北京大学数学科学学院 2023-24 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1(15') 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ x & -2 & 0\\ -1 & -1 & y\end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0 & z\\ 0 & -1 & 0\\ z & 0 & 0\end{bmatrix}$ 相似.

(1) 求 x,y,z 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}$.

(3) 求 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 $m\in\mathbb{N}^+$.

2(10') 设 $t\in\mathbb{R}$, 求实二次型

$$q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$$

的秩和正惯性指数.

3(10') 求 a 满足的条件使得实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

正定.

4(10') 设 $V=\mathbb{K}^5$, $V_1=\mathrm{span}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $V_2=\mathrm{span}(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\1\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\2\\1\\1\\-1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}3\\1\\2\\4\\6\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\3\\4\\6\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\-1\\2\end{bmatrix}$$

分别求 V_1+V_2, $V_1\cap V_2$ 的维数和一个基.

5(15') 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in M_n(\mathbb{K})$ 是 n 级矩阵, 其中 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})$ 是严格上三角矩阵, 满足 $i\geqslant j$ 时 $b_{ij}=0$. 令

$$f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{B},\quad \forall \boldsymbol{X}\in M_n(\mathbb{K})$$

(1) 证明 f 是 $M_n(\mathbb{K})$ 上的一个线性变换.

(2) 求 f 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{21},\cdots,\boldsymbol{E}_{n1},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{22},\cdots,\boldsymbol{E}_{n2},\cdots,\boldsymbol{E}_{nn}$ 下的矩阵, 这里 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是只有 (i,j) 元为 1, 其余元素为 0 的基本矩阵.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明: 对任意 $\boldsymbol{C}\in M_n(\mathbb{K})$, 存在唯一的 $\boldsymbol{X}$ 使得 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{C}$.

6(14') 设 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 证明: 存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及 n 级矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{PQ}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{QP}$.

(2) 如果把前提条件 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值去掉, 上一小题的结论是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请给出反例.

7(10') 设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D} \in M_n(\mathbb{K})$ 两两可交换, 且满足 $\boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BD} = \boldsymbol{I}$. 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 V, $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 V_1, $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解空间为 V_2. 证明: $V = V_1 \oplus V_2$.

8(16') 考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}[x]_3 = \{a + bx + cx^2 : a, b, c \in \mathbb{R}\}$, 其上内积的定义为

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(1) 求 α, β, γ 的值使得下述向量组是正交基:

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = \alpha + x, \quad p_3(x) = \beta + \gamma x + x^2$$

(2) 求二次首一多项式 $r(x) = a + bx + x^2$ 的长度最小值.