1 行列式

例题 1.1 设 $n \geqslant 2$,n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素都是 1 或者 -1.

1. $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 一定是偶数.
2. 在 $n=3$ 的时候, 求 $\det \boldsymbol{A}$ 的最大值.
3. 当 $n \geqslant 3$ 时, 证明:

$$|\det \boldsymbol{A}| \leqslant (n-1)!(n-1)$$

证明.

1. 首先证明 $\det \boldsymbol{A}$ 为偶数.

   方法一: 考虑行列式的定义:

   $$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i}$$

   由于 $a_{ij_i} = \pm 1$, 于是

   $$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} \prod_{i=1}^{n} a_{ij_i} = \pm 1$$

   又因为 $j_1 \cdots j_n$ 的排列数目共有 $n!$ 种, 当 $n \geqslant 2$ 时 $n!$ 为偶数. 于是 $\det \boldsymbol{A}$ 是偶数个 1 或 -1 相加的结果, 于是一定为偶数.

   方法二: 采用数学归纳法. 当 $n=2$ 时, 不难有

   $$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

   由于 $a_{ij} = \pm 1$, 于是 $a_{11}a_{22} = \pm 1, a_{12}a_{21} = \pm 1$. 无论何种情况, 都有 $\det \boldsymbol{A} = -2, 0, 2$, 为偶数.

   当 $n \geqslant 3$ 时, 将行列式按照第一行展开, 有

   $$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{1i}A_1$$

   余子式 A_{1i} 也是由 $-1, 1$ 组成的行列式, 按照归纳假设,A_{1i} 均为偶数. 又因为 $a_{1i} = \pm 1$, 于是 $\det \boldsymbol{A}$ 为 n 个偶数相加减的结果, 当然也是偶数. 于是命题得证.

2. 当 $n=3$ 时,$\det \boldsymbol{A}$ 一共有 6 项, 并且它们只能取 ± 1. 因此,$\det \boldsymbol{A}$ 能取到的最大值为 6, 并且此时

   $$a_{11}a_{22}a_{33} = a_{12}a_{23}a_{31} = a_{13}a_{21}a_{32} = 1$$

   $$a_{11}a_{23}a_{32} = a_{12}a_{21}a_{33} = a_{13}a_{22}a_{31} = -1$$

   分别将各行的三项相乘可得

   $$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij} = 1, \quad \prod_{1\leqslant i,j\leqslant 3} a_{ij} = -1$$

这是矛盾的. 因此 $\det \boldsymbol{A}$ 无法取到 6, 又因为

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

于是 $\det \boldsymbol{A}$ 的最大值为 4.

3. 采用数学归纳法. 当 $n = 3$ 时, 有

$$\det \boldsymbol{A} \leqslant 4 = (3-1)!(3-1)$$

将 $\det \boldsymbol{A}$ 按照第一行展开可得

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}A_{1j} \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{1j}|\,|A_{1j}| \leqslant n(n-2)!(n-2) < (n-2)!\left(n^2-2n+1\right) = (n-1)!(n-1)$$

于是命题得证.

□

例题 1.2 计算以下行列式的值.

1.

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix}$$

3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix}$$

解.

1. 将第一列减去第二列可得

$$\begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-b_2 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ b_1-b_2 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1-b_2 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= (b_1-b_2)\begin{vmatrix} 1 & a_1+b_2 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & a_2+b_2 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n+b_2 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

同样地, 将第 2 列减去第 3 列, 可以得到

$$LHS = (b_1-b_2)(b_2-b_3)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & a_1+b_n \\ 1 & 1 & \cdots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

既然第一列与第二列相同, 因此原行列式的值为 0.

2. 将行列式每列拆成两列的和. 如果第一列保留 a_{i1}, 那么第二列只能保留 a_{i2}(否则两列相同, 行列式值为 0). 依次类推, 可得第 j 列只能保留 a_{ij}; 如果第一列保留 a_{in}, 那么最后一列只能保留 $a_{i(n-1)}$, 依次类推, 可得第 j 列只能保留 $a_{i(j-1)}$. 因此, 原行列式可拆成两个行列式之和:

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{1n} & a_{11} & \cdots & a_{1(n-1)} \\ a_{2n} & a_{21} & \cdots & a_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn} & a_{n1} & \cdots & a_{n(n-1)} \end{vmatrix}$$

将第二个行列式的第一列移到最后一列共需 $n-1$ 次对换, 因此

$$\begin{vmatrix} a_{1n}+a_{11} & a_{11}+a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)}+a_{1n} \\ a_{2n}+a_{21} & a_{21}+a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)}+a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}+a_{n1} & a_{n1}+a_{n2} & \cdots & a_{n(n-1)}+a_{nn} \end{vmatrix} = \left(1+(-1)^{n-1}\right)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

3. **方法一**: 将第 n 列减去第 $n-1$ 列可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-2 & n-1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n & 0 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n & 0 \end{vmatrix}$$

按照最后一列展开, 仍然把第 $n-1$ 列减去第 $n-2$ 列可得

$$LHS = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & n \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & n \end{vmatrix} = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & \cdots & n-1 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \cdots & n & 0 \end{vmatrix}$$

重复上面的操作, 可得

$$LHS = (-1)^{(n+1)+n+\cdots+3}\,|n| = (-1)^{\frac{(n+4)(n-1)}{2}}n$$

方法二: 将第 j 列减去第 $j-1$ 列, 于是原行列式的右下部分全部为 0. 按照行列式的定义有

$$LHS = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n$$

例题 1.3 设 $n \geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_{n-1} & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_{n-1}^2 & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_{n-1}^{n-2} & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_{n-1}^n & x_n^n \end{vmatrix}$$

解. 考虑 $n+1$ 阶行列式

$$\tilde{D}_{n+1}(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & y \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & y^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & y^n \end{vmatrix}$$

这行列式的 $(n, n+1)$ 元的余子式即为 D_n, 于是只需考虑 y^{n-1} 的系数即可. 又 $\tilde{D}_{n+1}$ 本身为范德蒙德行列式, 于是

$$\tilde{D}_{n+1}(y) = (y-x_1)\cdots(y-x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

于是

$$(-1)^{n+(n+1)}D_n = -(x_1+x_2+\cdots+x_n)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)$$

从而

$$D_n = \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)\left(\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\right)$$

例题 1.4 求下面行列式的值:

$$D_n=\begin{vmatrix}1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n\\ 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{D}_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & 1+x_1 & 1+x_2 & \cdots & 1+x_n\\ 0 & 1+x_1^2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 1+x_1^n & 1+x_2^n & \cdots & 1+x_n^n\end{vmatrix}$$

将 $\tilde{D}_n$ 按第一行展开即可得 $\tilde{D}_n=D_n$. 现在将 $\tilde{D}_n$ 的第 j 行 $(1<j\leqslant n+1)$ 减去第 1 行可得

$$\tilde{D}_n=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ 0 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}-1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ -1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ -1 & x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -1 & x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n\end{vmatrix}$$

右边两个行列式都可以拆解成范德蒙德行列式的形式, 于是有

$$\begin{aligned}D_n=\tilde{D}_n&=2\prod_{k=1}^{n}x_k\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)-\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\\ &=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(x_j-x_i)\left(2\prod_{k=1}^{n}x_k-\prod_{k=1}^{n}(x_k-1)\right)\end{aligned}$$

如果遇到一行 (列) 中只有一个元素与其它的不同, 就可以考虑将这个元素进行拆项.

例题 1.5 设 $n\geqslant 2, a_i\neq 0, i=1,\cdots,n$. 计算以下行列式的值:

$$A_n=\begin{vmatrix}x_1-a_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2-a_2 & \cdots & x_n\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-a_n\end{vmatrix}$$

解. 考虑行列式

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 - a_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & x_1 & x_2 - a_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n - a_n \end{vmatrix}$$

将 $\tilde{A}_n$ 按第一列展开可得 $\tilde{A}_n = A_n$. 现在将 $\tilde{A}_n$ 的第 i 行 $(1 < j \leqslant n+1)$ 减去第 1 行可得

$$\tilde{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ -1 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{a_k} & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ 0 & -a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & -a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \end{vmatrix}$$

这是一个上三角行列式, 于是

$$A_n = \tilde{A}_n = (-1)^n \left(1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{x_k}{a_k}\right)\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)$$

例题 1.6 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 行减去第 $i-1$ 行 $(i > 1)$ 可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第 i 行减去第 $i-1$ 行 $(i>2)$ 可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

按照行列式的定义, 只有第一行选择 $n-1$, 第二行选择 1, 后面所有行选择 2 才能使得求和的项不为 0. 于是

$$A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

例题 1.7 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \\ 3 & 4 & \cdots & 1 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 行减去第 $i-1$ 行有

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

将第 i 列减去第 1 列有

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 1 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n} & 1 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -n \\ 0 & 0 & \cdots & -n & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

按照第一列展开可得

$$A_n = \frac{n(n+1)}{2n}(-n)^{n-1}(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = \frac{(n+1)}{2}n^{n-1}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

例题 1.8 设 $n \geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 行减去第 1 行 $(i > 1)$ 可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{vmatrix}$$

按照第一列展开可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 2 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & n \end{vmatrix} = \left(1 - \sum_{i=3}^{n} \frac{2}{i}\right) \frac{n!}{2}$$

整理可得

$$A_n = \left(\frac{1}{2} - \sum_{i=3}^{n} \frac{1}{i}\right) n! = \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right) n!$$

例题 1.9 设 $n \geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_0 \\ -1 & x & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & x & \cdots & 0 & 0 & a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & x + a_{n-1} \end{vmatrix}$$

解. 将 A_n 按第一行展开可得

$$A_n = xA_{n-1} + a_0(-1)^{1+n}(-1)^{n-1} = xA_{n-1} + a_0$$

并且有 $A_1=x+a_{n-1}$. 于是

$$A_n=x^n+\sum_{i=0}^{n-1}a_ix^i$$

例题 1.10 设 $n\geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n=\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & a_2+a_3 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & a_{n-1}+a_n \end{vmatrix}$$

解. 将行列式按最后一行展开可得

$$A_n=\left(a_{n-1}+a_n\right)A_{n-1}-a_{n-1}\begin{vmatrix} a_0+a_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_1+a_2 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-3}+a_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \end{vmatrix}$$

将后一个行列式按最后一行展开可得

$$A_n=\left(a_{n-1}+a_n\right)A_{n-1}-a_{n-1}^2A_{n-2}$$

即

$$A_n-a_nA_{n-1}=a_{n-1}\left(A_{n-1}-a_{n-1}A_{n-2}\right)$$

又因为

$$A_1=a_0+a_1,\quad A_2=a_0a_1+a_0a_2+a_1a_2$$

于是

$$A_n-a_nA_{n-1}=\prod_{i=0}^{n-1}a_i$$

于是

$$A_n=\prod_{i=0}^{n-1}a_i+a_n\left(\prod_{i=0}^{n-2}a_i+a_{n-1}\left(\prod_{i=0}^{n-3}a_n+\cdots\right)\right)=\left(\prod_{i=0}^{n}a_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{a_i}\right)$$

例题 1.11 设 $n\geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n=\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

解. 将每一列减去最后一列可得

$$D_n=\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1}-\frac{1}{a_1+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}}-\frac{1}{a_1+b_n} & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{1}{a_2+b_1}-\frac{1}{a_2+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}}-\frac{1}{a_2+b_n} & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1}-\frac{1}{a_n+b_n} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}}-\frac{1}{a_n+b_n} & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_1+b_{n-1})(a_1+b_n)} & \frac{1}{a_1+b_n}\\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_2+b_{n-1})(a_2+b_n)} & \frac{1}{a_2+b_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{b_n-b_{n-1}}{(a_n+b_{n-1})(a_n+b_n)} & \frac{1}{a_n+b_n}\end{vmatrix}$$

将各行各列分别提取公因子可得

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_n}\prod_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}$$

对于上面的行列式, 将每一行减去最后一行, 然后按最后一列展开可得

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1\\ \frac{1}{a_2+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_{n-1}} & 1\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \cdots & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_{n-1})(a_n+b_{n-1})} & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1\end{vmatrix}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_n+b_i}\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\,D_{n-1}$$

于是

$$D_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(a_i+b_n)(a_n+b_i)}\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)(b_n-b_i)\,D_{n-1}$$

又因为

$$D_1=\frac{1}{a_1+b_1}$$

于是

$$D_n=\frac{\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i)}{\prod\limits_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_i+b_j)}$$

例题 1.12 设 $n\geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n=\begin{vmatrix}1 & x_1+a_{11} & x_1^2+a_{21}x_1+a_{22} & \cdots & x_1^{n-1}+a_{(n-1)1}x_1^{n-2}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\\ 1 & x_2+a_{11} & x_2^2+a_{21}x_2+a_{22} & \cdots & x_2^{n-1}+a_{(n-1)1}x_2^{n-2}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & x_n+a_{11} & x_n^2+a_{21}x_n+a_{22} & \cdots & x_n^{n-1}+a_{(n-1)1}x_n^{n-2}+\cdots+a_{(n-1)(n-1)}\end{vmatrix}$$

解. 第 j 列可以按 x_i 的次数拆成 j 个部分. 由于第一列全部为 1, 因此第二列只能选择 $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 否则第一列和第二列成比例, 行列式为 0. 同理, 每一列都只能选择最高次项, 否则总会和前面的某一列成比例. 于是

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

例题 1.13 设 $n \geqslant 2$, 求下面行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_1b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1b_n & a_2b_n & \cdots & a_nb_n \end{vmatrix}$$

解. 只有第一列和最后一列具有共同的因子. 于是有

$$A_n = a_1b_n \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_{n-1} & a_1 \\ b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_{n-1} & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & a_2b_n & \cdots & a_{n-1}b_n & a_n \end{vmatrix} = a_1b_n \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & \cdots & a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_1 & a_1 \\ b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & a_2b_{n-1} - a_{n-1}b_2 & a_2 \\ b_3 & 0 & 0 & \cdots & a_3b_{n-1} - a_{n-1}b_3 & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \end{vmatrix}$$

将第一列的 $-\dfrac{a_n}{b_n}$ 倍加到最后一列可得

$$A_n = a_1b_n \begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 - a_2b_1 & a_1b_3 - a_3b_1 & \cdots & a_1b_{n-1} - a_{n-1}b_1 & a_1 - \frac{b_1a_n}{b_n} \\ b_2 & 0 & a_2b_3 - a_3b_2 & \cdots & a_2b_{n-1} - a_{n-1}b_2 & a_2 - \frac{b_2a_n}{b_n} \\ b_3 & 0 & 0 & \cdots & a_3b_{n-1} - a_{n-1}b_3 & a_3 - \frac{b_3a_n}{b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

按照最后一行展开可得

$$A_n = a_1b_n^2(-1)^{n+1} \prod_{i=1}^{n-2} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i) \left(a_{n-1} - \frac{b_{n-1}a_n}{b_n} \right)$$

整理可得

$$A_n = (-1)^{n+1} a_1b_n \prod_{i=1}^{n-1} (a_ib_{i+1} - a_{i+1}b_i)$$

下面是一种更简单的办法.

提取第一列和最后一行的公因子可得

$$A_n = a_1b_n\begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ b_2 & a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & a_2b_{n-1} & \cdots & a_{n-1}b_n \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1b_n\begin{vmatrix} b_1 & a_1b_2-a_2b_1 & \cdots & a_1b_n-a_nb_1 \\ b_2 & 0 & \cdots & a_2b_n-a_nb_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & 0 & \cdots & a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

将右边的行列式按最后一行展开即可得

$$A_n = (-1)^{n+1}a_1b_n\prod_{i=1}^{n-1}(a_ib_{i+1}-a_{i+1}b_i)$$

例题 1.14 求以下 $2n$ 阶行列式的值:

$$A_n = \begin{vmatrix} a & & & & b \\ & a & & b & \\ & & \ddots & & \\ & b & & a & \\ b & & & & a \end{vmatrix}$$

解. 按照第一行和最后一行展开可得

$$A_n = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}(-1)^{1+n+1+n}A_{n-1} = \left(a^2-b^2\right)A_{n-1}$$

又

$$A_1 = \begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2-b^2$$

于是

$$A_n = \left(a^2-b^2\right)^n$$

例题 1.15 求以下 n 阶行列式的值:

$$A_n(x) = \begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & x & a_2 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & x & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & x \end{vmatrix}$$

解. 令 $x=a_1$, 可得

$$A_n\left(a_1\right)=\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ a_1 & a_1 & \cdots & a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_1 \end{vmatrix}=0$$

同理可得对任意 $i=1,\cdots,n-1$ 都有

$$A_n\left(a_i\right)=0$$

并且 $A_n(x)$ 的最高次项 x^n 的系数为 1(这是因为要取到最高次项 x^n, 只能从每行中选择 x). 此外, 注意到每行元素和相同, 因此将每一列都加到第一列上即可得

$$A_n(x)=\left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\left|*\right|$$

于是 $A_n(x)$ 还具有因式 $x+\sum\limits_{i=1}^{n-1} a_i$. 于是

$$A_n(x)=\left(x+\sum_{i=1}^{n-1} a_i\right)\prod_{i=1}^{n-1}\left(x-a_i\right)$$

例题 1.16 假定方阵 $\boldsymbol{A}$ 的某一行全部为 1, 求它的所有元素的代数余子式的和.

解. 假定 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 行全部为 1. 我们有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} A_{ij}=\sum_{j=1}^{n} a_{kj}A_{kj}+\sum_{1\leqslant i\leqslant n, i\neq k} a_{kj}A_{ij}=\det\boldsymbol{A}+0=\det\boldsymbol{A}$$

例题 1.17 证明: 把 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每个元素加上同一个数 t 得到矩阵 $\boldsymbol{T}$, 那么 $\boldsymbol{T}$ 的元素的所有代数余子式的和等于 $\boldsymbol{A}$ 的所有元素的代数余子式的和.

解. 我们有

$$\det\boldsymbol{T}=\det\boldsymbol{A}+t\begin{vmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+t\begin{vmatrix} a_{11} & 1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & 1 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\cdots=\det\boldsymbol{A}+t\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} A_{ij}$$

于是

$$t\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}A_{ij}=\det \boldsymbol{T}-\det \boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}+t & a_{22}+t & \cdots & a_{2n}+t\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}+t & a_{n2}+t & \cdots & a_{nn}+t\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}a_{11}+t & a_{12}+t & \cdots & a_{1n}+t\\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}$$

$$=t\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}$$

于是有恒等式

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}A_{ij}=\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ a_{21}-a_{11} & a_{22}-a_{12} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}-a_{11} & a_{n2}-a_{12} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}$$

同样地, 对 $\boldsymbol{T}$ 使用该等式可得

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}T_{ij}=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ (a_{21}+t)-(a_{11}+t) & \cdots & (a_{2n}+t)-(a_{1n}+t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ (a_{n1}+t)-(a_{11}+t) & \cdots & (a_{nn}+t)-(a_{1n}+t)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ a_{21}-a_{11} & \cdots & a_{2n}-a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1}-a_{11} & \cdots & a_{nn}-a_{1n}\end{vmatrix}=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}A_{ij}$$

于是命题得证.

例题 1.18 给定 n 个两两不同的数 $a_1,\cdots,a_n$. 设 $b_1,\cdots,b_n$ 为任意的 n 个数, 证明: 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i)=b_i$ 成立.

证明. 设 $f(x)=\sum_{i=0}^{n-1}c_ix^i$. 于是有线性方程组:

$$\begin{cases}c_0+c_1a_1+c_2a_1^2+\cdots+c_{n-1}a_1^{n-1}=b_1\\ c_0+c_1a_2+c_2a_2^2+\cdots+c_{n-1}a_2^{n-1}=b_2\\ \qquad\qquad\vdots\\ c_0+c_1a_n+c_2a_n^2+\cdots+c_{n-1}a_n^{n-1}=b_n\end{cases}$$

这方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

由于 $a_1, \cdots, a_n$ 两两不同, 因此该行列式不为 0, 从而原线性方程组有唯一解, 从而 $f(x)$ 存在且唯一. □

例题 1.19 设行列式

$$\begin{vmatrix} \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{n1} & \zeta_{n2} & \cdots & \zeta_{nn} \end{vmatrix}$$

不为零.

1. 证明: 满足下面方程组的 x_{ijk} 唯一:

$$\zeta_{jt}\zeta_{kt} = \sum_{i=1}^{n} x_{ijk}\zeta_{it}, \quad 1 \leqslant j,k,t \leqslant n$$

2. 求出 x_{ijk} 的值.

解. 对于固定的 j,k, 有方程组

$$\begin{cases} \zeta_{11}x_{1jk} + \zeta_{21}x_{2jk} + \cdots + \zeta_{n1}x_{njk} = \zeta_{j1}\zeta_{k1} \\ \zeta_{12}x_{1jk} + \zeta_{22}x_{2jk} + \cdots + \zeta_{n2}x_{njk} = \zeta_{j2}\zeta_{k2} \\ \vdots \\ \zeta_{1n}x_{1jk} + \zeta_{2n}x_{2jk} + \cdots + \zeta_{nn}x_{njk} = \zeta_{jn}\zeta_{kn} \end{cases}$$

该方程组的系数行列式转置后即为题设的行列式, 因此该方程组有唯一解, 于是 x_{ijk} 唯一.

记题设的行列式的值为 ζ 根据 Cramer 法则可得

$$x_{ijk} = \frac{1}{\zeta}\begin{vmatrix} \zeta_{11} & \cdots & \zeta_{(i-1)1} & \zeta_{j1}\zeta_{k1} & \zeta(i+1)1 & \cdots & \zeta_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{1n} & \cdots & \zeta_{(i-1)n} & \zeta_{jn}\zeta_{kn} & \zeta(i+1)n & \cdots & \zeta_{nn} \end{vmatrix}$$

例题 1.20 设 $\boldsymbol{A}$ 是元素为实数的矩阵, 并且

$$a_{ii} > \sum_{1\leqslant j\leqslant n, j\neq i} |a_{ij}|, \quad i = 1, \cdots, n$$

这样的矩阵被称作严格主对角占优矩阵. 证明:

$$\det \boldsymbol{A} \neq 0$$

进一步地, 证明:

$$\det \boldsymbol{A} > 0$$

证明. 为证明 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 只需证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

仅有零解即可. 假定该方程有非零解, 那么设 x_k 是 $x_1, \cdots, x_n$ 中绝对值最大的, 则 $|x_k| > 0$. 于是根据第 k 个方程可得

$$|a_{kk}x_k| = \left| \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} a_{kj}x_j \right|$$

由于 $a_{kk} > 0$, 于是

$$a_{kk}\,|x_k| \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} |a_{kj}|\,|x_j| \leqslant |x_k| \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} |a_{kj}|$$

即

$$x_{kk} \leqslant \sum_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} |a_{kj}|$$

这与题意矛盾. 于是 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$.

令 $t \geqslant 0$, 设

$$f(t) = \begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

于是上述行列式也是主对角占优的, 因此 $f(t) \neq 0$. 又因为 $f(t)$ 是关于 t 的首一多项式, 于是

$$\lim_{t \to +\infty} f(t) = +\infty$$

根据连续函数的介值定理可得 $f(0) > 0$(否则总存在 $t \in [0, +\infty)$ 使得 $f(t) = 0$, 这与 $f(t) \neq 0$ 矛盾). 于是 $\det \boldsymbol{A} = f(0) > 0$, 命题得证. □