1 矩阵的运算

1.1 矩阵的加法, 数乘和乘法

定义 1.1 矩阵的加法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$.

定义 1.2 矩阵的数乘 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 对于 $k\in K$, 令

$$\boldsymbol{A}=(k_i j)_{m\times n}$$

则称 $\boldsymbol{M}$ 是 k 与矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的数量积, 记作 $\boldsymbol{M}=k\boldsymbol{A}$.

定义 1.3 矩阵的乘法 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times m}$, 令

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

其中

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

则称 $\boldsymbol{C}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的积, 记作 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

矩阵乘法满足结合律, 但不满足交换律.

定义 1.4 恒等矩阵 对角线元素为 1, 其余元素均为 0 的 $n\times n$ 级矩阵称作 n 阶恒等矩阵, 记作 $\boldsymbol{I}_n$.

定义 1.5 可交换矩阵 如果 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是可交换的.

1.2 特殊矩阵

1.2.1 对角矩阵

定义 1.6 对角矩阵 除主对角线上的元素以外, 其它元素均为 0 的矩阵称作**对角矩阵**, 记作 $\mathrm{diag}\{a_1, \cdots, a_n\}$, 其中 $a_1, \cdots, a_n$ 为对角线上的元素.

定理 1.7 对角矩阵的乘法 用对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 相当于用 $\boldsymbol{D}$ 的主对角元乘 $\boldsymbol{A}$ 的各行, 即

$$\begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\gamma}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{\gamma}_1 \\ \vdots \\ d_n\boldsymbol{\gamma}_n \end{bmatrix}$$

用对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$, 相当于用 $\boldsymbol{D}$ 的主对角元乘 $\boldsymbol{A}$ 的各列, 即

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & d_n\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}$$

1.2.2 基本矩阵

定义 1.8 基本矩阵 只有一个元素是 1, 其它元素均为 0 的矩阵称作基本矩阵. (i, j) 元为 1 的基本矩阵记作 $\boldsymbol{E}_{ij}$.

定理 1.9 基本矩阵的乘法 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 左乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 行移到第 i 行, 其余行均为 $\mathbf{0}$; 用 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 右乘矩阵 $\boldsymbol{A}$ 就相当于把 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 列移到第 j 列, 其余列均为 $\mathbf{0}$.

1.2.3 上/下三角矩阵

定义 1.10 上/下三角矩阵 主对角线下/上方元素均为 0 的方阵称作**上/下三角矩阵**.

定理 1.11 上/下三角矩阵的乘法 上/下三角矩阵的乘积仍为上/下三角矩阵, 并且主对角线上的元素等于各矩阵主对角线上对应元素的乘积.

1.2.4 初等矩阵

定义 1.12 初等矩阵 由单位矩阵经过一次初等行 (列) 变换所得到的矩阵称作**初等矩阵**.

根据单位矩阵和基本矩阵的乘法即可推导出有关初等矩阵的乘法. 事实上, 初等矩阵与其对应的初等行 (列) 变换是等价的.

1.2.5 对称矩阵与斜对称矩阵

定义 1.13 对称矩阵 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**对称矩阵**.

定理 1.14 对称矩阵的乘法 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级对称矩阵, 则 $\boldsymbol{AB}$ 为对称矩阵当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可交换.

定义 1.15 斜对称矩阵 如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**斜对称矩阵**.

定理 1.16 斜对称矩阵的行列式 设 $\boldsymbol{A}$ 为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级斜对称矩阵, 则当 n 为奇数时,$\det(\boldsymbol{A})=0$.

证明. 因为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=-\boldsymbol{A}$, 于是

$$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\det(-\boldsymbol{A})=(-1)^n\det \boldsymbol{A}=-\det \boldsymbol{A}$$

于是

$$\det \boldsymbol{A}=0$$

□

1.3 矩阵乘积的秩与行列式

定理 1.17 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为数域 $\mathbb{K}$ 上的 $s\times n$ 矩阵和 $n\times m$ 矩阵, 则

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$$

证明. 设 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$, 则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{AB}&=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{11} & \cdots & b_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_{n1} & \cdots & b_{nm}\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}b_{11}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{n1}\boldsymbol{\alpha}_n & \cdots & b_{1m}\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_{nm}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{AB}$ 的列向量组能被 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表出, 从而

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

利用这一结论有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}})\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{B}^{\mathrm{t}}=\operatorname{rank}\boldsymbol{B}$$

因此

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant\min\{\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\}$$

命题得证. □

定理 1.18 方阵乘积的行列式 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 均为数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵, 则

$$\det\boldsymbol{AB}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$$

证明. 考虑矩阵

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}&0&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}&0&\cdots&0\\-1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&-1&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{bmatrix}$$

将第 i 行 $(1\leqslant i\leqslant n)$ 加上第 $n+j$ 行 $(1\leqslant j\leqslant n)$ 的 a_{ij} 倍可得

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&\cdots&0&\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{k1}&\cdots&\sum\limits_{k=1}^{n}a_{1k}b_{kn}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&0&\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{k1}&\cdots&\sum\limits_{k=1}^{n}a_{nk}b_{kn}\\-1&\cdots&0&b_{11}&\cdots&b_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&-1&b_{n1}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{AB}\\-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}$$

而

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{0}&\boldsymbol{AB}\\-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{B}\end{vmatrix}=\det\boldsymbol{AB}\det\boldsymbol{I}(-1)^{1+\cdots+(2n)+n}=(-1)^{2n^2+2n}\det\boldsymbol{AB}=\det\boldsymbol{AB}$$

于是

$$\det\boldsymbol{AB}=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$$

□

现在我们把上述结论推广到非方阵的情形.

定理 1.19 Binet-Cauchy 公式

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{s\times n}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{n\times s}$.

如果 $s>n$, 那么 $\det \boldsymbol{AB}=0$; 如果 $s\leqslant n$, 那么

$$\det \boldsymbol{AB}=\sum_{1\leqslant v_1<\cdots<v_s\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1,2,\cdots,s\\ v_1,v_2,\cdots,v_s\end{pmatrix}\boldsymbol{B}\begin{pmatrix}v_1,v_2,\cdots,v_s\\ 1,2,\cdots,s\end{pmatrix}$$

即 $\det \boldsymbol{AB}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的所有 s 阶子式与 $\boldsymbol{B}$ 的相应的 s 阶子式的乘积.

1.4 可逆矩阵

定义 1.20 可逆矩阵 对于 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$, 如果存在 n 级方阵 $\boldsymbol{B}$ 使得

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}_n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**可逆矩阵**, 并称 $\boldsymbol{B}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**逆矩阵**, 记作 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^{-1}$.

定义 1.21 伴随矩阵 对于 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$, 记

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix}A_{11}&\cdots&A_{1n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ A_{n1}&\cdots&A_{nn}\end{bmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的**伴随矩阵**, 其中 A_{ij} 为 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的代数余子式.

定理 1.22 可逆的条件 $\mathbb{K}$ 上的 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$, 并且此时

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{\boldsymbol{A}^*}{\det \boldsymbol{A}}$$

1.5 正交矩阵与欧几里得空间

定义 1.23 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 级方阵, 如果 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{I}_n$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**正交矩阵**.

定理 1.24 正交矩阵的性质 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $\mathbb{R}$ 上的 n 级正交矩阵, 则有以下性质:

1. $\det \boldsymbol{A} = \pm 1$.

2. $\boldsymbol{A}$ 可逆, 并且 $\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$.

定义 1.25 内积