1 n 维向量空间

例题 1.1 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\3\\-5\\-9\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\\-4\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}-3\\5\\1\\-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}-4\\6\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}-5\\-1\\11\\17\end{pmatrix}$$

1. 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

2. 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 如果可以, 给出所有的线性表出方式.

解. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\3&-1&5&6\\-5&-3&1&2\\-9&-4&-1&0\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\0&-7&14&18\\0&7&-14&-18\\0&-7&14&18\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4\\0&-7&14&18\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是上述向量组的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

考虑方程

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3+x_4\boldsymbol{\alpha}_4=\boldsymbol{\beta}$$

对应线性方程组的增广矩阵

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\3&-1&5&6&-1\\-5&-3&1&2&11\\-9&-4&-1&0&17\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\0&-7&14&18&14\\0&7&-14&-18&-14\\0&-7&14&18&14\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&2&-3&-4&-5\\0&-7&14&18&14\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}$$

于是原方程组的解为

$$\begin{cases} x_1 = -1 - x_3 - \dfrac{8}{7}x_4 \\ x_2 = -2 + 2x_3 + \dfrac{18}{7}x_4 \end{cases}$$

因此 $\boldsymbol{\beta}$ 可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出, 且所有的线性表出方式为

$$\boldsymbol{\beta} = -\left(1 + a + \frac{8}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_1 + \left(-2 + 2a + \frac{18}{7}b\right)\boldsymbol{\alpha}_2 + a\boldsymbol{\alpha}_3 + b\boldsymbol{\alpha}_4, \quad a, b \in \mathbb{K}$$

例题 1.2 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

求 x, y, z 使得 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组与 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & -2 & -2 & z-x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & 0 & 8 & 5x-2y+z \end{bmatrix}$$

例题 1.3 求 λ 的值使矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩最小.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 20 & 50 & 5 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 12-\lambda & 30-\lambda & 3-4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & \lambda & \lambda & 4\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 10 & 1 \\ 0 & 0 & -2\lambda & 5\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $\lambda = 0$ 时, 矩阵的秩为 2, 否则矩阵的秩为 3. 于是 $\lambda = 0$.

例题 1.4 设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 令

$$\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+3\boldsymbol{\alpha}_3+4\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4,$$

$$\boldsymbol{\beta}_3=3\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_2+1\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_4,\quad \boldsymbol{\beta}_4=4\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3+3\boldsymbol{\alpha}_4.$$

判断向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 是否线性无关.

解. 假定向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性相关, 于是存在不全为 0 的 k_1,k_2,k_3,k_4 使得

$$k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+k_3\boldsymbol{\beta}_3+k_4\boldsymbol{\beta}_4=\mathbf{0}$$

即

$$\begin{aligned}&(k_1+2k_2+3k_3+4k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_1+(2k_1+3k_2+4k_3+k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_2\\&+(3k_1+4k_2+k_3+2k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_3+(4k_1+k_2+2k_3+3k_4)\,\boldsymbol{\alpha}_4=\mathbf{0}\end{aligned}$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关, 于是

$$\begin{cases}k_1+2k_2+3k_3+4k_4=0\\2k_1+3k_2+4k_3+k_4=0\\3k_1+4k_2+k_3+2k_4=0\\4k_1+k_2+2k_3+3k_4=0\end{cases}$$

这线性方程组的系数行列式为

$$\begin{vmatrix}1&2&3&4\\2&3&4&1\\3&4&1&2\\4&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&1\\1&4&1&2\\1&1&2&3\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&2&3&4\\0&1&1&-3\\0&2&-2&-2\\0&-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\2&-2&-2\\-1&-1&-1\end{vmatrix}=10\begin{vmatrix}1&1&-3\\0&-4&4\\0&0&-4\end{vmatrix}=160\neq 0$$

于是原方程仅有零解, 即 $k_1=k_2=k_3=k_4=0$, 这与 k_1,k_2,k_3,k_4 不全为 0 矛盾. 于是向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3,\boldsymbol{\beta}_4$ 线性无关

例题 1.5 设向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}3\\-1\\2\\-5\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}4\\3\\7\\2\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\4\\5\\-3\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}7\\-1\\2\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_5=\begin{pmatrix}1\\2\\5\\6\end{pmatrix}$$

1. 证明: $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

2. 将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 扩充为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组.

解. 考虑向量

$$\boldsymbol{\beta}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

以 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 为列向量的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 线性无关, 因而它们的延伸组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

注意到 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_1$. 将 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 加入 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 中, 考虑前三个分量有

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 2 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -52 \neq 0$$

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 将 $\boldsymbol{\alpha}_5$ 加入 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 中, 有

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & 7 & 1 \\ -1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & 7 & 2 & 5 \\ -5 & 2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 13 & 4 & 7 & -11 \\ \frac{13}{2} & 3 & -1 & -7 \\ \frac{39}{2} & 7 & 2 & -16 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \frac{13}{2} \cdot (-1)^{2+4} \begin{vmatrix} 2 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 3 & 2 & -16 \end{vmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 2 & 7 & -11 \\ 1 & -1 & -7 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 780 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关. 根据前面的讨论, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 即 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_5$ 的一个极大线性无关组.

例题 1.6