1 二次型

例题 1.1 求实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$$

的秩和正惯性指数.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \frac{t}{2} & t\\ \frac{t}{2} & 1 & 2\\ t & 2 & 0\end{bmatrix}$$

它的顺序主子式分别为

$$\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{4},\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2} & t\\ \frac{t}{2} & 1 & 2\\ t & 2 & 0\end{vmatrix}=t^2-4$$

如果 $t^2=4$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不满秩. 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 $(1,1)$ 元的余子式非零, 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, 正惯性指数为 1.
如果 $t^2\neq 4$, 则矩阵满秩, 只需判断 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的正负. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\lambda^3-2\lambda^2+\left(-\frac{5t^2}{4}-3\right)\lambda+(4-t^2)$$

设它的三个实根为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 则有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2,\quad \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=-\frac{5t^2}{4}-3,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=t^2-4$$

前两个式子表明三个根中有正数也有负数. 如果 $t^2>4$, 则正惯性指数为 1; 如果 $t^2<4$, 则正惯性指数为 2.

例题 1.2 判断当参数 a 满足什么条件时, 实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

是正定的.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1) + (-\lambda + a - 1) - (\lambda - a + 1) \\
&= (\lambda - a + 1)(\lambda^2 - (2a + 1)\lambda + a^2 + a - 2) \\
&= (\lambda - a + 1)^2(\lambda - a - 2)
\end{aligned}
$$

上述二次型正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于零, 即

$$a - 1 > 0, \quad a + 2 > 0$$

从而 $a > 1$.

例题 1.3 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2ax_1x_3$$

可以做非退化线性变换成为

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$$

求 a 的值和相应的非退化线性变换.

解. 二次型 f, g 的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$