1 线性方程组

2 行列式

例题 2.1 设 $n \geqslant 2$,n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是 1 或者 -1.

1. $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 一定是偶数.
2. 在 $n=3$ 的时候, 求 $\det \boldsymbol{A}$ 的最大值.
3. 当 $n \geqslant 3$ 时, 证明:

$$|\det \boldsymbol{A}| \leqslant (n-1)!(n-1)$$

证明.

1. 首先证明 $\det \boldsymbol{A}$ 为偶数.

   方法一: 考虑行列式的定义:

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j_1 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}$$

   由于 $a_{ij_i} = \pm 1$, 于是

$$(-1)^{\tau(j_1 \cdots j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i} = \pm 1$$

   又因为 $j_1 \cdots j_n$ 的排列数目共有 $n!$ 种, 当 $n \geqslant 2$ 时 $n!$ 为偶数. 于是 $\det \boldsymbol{A}$ 是偶数个 1 或 -1 相加的结果, 于是一定为偶数.

   方法二: 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 不难有

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   由于 $a_{ij} = \pm 1$, 于是 $a_{11}a_{22} = \pm 1, a_{12}a_{21} = \pm 1$. 无论何种情况, 都有 $\det \boldsymbol{A} = -2, 0, 2$, 为偶数.

   当 $n \geqslant 3$ 时, 将行列式按照第一行展开, 有

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i} A_1$$

   余子式 A_{1i} 也是由 $-1, 1$ 组成的行列式, 按照归纳假设,A_{1i} 均为偶数. 又因为 $a_{1i} = \pm 1$, 于是 $\det \boldsymbol{A}$ 为 n 个偶数相加减的结果, 当然也是偶数. 于是命题得证.

2. 当 $n=3$ 时,$\det \boldsymbol{A}$ 一共有 6 项, 并且它们只能取 ± 1. 因此,$\det \boldsymbol{A}$ 能取到的最大值为 6, 并且此时

$$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

$$a_{11}a_{23}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{13}a_{22}a_{31} = -1$$

   分别将各行的三项相乘可得

$$\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} a_{ij} = 1, \quad \prod_{1 \leqslant i,j \leqslant 3} a_{ij} = -1$$

这是矛盾的. 因此 $\det \boldsymbol{A}$ 无法取到 6, 又因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

于是 $\det \boldsymbol{A}$ 的最大值为 4.

3. 采用数学归纳法. 当 $n=3$ 时, 有

$$\det \boldsymbol{A} \leqslant 4 = (3-1)!(3-1)$$

将 $\det \boldsymbol{A}$ 按照第一行展开可得

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|\,|A_{1j}| \leqslant n(n-2)!(n-2) < (n-2)!\left(n^2-2n+1\right) = (n-1)!(n-1)$$

于是命题得证.

□

例题 2.2 计算以下行列式的值.

1.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解.

1. 将第一列减去第二列可得

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} b_1-b_2 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1-b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-b_2 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} \\ &= (b_1-b_2)\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}\end{aligned}$$

同样地, 将第 2 列减去第 3 列, 可以得到

$$LHS = (b_1-b_2)(b_2-b_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & 1 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

既然第一列与第二列相同, 因此原行列式的值为 0.

2. 将行列式每列拆成两列的和. 如果第一列保留 a_{i1}, 那么第二列只能保留 a_{i2}(否则两列相同, 行列式值为 0). 依次类推, 可得第 j 列只能保留 a_{ij}; 如果第一列保留 a_{in}, 那么最后一列只能保留 $a_{i(n-1)}$, 依次类推, 可得第 j 列只能保留 $a_{i(j-1)}$. 因此, 原行列式可拆成两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{2n} & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

将第二个行列式的第一列移到最后一列共需 $n-1$ 次对换, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix} = \left(1+(-1)^{n-1}\right)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. **方法一**: 将第 n 列减去第 $n-1$ 列可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & 0 \end{vmatrix}$$

按照最后一列展开, 仍然把第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列可得

$$LHS=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}2&3&4&\cdots&n-1&n\\3&4&5&\cdots&n&n\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n&n\end{vmatrix}=(-1)^{n+1}\begin{vmatrix}2&3&4&\cdots&n-1&1\\3&4&5&\cdots&n&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\n&n&n&\cdots&n&0\end{vmatrix}$$

重复上面的操作, 可得

$$LHS=(-1)^{(n+1)+n+\cdots+3}\left|n\right|=(-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}n$$

方法二: 将第 j 列减去第 $j-1$ 列, 于是原行列式的右下部分全部为 0. 按照行列式的定义有

$$LHS=(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$$

例题 2.3 设 $n\geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_{n-1}&x_n\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_{n-1}^2&x_n^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x_1^{n-2}&x_2^{n-2}&\cdots&x_{n-1}^{n-2}&x_n^{n-2}\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_{n-1}^n&x_n^n\end{vmatrix}$$

解. 考虑 $n+1$ 阶行列式

$$\tilde{D}_{n+1}(y)=\begin{vmatrix}1&1&\cdots&1&1\\x_1&x_2&\cdots&x_n&y\\x_1^2&x_2^2&\cdots&x_n^2&y^2\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\x_1^n&x_2^n&\cdots&x_n^n&y^n\end{vmatrix}$$

这行列式的 $(n,n+1)$ 元的余子式即为 D_n, 于是只需考虑 y^{n-1} 的系数即可. 又 $\tilde{D}_{n+1}$ 本身为范德蒙德行列式, 于是

$$\tilde{D}_{n+1}(y)=(y-x_1)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

于是

$$(-1)^{n+(n+1)}D_n=-(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

从而

$$D_n=\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right)$$

例题 2.4 求下面行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n \\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

将 $\tilde{D}_n$ 按第一行展开即可得 $\tilde{D}_n = D_n$. 现在将 $\tilde{D}_n$ 的第 j 行 $(1 < j \leqslant n+1)$ 减去第 1 行可得

$$\tilde{D}_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

右边两个行列式都可以拆解成范德蒙德行列式的形式, 于是有

$$\begin{aligned} D_n = \tilde{D}_n &= 2\prod_{k=1}^{n} x_k \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i) - \prod_{k=1}^{n} (x_k - 1) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i) \\ &= \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (x_j - x_i) \left(2\prod_{k=1}^{n} x_k - \prod_{k=1}^{n} (x_k - 1) \right) \end{aligned}$$

如果遇到一行 (列) 中只有一个元素与其它的不同, 就可以考虑将这个元素进行拆项.

例题 2.5 设 $n \geqslant 2, a_i \neq 0, i = 1, \cdots, n$. 计算以下行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

将 $\tilde{A}_n$ 按第一列展开可得 $\tilde{A}_n = A_n$. 现在将 $\tilde{A}_n$ 的第 i 行 $(1 < j \leqslant n+1)$ 减去第 1 行可得

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式, 于是

$$A_n = \tilde{A}_n = (-1)^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k}\right) \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

例题 2.6 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解. q