线性代数 B 第三次作业

蒋锦豪 2400011785

习题 3.1

3(1) 在 K^4 中, 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 能否用向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出. 如果可以, 写出一种表出方式.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} 8 \\ 3 \\ -1 \\ -25 \end{bmatrix}$$

解. 考虑方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}$$

其对应的线性方程组增广矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ -5 & -3 & 6 & -25 \end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换有

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -11 & 27 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & -13 & 26 & -65 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & -1 & -9 & 28 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 7 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -11 & 33 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 2 & -4 & 8 \\ 0 & 1 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非零行数目与未知量数目均为 3, 因此原方程的唯一解为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是

$$\boldsymbol{\beta} = 2\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 - 3\boldsymbol{\alpha}_3$$

并且表出方式唯一.

5 在 K^4 中, 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

试证明:K^4 中的任意向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3 & a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 都可以由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出, 并且表出方式唯一; 写出这种表出方式.

解. 考虑方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\alpha}$$

其对应的线性方程未知数数目与方程数目相等, 其系数矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

于是

$$\det\boldsymbol{A}=1\neq 0$$

因此原方程有唯一解, 从而表出方式唯一. 解这个线性方程, 不难得到解为

$$\begin{bmatrix}a_1-a_2\\a_2-a_3\\a_3-a_4\\a_4\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是表出方式为

$$\boldsymbol{\alpha}=(a_1-a_2)\,\boldsymbol{\alpha}_1+(a_2-a_3)\,\boldsymbol{\alpha}_2+(a_3-a_4)\,\boldsymbol{\alpha}_3+a_4\boldsymbol{\alpha}_4$$

6 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都能由这个向量组线性表出.

解. 注意到

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\lambda_{i1}\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_{i2}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_{is}\boldsymbol{\alpha}_s$$

其中

$$\lambda_{ii}=1,\quad \lambda_{ij}=0(j\neq i)$$

于是命题得证.

习题 3.2

1 下面的说法正确吗? 为什么?

(1) 如果有 $k_1 = k_2 = \cdots = k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha} + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(2) 如果有一组不全为 0 的数 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s \neq \mathbf{0}$$

那么向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(3) 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 那么对其中任一向量 $\boldsymbol{\alpha}_i$, 都可以由其余向量线性表出.

解.

(1) 错误. 对于任意向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 都有

$$0\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_s = \mathbf{0}$$

无论 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 是否线性无关.

(2) 错误. 考虑线性相关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$, 并且 $\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$. 于是存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} = \mathbf{0}$$

现在令 $\alpha_{\mathrm{s}} = \mathbf{2}\boldsymbol{\alpha}_\mathbf{1}$, $k_s = 1$, 于是

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s = 2\boldsymbol{\alpha}_1 \neq \mathbf{0}$$

而 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(3) 错误. 当 $s > 1$ 时, 考虑线性无关的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$, 令 $\boldsymbol{\alpha}_s = 2\boldsymbol{\alpha}_1$, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关. 然而, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_2$ 能由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 意味着存在不全为 0 的 $k_1, k_3, \cdots, k_s$ 使得

$$\boldsymbol{\alpha}_2 = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

于是

$$(k_1 + 2k_s)\,\boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 + \cdots + k_{s-1}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} = \mathbf{0}$$

这与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性无关矛盾.

2(3) 判断下列向量组是否线性相关, 如果相关, 请写出其中一个向量由其余向量线性表出的式子.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ -13 \\ 20 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解. 考虑方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_3$$

其对应线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 5 & 6 \\ 2 & -7 & 1 \end{vmatrix} = 160 \neq 0$$

于是方程组有唯一解, 即题述向量组线性相关. 对方程组的增广矩阵做初等行变换有

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 & 7 \\ -1 & 5 & 6 & -13 \\ 2 & -7 & 1 & 20 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 & -13 \\ 0 & 16 & 16 & -32 \\ 0 & 3 & 13 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 5 & 6 & -13 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & 0 \end{bmatrix}$$

于是原方程组的唯一解为

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

即

$$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 - 2\boldsymbol{\alpha}_2$$

4 证明: 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 那么向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1$ 也线性无关.

证明. 采用反证法. 如果向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关, 那么存在非零的 k_1, k_2, k_3 使得

$$k_1\left(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2\right) + k_2\left(\boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3\right) + k_3\left(4\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1\right) = \mathbf{0}$$

即

$$\left(2k_1 + 3k_3\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(k_1 + k_2\right) + \left(5k_2 + 4k_3\right)\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 上式成立当且仅当

$$2k_1 + 3k_3 = k_1 + k_2 = 5k_2 + 4k_3 = 0$$

这相当于一个齐次线性方程组, 其系数行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 4 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

于是原方程只有零解, 这与 k_1, k_2, k_3 不全为 0 矛盾. 于是向量组 $2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + 5\boldsymbol{\alpha}_3, 4\boldsymbol{\alpha}_3 + 3\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性无关. □

5 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 判断向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关.

解. 注意到

$$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=(\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3)+(\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_1)-(\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4)$$

于是上述向量组线性相关.

6 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 向量 $\boldsymbol{\beta}=b_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+b_s\boldsymbol{\alpha}_s$. 试证明: 如果某个 $b_i \neq 0$, 那么用 $\boldsymbol{\beta}$ 替换 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 后得到的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 仍然线性无关.

证明. 采用反证法. 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 那么存在不全为 0 的 $k_1, \cdots, k_s$ 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+k_i\boldsymbol{\beta}+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

将 $\boldsymbol{\beta}$ 的定义代入上式有

$$(k_1+k_ib_1)\,\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_ib_i\boldsymbol{\alpha}_i+\cdots+(k_n+k_ib_n)\,\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

如果 $k_i=0$, 就有

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+\cdots+k_{i-1}\boldsymbol{\alpha}_{i-1}+0\boldsymbol{\alpha}_i+k_{i+1}\boldsymbol{\alpha}_{i+1}+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s=\mathbf{0}$$

并且由于 $k_1, \cdots, k_s$, 这意味着 $k_1, \cdots, k_{i-1}, k_{i+1}, \cdots, k_s$ 不全为 0. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 矛盾.
如果 $k_{i\neq 0}$, 并且由于 $b_i \neq 0$, 于是 $k_1+k_ib_1, \cdots, k_ib_i, \cdots, k_s+k_ib_s$ 不全为零, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 矛盾.
综上所述, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{i-1}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\alpha}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关. □

7 设 $a_1, \cdots, a_r$ 是两两不同的数, $r \leqslant n$. 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\a_1\\\vdots\\a_1^{n-1}\end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\a_2\\\vdots\\a_2^{n-1}\end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\alpha}_r=\begin{bmatrix}1\\a_r\\\vdots\\a_r^{n-1}\end{bmatrix}$$

证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关.

证明. 考虑两两不同的数 $a_{r+1}, \cdots, a_n$, 并且与 $a_1, \cdots, a_r$ 两两不同. 同样地令

$$\boldsymbol{\alpha}_i=\begin{vmatrix}1\\a_i\\\vdots\\a_i^{n-1}\end{vmatrix}(r<i\leqslant n)$$

由于以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 为列向量的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{bmatrix} = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i) \neq 0$$

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 所以向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 线性无关. □

习题 3.3

2 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 27 \\ -18 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix}$$

求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的一个极大线性无关组和秩.

解. 注意到 $\boldsymbol{\alpha}_2 = 9\boldsymbol{\alpha}_1$. 考虑 k_1,k_3 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

考虑第三个分量就有 $0k_1+8k_3=0$, 于是 $k_3=0$, 进而 $3k_1=-2k_1=0$, 进而 $k_1=0$, 于是 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 于是原向量组的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$, 秩为 2.

3 证明: 秩为 r 的向量组中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一个极大线性无关组.

证明. 考虑这一 r 个向量构成的组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$. 如果在剩余的向量中存在一个向量 $\boldsymbol{\beta}$ 使得 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r,\boldsymbol{\beta}$ 线性无关, 那么原向量组的极大线性无关组的长度至少为 $r+1$. 这与向量组的秩为 r 矛盾, 从而 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_r$ 是原向量组的极大线性无关组. □

4 证明:K^n 中任意线性无关的向量组所含向量的个数不超过 n.

证明. 考虑 K^n 中的向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\beta}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

由于以 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 为列向量的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

于是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关.

对于给定的 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$, 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$. 由于任意

$$\boldsymbol{\alpha}_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \boldsymbol{\beta}_j$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 是上述向量组的极大线性无关组, 于是上述向量组的秩为 n. 进而, 如果 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 那么它所含的向量数目不能大于 n, 命题得证. □

5 证明: 在 K^n 中, 如果向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 那么任意 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ 都可由上述向量组线性表出.

证明. 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$. 由**习题 3.3.4** 可知上述向量组线性相关 (这向量组所含的向量数目 $n + 1 > n$). 于是存在非零的 $k_1, \cdots, k_n, b$ 使得

$$k_1 \boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s \boldsymbol{\alpha}_s + b \boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}$$

如果 $b = 0$, 这意味着向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性相关, 与题意矛盾. 于是 $b \neq 0$, 进而

$$\boldsymbol{\beta} = -\frac{k_1}{b} \boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_n}{b} \boldsymbol{\alpha}_n$$

于是 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 命题得证. □

6 证明: 在 K^n 中, 如果任意 $\boldsymbol{\beta} \in K^n$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 那么上述向量组线性无关.

证明. 考虑 K^n 中的向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \cdots, \quad \boldsymbol{\beta}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

在**习题 3.3.4** 已经证明 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性无关, 并且任意 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 线性表出. 同样, 根据题意可知任意 $\boldsymbol{\beta}_j$ 都可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_n$ 等价, 因而具有相同的秩 n. 于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. □

7 证明: 如果秩为 r 的向量组可以由它的 r 个向量线性表出, 则这 r 个向量构成这个向量组的一个极大线性无关组.

证明. 记原向量组为 $\mathcal{A}$, 这 r 个向量构成的向量组为 $\mathcal{R}$. 显然, $\mathcal{R}$ 可以由 $\mathcal{A}$ 表出. 由题意, $\mathcal{A}$ 也可以由 $\mathcal{R}$ 线性表出. 于是 $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{R}$ 等价. 因而 $\mathcal{R}$ 的秩也为 r, 于是 $\mathcal{R}$ 线性无关. 又因为 $\mathcal{A}$ 中除去 $\mathcal{R}$ 的其它向量都可以由 $\mathcal{R}$ 线性表出, 于是 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{A}$ 的极大线性无关组. □

9 证明: 对于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 总有

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\} \leqslant \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} + \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\}$$

证明. 考虑向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 各自的一个极大线性无关组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p$ 和 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$, 则有

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = p, \quad \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\} = q$$

依定义, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r$ 中的所有向量都能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q$ 线性表出. 于是

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_r\} \leqslant \operatorname{rank}\left\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_p, \boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_q\right\} \leqslant p + q$$

于是命题得证. □