北京大学数学科学学院 2021-22 学年第二学期线性代数 B 期中试题

1(20') 求 a 为何值时, 下述线性方程组有有解? 在有解时求出所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_3-x_4=8 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=2a \end{cases}$$

解. 对方程的增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix}$$

方程组有解要求增广矩阵不能出现 $0=d(d\neq 0)$ 类型的行, 于是原方程组有解当且仅当 $a=-2$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-2-x_3 \\ x_2=5+2x_3 \\ x_4=-10 \end{cases}$$

2(20') 求下述矩阵的行空间和列空间的维数和各自的一个基:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是列空间的维数为 3, 其一个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

行空间的维数为 3, 其一个基为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2 & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2 & -2 & 4 & -2 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

3(20') 给定 $\mathbb{K}^5$ 中的向量

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{bmatrix}$$

试求一个齐次线性方程组, 使得 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 构成该方程组的一个基础解系.

4(10') 设正整数 $n>1$, 已知 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{K}^n$ 是有 n 个未知量的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解, 并且 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}\in\mathbb{K}^n(1<r<n)$ 是该方程组的导出组的一个基础解系. 证明:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解都可以被向量组 $\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表出.

5(10') 设 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$ 满足 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的任意 r 个线性无关的行与任意 r 个线性无关的列交叉处元素形成的子式一定非零.

6(10') 设 n 为正整数,$\mathbb{R}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$a_ii>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\cdots,n$$

证明:

(1) $\det\boldsymbol{A}\neq 0$.

(2) 定义 $f(t)=\det(t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$, 则 $\forall t\in[0,+\infty)$ 有 $f(t)>0$.

7(10') 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=\frac{1}{a_i+b_j}$, 求 $\det \boldsymbol{A}$.