1 行列式

1.1 n元排列

1.1.1 n元排列的相关定义

定义 1.1 n元排列 n个不同正整数的一个全排列称为一个n元排列.

推论 1.2 n元排列的总数是$n!$.

证明. 小学二年级的同学就学过了. □

定义 1.3 顺序与逆序 在n元排列$a_1a_2\cdots a_n$中,任取$1\leqslant i<j\leqslant n$,如果$a_i<a_j$,称这一对数构成**顺序**;如果$a_i>a_j$,称这一对数构成**逆序**.

定义 1.4 逆序数 一个n元排列$a_1a_2\cdots a_n$中的逆序的总数称为**逆序数**,记作$\tau\left(a_1a_2\cdots a_n\right)$.

定义 1.5 奇排列与偶排列 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**,逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

定义 1.6 对换 保持n元排列$a_1a_2\cdots a_n$中的其余数不变,交换a_i与a_j的位置(其中$1\leqslant i<j\leqslant n$),这一操作称**对换**.

1.1.2 n元排列的性质

定理 1.7 对换操作的特性 对换改变n元排列的奇偶性.

证明. 我们假定对换操作是对n元排列$a_1\cdots a_n$中的a_i,a_j(不妨假定$1\leqslant i<j\leqslant n$)进行的.现在分类讨论.

如果a_i与a_j相邻,那么交换两者不会改变它们与前后的数的大小关系,因此只需考虑a_i与a_j即可.如果$a_i<a_j$,那么对换后逆序数增大1;如果$a_i>a_j$,那么对换后逆序数减小1,两种情形下逆序数的奇偶性都会发生改变.

如果a_i与a_j不相邻,那么假定它们之间有k个数.我们做如下操作:将a_i与其后面k个数依次对换,再将a_i与a_j对换,最后将a_j与前面n个数依次对换.容易看出,这一系列操作的结果就是将a_i与a_j对换而不改变其它数.这相当于进行了$2n+1$次相邻对换,每次都改变逆序数的奇偶性,因此最终仍改变排列的奇偶性.

综上,命题得证. □

定理 1.8 任一n元排列与排列$12\cdots n$可以通过一系列对换互变,并且作对换的次数与该n元排列的奇偶性相同.

证明. 这容易从前面的定理推得. □

例题 1.1 如果n元排列$j_1j_2\cdots j_n$的逆序数为r,求$j_nj_{n-1}\cdots j_1$的逆序数.

解. $j_1j_2\cdots j_n$中构成顺序的数对在$j_nj_{n-1}\cdots j_1$构成逆序,反之亦然.又因为n个数一共构成

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

对数,于是

$$\tau\left(j_nj_{n-1}\cdots j_1\right)=\frac{n(n+1)}{2}-r$$

例题 1.2 设$c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k}$是由$1,2,\cdots,n$形成的$n$元排列,试证明:

$$(-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{c_1+\cdots+c_k}\cdot(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

证明. 将$c_1\cdots c_k$经过s次对换成$a_1\cdots a_k$,其中$a_1<\cdots<a_k$.后者是偶排列,因此$c_1\cdots c_k$的奇偶性与s相同.

对于变换后的$a_1\cdots a_k$而言,考虑$1\leqslant i\leqslant k$,a_i后比它小的数共有a_i-i个.于是

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}&=(-1)^s(-1)^{\tau(a_1\cdots a_kd_1\cdots d_{n-k})}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)}(-1)^{(a_1-1)+\cdots+(a_k-k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{a_1+\cdots+a_k}\cdot(-1)^{-\frac{k(k+1)}{2}}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{c_1+\cdots+c_k}\cdot(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\end{aligned}$$

□

1.2 n阶行列式的定义

定义 1.9 n阶行列式 定义n阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{def}}\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

其中$\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$表示对所有$n$元排列求和.上式称为$n$元行列式的**完全展开式**.
考虑矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

前面定义的n阶行列式也称为方阵$\boldsymbol{A}$的行列式,记作$|\boldsymbol{A}|$或$\det\boldsymbol{A}$.

定理 1.10 上三角矩阵的行列式的值等于其主对角线上各元素的积.

证明. 考虑n阶上三角矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其行列式$\det \boldsymbol{A}$的展开式中的各项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

当$j_n\neq n$时,$a_{nj_n}=0$,从而求和项为0,仅当$j_n=n$时才有可能不为0.

同样地,仅当$j_{n-1}=n-1$时求和项才有可能不为0.

依次类推,当且仅当$j_i=i$对所有$1\leqslant i\leqslant n$成立时,求和项才有可能不为0.又因为$12\cdots n$是偶排列,于是这一项恰好就是$\boldsymbol{A}$的主对角线上各元素的乘积,即

$$\det \boldsymbol{A}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}=\prod_{i=1}^{n}a_{ii}$$

命题得证. □

定理 1.11 对于n阶方阵$\boldsymbol{A}$,给定行指标的排列$i_1\cdots i_n$,有

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{k_1\cdots k_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

或者给定列指标的排列$k_1\cdots k_n$,有

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{i_1\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

证明. 我们考虑n阶行列式的每一项

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

忽略指数项,这必将一一对应于命题中求和的某一项

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

现在只需要证明

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}$$

即可.考虑$a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$经s次对换成$a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$,那么$12\cdots n$经$s$次对换成$i_1\cdots i_n$,$j_1\cdots j_n$经$s$次对换成$k_1\cdots k_n$.于是

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}=(-1)^s$$

$$(-1)^{\tau(k_1\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}(-1)^s$$

上述两式左右分别相乘就有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}=(-1)^{2s}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$$

于是命题得证. □

由上述命题可以得到以下的推论:

推论 1.12 行列式中的行和列是等价的,也即对于n阶矩阵$\boldsymbol{A}$而言有

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}$$

1.3 行列式的性质

定理 1.13 对于方阵$\boldsymbol{A}$而言,$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$.

证明. 这由行列式中行和列等价这一推论即可得到. □

由此我们知道,关于行列式中行的性质对列同样成立.因此我们下面只讨论行的性质.

定理 1.14 行列式的行公因子可以提出,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \cdots & pa_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=p\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$LHS=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(pa_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=p\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=RHS$$

□

定理 1.15 行列式按行可加,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{ia} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= RHS \end{aligned}$$

□

定理 1.16 两行互换,行列式反号,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} RHS &= -\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n} (-1)\cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n} \cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= LHS \end{aligned}$$

□

定理 1.17 两行相同,行列式的值为0,即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 记行列式对应的矩阵为$\boldsymbol{A}$,互换相同的两行后对应的矩阵仍为$\boldsymbol{A}$.根据前面的定理可得

$$\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$$

于是

$$\det \boldsymbol{A} = 0$$

□

定理 1.18 两行成倍数,行列式的值为0.

证明. 根据前面的定理易证. □

定理 1.19 将行列式的一行的倍数加到另一行上,行列式的值不变.

证明. 根据前面的定理易证. □

综上所述,我们可以得到下面的命题.

定理 1.20 如果方阵$\boldsymbol{A}$经初等行变换可以得到方阵$\boldsymbol{B}$,那么存在$l \in \mathbb{F}$使得$\det \boldsymbol{B} = l \det \boldsymbol{A}$.

利用前面的定理,可以将行列式按行拆分成易于计算的行列式,也可以将行列式变换为上三角行列式进行计算.

例题 1.3 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

解. 我们有

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 100 & 100 & 100 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 100 & 100 & 100 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = -500$$

例题 1.4 计算n阶行列式:

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

解. 这个行列式的特点在于每一行的元素之和均为$(n-1)\lambda + k$.为此,我们可以将第2到第n列的元素都加到第1列上,然后提取公因子,接着继续化简:

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1)\lambda + k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ (n-1)\lambda + k & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)\lambda + k & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)\lambda + k] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & k-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-\lambda \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k]\,(k-\lambda)^{n-1}$$

1.4 行列式按行展开

定义 1.21 余子式和代数余子式 在n级方阵$\boldsymbol{A}$中删去元素(i,j)所在的行和列,剩下的元素按原来次序形成的$n-1$级方阵的行列式称为$\boldsymbol{A}$的(i,j)元的余子式,记作M_{ij}.令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称A_{ij}是$\boldsymbol{A}$的(i,j)元的代数余子式.

定理 1.22 Laplace定理 n级方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det\boldsymbol{A}$等于其第i行元素与自身代数余子式的乘积之和,即对任意$1\leqslant i\leqslant n$有

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

证明. 我们可以把$\det\boldsymbol{A}$的完全展开式的$n!$项按照第i行的n个元素分组,即

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=\sum_{k_1\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots\cdots k_n)}\prod_{p=1}^{n}a_{pk_p}\\&=\sum_{j=1}^{n}\sum_{k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}jk_{i+1}\cdots k_n)}\prod_{p=1}^{n}a_{pk_p}\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k_1\cdots j\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots j\cdots k_n)}\prod_{p=1,p\neq i}^{n}a_{pk_p}\right)\end{aligned}$$

现在考虑把排列$k_1\cdots j\cdots k_n$.将j移动到第一位变成$jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n$需要经历$i-1$次对换(因为$j$在第$i$位),于是

$$(-1)^{\tau(jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+i-1}=(-1)^{\tau(k_1\cdots j\cdots k_n)}$$

而$jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n$与$k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n$的逆序数之差就是比$j$小的数的数目,即$j-1$,因此

$$(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+j-1}=(-1)^{\tau(jk_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+j-1}$$

于是就有

$$(-1)^{\tau(k_1\cdots j\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+i+j-2}=(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+i+j}$$

由于j的位置是固定的,因此我们在前述求和项中可以只考虑排列$k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n$.于是,前面的式子可以改写为

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\left(\sum_{k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n}(-1)^{\tau(k_1\cdots k_{i-1}k_{i+1}\cdots k_n)+i+j}\prod_{p=1,p\neq i}a_{pk_p}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(-1)^{i+j}M_{ij}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{ij}\end{aligned}$$

这就证明了Laplace定理. □

定理 1.23 Laplace定理按列展开的形式 n级方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det\boldsymbol{A}$等于其第j列元素与自身代数余子式的乘积之和,即对任意$1\leqslant j\leqslant n$有

$$\det\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ij}$$

证明. 考虑$\boldsymbol{A}$的转置$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$,我们已经知道$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$,那么对$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$使用Laplace定理即可证得命题. □

定理 1.24 n级方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det\boldsymbol{A}$的第i行与第k行$(k\neq i)$的对应元素的代数余子式的乘积之和为0,即

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$$

证明. 为了便于使用Laplace定理,我们构造矩阵$\boldsymbol{B}$使得$\boldsymbol{B}$的第k行与$\boldsymbol{A}$的第i行一致,其余元素和对应的$\boldsymbol{A}$的元素相同.这样,$\boldsymbol{B}$的第k行各元素的代数余子式与$\boldsymbol{A}$相同.
由于$\boldsymbol{B}$有相同的两行,因此

$$\det\boldsymbol{B}=0$$

对$\boldsymbol{B}$的第k行应用Laplace定理,有

$$\sum_{j=1}^{n}b_{kj}B_{kj}=\det\boldsymbol{B}=0$$

又因为$b_{kj}=b_{ij}=a_{ij}$,$B_{kj}=A_{kj}$,于是

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}A_{kj}=0$$

□

定理 1.25 n级方阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det\boldsymbol{A}$的第j列与第k列$(k\neq j)$的对应元素的代数余子式的乘积之和为0,即

$$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}A_{ik}=0$$

证明. 这由Laplace定理的列展开形式就可以得到. □

例题 1.5 计算n阶行列式:

$$\begin{vmatrix}a&b&0&\cdots&0&0&0\\0&a&b&\cdots&0&0&0\\0&0&a&\cdots&0&0&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&\cdots&0&a&b\\b&0&0&\cdots&0&0&a\end{vmatrix}$$

解. 注意到除去第一行第一列后的矩阵为上三角矩阵,除去最后一行第一列后的矩阵为下三角矩阵,因此我们

先按第一列展开原行列式:

$$
\begin{vmatrix}
a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\
b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a
\end{vmatrix}
= a \begin{vmatrix}
a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a
\end{vmatrix}
+ b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix}
b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & a & b
\end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&= aa^{n-1} + b(-1)^{n+1}b^{n-1} \\
&= a^n + (-1)^{n+1}b^n
\end{aligned}
$$

定义 1.26 Vandermonde行列式 形如

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix}
$$

的行列式称作Vandermonde行列式.

定理 1.27 Vandermonde行列式的值为

$$
\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)
$$

证明. 我们用归纳法证明上述命题.对于$n=2$的情形,有

$$
\begin{vmatrix}
1 & 1 \\
a_1 & a_2
\end{vmatrix}
= a_2 - a_1
$$

现在考虑$n\geqslant 3$的情形.把第i行的$-a_i$倍加到第$i+1$行上,就有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2^2-a_1a_2 & \cdots & a_n^2-a_1a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2-a_1 & \cdots & a_n-a_1 \\ 0 & a_2\left(a_2-a_1\right) & \cdots & a_n\left(a_n-a_1\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2}\left(a_2-a_1\right) & \cdots & a_n^{n-2}\left(a_n-a_1\right) \end{vmatrix}$$

$$= (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} = (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}$$

根据归纳假设,后面的行列式即$n-1$阶的Vandermonde行列式,于是

$$LHS = (a_2-a_1)\cdots(a_n-a_1)\prod_{2\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

于是归纳可得原命题成立. □

1.5 Cramer法则

定理 1.28 $\mathbb{F}$上有n个方程的n元线性方程组有唯一解,当且仅当其系数行列式(即系数矩阵$\boldsymbol{A}$的行列式$\det\boldsymbol{A}$)不等于0.

证明. 对于一个有n个方程的n元线性方程组,其无解当且仅当增广矩阵中出现主元在最后一列的情形.这样,其系数矩阵经初等行变换时出现全零行,这意味着系数行列式为零(初等行变换不会使得非零的行列式变为零).

现在考虑有解时的情形.我们已经知道,如果增广矩阵的非零行数目r小于未知量数目n,那么方程组有无穷多解.此时,系数矩阵经初等行变换时也会出现零行,从而系数行列式为零.

当且仅当增广矩阵的非零行数目r等于未知量数目n时,方程式有唯一解.由于方程式有n个主元,并且要求系数

矩阵变换成的阶梯形矩阵中各主元不再同一列上,因此其必定形如

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

这是一个上三角矩阵,并且各$c_{ii} \neq 0$,于是系数行列式不为零.
这样就证明了前述定理. □

把上述定理应用到有n个方程的n元齐次线性方程组上可以得到下面的推论.

推论 1.29 $\mathbb{F}$上有n个方程的n元齐次方程线性组只有零解,当且仅当其系数行列式不等于0,从而有非零解当且仅当其系数行列式等于0.

定理 1.30 ***n*个方程的*n*元线性方程组的解** 将n个方程的n元线性方程组的系数矩阵$\boldsymbol{A}$的第j列换成常数项对应的列后形成的矩阵记作$\boldsymbol{B}_j$,即

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

当该方程组的系数行列式$\det \boldsymbol{A} \neq 0$时,其唯一解为

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}}, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$$

证明. 我们只需验证上述解满足每一个方程即可.为此,考虑第i行方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$$

将解代入可得

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \det \boldsymbol{B}_j \\ &= \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj} \right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right) \end{aligned}$$

根据前面的推论,当且仅当$k = i$时

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = \det \boldsymbol{A}$$

否则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

于是

$$LHS = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} \right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} b_i \det \boldsymbol{A} = b_i = RHS$$

□

定理 1.31 Cramer法则 $\mathbb{F}$上有n个方程的n元线性方程组有唯一解,则其系数行列式不等于0,并且解为

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}}, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$$

1.6 行列式按k行(列展开)

定义 1.32 k阶子式 n级方阵$\boldsymbol{A}$中任意取定k行k列$(1 \leqslant k < n)$,位于这些行和列交叉处的元素按原来的顺序排成的k级方阵称为$\boldsymbol{A}$的一个k**阶子式**.

定义 1.33 k阶子式的余子式和代数余子式 取定n级方阵$\boldsymbol{A}$的第$i_1, \cdots, i_k$行和第$j_1, \cdots, j_k$列形成的k阶子式记作

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

划去这些行和列形成的$n-k$阶子式称作上述方阵的**余子式**.余子式前乘以系数

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}$$

称作上述方阵的**代数余子式**.

令

$$\left\{i'_1, \cdots, i'_{n-k}\right\} = \{1, \cdots, n\} \setminus \{i_1, \cdots, i_k\}$$

$$\left\{j'_1, \cdots, j'_{n-k}\right\} = \{1, \cdots, n\} \setminus \{j_1, \cdots, j_k\}$$

并且$i'_1 < \cdots < i'_{n-k}$,$j'_1 < \cdots < j'_{n-k}$,那么前述k阶子式的代数余子式可以记作

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

定理 1.34 Laplace定理按k行展开的版本 在n阶方阵$\boldsymbol{A}$中取定$i_1, \cdots, i_k$行,这k行形成的所有k阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于$\det \boldsymbol{A}$,即

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{1 \leqslant j_1 \leqslant \cdots \leqslant j_k \leqslant n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix} (-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

证明. 给定行指标的排列$i_1\cdots i_k i_1'\cdots i_{n-k}'$,则$\det \boldsymbol{A}$可以展写如下

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k}}(-1)^{\tau\left(i_1\cdots i_k i_1'\cdots i_{n-k}'\right)+\tau(\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k})}a_{i_1\alpha_1}\cdots a_{i_k\alpha_k}a_{i_1'\beta_1}\cdots a_{i_{n-k}'\beta_{n-k}}$$

现在将上述$n!$项按照下面的方式分成C_n^k组:任意取定$j_1,\cdots,j_k$列,将n的全排列$\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k}$对应于

$$j_1\cdots j_k j_1'\cdots j_{n-k}'$$

在研究排列的性质时,我们已经知道

$$(-1)^{\tau\left(i_1\cdots i_k i_1'\cdots i_{n-k}\right)}=(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau\left(i_1'\cdots i_{n-k}'\right)}\cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(-1)^{\tau\left(j_1\cdots j_k j_1'\cdots j_{n-k}\right)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k)+\tau\left(j_1'\cdots j_{n-k}'\right)}\cdot(-1)^{j_1+\cdots+j_k}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

于是

$$\begin{aligned}\det \boldsymbol{A}&=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}\begin{array}{l}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau(j_1\cdots j_k)}\cdot(-1)^{\tau\left(i_1'\cdots i_{n-k}'\right)+\tau\left(j_1'\cdots j_{n-k}'\right)}\cdot(-1)^{n(n+1)}\\ \cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\prod\limits_{p=1}^{k}a_{i_pj_p}\prod\limits_{q=1}^{n-k}a_{i_q'j_q'}\end{array}\\&=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}\begin{array}{l}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau(j_1\cdots j_k)}\prod\limits_{p=1}^{k}a_{i_pj_p}\\ \cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\\ \cdot(-1)^{\tau\left(i_1'\cdots i_{n-k}'\right)+\tau\left(j_1'\cdots j_{n-k}'\right)}\prod\limits_{q=1}^{n-k}a_{i_q'j_q'}\end{array}\\&=\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1,\cdots,i_k\\ j_1,\cdots,j_k\end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}i_1',\cdots,i_{n-k}'\\ j_1',\cdots,j_{n-k}'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

于是命题得证.显然,当$k=1$时,就是我们前面所述的Laplace定理. □

推论 1.35 我们有

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}=\det \boldsymbol{A}\cdot\det \boldsymbol{B}$$

其中$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$分别为k级和$n-k$级方阵,$\boldsymbol{C}$为$(n-k)\times k$级的任意矩阵,$\boldsymbol{0}$为零矩阵.

证明. 将上述矩阵按前k行展开,仅有$\boldsymbol{A}$这一子式对应的求和项中不包含0,它对应的余子式恰为$\det \boldsymbol{B}$,并且指数项为$k(k+1)$,因此上述结论成立. □