

北京大学数学科学学院 2025-26 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(13') 将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$$

化为规范型, 写出其正惯性指数和负惯性指数.

解. 该二次型的矩阵为

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

对 $\begin{bmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}$ 的上半部分做成对行列变换, 下半部分做对应的列变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

令

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, x_2, x_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$$

其正惯性指数为 3, 负惯性指数为 0.

直接配方应当也可以.

2(18') 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 \mathbf{A} 的逆.

(2) 求 \mathbf{A} 的特征值.

(3) 判断 A 是否可对角化.

解.

(1) 对 $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ 做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

于是

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

(2) 注意到 $A^{-1} = \frac{1}{4}A$, 于是

$$A^2 = 4I$$

设 A 的特征值为 λ , 对应的一个特征向量为 x , 则有

$$0 = (A^2 - 4I)x = A(Ax) - 4Ix = A(\lambda x) - 4x = (\lambda^2 - 4)x$$

由于 $x \neq 0$, 于是 $\lambda^2 - 4 = 0$, 于是 $\lambda = \pm 2$. 于是 A 的特征值为 2 和 -2.

(3) 注意到 A 是实对称矩阵, 而实对称矩阵都可以正交对角化, 所以 A 可对角化.

3(20') 设线性空间 V 是由所有形如

$$\begin{bmatrix} a & -b & c & d \\ b & a & d & -c \\ -c & -d & a & -b \\ -d & c & b & a \end{bmatrix}$$

的 4×4 矩阵和矩阵的加法和数量乘法构成的线性空间. 设矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

定义线性映射 $f: V \rightarrow V$ 为 $f(X) = AX$ 对所有 $X \in V$ 成立.

(1) 写出 V 的一组基.

(2) 求出 f 在上述基下的矩阵.

解.

(1) V 的一组基为

$$\mathbf{E}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(2) 经过计算有

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{E}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_2, & \mathbf{A}\mathbf{E}_2 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -\mathbf{E}_1 \\ \mathbf{A}\mathbf{E}_3 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_4, & \mathbf{A}\mathbf{E}_4 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{E}_3 \end{aligned}$$

于是 f 在上述基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4(10') 设 $\mathbf{A} = (a_{ij})$ 和 \mathbf{B} 分别是 m 级方阵和 p 级方阵. 定义 mp 级方阵

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

(1) 证明: 如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 可逆, 那么 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 也可逆.

(2) 证明: 如果 \mathbf{A} 和 \mathbf{B} 是对称矩阵且正定, 那么 $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ 也是正定矩阵.

证明. 考虑 m 级方阵 $\mathbf{C} = (c_{ij})$ 和 p 级方阵 \mathbf{D} . 于是

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1m}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mm}\mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11}\mathbf{D} & \cdots & c_{1p}\mathbf{D} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1}\mathbf{D} & \cdots & c_{pp}\mathbf{D} \end{bmatrix}$$

根据分块矩阵的乘法可知上述矩阵的第 (i, j) 个块为

$$\sum_{k=1}^m a_{ik} c_{kj} B D$$

于是

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD)$$

注意到

$$(A \otimes B)(A^{-1} \otimes B^{-1}) = (AA^{-1}) \otimes (BB^{-1}) = I_m \otimes I_p = I_{mp}$$

于是 $A \otimes B$ 可逆, 其逆为 $A^{-1} \otimes B^{-1}$.

(2) 由于 A, B 都是正定矩阵, 于是存在 m 级可逆矩阵 P 和 p 级可逆矩阵 Q 使得

$$P^t A P = C = \text{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_m\}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$$

$$Q^t B Q = D = \text{diag}\{\mu_1, \dots, \mu_p\}, \quad \mu_1, \dots, \mu_p > 0$$

由于 P, Q 均可逆, 于是根据上一问的结论, $P \otimes Q$ 也可逆. 于是

$$(P \otimes Q)^t (A \otimes B) (P \otimes Q) = (P^t A P) \otimes (Q^t B Q) = C \otimes D$$

依照定义, $C \otimes D$ 是分块对角矩阵, 每个对角块 $\lambda_i D$ 是对角元为 $\lambda_i \mu_j$ 的对角矩阵. 而 $\lambda_i \mu_j > 0$, 于是 $C \otimes D$ 是对角元全为正数的对角矩阵. 从而 $A \otimes B$ 正定.

□

5(10') 设 n 级方阵 A 满足

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall k = 1, \dots, n$$

证明: 存在可逆的 n 级下三角矩阵 B 使得 BA 为上三角矩阵.

证明. 这是矩阵的 LU 分解.

对 A 的阶数 n 做归纳. 当 $n = 1$ 时, 令 $B = I$ 即可使命题成立.

当 $n \geq 2$ 时, 对 A 分块如下:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & u \\ v^t & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其中 A_1 是 A 的前 $n-1$ 行和 $n-1$ 列构成的子矩阵, 并且根据题设可知 A_1 可逆. 依归纳假设, 存在可逆的 B_1 使得 $B_1 A_1$ 为上三角矩阵. 考虑

$$\begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & u \\ v^t & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 A_1 & B_1 u \\ v^t & a_{nn} \end{bmatrix}$$

为了使右边的矩阵成为上三角矩阵, 考虑分块行列变换

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -v^t A_1^{-1} B_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 A_1 & B_1 u \\ v^t & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 A_1 & B_1 u \\ 0 & a_{nn} - v^t A_1^{-1} u \end{bmatrix}$$

由于 $B_1 A_1$ 是上三角矩阵, 因此上述等式右端的矩阵即为上三角矩阵. 令

$$B = \begin{bmatrix} I & 0 \\ -v^t A_1^{-1} B_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

B 是两个可逆下三角矩阵的乘积, 因此也是可逆的下三角矩阵. 根据前面的证明, BA 为上三角矩阵. 于是归纳可知命题成立. \square

6(10') 设 n 级实方阵 A 的特征多项式可以写成一次多项式的乘积, 证明: A 与某一下三角矩阵相似.

证明. 对 A 的阶数 n 进行归纳. 当 $n = 1$ 时, 命题显然成立.

当 $n \geq 2$ 时, 考虑 A 的一个特征值 λ 和对应的特征向量 α , 将 α 扩充为 \mathbb{K}^n 的一组基, 并据此构造可逆矩阵 P 使得其第一列为 α . 于是有

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ x^t & X \end{bmatrix}$$

这里 X 是 $n-1$ 级方阵. 由于 A 与 $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ x^t & X \end{bmatrix}$ 相似, 因此它们有相同的特征多项式, 所以

$$\det(\mu I - A) = \det\left(\mu I - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ x^t & X \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} \mu - \lambda & 0 \\ -x^t & \mu I - X \end{bmatrix} = (\mu - \lambda) \det(\mu I - X)$$

左边的式子是一次项的乘积, 因而 $\det(\mu I - X)$ 也是一次项的乘积. 根据归纳假设, 存在 $n-1$ 级可逆矩阵 Q 和 $n-1$ 级下三角矩阵 U 使得

$$X = QUQ^{-1}$$

于是

$$A = P \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ Q^{-1}x^t & U \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$$

令

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{bmatrix} P^{-1}$$

则 RAR^{-1} 为下三角矩阵. \square

7(10') 设 n 级半正定对称矩阵 A 的秩为 2, 证明: 存在线性无关的 n 维列向量 α, β 使得

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^t$$

证明. 由于 A 的秩为 2 且半正定, 因此存在 n 级可逆矩阵 P 使得

$$A = P \operatorname{diag}\{\lambda, \mu, 0, \dots, 0\} P^t, \quad \lambda, \mu \geq 0$$

设 P 的前两列向量分别为 p_1, p_2 , 则有

$$A = \lambda p_1 p_1^t + \mu p_2 p_2^t$$

设 $\alpha = \sqrt{\lambda} p_1, \beta = \sqrt{\mu} p_2$, 则

$$A = \alpha^t \alpha + \beta^t \beta = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \end{bmatrix}^t$$

□

8(9') 设 \mathcal{A} 是线性空间 V 上的线性映射. 设 $\alpha \in V$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$\mathcal{A}^n(\alpha) \neq 0, \quad \mathcal{A}^{n+1}(\alpha) = 0$$

证明: 向量组 $\alpha, \mathcal{A}(\alpha), \mathcal{A}^2(\alpha), \dots, \mathcal{A}^n(\alpha)$ 线性无关.

证明. 考虑 k_0, \dots, k_n 使得

$$k_0 \alpha + k_1 \mathcal{A}(\alpha) + \dots + k_n \mathcal{A}^n(\alpha) = 0$$

在两边作用 n 次 \mathcal{A} 并将 $\mathcal{A}^{n+1}(\alpha) = 0$ 代入可得

$$k_0 \mathcal{A}^n(\alpha) = 0$$

而 $\mathcal{A}^n(\alpha) \neq 0$, 于是 $k_0 = 0$.

在两边作用 $n-1$ 次 \mathcal{A} 可得

$$k_0 \mathcal{A}^{n-1}(\alpha) + k_1 \mathcal{A}^n(\alpha) = 0$$

由于 $k_0 = 0$ 且 $\mathcal{A}^{n-1}(\alpha) \neq 0$, 于是 $k_1 = 0$.

依次在两边作用 i 次 \mathcal{A} 可证得 $k_{n-i} = 0$. 于是上式成立当且仅当 $k_1 = \dots = k_n = 0$, 从而题设向量组线性无关.

□