1 矩阵

例题 1.1 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m \times n$ 和 $n \times s$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - n$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做相抵标准形分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}$$

其中 $r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$. 于是

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{QB}$$

记 $\boldsymbol{QB} = \boldsymbol{H}$, 其前 r 行构成的子矩阵为 $\boldsymbol{H}_1$, 后 $n-r$ 行构成的子矩阵为 $\boldsymbol{H}_2$, 则有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{H}_2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{H}_1 \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 于是 □