol{A}_n(x) = 0$, 并且 $\boldsymbol{A}_n(x)$ 的 $(1,1)$ 元的余子式

$$A_{11} = \det \boldsymbol{A}_{n-1}(x) = [x+(n-2)a]\,(x-a)^{n-1} = (-a)(-na)^{n-1} \neq 0$$

于是 rank $\boldsymbol{A}_n(x)=n-1$.

当 $x\neq a,(1-n)a$ 时, $\det \boldsymbol{A}_n(x)\neq 0$, 于是 rank $\boldsymbol{A}_n(x)=n$.

综上所述有

$$\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x)=\begin{cases}0, & x=a=0\\ 1, & x=a\neq 0\\ n-1, & x=(1-n)a,a\neq 0\\ n, & x\neq a,(1-n)a\end{cases}$$

例题 1.11 设数域 $\mathbb{K}$ 中一个 $s\times n$ 的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $r>0$. 证明:$\boldsymbol{A}$ 的任何 r 个线性无关的行与任何 r 个线性无关的列交出的 r 阶子式一定非零.

证明. 先将这 r 行 r 列分别移动到 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列. 由于 rank $\boldsymbol{A}=r$, 因此前 r 行和前 r 列分别构成行向量组和列向量组的极大线性无关组.

于是第 r 行后的每一行都可以由前 r 行线性表出, 因而可以对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换使得第 r 行后的每一行的元素均变为 0.

由于初等行变换不改变列向量组的线性无关性, 因此此时第 r 列后的每一列仍可以由前 r 列线性表出. 因而可以对 $\boldsymbol{A}$ 继续初等列变换使得第 r 列后的每一列的元素均变为 0.

初等行列变换不改变矩阵的秩, 因此此时前 r 行与前 r 列构成的子式仍应当非零. 于是在行列变换前这子式也非零, 命题得证. □

例题 1.12 定义函数 $f_i:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{K}(i=1,\cdots,r)$. 证明: 不存在一组不全为 0 的数 $l_1,\cdots,l_r$ 使得

$$l_1f_1+\cdots+l_rf_r=0$$

当且仅当存在 $i_1,\cdots,i_r\in\mathbb{Z}^+$ 使得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}f_1(i_1) & \cdots & f_1(i_r)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_r(i_1) & \cdots & f_r(i_r)\end{bmatrix}=r$$

证明. 如果

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}f_1(i_1) & \cdots & f_1(i_r)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ f_r(i_1) & \cdots & f_r(i_r)\end{bmatrix}=r$$

于是其行向量线性无关. 考虑向量

□

例题 1.13 设 $U \subseteq \mathbb{K}^n$ 是非零子空间. 证明: U 中任何一组线性无关的向量组可以扩充为 U 的一个基.

例题 1.14 设 U, V 是 $\mathbb{K}^n$ 的两个子空间, 且 $U \subset V$. 证明: $\dim U \leqslant \dim V$, 并给出等号成立的充分必要条件.