1 矩阵的相抵与相似

1.1 矩阵的相抵

定义 1.1 矩阵的相抵 对于 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$, 如果 $\boldsymbol{A}$ 经过一系列初等行列变换能变为 $\boldsymbol{B}$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相抵**的, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

考虑相抵的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$, 这意味着存在一系列 s 级初等矩阵 $\boldsymbol{P}_1, \cdots, \boldsymbol{P}_t$ 和 n 级初等矩阵 $\boldsymbol{Q}_1, \cdots, \boldsymbol{Q}_r$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}_t \cdots \boldsymbol{P}_1 \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1 \cdots \boldsymbol{Q}_r$$

即存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$$

定理 1.2 相抵的判断条件 I $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}$.

定义 1.3 相抵标准型 设 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵

$$\boldsymbol{H}_r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}_{s \times n}$$

相抵, 其中 $r = \operatorname{rank} \boldsymbol{A}$, 则称 $\boldsymbol{H}_r$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**相抵标准型**.

不难看出, 任意矩阵的相抵标准型是唯一的. 于是立即可以得到下面的推论:

定理 1.4 相抵的判断条件 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相抵当且仅当 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = \operatorname{rank} \boldsymbol{B}$.

于是可以得到下面的推论:

定理 1.5 矩阵的相抵标准型分解 设 $\mathbb{K}$ 上的 $s \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 r, 则存在 s 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 和 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \boldsymbol{Q}$$

1.2 矩阵的相似

定义 1.6 矩阵的相似 设 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵, 如果存在 $\mathbb{K}$ 上的 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**相似**的, 记作 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$.

1.3 特征值与特征向量

定义 1.7 特征值与特征向量 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵, 如果 $\mathbb{K}^n$ 中存在非零向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha}, \quad \lambda \in \mathbb{K}$$

则称 λ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个**特征值**, 称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 λ 的一个**特征向量**.

定义 1.8 特征多项式 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵, 则称 $f(\lambda) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**特征多项式**.

定理 1.9 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵, 则 $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征值当且仅当 $f(\lambda_0) = 0$, 其中 f 是 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式.

证明. 根据线性方程组解与其行列式的关系有

$$\begin{aligned}
\lambda\text{是}\boldsymbol{A}\text{的一个特征值} &\Leftrightarrow \exists\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n\text{且}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}\text{使得}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} \\
&\Leftrightarrow \exists\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{K}^n\text{且}\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{0}\text{使得}\boldsymbol{\alpha}\text{是线性方程组}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{的一个非零解} \\
&\Leftrightarrow \text{线性方程组}(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\text{有非零解} \\
&\Leftrightarrow \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = 0 \\
&\Leftrightarrow \lambda\text{是特征多项式}f(\lambda) = \det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\text{的一个根}
\end{aligned}$$

□

定理 1.10 相似的矩阵具有相同的特征多项式.

证明. 假定矩阵 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$, 并且有可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, □

1.4 矩阵可对角化的条件

定义 1.11 可对角化 如果 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与某个对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 相似, 则称 $\boldsymbol{A}$ 是**可对角化**的.

定理 1.12 矩阵可对角化的条件 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 并且此时令

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\}$$

其中 λ_i 是 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 对应的特征值, 则有 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$.

证明.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D} &\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{D} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix}\boldsymbol{D} \\
&\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \lambda_n\boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_i = \lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n
\end{aligned}$$

并且由于 $\boldsymbol{P}$ 是可逆矩阵, 于是其列向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关. 于是就证明了上述命题. □

定理 1.13 则对应于 $\mathbb{K}$ 上的 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值的特征向量线性无关.