北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 A 期中试题

1(20') 计算下列行列式的值.

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$$

解.

(1) 有

$$原行列式 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 0 & -2 \\ -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -16$$

(2) 记原行列式为 D_n, 其中 n 为行列式的级数. 将行列式按第一行展开可得

$$D_n = 5D_{n-1} - 3 \begin{vmatrix} 2 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5D_{n-1} - 6D_{n-2}$$

递推式的特征方程 $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$ 的特征根为 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. 于是设 $D_n = A2^n + B3^n$, 注意到

$D_1=5, D_2=19$, 于是解得 $A=-2, B=3$, 即

$$D_n=3^{n+1}-2^{n+1}$$

(3) 注意到

$$1-x^n=(1-x)(1+x+\cdots+x^{n-1})$$

于是

$$\text{原行列式}=\begin{vmatrix}1+a_1b_1+\cdots+a_1^nb_1^n & \cdots & 1+a_1b_n+\cdots+a_1^nb_n^n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 1+a_nb_1+\cdots+a_n^nb_1^n & \cdots & 1+a_nb_n+\cdots+a_n^nb_n^n\end{vmatrix}$$

将每一列拆分为 n 项, 则原行列式可以拆分为 n^n 个行列式之和. 当某一列选择 $\begin{bmatrix}a_1^jb_i^j & \cdots & a_n^jb_i^j\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 时, 其余列均不能选择含有 a_k^j 项的列, 否则会使两列成倍数而使该项为 0. 如此, 非零的项必然有

$$\begin{vmatrix}a_1^{i_1}b_1^{i_1} & \cdots & a_1^{i_n}b_n^{i_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^{i_1}b_1^{i_1} & \cdots & a_n^{i_n}b_n^{i_n}\end{vmatrix}$$

的形式, 其中 $i_1\cdots i_n$ 是 0 到 $n-1$ 的一个排列. 而

$$\begin{vmatrix}a_1^{i_1}b_1^{i_1} & \cdots & a_1^{i_n}b_n^{i_n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_n^{i_1}b_1^{i_1} & \cdots & a_n^{i_n}b_n^{i_n}\end{vmatrix}=\prod_{j=1}^n b_j^{i_j}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}\begin{vmatrix}1 & a_1 & \cdots & a_1^{n-1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & a_n & \cdots & a_n^{n-1}\end{vmatrix}=\prod_{j=1}^n b_j^{i_j}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)$$

于是

$$\begin{aligned}\text{原行列式}&=\sum_{i_1\cdots i_n}\left(\prod_{j=1}^n b_j^{i_j}(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\right)\\ &=\begin{vmatrix}1 & \cdots & 1\\ b_1 & \cdots & b_n\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1^{n-1} & \cdots & b_n^{n-1}\end{vmatrix}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\\ &=\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(b_j-b_i)\end{aligned}$$

2(18') 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\-5\\-9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\-1\\-3\\-4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}-3\\5\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}-4\\6\\2\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}-5\\-1\\11\\17\end{bmatrix}$$

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

(2) 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 如果可以, 请给出所有的表出方式.

解.

(1) 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的前两个分量构成的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 观察到 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$. 于是 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不在组中. 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的前三个分量构成的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & 6 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -9 & 4 & 0 \\ 18 & -4 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -9 & 4 \\ 18 & -4 \end{vmatrix} = -72 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关.

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是原向量组的一个极大线性无关组.

(2) 考虑线性方程组

$$\boldsymbol{\beta} = x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\alpha}_4$$

对其增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 3 & -1 & 5 & 6 & -1 \\ -5 & -3 & 1 & 2 & 11 \\ -9 & -4 & -1 & 0 & 17 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 7 & -14 & -18 & -14 \\ 0 & 14 & -28 & -36 & -28 \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & -5 \\ 0 & -7 & 14 & 18 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_3 - \frac{8}{7}x_4 \\ x_2 = 2 + 2x_3 + \frac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

于是所有表出方式可以写做

$$\boldsymbol{\beta} = \left(1 - a - \frac{8}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(2 + 2a + \frac{18}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + a\boldsymbol{\alpha}_3 + b\boldsymbol{\alpha}_4, \quad a, b \in K$$

3(10') 求 λ 使得矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩最小.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & -20 & -50 & -5 \\ 0 & 4-7\lambda & 10-17\lambda & 1-3\lambda \\ 0 & -12 & -30 & -3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 7 & 17 & 3 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 7\lambda & 17\lambda & 3\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda = 0$ 时, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$, 否则 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$. 于是所求 $\lambda = 0$.

4(20') 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间由向量 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 和 $\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 生成.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 对应的简化阶梯形矩阵.

(2) 求以下空间的维数: **(a)** $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $C(\boldsymbol{A})$; **(b)** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 的列空间 $C\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right)$; **(c)** 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集 $N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right)$.

(3) 写出 **(2)** 中所有可以写出基的空间的一组基.

解.

(1) 观察基础解系的结构可以写出方程的解为

$$\begin{cases} x_1 = x_3 - 2x_4 \\ x_2 = x_3 - x_4 \end{cases}$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 对应的简化阶梯形矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 初等行变换不改变列空间的维数. 于是 $\dim C(\boldsymbol{A}) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 的列空间也即 $\boldsymbol{A}$ 的行空间, 于是 $\dim C\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right) = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 2$.

$\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集 $N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right)$ 的维数 $\dim N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right) = 3 - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = 3 - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 1$.

(3) $C(\boldsymbol{A})$ 的一组基为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$C(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}})$ 的一组基为

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 1 & \\ 0 & \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 0 & \\ 1 & \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

5(10') 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = r$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关, 前 r 列也线性无关, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列构成的 r 阶子式非零.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r 并且前 r 行线性无关, 于是可以通过初等行变换将其第 r 行以后的行全部消去得到矩阵 $\boldsymbol{B}$.

由于初等行变换不改变列向量的线性无关性, 因此 $\boldsymbol{B}$ 的前 r 列仍然线性无关, 并且有 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = r$. 于是可以通过初等列变换将 $\boldsymbol{B}$ 的第 r 列以后的列全部消去得到矩阵 $\boldsymbol{C}$. 现在 $\boldsymbol{C}$ 仅有前 r 行前 r 列的元素非零, 并且仍有 $\operatorname{rank} \boldsymbol{C} = r$, 于是其前 r 行前 r 列构成的子式非零, 从而 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行前 r 列元素构成的子式非零, 命题得证. □

6(10') 设 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $r \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 且齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 同解. 证明: $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

证明. 设 $\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m\}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_m\}$ 为 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组. 记方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解集为 W.

设 $\mathcal{A}$ 的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$. 对于任意 $\boldsymbol{\beta}_i \in \mathcal{B}$, 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_i$ 为行向量的系数矩阵对应的齐次线性方程组, 其解集也应当为 W. 于是

$$\dim W = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n - \operatorname{rank} \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_i\}$$

而由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的极大线性无关组, 因此

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}$$

于是

$$\operatorname{rank} \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = \operatorname{rank} \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_i\}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 于是 $\boldsymbol{\beta}_i$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 进而 $\boldsymbol{\beta}_i$ 能由 $\mathcal{A}$ 线性表出. 对所有 $1 \leqslant i \leqslant r$ 使用以上结论可知 $\boldsymbol{B}$ 能被 $\boldsymbol{A}$ 线性表出.

同理可以证得 $\boldsymbol{A}$ 能被 $\boldsymbol{B}$ 线性表出. 于是 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价. □

7(12') 设 $r \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $1 \times r$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $n \times 1$ 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} a \end{bmatrix}$ 且 $a \neq 0$. 令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} - a^{-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A})$$

并记 $N(\boldsymbol{A}), N(\boldsymbol{B})$ 分别为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解空间. 证明: $N(\boldsymbol{B})$ 可以由 $N(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 生成, 并进而证明 $\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} - 1$.

证明. 考虑 $N(\boldsymbol{A})$ 的基础解系 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$. 于是对任意 $1\leqslant i\leqslant s$ 有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\eta}_i &= \left(\boldsymbol{A}-a^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\right)\right)\boldsymbol{\eta}_i\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i-a^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_i\right)\\ &= \mathbf{0}-a^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\mathbf{0}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{\eta}_i$ 为 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$ 的解.
又有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta} &= \left(\boldsymbol{A}-a^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\right)\right)\boldsymbol{\beta}\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}-a^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\left(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\right)\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}-a^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}a\\ &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\\ &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

于是 $\boldsymbol{\beta}$ 也是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=0$ 的解. 又因为 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a\end{bmatrix}$ 并且 $a\neq 0$, 于是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$, 因此 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性无关.
于是 $\boldsymbol{\beta}$ 与 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 是 $N(\boldsymbol{B})$ 中的线性无关组. 为证明它们是 $N(\boldsymbol{B})$ 的基, 考虑 $\boldsymbol{\gamma}\in N(\boldsymbol{B})$, 设 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=b$, 则有

$$\mathbf{0}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}+a^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}c=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{\gamma}-\frac{c}{a}\boldsymbol{\beta}\right)$$

于是 $\boldsymbol{\gamma}-\dfrac{c}{a}\boldsymbol{\beta}\in N(\boldsymbol{A})$. 于是任意 $\boldsymbol{\gamma}\in N(\boldsymbol{B})$ 都能由向量组 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_s$ 线性表出, 而该向量组本身线性无关. 于是该向量组是 $N(\boldsymbol{B})$ 的基. 于是 $N(\boldsymbol{B})$ 能由 $N(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 生成.
现在有

$$\dim\ N(\boldsymbol{B})=n-\operatorname{rank}\ \boldsymbol{B}=s+1$$

$$\dim\ N(\boldsymbol{A})=n-\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}=s$$

于是

$$\operatorname{rank}\ \boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}-1$$

□