1 线性空间

1.1 线性空间的结构

定义 1.1 线性空间 设 V 是非空集合, $\mathbb{K}$ 是一个数域. 在 V 上定义代数运算 $(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) \mapsto \boldsymbol{\gamma}$ 称作**加法**, 记作 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\gamma}$. 在 $\mathbb{K}$ 与 V 之间定义一种运算, 即 $\mathbb{K} \times V$ 到 V 的映射 $(k, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto \boldsymbol{\delta}$ 称作**数量乘法**, 记作 $\boldsymbol{\delta}=k\boldsymbol{\alpha}$. 如果上述定义的加法和数量乘法满足下述运算规则: 对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma} \in V$ 和任意 $k, l \in \mathbb{K}$ 都有

- **i.** $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$.
- **ii.** $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$.
- **iii.** 存在 $\mathbf{0} \in V$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}, \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in V$$

  具有此性质的元素 $\mathbf{0}$ 称作 V 的**零元**.
- **iv.** 对于任意 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 总存在 $\boldsymbol{\beta} \in V$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\mathbf{0}$$

  具有此性质的元素 $\boldsymbol{\beta}$ 称作 $\boldsymbol{\alpha}$ 的**负元**.
- **v.** $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$.
- **vi.** $(kl)\boldsymbol{\alpha}=k(l\boldsymbol{\alpha})$.
- **vii.** $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$.
- **viii.** $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+K\boldsymbol{\beta}$.

则称 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间.

1.2 子空间

定义 1.2 子空间 数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间 V 的子集 U 如果对于 V 的加法和数量乘法也形成 $\mathbb{K}$ 上的线性空间, 则称 U 是 V 的一个**线性子空间**, 简称**子空间**.

定理 1.3 数域 $\mathbb{K}$ 上的一个线性空间 V 的子集 U 是 V 的子空间当且仅当 U 对 V 的加法和数量乘法都封闭, 即

- **i.** $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in U, \quad \forall \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$.
- **ii.** $k\boldsymbol{u} \in U, \quad \forall k \in \mathbb{K}, \boldsymbol{u} \in U$.

定理 1.4 设 U 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 则

$$\dim U \leqslant \dim V$$

并且等号成立当且仅当 $U=V$.

定理 1.5 设 U 是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 则 U 的一组基可以扩充为 V 的一组基.

定理 1.6 如果 V_1, V_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 \cap V_2$ 也是 V 的子空间.

定理 1.7 如果 V_1, V_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 则 $V_1 + V_2 = \{\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 : \boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2\}$ 也是 V 的子空间. 称 $V_1 + V_2$ 是 V_1 与 V_2 的**和**.

定理 1.8 线性代数基本定理 如果 V_1, V_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 则

$$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2) + \dim(V_1 \cap V_2)$$

定义 1.9 直和 如果 V_1, V_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 并且 $V_1 + V_2$ 中的每个向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 恰能唯一的表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \quad \boldsymbol{\alpha}_1 \in V_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \in V_2$$

则称 $V_1 + V_2$ 是**直和**, 记作 $V_1 \oplus V_2$.

定理 1.10 设 V_1, V_2 都是数域 $\mathbb{K}$ 上线性空间 V 的子空间, 下面的命题相互等价.

i. $V_1 + V_2$ 是直和.

ii. $V_1 + V_2$ 中零向量的表法唯一.

iii. $V_1 \cap V_2 = \mathbf{0}$.

iv. $\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$.

v. V_1 的一个基与 V_2 的一个基合起来是 $V_1 + V_2$ 的一个基.

上述定理对多个子空间的情形也是成立的.

1.3 线性空间的同构

定义 1.11 线性空间的同构 设 V 和 V' 都是数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间. 如果在 V 与 V' 的元素存在双射 σ 使得对任意 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in V, k \in \mathbb{K}$ 总有

$$\sigma(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \sigma(\boldsymbol{\alpha}) + \sigma(\boldsymbol{\beta})$$

$$\sigma(k\boldsymbol{\alpha}) = k\sigma(\boldsymbol{\alpha})$$

则称 σ 是 V 到 V' 的一个**同构映射**, 简称**同构**, 此时的 V 和 V' 是**同构的**, 记作 $V \cong V'$.