1 n 维向量空间 K^n

1.1 向量空间及其子空间

定义 1.1 n 维向量空间 设 K 为数域, 则所有 n 维向量组成的集合

$$K^n = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \mid a_i \in K, i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

称为 n 维向量空间.

定义 1.2 子空间 如果 $U \subseteq K^n$ 满足

1. $\forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in U, \quad \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \in U$.
2. $\forall \boldsymbol{\alpha} \in U, k \in K, \quad k\boldsymbol{\alpha} \in U$.

则称 U 为 K^n 的一个子空间.

定义 1.3 张成空间 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的所有线性组合构成的集合 W 是 K^n 的一个子空间, 称为由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 张成的空间, 记为

$$W = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m \rangle$$

上述证明均略.

1.2 线性相关与线性无关

定义 1.4 线性相关 称 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 如果存在不全为零的数 $k_1, k_2, \cdots, k_m \in K$, 使得

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

定义 1.5 线性无关 称 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性无关, 如果

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + k_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + k_m\boldsymbol{\alpha}_m = \mathbf{0}$$

当且仅当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 0$.

显然,K^n 中的向量组要么线性相关, 要么线性无关.

1.3 极大线性无关组与向量组的秩

定义 1.6 极大线性无关组 设 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 线性相关, 则其中的一个线性无关子组, 且任一向量加入该子组后都变成线性相关, 称为该向量组的一个极大线性无关组.

定义 1.7 秩 设 K^n 中的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m$ 的一个极大线性无关组含 r 个向量, 则称 r 为该向量组的秩, 记为 $r(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_m)$.