线性代数 B 第二次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 2.1

1(1) 求下面排列的逆序数, 并指出其奇偶性:

$$315462$$

解. 逆序数对有:

$$(3,1),(3,2),(5,4),(5,2),(4,2),(6,2)$$

故逆序数为 6, 是偶排列.

2(1) 求下面 n 元排列的逆序数:

$$(n-1)(n-2)\cdots 21n$$

解. 对于任意 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 比它小的所有 $i-1$ 个数都在它后面, 故逆序数为

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i-1)=\frac{n(n-1)}{2}-(n-1)=\frac{n^2-3n+2}{2}$$

5 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 的逆序数为 r, 求 n 元排列 $j_nj_1j_2\cdots j_{n-1}$ 的逆序数.

解. 考虑到 n 个数一共能形成

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

个数对. 又因为在 $j_1j_2\cdots j_{n-1}j_n$ 构成顺序的数对在 $j_nj_1j_2\cdots j_{n-1}$ 中构成逆序, 反之亦然, 于是

$$\tau\left(j_nj_1j_2\cdots j_{n-1}\right)=\frac{n(n+1)}{2}-r$$

7 利用二阶行列式判断下面的方程组是否有唯一解. 如果有唯一解, 求出这个解.

$$\begin{cases} 2x_1-3x_2=7 \\ 5x_1+4x_2=6 \end{cases}$$

解. 该方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23 \neq 0$$

于是该方程组有唯一解, 解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{23} = 2 \qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{23} = -1$$

习题 2.2

1(1) 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解. 依定义, 只有第一行取 a_{14} 时求和项才可能不为 0. 在此基础上, 只有第二行取 a_{23} 时求和项才可能不为 0. 依次类推可得只有取反对角线上的元素, 求和项才可能不为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} = a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$$

1(3) 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解. 同样依定义, 只有第 1 行取 b_1, 第 2 行取 $b_2, \cdots$, 第 n 行取 b_n 时求和项才可能不为 0. 于是

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(2\cdots n1)} \prod_{i=1}^{n} b_i = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^{n} b_i$$

3 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解. 依定义, 需在最后三行中的不同列取三个元素, 每行前列都是可能非零的元素, 后三列都是 0. 根据抽屉原理, 无论如何都将取到 0, 因此定义式中的每项都含有因子 0, 于是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4 n 阶行列式中反对角线上 n 个元素的乘积这一项一定带负号吗?

解. 不一定.

考虑排列 $n(n-1)\cdots 1$, 其逆序数为

$$\tau\left(n\cdots 1\right) = \frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0,1 \pmod 4$ 时,$\tau\left(n\cdots 1\right)$ 为偶数, 此时反对角线上的元素的乘积这一项带正号; 当 $n \equiv 2,3 \pmod 4$ 时,$\tau\left(n\cdots 1\right)$ 为奇数, 此时反对角线上的元素的乘积这一项带负号.

习题 2.3

1(2) 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

解. 有

$$\begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 203 & 2 \\ 3 & 298 & 3 \\ 5 & 399 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 200 & 2 \\ 3 & 300 & 3 \\ 5 & 400 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 9 \\ 0 & 14 & 14 \end{vmatrix} = \frac{7}{3}\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{14}{3}$$

1(4) 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解. 注意到每行元素之和均为 10, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= -20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 160$$

2(2) 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

解. 注意到每行元素之和均为 $\sum_{i=1}^{n} a_i - b$, 于是有

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1-b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix}
&= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i-b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i-b & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i-b & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2-b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n-b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) (-b)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i - b\right) (-b)^{n-1}
\end{aligned}
$$

3(1) 证明:

$$
\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0
$$

证明. 注意到每行元素之和均为 0, 于是

$$
\begin{vmatrix} a_1-b_1 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ a_2-b_2 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ a_3-b_3 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1-c_1 & c_1-a_1 \\ 0 & b_2-c_2 & c_2-a_2 \\ 0 & b_3-c_3 & c_3-a_3 \end{vmatrix} = 0
$$

□

4(1) 计算下列 n 阶行列式:

$$
\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}
$$

解. 从定义出发考虑. 如果在第一行选择 $a_i(i>1)$, 那么在第 i 行只能选择 b_i 才能使得求和项不为零, 这也意味着其它行只能选择 1. 这样, 这一求和项对应的排列为

$$i23\cdots(i-1)1(i+1)\cdots n$$

这一排列经过 $2i-1$ 次对换后变为 $12\cdots n$, 因此其为奇排列, 于是有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^{n} a_i b_i$$

习题 2.4

1(3) 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

解. 有

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

2 计算 $n(n\geqslant 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

解. 先提取公因式可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (n-1)! \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第 2 列到第 n 列加到第 1 列上可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将行列式按第一列展开, 只有 $(1,1)$ 元对应的余子式不为零, 且该余子式是一个上三角行列式. 于是可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)! \sum_{i=1}^{n} a_i$$

3 计算 $n(n \geqslant 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解. 该行列式经转置后即为范德蒙德行列式, 又因为转置不改变行列式的值, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

6 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

解. 记上述行列式为 D_n, 则 D_n 是一个三对角线行列式, 因此

$$D_n = (n+1)a^n$$

具体证明过程如下: 将 D_n 按第一列展开可得

$$D_n = 2aD_{n-1} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}$$

即

$$D_n - aD_{n-1} = a\left(D_{n-1} - aD_{n-2}\right)$$

又 $D_1 = 2a, D_2 = 3a^2$, 于是

$$D_n - aD_{n-1} = a^n$$

于是

$$\frac{D_n}{a^n} - \frac{D_{n-1}}{a^{n-1}} = 1$$

从而

$$D_n = (n+1)a^n$$

7 解方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 互不相等.

解. 左边的行列式是范德蒙德行列式, 因此上述方程等价于

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}(a_j-a_i)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}(a_i-x)=0$$

既然 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 互不相等, 那么有

$$\prod_{k=1}^{n-1}(a_i-x)=0$$

于是上述方程有 $n-1$ 个解, 分别为

$$x=a_k(k=1,2,\cdots,n-1)$$

习题 2.5

2 下述线性方程组有无解? 若有解, 有多少解 >

$$\begin{cases} a_1^2x_1+\cdots+a_n^2x_n=b_1 \\ a_1^3x_1+\cdots+a_n^3x_n=b_2 \\ \cdots \\ a_1^{n+1}x_1+\cdots+a_n^{n+1}x_n=b_n \end{cases}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 是两两不等的非零实数.

解. 该方程组有 n 个变量和 n 个方程. 考虑其系数行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1^2 & a_1^3 & \cdots & a_1^{n+1} \\ a_2^2 & a_2^3 & \cdots & a_2^{n+1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n^2 & a_n^3 & \cdots & a_n^{n+1} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n a_i^2\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{i=1}^n a_i^2\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\neq 0$$

于是原方程组有唯一解.

3 求 λ 使得下面的齐次线性方程组有非零解:

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1-3x_2-2x_3=0 \\ -x_1+(\lambda-8)x_2-2x_3=0 \\ 2x_1+14x_2+(\lambda+3)x_3=0 \end{cases}$$

解. 该齐次方程组有非零解当且仅当系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix}=0$$

而

$$\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 2 & 14 & \lambda+3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3 & -2\\ -1 & \lambda-8 & -2\\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 1 & -2\\ -1 & \lambda-4 & -2\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)\begin{vmatrix}\lambda-2 & -3\\ -1 & \lambda-8\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-10\lambda+13)$$

当且仅当 $\lambda=1$ 时系数行列式为 0, 此时原方程有非零解.

5 求 a,b 使得下面的线性方程组有唯一解:

$$\begin{cases}ax_1+x_2+x_3=2\\ x_1+bx_2+x_3=1\\ x_1+2bx_2+x_3=2\end{cases}$$

解. 该方程组有唯一解当且仅当系数行列式不为零, 即

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}\neq 0$$

而

$$\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 1 & 2b & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & b & 1\\ 0 & b & 0\end{vmatrix}=-b\begin{vmatrix}a & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=-b(a-1)$$

于是当且仅当 $b\neq 0$ 且 $a\neq 1$ 时原方程组有唯一解.

6 对于本节 **5** 中的方程, 求 a,b 使得方程组无解/有无穷多解.

解. 我们只需讨论 **5** 结论以外的情形. 当 $b=0$ 时, 方程组的增广矩阵可以变换如下:

$$\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 2\\ 1 & b & 1 & 1\\ 1 & 2b & 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}a & 1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

出现 $0=d$ 类型的行, 因此原方程无解.

当 $a=1$ 时, 对方程组的增广矩阵进行初等行变换可得:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果 $b=\frac{1}{2}$, 那么非零行数目为 2, 小于变量数, 原方程组有无穷多解. 否则继续行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-1}{b-1} \end{vmatrix}$$

无论 b 是否为 1, 都会出现 $0=d$ 的情形, 因此此时方程无解.

综上所述, 当 $b=0$ 或 $a=1, b\neq 12$ 时原方程组无解; 当 $b\neq 0$ 且 $a=1$ 时原方程组有无穷多解

习题 2.6

1 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 37 & 85 & 1 & 2 & 0 \\ 29 & 73 & 0 & 3 & 4 \\ 19 & 67 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

解. 将行列式按前两行展开, 于是有

$$原行列式 = (-1)^{1+2+1+2} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 11 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 154$$

3 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \\ b_{11} & \cdots & b_{1r} & c_{11} & \cdots & c_{1k} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} & c_{r1} & \cdots & c_{rk} \end{vmatrix}$$

解. 将行列式按前 k 行展开, 只有选取第 $r+1$ 列到第 k 列时各列不为 0, 对应的子式不为 0. 于是

$$\begin{aligned}
\text{原行列式} &= (-1)^{(1+\cdots+k)((r+1)+\cdots+(r+k))}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix} \\
&= (-1)^{kr}\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}\begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1r} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{r1} & \cdots & b_{rr} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

4(2) 设 $|\boldsymbol{A}|$ 是关于 $1, 2, \cdots, n$ 的范德蒙德行列式, 求

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 3, \cdots, n \end{pmatrix}$$

解. 注意到划去第 n 行和第 2 列后得到的行列式是一个 $n-1$ 阶的范德蒙德行列式, 因此

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1, 2, \cdots, n-1 \\ 1, 3, \cdots, n \end{pmatrix} &= (3-1)\cdots(n-1)\cdot(4-3)\cdots(n-3)\cdots(n-(n-1)) \\
&= (n-1)!\cdot(n-3)!\cdots 1! = (n-1)(n-2)!\cdots 1! \\
&= (n-1)\prod_{k=1}^{n-2} k!
\end{aligned}$$