北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(10') 设 V 是一个 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 V 到 V 的线性映射, 判断下列结论是否正确.

(1) $\mathcal{A}$ 是可逆线性映射当且仅当 $\mathcal{A}$ 的行列式不为 0.

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2=\mathcal{A}^2+2\mathcal{A}\mathcal{B}+\mathcal{B}^2$.

(3) 如果 $\operatorname{rank}(\mathcal{A})=\operatorname{rank}(\mathcal{B})$, 那么 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}^2)=\operatorname{rank}(\mathcal{B}^2)$.

(4) $\operatorname{rank}(\mathcal{A})+\operatorname{rank}(\mathcal{B})\geqslant\operatorname{rank}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$.

(5) $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$, 则 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$.

2(10') 用非退化线性替换将下面的六元二次型化为标准形:

$$f(x_1,\cdots,x_6)=x_1x_6+x_2x_5+x_3x_4$$

3(12') 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\cdots,\boldsymbol{\varepsilon}_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的标准正交基. 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_5,\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\varepsilon}_1-\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_4,\quad \boldsymbol{\alpha}_3=2\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_3$$

求与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交单位向量组.

4(16') 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&0&0\\1&0&-a\\0&1&a+1\end{bmatrix}$$

(1) 求 a 的取值范围使得 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵.

5(18') 令矩阵

$$\boldsymbol{A}(x,a,n)=\begin{bmatrix}x&a&\cdots&a\\a&x&\cdots&a\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a&a&\cdots&x\end{bmatrix}_{n\times n}$$

于是有如下等式成立:

$$\boldsymbol{A}(x,a,n)\boldsymbol{A}(y,b,n)=\boldsymbol{A}(z,c,n)$$

(1) 试用 x,y,a,b 表示出 z,c.

(2) 判断矩阵 $\boldsymbol{A}(0,1,4)$ 是否可逆, 若可逆则求出其逆矩阵.

6(24') 令 $V=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{R}):\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0\}$ 是迹为 0 的 2×2 实矩阵构成的线性空间. 取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, 定义映射 $\Phi_{\boldsymbol{P}}:V\to V$ 为 $\Phi_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(1) 证明:$\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ 构成 V 的一组基.

(2) 求 $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 在基 $\{\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21}\}$ 下的矩阵.

(3) 求线性映射 $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 的特征值及其在 V 中的一个特征向量.

(4) 对于一个可逆的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{U}$, 类似地定义线性映射 $\Phi_{\boldsymbol{U}}:V\to V$ 为 $\Phi_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$. 如果 $\boldsymbol{U}$ 有特征值 2 和 4, 求映射 $\Phi_{\boldsymbol{U}}$ 的特征值并说明理由.

7(10') 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^t\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 均为对角矩阵.