

线性代数 B 第五次作业

蒋锦豪 2400011785

4.1: 3, 4 (1)(12), 5, 8, 10; 4.2: 2, 3, 4, 7; 4.3: 3, 5, 7; 4.4: 1, 3 (2), 4, 5, 7, 8, 9 (1), 10 (2).

习题 4.1

3 设 I 是 n 阶单位矩阵, J 是元素全为 1 的 n 阶矩阵, 设

$$M = \begin{bmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{bmatrix}$$

试把 M 表示成 $xI + yJ$ 的形式.

解. 不难发现

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k - \lambda & & & \\ & k - \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & k - \lambda \end{bmatrix} = (k - \lambda)I + \lambda J$$

于是可知

$$x = k - \lambda, \quad y = \lambda$$

4(1) 计算

$$\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 5 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

解.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ -2 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 4 \end{bmatrix} + (-4) \begin{bmatrix} -5 & 2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 26 \\ -27 & 2 \\ 23 & 4 \end{bmatrix}$$

4(12) 计算

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解.

$$\text{原式} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ka_2 & 0 & 0 \\ kb_2 & 0 & 0 \\ kc_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + ka_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + kb_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + kc_2 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$$

5 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$$

求 \mathbf{AB} , \mathbf{BA} , $\mathbf{AB} - \mathbf{BA}$.

解.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \\ 3 \cdot \begin{bmatrix} 5 & 6 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 7 & 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 5 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \\ 7 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} + 8 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

8 如果 n 级方阵 \mathbf{B} 满足 $\mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$, 求 $(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2)$.

解.

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{I} + \mathbf{B} + \mathbf{B}^2) = \mathbf{I}^2 + \mathbf{IB} + \mathbf{IB}^2 - \mathbf{BI} - \mathbf{B}^2 - \mathbf{B}^3 = \mathbf{I} - \mathbf{B}^3 = \mathbf{I}$$

10 证明: 如果 $\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B} + \mathbf{I})$, 那么 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$ 当且仅当 $\mathbf{B}^2 = \mathbf{I}$.

证明. \Rightarrow : 由 $A^2 = A$ 可知

$$0 = A^2 - A = \frac{1}{4}(B + I)(B - I) = \frac{1}{4}(B^2 - I)$$

于是 $B^2 - I = 0$, 即 $B^2 = I$.

\Leftarrow : 由 $B^2 = I$ 可知

$$A^2 - A = \frac{1}{4}(B^2 + 2B + I) - \frac{1}{2}(B + I) = \frac{1}{4}(B^2 - I) = 0$$

于是 $A^2 = A$. □

习题 4.2

2 证明: 两个 n 级下三角矩阵的乘积仍是下三角矩阵, 并且乘积矩阵的主对角元等于因子矩阵相应主对角元的乘积.

证明. 设 $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ 均为 n 级下三角矩阵, 则有

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_{ij} \mathbf{E}_{ij} \right) \left(\sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k b_{kl} \mathbf{E}_{kl} \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^k a_{ij} b_{kl} \mathbf{E}_{ij} \mathbf{E}_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \sum_{l=1}^j a_{ij} b_{jl} \mathbf{E}_{il} \end{aligned}$$

于是总有 $l \leq j \leq i$, 因此 AB 是下三角矩阵. 特别地, 当 $i = j = l$ 时有

$$(AB)_{ii} = a_{ij} b_{jl} = a_{ii} b_{ii}$$

于是主对角元等于因子矩阵对应主对角元的乘积. □

3 证明: 与所有 n 级矩阵可交换的矩阵一定是 n 级数量矩阵.

证明. 设待求矩阵为 $A = (a_{ij})$. 特别的, A 与基本矩阵 \mathbf{E}_{ij} 可交换, 于是总有

$$\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a_{1i} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{ni} & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是总有 $a_{j1} = \cdots = a_{j(j-1)} = a_{j(j+1)} = \cdots = a_{jn} = 0$, $a_{1i} = \cdots = a_{(i-1)i} = a_{(i+1)i} = \cdots = a_{ni} = 0$, $a_{jj} = a_{ii}$ 对所有 $1 \leq i, j \leq n$ 成立.

满足上述要求的矩阵除主对角元外均为 0, 并且主对角元均相等. 于是 A 是数量矩阵, 得证. □

4 证明: 设 \mathbf{A} 是任一 $s \times n$ 矩阵, 则 $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ 和 $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ 均为对称矩阵.

证明. 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{A}^t = (a'_{ij})$, 则 $a'_{ij} = a_{ji}$. 考虑 $\mathbf{A}\mathbf{A}^t = (b_{ij})$ 的元素:

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a'_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik}a_{jk} = \sum_{k=1}^n a'_{jk}a_{ki} = b_{ji}$$

于是 $\mathbf{A}\mathbf{A}^t$ 是对称矩阵. 将上述结论应用于 \mathbf{A}^t 可得 $\mathbf{A}^t\mathbf{A}$ 也是对称矩阵. 于是命题得证. \square

7 证明: 设 \mathbf{A} 是任一 n 级方阵, 则 $\mathbf{A} + \mathbf{A}^t$ 是对称矩阵, $\mathbf{A} - \mathbf{A}^t$ 是斜对称矩阵.

证明. 记 $\mathbf{A} = (a_{ij})$, $\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{A}^t = (b_{ij})$, $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{A}^t = (c_{ij})$, 则

$$b_{ij} = a_{ij} + a_{ji} = a_{ji} + a_{ij} = b_{ji}$$

$$c_{ij} = a_{ij} - a_{ji} = -(a_{ji} - a_{ij}) = -c_{ji}$$

于是 \mathbf{B} 是对称矩阵, \mathbf{C} 是斜对称矩阵, 得证. \square

习题 4.3

3 证明: 设 \mathbf{A} 是 n 级方阵, 则 $\det \mathbf{A}\mathbf{A}^t = (\det \mathbf{A})^2$.

证明. 有

$$\det \mathbf{A}\mathbf{A}^t = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^t = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A} = (\det \mathbf{A})^2$$

得证. \square

5 证明: 如果 \mathbf{A} 是数域 \mathbb{K} 上的 n 级方阵, 且满足

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^t = \mathbf{I}, \quad \det \mathbf{A} = -1,$$

则 $\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 0$.

证明. 有

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}\mathbf{A}^t + \mathbf{A}) = \det \mathbf{A} \det(\mathbf{A}^t + \mathbf{I})$$

而 $(\mathbf{A}^t + \mathbf{I})^t = \mathbf{A} + \mathbf{I}$, 于是

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = -\det(\mathbf{I} + \mathbf{A})$$

于是

$$\det(\mathbf{I} + \mathbf{A}) = 0$$

\square

7 设 $s_k = x_1^k + x_2^k + x_3^k (k = 0, 1, 2, 3, 4)$, 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} s_0 & s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ s_2 & s_3 & s_4 \end{bmatrix}$$

证明:

$$\det \mathbf{A} = \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j)^2$$

证明. 注意到 \mathbf{A} 的 (i, j) 元为 s_{i+j-2} . 设

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$$

于是 $b_{ik} = x_k^{i-1}$, $c_{kj} = x_k^{j-1}$. 于是有

$$a_{ij} = x_1^{i+j-2} + x_2^{i+j-2} + x_3^{i+j-2} = \sum_{k=1}^3 b_{ik} c_{kj}$$

于是 $\mathbf{A} = \mathbf{BC}$, 因而

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{B} \det \mathbf{C} = \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j) \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j) = \prod_{1 \leq j < i \leq 3} (x_i - x_j)^2$$

□

习题 4.4

1 数量矩阵 $k\mathbf{I}$ 何时可逆? 何时不可逆? 当 $k\mathbf{I}$ 可逆时, 求其逆矩阵.

解. 有

$$\det k\mathbf{I} = k \det \mathbf{I} = k$$

于是当且仅当 $k \neq 0$ 时 $k\mathbf{I}$ 可逆, 否则不可逆. 当 $k \neq 0$ 时有

$$(k\mathbf{I})^{-1} = \frac{1}{k} \mathbf{I}$$

3(2) 判断下列矩阵是否可逆, 如果可逆则求出其逆矩阵:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

解.

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$$

于是 \mathbf{A} 可逆, 并且

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^* = - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4 证明: 如果 \mathbf{A} 可逆, 那么 \mathbf{A}^* 也可逆, 并求 $(\mathbf{A}^*)^{-1}$.

证明. 由于 \mathbf{A} 可逆, 于是

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}^*$$

令 $\mathbf{B} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}$, 则有

$$\mathbf{B} \mathbf{A}^* = \frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A} (\det \mathbf{A}) \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

同理可证 $\mathbf{A}^* \mathbf{B} = \mathbf{I}$. 于是 \mathbf{A}^* 可逆, 其逆矩阵为 $\frac{1}{\det \mathbf{A}} \mathbf{A}$. □

5 证明: 如果 n 级方阵 \mathbf{A} 满足 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$, 那么 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 可逆, 并求出其逆矩阵.

证明. 由 $\mathbf{A}^3 = \mathbf{0}$ 可知

$$\mathbf{I}^3 - \mathbf{A}^3 = \mathbf{I}$$

于是

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})(\mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2) = \mathbf{I}$$

于是 $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ 可逆, 且 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \mathbf{A}^2$. □

7 证明: 如果 n 级矩阵 \mathbf{A} 满足 $2\mathbf{A}^4 - 5\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \mathbf{0}$, 那么 \mathbf{A} 可逆, 并求出 \mathbf{A}^{-1} .

证明. 由题意可知

$$-2\mathbf{I} = 2\mathbf{A}^4 - 5\mathbf{A}^2 + 4\mathbf{A} = \mathbf{A}(2\mathbf{A}^3 - 5\mathbf{A} + 4\mathbf{I})$$

于是

$$\mathbf{A} \left(-\mathbf{A}^3 + \frac{5}{2}\mathbf{A} - 2\mathbf{I} \right) = \mathbf{I}$$

于是 \mathbf{A} 可逆, 并且 $\mathbf{A}^{-1} = -\mathbf{A}^3 + \frac{5}{2}\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$. □

8 证明: 可逆的对称 (斜对称) 矩阵的逆依然是对称 (斜对称) 矩阵.

证明. 设 A 为对称矩阵, 则 $A = A^t$. 于是

$$A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$$

于是 A^{-1} 也是对称矩阵.

设 B 为斜对称矩阵, 则 $B = -B^t$. 于是

$$B^{-1} = (-B^t)^{-1} = (-B^{-1})^t$$

于是 B^{-1} 也是斜对称矩阵. □

9(1) 求下列矩阵的逆:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

解. 有

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

于是题设矩阵的逆矩阵为

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{13}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

10(2) 解下列矩阵方程:

$$X \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 首先有

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{6}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{7} & \frac{16}{7} & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$$

于是

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -2 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 1 \\ -2 & 16 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{7} & \frac{20}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} & \frac{57}{7} & \frac{20}{7} \end{bmatrix}$$