

Mid-Term Exam Review

夜未央

2025 年 10 月 26 日

1 行列式

例题 1.1 设矩阵 $A_{n \times n}$ 的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij} = \begin{cases} x, & |i - j| = 2 \\ 0, & |i - j| \neq 2 \end{cases}$$

求 $\det A$.

例题 1.2 设矩阵 $A_{n \times n}$ 的元素 a_{ij} 满足 $a_{ij} = (a_i + b_j)^{n-1}$, 求 $\det A$.

例题 1.3 设矩阵 $A_{n \times n}$ 的元素 a_{ij} 满足

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 + \cos(\theta_i - \varphi_j), & i = j \\ \cos(\theta_i - \varphi_j), & i \neq j \end{cases}$$

求 $\det A$.

2 线性方程组的进一步理论

例题 2.1 设 \mathbb{R}^n 中的向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 向量组 $\alpha_1 - \lambda\alpha_2, \alpha_2 - \lambda\alpha_3, \dots, \alpha_s - \lambda\alpha_1$ 线性相关, 求实数 λ .

例题 2.2 若向量组 $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 并且

$$\beta_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} \alpha_j, \quad i = 1, \dots, t$$

证明: 向量组 β_1, \dots, β_t 线性无关当且仅当 c_{ij} 拼成的矩阵 C 行满秩.