# 北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期中试题

**1** 求下列行向量构成的向量组的秩和一个极大线性无关组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

解. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 为列向量构成的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 并对其做初等行变换有

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 21 & 10 & 3 \\ 0 & 10 & 7 & 0 \\ 0 & 17 & 8 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 29 & -26 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 18 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -176/9 \end{bmatrix}$$

于是题设向量组的秩为 4, 其极大线性无关组即为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.

**2** 下述齐次线性方程组何时有非零解? 何时只有零解?

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 - 4x_3 = 0 \\ 4x_1 - 9x_2 + ax_3 = 0 \\ 5x_1 + bx_2 - 55x_3 = 0 \end{cases}$$

解. 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 2 & -7 & -4 \\ 4 & -9 & a \\ 5 & b & -55 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -5 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & a+20 \\ 0 & b+15 & -30 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -23 \\ 0 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & a+38 \\ 0 & 0 & 6b+60 \end{bmatrix}$$

当且仅当 $a = -38$ 且 $b = -10$ 时原方程有非零解, 否则原方程仅有零解.

**3** 计算下面的行列式:

$$A_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix}$$

解. 我们有

$$A_n = \begin{vmatrix} 1-\frac{1}{2}-\cdots-\frac{1}{n} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = \left(1-\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}\right)\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{vmatrix} = n!\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i}$$

**4** 已知

$$\begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

求

$$\begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ y-x & 2-y & x-z & 2-x-y-z \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

解. 首先有

$$\frac{1}{2} = \begin{vmatrix} x & y & z & x+y+z \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

观察待求行列式的形式, 将第一行加到第三行上可得

$$代求行列式 = \begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} x-y & y & z-x & x+y+z \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

**5** 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \geqslant \operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\ \boldsymbol{B}$$

证明. 记不等式左边的矩阵为 $\boldsymbol{M}$. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的阶数最高的非零子式对应的矩阵 $\boldsymbol{A}'$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的阶数最高的子式对应的矩阵 $\boldsymbol{B}'$. 设两者的阶数分别为 $s, r$, 则有

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A}' = s, \quad \operatorname{rank} \boldsymbol{B}' = r$$

现在把 $\boldsymbol{A}', \boldsymbol{B}'$ 在 $\boldsymbol{M}$ 中对应的行和列选出构成 $\boldsymbol{M}$ 的一个子矩阵 $\boldsymbol{M}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{B}' \end{bmatrix}$, 则有

$$\det \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}' & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C}' & \boldsymbol{B}' \end{bmatrix} = \det \boldsymbol{A}' \cdot \det \boldsymbol{B}' \neq 0$$

于是矩阵 $\boldsymbol{M}$ 至少有一个阶数为 $s+r$ 的非零子式. 因此有

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{bmatrix} \geqslant s + r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

□

**6** 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 但不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}\}$$

证明. 只需证明两个向量组等价即可. 记

$$\mathcal{A} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\}, \quad \mathcal{B} = \{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}\}$$

由题意, 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\mathcal{A}$ 线性表出, 因此设

$$\boldsymbol{\beta} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_s\boldsymbol{\alpha}_s$$

对于 $\mathcal{B}$ 中的前 $s-1$ 个向量, 都有

$$\boldsymbol{\alpha}_i = 0\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{i-1} + \boldsymbol{\alpha}_i + 0\boldsymbol{\alpha}_{i+1} + \cdots + 0\boldsymbol{\alpha}_{s-1}, \quad i = 1, \cdots, s-1$$

于是 $\mathcal{B}$ 中的前 $s-1$ 个向量能由 $\mathcal{A}$ 线性表出. 同理,$\mathcal{A}$ 中的前 $s-1$ 个向量能由 $\mathcal{B}$ 线性表出.
现在, 由于 $\boldsymbol{\beta}$ 能由 $\mathcal{A}$ 线性表出, 因此 $\mathcal{B}$ 能由 $\mathcal{A}$ 线性表出.
由于 $\boldsymbol{\beta}$ 不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出, 因此 $k_s \neq 0$. 于是对前述式子做变换可得

$$\boldsymbol{\alpha}_s = -\frac{k_1}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_1 - \cdots - \frac{k_{s-1}}{k_s}\boldsymbol{\alpha}_{s-1} + \frac{1}{k_s}\boldsymbol{\beta}$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_s$ 能由 $\mathcal{B}$ 线性表出, 从而 $\mathcal{A}$ 能由 $\mathcal{B}$ 线性表出.
于是两者是等价的向量组, 因此有

$$\operatorname{rank} \mathcal{A} = \operatorname{rank} \mathcal{B}$$

□

**7** 矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 3 & 2 & 1 & y \\ 1 & -1 & 0 & z \end{bmatrix}$$

的行向量组何时与矩阵

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

的行向量组等价?

解. 设题设矩阵分别为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$. 由于对矩阵做初等行变换, 行向量组仍然等价, 于是对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & -2 & -2 & z-x \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & -1 & -5 & y-3x \\ 0 & 0 & 8 & 5x-2y+z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & x \\ 0 & 1 & 5 & 3x-y \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5x-2y+z}{8} \end{bmatrix}$$
$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -\frac{2x-4y+2z}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{x-2y+5z}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5x-2y+z}{8} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{x-2y-3z}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{x-2y+5z}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5x-2y+z}{8} \end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{B} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 & 14 \\ 0 & 2 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{cases} x-2y-3z=-8 \\ x-2y+5z=-48 \\ 5x-2y+z=8 \end{cases}$$

解得

$$x=9, \quad y=16, \quad z=-5$$

于是当且仅当 $x=9, y=16, z=-5$ 时上述两个矩阵的行向量组等价.

**8** 设 $n$ 个方程的 $n$ 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 0, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的 $(k,l)$ 元的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$. 试证明:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} A_{k1} \\ A_{k2} \\ \vdots \\ A_{kn} \end{bmatrix}$$

是该齐次线性方程组的一个基础解系.

证明. 先将 $\boldsymbol{\eta}$ 代入方程验证成立性. 考虑方程的第 $i$ 行 $(i \neq k)$ 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

根据代数余子式的性质, 上式总是成立.

考虑方程的第 $k$ 行有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} A_{kj} = \det \boldsymbol{A} = 0$$

于是 $\boldsymbol{\eta}$ 为方程的一个解.

由于 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 并且 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 阶非零子式 $A_{kl}$, 于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1$. 从而方程的解空间 $W$ 的维数

$$\dim\ W = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n - (n-1) = 1$$

又因为 $\boldsymbol{\eta} \in W$, 从而 $W$ 中的所有向量必须可由 $\boldsymbol{\eta}$ 线性表出. 于是 $\boldsymbol{\eta}$ 为该方程组的一个基础解系. □

**9** 已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

的解都是方程

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$$

的解. 证明:$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是上述方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量.

证明. 考虑上述方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和下面的方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{B}$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \\ b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0 \end{cases}$$

设题设方程组的解集为 $W_A$, 上述方程组的解集为 $W_B$. 由题意可知 $W_A \subseteq W_B$, 于是

$$\dim W_A \leqslant \dim W_B$$

由齐次线性方程组解集的维数与系数矩阵的秩的关系可得

$$\dim W_A = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A}, \quad \dim W_B = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{A} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 包含 $\boldsymbol{A}$, 于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} \geqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$$

于是

$$\operatorname{rank} \boldsymbol{B} = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$$

于是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 与向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\beta}$ 具有相同的秩. 因此,$\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出. □