1 矩阵

例题 1.1 设 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 $m\times n$ 和 $n\times s$ 矩阵, 证明:

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-n$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做相抵标准形分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

其中 $r=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$. 于是

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\boldsymbol{QB}$$

记 $\boldsymbol{QB}=\boldsymbol{H}$, 其前 r 行构成的子矩阵为 $\boldsymbol{H}_1$, 后 $n-r$ 行构成的子矩阵为 $\boldsymbol{H}_2$, 则有

$$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\\boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\\boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 于是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}=\operatorname{rank}\boldsymbol{H}_1$$

由于 $\boldsymbol{Q}$ 是可逆矩阵, 于是

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{QB}=\operatorname{rank}\boldsymbol{H}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_1\\\boldsymbol{H}_2\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{H}_1$ 是 $\boldsymbol{H}$ 的 r 行的子矩阵, 因此将 $\boldsymbol{H}_1$ 的极大线性无关组 $\mathcal{H}_1$ 扩充为 $\boldsymbol{H}$ 的极大线性无关组 $\mathcal{H}$ 时所增加的行向量全部来源于 $\boldsymbol{H}_2$, 因此

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{H}-\operatorname{rank}\boldsymbol{H}_1\leqslant n-r$$

即

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\leqslant n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$$

移项即可证得命题. □

例题 1.2 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且秩为 r. 证明: 存在秩为 r 的 $n\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 和秩为 r 的 $r\times m$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{BC}$.

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 做相抵标准形分解

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_r&\boldsymbol{0}\\\boldsymbol{0}&\boldsymbol{0}\end{bmatrix}_{n\times m}\boldsymbol{Q}$$

注意到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{n\times r} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

于是令

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{n\times r}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} \boldsymbol{Q}$$

即有 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$. 另外, 由于 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$ 均为可逆矩阵, 因此

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{n\times r} = r, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} = r$$

于是命题得证. □

例题 1.3 设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 r 的 $n\times m$ 矩阵. 证明:

(1) 如果 $n = r$, 那么存在 $m\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}_r$.

(2) 如果 $m = r$, 那么存在 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}_r$.

证明. **(1)** 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的相抵标准形分解

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} \boldsymbol{Q}$$

令 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{m\times r} \boldsymbol{P}^{-1}$, 则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{m\times r} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{r\times m} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r \\ \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{m\times r} \boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{I}_r$$

于是命题得证.

(2) 类似.

□

例题 1.4 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 分别是 $3\times 2, 2\times 3$ 矩阵, 且

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

求 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \operatorname{rank} \boldsymbol{B}, \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$.

解.

$$\det \boldsymbol{AB} = \begin{vmatrix} 8 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \\ -2 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & -18 & -18 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 9 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 18 & 18 \\ 9 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 36 \neq 0$$

于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} = 2$. 由于 $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ 且 $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$, 又 $\operatorname{rank} \boldsymbol{AB} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} - 2$, 于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B} = 2$$

注意到 $\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$