1 矩阵的相抵与相似

1.1 矩阵的相抵

定义 1.1 矩阵的相抵 对于 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行列变换能变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相抵**的, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

考虑相抵的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 这意味着存在一系列 s 级初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_t$ 和 n 级初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_r$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_t \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_r$$

即存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

定理 1.2 相抵的判断条件 I $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

定义 1.3 相抵标准型 设 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵

$$\boldsymbol{H}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{s \times n}$$

相抵, 其中 $r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{H}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相抵标准型**.

不难看出, 任意矩阵的相抵标准型是唯一的. 于是立即可以得到下面的推论:

定理 1.4 相抵的判断条件 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

于是可以得到下面的推论:

定理 1.5 矩阵的相抵标准型分解 设 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}$$