北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 A 期中试题

1(20’) 计算下列行列式的值.

(1)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(3)

$$\begin{vmatrix} \frac{1-a_1^n b_1^n}{1-a_1 b_1} & \frac{1-a_1^n b_2^n}{1-a_1 b_2} & \cdots & \frac{1-a_1^n b_n^n}{1-a_1 b_n} \\ \frac{1-a_2^n b_1^n}{1-a_2 b_1} & \frac{1-a_2^n b_2^n}{1-a_2 b_2} & \cdots & \frac{1-a_2^n b_n^n}{1-a_2 b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1-a_n^n b_1^n}{1-a_n b_1} & \frac{1-a_n^n b_2^n}{1-a_n b_2} & \cdots & \frac{1-a_n^n b_n^n}{1-a_n b_n} \end{vmatrix}$$

2(18’) 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ -9 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} -5 \\ -1 \\ 11 \\ 17 \end{bmatrix}$$

(1) 求向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的一个极大线性无关组.

(2) 判断 $\boldsymbol{\beta}$ 是否可以被 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性表出. 如果可以, 请给出所有的表出方式.

3(10’) 求 λ 使得矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

的秩最小.

4(20') 设 $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 矩阵, 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间由向量 $\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 和 $\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 生成.

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 对应的简化阶梯形矩阵.

(2) 求以下空间的维数: **(a)** $\boldsymbol{A}$ 的列空间 $C(\boldsymbol{A})$; **(b)** $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 的列空间 $C\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right)$; **(c)** 齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解集 $N\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\right)$.

(3) 写出 **(2)** 中所有可以写出基的空间的一组基.

5(10') 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行线性无关, 前 r 列也线性无关, 证明: $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列构成的 r 阶子式非零.

6(10') 设 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 且齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 同解. 证明: $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的行向量组等价.

7(12') 设 $r\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$, $1\times r$ 向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $n\times 1$ 向量 $\boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}=a$ 且 $a\neq 0$. 令

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}-a^{-1}\left(\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{A}\right)$$

并记 $N(\boldsymbol{A}), N(\boldsymbol{B})$ 分别为齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$ 的解空间. 证明: $N(\boldsymbol{B})$ 可以由 $N(\boldsymbol{A})$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 生成, 并进而证明 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}=\operatorname{rank}\boldsymbol{A}-1$.