1 线性方程组

1.1 求解线性方程组

1.1.1 线性方程组的相关定义

定义 1.1 线性方程组 形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

的方程称作k**元线性方程组**,其中$a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nk}$为系数,$b_1, \cdots, b_n$为常数项.

定义 1.2 增广矩阵和系数矩阵 上述线性方程组的**增广矩阵**为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1.1.2 线性方程组的解法

定理 1.3 解线性方程组的操作 我们一般对线性方程组做如下变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上.
2. 互换两个方程的位置.
3. 用一个非零的数乘某一个方程.

上述操作被称为**线性方程组的初等变换**,对应的在矩阵中对行的操作被称为**初等行变换**.

定义 1.4 阶梯形矩阵和简化行阶梯形矩阵 **阶梯形矩阵**应当满足下述条件:

1. 元素全为0的行(即**零行**)在下方.
2. 元素不全为0的行(即**非零行**),从左起第一个不为0的元素(称**主元**)的列指标随行指标的增大而严格增大.

通俗而言,阶梯形矩阵的各行左起连续为0的元素数目是随行指标严格递增的.例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即为阶梯形矩阵.阶梯形矩阵和上三角矩阵的定义是有些类似的,但上三角矩阵一定是方阵,而阶梯形矩阵不一定.

一种特殊的阶梯形矩阵,即**简化行阶梯形矩阵**,应当满足如下条件:

1. 是阶梯形矩阵.
2. 每个非零行的主元均为1.
3. 每个主元所在列的其余元素均为0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即为简化行阶梯形矩阵.不难看出,简化行阶梯形矩阵直接对应于线性方程组的解.

于是,只要对线性方程组施以初等变换,即可得到解或者判断出解的存在性.

1.2 线性方程组的解的情况与判别准则

1.2.1 阶梯形矩阵的必然存在性

定理 1.5 阶梯形矩阵的必然存在性 任一矩阵都能经初等行变换为阶梯形矩阵.

证明. 我们现在通过数学归纳法证明上述命题.

零矩阵按定义是阶梯形矩阵.现在考虑非零矩阵,对行数m做归纳.

当$m = 1$时,该矩阵一定是阶梯形矩阵.

当$m > 1$时,假定$m-1$行矩阵可以经初等行变换为阶梯形矩阵.考虑m行的矩阵$\boldsymbol{A}$,其(i, j)元记为a_{ij}.

如果$\boldsymbol{A}$的第一列不全为0,那么可以通过交换使得$a_{11} \neq 0$,因此不妨直接假设$a_{11} \neq 0$.对于任意$2 \leqslant i \leqslant m$,将第一

行的$-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$倍加到第i行上.于是,变换后的矩阵$\boldsymbol{J}_1$的第一列除a_{11}外将变为0,即

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a_{22}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n}-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & a_{m2}-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{mn}-\dfrac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n}\end{pmatrix}$$

注意到这一矩阵除去第一行和第一列之外即为$m-1$行的矩阵,按照归纳假设,它可以通过初等行变换为阶梯形矩阵$\boldsymbol{K}_1$.于是,$\boldsymbol{A}$可以经初等行变换为下面的矩阵:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{K}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

依定义,上述右边的矩阵也是阶梯形矩阵.

如果$\boldsymbol{A}$的第一列全为0,那么就忽略首列直到出现不全为0的列为止,记此时的矩阵为$\boldsymbol{B}$.根据前面的讨论,$\boldsymbol{B}$作为m行矩阵也是可以变换为阶梯形矩阵的,记变换后的矩阵为$\boldsymbol{K}_2$.于是,$\boldsymbol{A}$可以经历如下变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \boldsymbol{B}\\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \boldsymbol{K}_2\\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

依定义,上述右边的矩阵也是阶梯形矩阵.

于是m行的矩阵$\boldsymbol{A}$可以通过初等行变换成阶梯形矩阵.

于是对上述结论归纳可得:所有矩阵都可以通过初等行变换成阶梯形矩阵. □

定理 1.6 简化阶梯形矩阵的必然存在性 任一矩阵都能经初等行变换为简化阶梯形矩阵.

证明. 这是简单的.在变换成阶梯形矩阵的基础上,自下而上的对矩阵消元即可. □

1.2.2 线性方程的解的情况及其判别准则

定理 1.7 线性方程的解的情况及其判别准则 系数和常数项为有理数(或实数,或复数)的n元线性方程组的解的情况有且仅有三种:**无解**,**有唯一解**,**有无穷多解**.

把n元线性方程组的增广矩阵经初等行变换为阶梯形矩阵,如果出现主元在最后一列(即出现$0=d$型的方程)则原方程无解;否则有解.

当有解时,如果阶梯形矩阵的非零行数目r等于未知量数目n,那么原方程组有唯一解;如果$r<n$,那么原方程组有无穷多解.

上述解线性方程组的办法称作**Gauss-Jordan算法**.

定义 1.8 齐次线性方程组 常数项全为0的线性方程组称作齐次线性方程组.

推论 1.9 齐次线性方程组有解的充要条件 n元齐次线性方程组有非零解,当且仅当它的系数矩阵经初等行变换成的阶梯形矩阵中,非零行的数目$r < n$.

证明. n元齐次线性方程组必然存在$(0, \cdots, 0)'$这一组解.因此,当且仅当方程组有无穷多解时才存在非零解. □

推论 1.10 齐次线性方程组有解的充分条件 当n元齐次线性方程组的方程数目s小于未知量的数目n,那么它有非零解.

证明. 注意到有$r \leqslant s < n$,故得证. □

1.3 数域

定义 1.11 数域 如果集合$K \subseteq \mathbb{Z}$满足

1. $0, 1 \in K$.
2. $\forall a, b \in K, a \pm b \in K$且$ab \in K$.
3. $\forall a, b \in K$且$b \neq 0, \dfrac{a}{b} \in K$.

那么称K是一个**数域**.

通俗而言,数域就是对四则运算封闭的集合.

例题 1.1 令

$$F = \left\{ \frac{a_0 + a_1\mathrm{e} + \cdots + a_n\mathrm{e}^n}{b_0 + b_1\mathrm{e} + \cdots + b_m\mathrm{e}^m} : n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in \mathbb{Z}, \text{其中} 0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m \right\}$$

试证明F是数域.

证明. 首先有

$$0 = \frac{0}{1} \in F$$

$$1 = \frac{1}{1} \in F$$

现在设

$$\alpha = \frac{a_0 + a_1\mathrm{e} + \cdots + a_n\mathrm{e}^n}{b_0 + b_1\mathrm{e} + \cdots + b_m\mathrm{e}^m}$$

$$\beta = \frac{c_0 + c_1\mathrm{e} + \cdots + c_p\mathrm{e}^p}{d_0 + d_1\mathrm{e} + \cdots + d_q\mathrm{e}^q}$$

于是

$$\begin{aligned}
\alpha \pm \beta &= \frac{(a_0 + \cdots + a_n \mathrm{e}^n)(d_0 + \cdots + d_q \mathrm{e}^q) \pm (b_0 + \cdots + b_m \mathrm{e}^m)(c_0 + \cdots + c_p \mathrm{e}^p)}{(b_0 + b_1 \mathrm{e} + \cdots + b_m \mathrm{e}^m)(d_0 + d_1 \mathrm{e} + \cdots + d_q \mathrm{e}^q)} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+q} \left(\mathrm{e}^i \sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,n\}} a_j d_{i-j} \right) \pm \sum\limits_{i=0}^{m+p} \left(\mathrm{e}^i \sum\limits_{j=\max\{0,i-p\}}^{\min\{i,m\}} b_j c_{i-j} \right)}{\sum\limits_{i=0}^{m+q} \left(\mathrm{e}^i \sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,m\}} b_j d_{i-j} \right)} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+q} A_i \mathrm{e}^i \pm \sum\limits_{i=0}^{m+p} B_i \mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q} C_i \mathrm{e}^i} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{\max\{n+q,m+p\}} (A_i \pm B_i) \mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q} C_i \mathrm{e}^i} \in F
\end{aligned}$$

当$\beta = 0$时$\alpha\beta = 0 \in F$.当$\beta \neq 0$时有

$$\frac{1}{\beta} = \frac{d_0 + d_1 \mathrm{e} + \cdots + d_q \mathrm{e}^q}{c_0 + c_1 \mathrm{e} + \cdots + c_p \mathrm{e}^p} \in F$$

因此只需讨论乘法即可.我们有

$$\begin{aligned}
\alpha\beta &= \frac{a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n}{b_0 + b_1 \mathrm{e} + \cdots + b_m \mathrm{e}^m} \cdot \frac{c_0 + c_1 \mathrm{e} + \cdots + c_p \mathrm{e}^p}{d_0 + d_1 \mathrm{e} + \cdots + d_q \mathrm{e}^q} \\
&= \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+p} \left(\mathrm{e}^i \sum\limits_{j=\max\{0,i-p\}}^{\min\{i,n\}} a_j c_{i-j} \right)}{\sum\limits_{i=0}^{m+q} \left(\mathrm{e}^i \sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,m\}} b_j d_{i-j} \right)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n+p} D_i \mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q} C_i \mathrm{e}^i} \in F
\end{aligned}$$

综上,F是数域. □