

线性代数 B 第五次作业

蒋锦豪 2400011785

4.1: 3, 4 (1)(12), 5, 8, 10; 4.2: 2, 3, 4, 7; 4.3: 3, 5, 7; 4.4: 1, 3 (2), 4, 5, 7, 8, 9 (1), 10 (2).

习题 4.1

3 设 \mathbf{I} 是 n 阶单位矩阵, \mathbf{J} 是元素全为 1 的 n 阶矩阵, 设

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix}$$

试把 \mathbf{M} 表示成 $x\mathbf{I} + y\mathbf{J}$ 的形式.

解. 不难发现

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k - \lambda & & & \\ & k - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & k - \lambda \end{bmatrix} = (k - \lambda)\mathbf{I} + \lambda\mathbf{J}$$

于是可知

$$x = k - \lambda, \quad y = \lambda$$

4(1) 计算

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

解.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$$

4(12) 计算

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka_2 & 0 & 0 \\ kb_2 & 0 & 0 \\ kc_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

5 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

求 \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

解.

$$\begin{aligned} \mathbf{AB} &= \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix} \\ \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix} \\ \mathbf{AB} - \mathbf{BA} &= \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

8 如果 n 级方阵 \mathbf{B} 满足 $\mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, 求 $(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2)$.

解.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) = \mathbf{I}^2 + \mathbf{IB} + \mathbf{IB}^2 - \mathbf{BI} - \mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^3 = \mathbf{I} - \mathbf{B}^3 = \mathbf{I}$$

10 证明: 如果 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{I})$, 那么 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 当且仅当 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

证明. $\Rightarrow:$ 由 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 可知

$$\mathbf{0} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \frac{1}{4}(\mathbf{B} + \mathbf{I})(\mathbf{B} - \mathbf{I}) = \frac{1}{4}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{I})$$

于是 $\mathbf{B}^2 - \mathbf{I} = \mathbf{0}$, 即 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

$\Leftarrow:$ 由 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$ 可知

$$\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \frac{1}{4}(\mathbf{B}^2 + 2\mathbf{B} + \mathbf{I}) - \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{I}) = \frac{1}{4}(\mathbf{B}^2 - \mathbf{I}) = \mathbf{0}$$

于是 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$. □

习题 4.2

2 证明: 两个 n 级下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵, 并且乘积矩阵的主对角元等于因子矩阵相应主对角元的乘积.

证明. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ 均为 n 级下三角矩阵, 则有

$$\begin{aligned}\mathbf{AB} &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} \mathbf{E}_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k b_{kl} \mathbf{E}_{kl} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k a_{ij} b_{kl} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ij} b_{jl} \mathbf{E}_{il}\end{aligned}$$

于是总有 $l \leq j \leq i$, 因此 \mathbf{AB} 是下三角矩阵. 特别地, 当 $i = j = l$ 时有

$$(\mathbf{AB})_{ii} = a_{ij} b_{jl} = a_{ii} b_{ii}$$

于是主对角元等于因子矩阵对应主对角元的乘积. □

3 证明: 与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵.

证明. 设待求矩阵为 $\mathbf{A} = (a_{ij})$. 特别的, \mathbf{A} 与基本矩阵 \mathbf{E}_{ij} 可交换, 于是总有

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是总有 $a_{j1} = \cdots = a_{j(j-1)} = a_{j(j+1)} = \cdots = a_{jn} = 0$, $a_{1i} = \cdots = a_{(i-1)i} = a_{(i+1)i} = \cdots = a_{ni} = 0$, $a_{jj} = a_{ii}$ 对所有 $1 \leq i, j \leq n$ 成立.

满足上述要求的矩阵除主对角元外均为 0, 并且主对角元均相等. 于是 \mathbf{A} 是数量矩阵, 得证. □