

线性代数 B 第二次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 2.1

1(1) 求下面排列的逆序数, 并指出其奇偶性:

$$315462$$

解. 逆序数对有:

$$(3, 1), (3, 2), (5, 4), (5, 2), (4, 2), (6, 2)$$

故逆序数为 6, 是偶排列.

2(1) 求下面 n 元排列的逆序数:

$$(n-1)(n-2)\cdots 21n$$

解. 对于任意 $1 \leq i \leq n-1$, 比它小的所有 $i-1$ 个数都在它后面, 故逆序数为

$$\sum_{i=1}^{n-1} (i-1) = \frac{n(n-1)}{2} - (n-1) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2}$$

5 如果 n 元排列 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 的逆序数为 r , 求 n 元排列 $j_n j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 的逆序数.

解. 考虑到 n 个数一共能形成

$$\frac{n(n-1)}{2}$$

个数对. 又因为在 $j_1 j_2 \cdots j_{n-1} j_n$ 构成顺序的数对在 $j_n j_1 j_2 \cdots j_{n-1}$ 中构成逆序, 反之亦然, 于是

$$\tau(j_n j_1 j_2 \cdots j_{n-1}) = \frac{n(n-1)}{2} - r$$

7 利用二阶行列式判断下面的方程组是否有唯一解. 如果有唯一解, 求出这个解.

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 5x_1 + 4x_2 = 6 \end{cases}$$

解. 该方程组的系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 + 15 = 23 \neq 0$$

于是该方程组有唯一解, 解为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 6 & 4 \end{vmatrix}}{23} = 2 \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 6 \end{vmatrix}}{23} = -1$$

习题 2.2

1(1) 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

解. 依定义, 只有第一行取 a_{14} 时求和项才可能不为 0. 在此基础上, 只有第二行取 a_{23} 时求和项才可能不为 0. 依次类推可得只有取反对角线上的元素, 求和项才可能不为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & a_{24} \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(4321)} a_{14} a_{23} a_{32} a_{41} = a_{14} a_{23} a_{32} a_{41}$$

1(3) 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

解. 同样依定义, 只有第 1 行取 b_1 , 第 2 行取 b_2, \dots , 第 n 行取 b_n 时求和项才可能不为 0. 于是

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(2 \cdots n 1)} \prod_{i=1}^n b_i = (-1)^{n-1} \prod_{i=1}^n b_i$$

3 按定义计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

解. 依定义, 需在最后三行中的不同列取三个元素, 每行前列都是可能非零的元素, 后三列都是 0. 根据抽屉原理, 无论如何都将取到 0, 因此定义式中的每项都含有因子 0, 于是

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

4 n 阶行列式中反对角线上 n 个元素的乘积这一项一定带负号吗?

解. 不一定.

考虑排列 $n(n-1)\cdots 1$, 其逆序数为

$$\tau(n\cdots 1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

当 $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$ 时, $\tau(n\cdots 1)$ 为偶数, 此时反对角线上的元素的乘积这一项带正号; 当 $n \equiv 2, 3 \pmod{4}$ 时, $\tau(n\cdots 1)$ 为奇数, 此时反对角线上的元素的乘积这一项带负号.

习题 2.3

1(2) 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix}$$

解. 有

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} -1 & 203 & \frac{1}{3} \\ 3 & 298 & \frac{1}{2} \\ 5 & 399 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 203 & 2 \\ 3 & 298 & 3 \\ 5 & 399 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 5 & -1 & 4 \end{vmatrix} + \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 200 & 2 \\ 3 & 300 & 3 \\ 5 & 400 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 9 & 14 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 9 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{4} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{25}{6}
 \end{aligned}$$

1(4) 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

解. 注意到每行元素之和均为 10, 于是

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 10 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix} \\
 &= -20 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -20 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} \\
 &= 160
 \end{aligned}$$

2(2) 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix}$$

解. 注意到每行元素之和均为 $\sum_{i=1}^n a_i - b$, 于是有

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} a_1 - b & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i - b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^n a_i - b & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \sum_{i=1}^n a_i - b & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 - b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n - b \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right) (-b)^{n-1} \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & -b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -b \end{vmatrix} \\
 &= \left(\sum_{i=1}^n a_i - b \right) (-b)^{n-1}
 \end{aligned}$$

3(1) 证明:

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

证明. 注意到每行元素之和均为 0, 于是

$$\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ a_2 - b_2 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ a_3 - b_3 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & b_1 - c_1 & c_1 - a_1 \\ 0 & b_2 - c_2 & c_2 - a_2 \\ 0 & b_3 - c_3 & c_3 - a_3 \end{vmatrix} = 0$$

□

4(1) 计算下列 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

解. 从定义出发考虑. 如果在第一行选择 $a_i (i > 1)$, 那么在第 i 行只能选择 b_i 才能使得求和项不为零, 这也意味着其它行只能选择 1. 这样, 这一求和项对应的排列为

$$i23\cdots(i-1)1(i+1)\cdots n$$

这一排列经过 $2i-1$ 次对换后变为 $12\cdots n$, 因此其为奇排列, 于是有

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ b_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ b_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_1 - \sum_{i=2}^n a_i b_i$$

习题 2.4

1(3) 计算下列行列式:

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix}$$

解. 有

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-1)(-1)^{3+3} \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10) \end{aligned}$$

2 计算 $n (n \geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

解. 先提取公因式可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (n-1)! \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第 2 列到第 n 列加到第 1 列上可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^n a_i & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将行列式按第一列展开, 只有 $(1,1)$ 元对应的余子式不为零, 且该余子式是一个上三角行列式. 于是可得

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} (n-1)! \sum_{i=1}^n a_i$$

3 计算 $n(n \geq 2)$ 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

解. 该行列式经转置后即范德蒙行列式, 又因为转置不改变行列式的值, 于是

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$$

6 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} 2a & a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} \quad (a \in \mathbb{R})$$

解. 记上述行列式为 D_n , 则 D_n 是一个三对角线行列式, 因此

$$D_n = (n+1)a^n$$

具体证明过程如下: 将 D_n 按第一列展开可得

$$D_n = 2aD_{n-1} + (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} a^2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2a & a^2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2a & a^2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 2a \end{vmatrix} = 2aD_{n-1} - a^2D_{n-2}$$

即

$$D_n - aD_{n-1} = a(D_{n-1} - aD_{n-2})$$

又 $D_1 = 2a, D_2 = 3a^2$, 于是

$$D_n - aD_{n-1} = a^n$$

于是

$$\frac{D_n}{a^n} - \frac{D_{n-1}}{a^{n-1}} = 1$$

从而

$$D_n = (n+1)a^n$$

7 解方程:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ x^2 & a_1^2 & \cdots & a_{n-1}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x^{n-1} & a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix} = 0$$

其中 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 互不相等.

解. 左边的行列式是范德蒙行列式, 因此上述方程等价于

$$\prod_{1 \leq i < j \leq n-1} (a_j - a_i) \cdot \prod_{k=1}^{n-1} (a_i - x) = 0$$

既然 a_1, a_2, \dots, a_{n-1} 互不相等, 那么有

$$\prod_{k=1}^{n-1} (a_i - x) = 0$$

于是上述方程有 $n-1$ 个解, 分别为

$$x = a_k (k = 1, 2, \dots, n-1)$$