

# 北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期末试题

**1(10')** 设  $V$  是一个  $n$  维线性空间,  $\mathcal{A}$  和  $\mathcal{B}$  是  $V$  到  $V$  的线性映射, 判断下列结论是否正确.

- (1)  $\mathcal{A}$  是可逆线性映射当且仅当  $\mathcal{A}$  的行列式不为 0.
- (2)  $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2$ .
- (3) 如果  $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{B})$ , 那么  $\text{rank}(\mathcal{A}^2) = \text{rank}(\mathcal{B}^2)$ .
- (4)  $\text{rank}(\mathcal{A}) + \text{rank}(\mathcal{B}) \geq \text{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$ .
- (5)  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  在基  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  下的矩阵分别为  $A, B$ , 则  $\mathcal{A}\mathcal{B}$  在上述基下的矩阵为  $AB$ .

解.

- (1) 正确.
- (2) 错误. 实际上应当为

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2$$

- (3) 错误.
- (4) 正确.
- (5) 正确.

**2(10')** 用非退化线性替换将下面的六元二次型化为标准形:

$$f(x_1, \dots, x_6) = x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$$

解. 首先设

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_6 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_4 \\ y_3 + y_4 \\ y_2 + y_5 \\ y_1 + y_6 \end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, \dots, x_6) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2$$

容易看出上述线性变换是非退化的, 因此做上述变换即可将题设二次型化为标准形.

**3(12')** 设  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$  为  $\mathbb{R}^5$  的标准正交基. 令

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \quad \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

求与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  等价的正交单位向量组.

解. 根据 Schmidt 正交化的过程, 令

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4) - \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5) = \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_5 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 \\ &= (2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) - \frac{2}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_5) - \frac{0}{\frac{5}{2}} \left( \frac{1}{2}\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4 - \frac{1}{2}\varepsilon_5 \right) \\ &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_5\end{aligned}$$

然后令

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon_5 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \frac{\sqrt{10}}{10} \varepsilon_1 - \frac{\sqrt{10}}{5} \varepsilon_2 + \frac{\sqrt{10}}{5} \varepsilon_4 - \frac{\sqrt{10}}{10} \varepsilon_5 \\ \gamma_3 &= \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3 = \frac{1}{2} \varepsilon_1 + \frac{1}{2} \varepsilon_2 + \frac{1}{2} \varepsilon_3 - \frac{1}{2} \varepsilon_5\end{aligned}$$

则  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  是与  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  等价的正交单位向量组.

4(16') 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

- (1) 求  $a$  的取值范围使得  $A$  可对角化.
- (2) 当  $A$  可对角化时, 求可逆矩阵  $P$  使得  $P^{-1}AP$  为对角矩阵.

解.

(1) 考虑  $A$  的特征多项式:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & a \\ 0 & -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a \\ -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)(\lambda-a)$$

首先当  $a \neq 0$  且  $a \neq 1$  时,  $A$  有 3 个不同的特征值, 因此此时  $A$  可以对角化.

当  $a=0$  时,  $A$  的对应于特征值 0 的特征向量为  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$ , 特征子空间的维数为 1, 与代数重数不等, 故此时  $A$  不可对角化.

当  $a=1$  时,  $A$  的对应于特征值 1 的特征向量为  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$ , 特征子空间的维数与代数重数不等, 故此时  $A$  不可对角化.

于是  $a \neq 0$  且  $a \neq 1$  时  $A$  可对角化.

(2) 对于特征值 0, 考虑齐次方程  $(0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -a-1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 0 的特征向量  $\alpha_1 = [a \quad -(a+1) \quad 1]^t$ .

对于特征值 1, 考虑齐次方程  $(1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 1 的特征向量  $\alpha_2 = [0 \quad -a \quad 1]^t$ .

对于特征值  $a$ , 考虑齐次方程  $(a\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ , 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & a & a \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值  $a$  的特征向量为  $\alpha_3 = [0 \quad -1 \quad 1]^t$ .

于是令

$$\mathbf{P} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -(a+1) & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \text{diag}\{0, 1, a\}$$

5(18') 令矩阵

$$\mathbf{A}(x, a, n) = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$$

于是有如下等式成立:

$$\mathbf{A}(x, a, n)\mathbf{A}(y, b, n) = \mathbf{A}(z, c, n)$$

(1) 试用  $x, y, a, b$  表示出  $z, c$ .

(2) 判断矩阵  $\mathbf{A}(0, 1, 4)$  是否可逆, 若可逆则求出其逆矩阵.

解.

(1) 令  $\mathbf{E}_n$  为系数全为 1 的  $n \times n$  矩阵, 则  $\mathbf{E}_n^2 = n\mathbf{E}_n$ . 注意到

$$\mathbf{A}(x, a, n) = (x - a)\mathbf{I}_n + a\mathbf{E}_n$$

从而

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(x, a, n)\mathbf{A}(y, b, n) &= [(x - a)\mathbf{I}_n + a\mathbf{E}_n][(y - b)\mathbf{I}_n + b\mathbf{E}_n] \\ &= (x - a)(y - b)\mathbf{I}_n + (x - a)b\mathbf{E}_n + a(y - b)\mathbf{E}_n + abn\mathbf{E}_n \\ &= (x - a)(y - b)\mathbf{I}_n + [(x - a)b + a(y - b) + abn]\mathbf{E}_n\end{aligned}$$

从而

$$c = ay + bx + (n - 2)ab$$

$$z = (x - a)(y - b) + c = xy + (n - 1)ab$$

(2) 假定  $\mathbf{A}(0, 1, 4)$  可逆, 于是存在  $\mathbf{A}(y, b, n)$  使得

$$\mathbf{A}(0, 1, 4)\mathbf{A}(y, b, n) = \mathbf{A}(1, 0, 4) = \mathbf{I}$$

于是可以列出方程

$$\begin{cases} 3b = 1 \\ y + 2b = 0 \end{cases}$$

从而

$$y = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

于是题设矩阵可逆, 其逆矩阵为  $\mathbf{A}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4\right)$ .

**6(24')** 令  $V = \{\mathbf{A} \in M_2(\mathbb{R}) : \text{tr}(\mathbf{A}) = 0\}$  是迹为 0 的  $2 \times 2$  实矩阵构成的线性空间. 取可逆矩阵  $\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,

定义映射  $\Phi_{\mathbf{P}} : V \rightarrow V$  为  $\Phi_{\mathbf{P}}(\mathbf{A}) = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$ .

(1) 证明:  $\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{E}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  构成  $V$  的一组基.

(2) 求  $\Phi_{\mathbf{P}}$  在基  $\{\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22}, \mathbf{E}_{12}, \mathbf{E}_{21}\}$  下的矩阵.

(3) 求线性映射  $\Phi_{\mathbf{P}}$  的特征值及其在  $V$  中的一个特征向量.

(4) 对于一个可逆的  $2 \times 2$  矩阵  $\mathbf{U}$ , 类似地定义线性映射  $\Phi_{\mathbf{U}} : V \rightarrow V$  为  $\Phi_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U}$ . 如果  $\mathbf{U}$  有特征值 2 和 4, 求映射  $\Phi_{\mathbf{U}}$  的特征值并说明理由.

解.

(1) 对于任意  $\mathbf{A} \in V$ , 由于  $\text{tr}(\mathbf{A}) = 0$ , 因此其对角元互为相反数. 这样的  $\mathbf{A}$  总可以表示为  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$ ,

于是则有

$$\mathbf{A} = a(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22}) + b\mathbf{E}_{12} + c\mathbf{E}_{21}$$

于是  $V$  中的任意元素都可以被上述三个矩阵线性表出; 并且  $\mathbf{A} = \mathbf{0}$  当且仅当  $a = b = c = 0$ , 因此上述三个矩阵线性无关. 于是它们构成  $V$  的一组基.

(2) 首先有

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22})\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22}) \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{12}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{21} \\ \mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{21}\mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{12} \end{aligned}$$

于是  $\Phi_{\mathbf{P}}$  在题设的基下的矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3)  $\Phi_{\mathbf{P}}$  的矩阵  $\mathbf{M}$  的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

对于特征值  $-1$ , 其特征向量为  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$  和  $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$ , 即  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  和  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ .

对于特征值  $1$ , 其特征向量为  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$ , 即  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

(4) 设  $\Phi_{\mathbf{U}}(\mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}$ , 则有

$$\mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{U} = \lambda \mathbf{A}$$

考虑  $\mathbf{U}$  的对应于特征值  $2$  的特征向量  $\boldsymbol{\alpha}$ , 对上式两边右乘  $\boldsymbol{\alpha}$  可得

$$2 \mathbf{U}^{-1} \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} = \lambda \mathbf{A} \boldsymbol{\alpha}$$

假定  $\mathbf{A} \boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$ , 则它是  $\mathbf{U}^{-1}$  的对应于特征值  $\frac{\lambda}{2}$  的特征向量. 由于  $\mathbf{U}^{-1}$  的特征值分别为  $\frac{1}{2}$  和  $\frac{1}{4}$ , 因此  $\lambda = 1$  或  $\lambda = \frac{1}{2}$ .

同理考虑  $\mathbf{U}$  的对应于特征值  $4$  的特征向量, 可得  $\lambda = 1$  或  $\lambda = 2$ . 综上可知  $\Phi_{\mathbf{U}}$  的特征值为  $\frac{1}{2}, 1, 2$ .

**7(10')** 证明: 如果  $\mathbf{A}$  是  $n$  级正定矩阵,  $\mathbf{B}$  是  $n$  级实对称矩阵, 则存在一个  $n$  级实可逆矩阵  $\mathbf{C}$  使得  $\mathbf{C}^t \mathbf{A} \mathbf{C}$  和  $\mathbf{C}^t \mathbf{B} \mathbf{C}$  均为对角矩阵.

证明. 由于  $\mathbf{A}$  是正定矩阵, 因此其合同于  $\mathbf{I}_n$ , 于是存在  $n$  级可逆矩阵  $\mathbf{Q}$  使得

$$\mathbf{Q}^t \mathbf{A} \mathbf{Q} = \mathbf{I}$$

由于  $\mathbf{B}$  是实对称矩阵, 因此  $\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q}$  也是实对称矩阵, 于是存在  $n$  级可逆矩阵  $\mathbf{P}$  使得

$$\mathbf{P}^t (\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q}) \mathbf{P} = \mathbf{D}$$

其中对角矩阵  $\mathbf{D}$  是  $\mathbf{Q}^t \mathbf{B} \mathbf{Q}$  的合同标准形. 令  $\mathbf{C} = \mathbf{Q} \mathbf{P}$ , 则

$$\mathbf{C}^t \mathbf{A} \mathbf{C} = \mathbf{P}^t \mathbf{I}_n \mathbf{P} = \mathbf{I}_n$$

于是存在  $n$  级实可逆矩阵  $\mathbf{C}$  满足题设条件. □