北京大学数学科学学院 2025-26 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(16') 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

回答下列问题:

(1) a, b 为何值时, 上述方程组 **a.** 有唯一解; **b.** 有无穷多解; **c.** 无解.

(2) 当方程组有无穷多解时, 求方程组的导出组的一个基础解系.

2(16') 判断下列向量组线性相关还是线性无关. 如果线性相关, 试找出其中一个向量使得它可以由其余向量线性表出, 并给出一种表出方式.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

3(10') 计算下面的 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

4(10') 计算下面的 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} \\ \beta & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-2} \\ \beta^2 & \beta & 1 & \cdots & \alpha^{n-4} & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta^{n-2} & \beta^{n-3} & \beta^{n-4} & \cdots & 1 & \alpha \\ \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & \beta^{n-3} & \cdots & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

5(13') 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&7&a\\2&2&1&b\\1&-1&5&c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&5&9\\0&2&-1&1\\0&0&3&3\end{bmatrix}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 可经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 求 a,b,c 的值.

6(12') 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}\det\boldsymbol{A}\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\\det\boldsymbol{A}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\det\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$$

求下面三个方程组的解:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,3.$$

7(10') 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{C}&\boldsymbol{D}\end{bmatrix}\leqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}+\operatorname{rank}\boldsymbol{C}+\operatorname{rank}\boldsymbol{D}$$

8(8') 设如下方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1r}x_r=a_{1(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{1n}x_n\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2r}x_r=a_{2(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{2n}x_n\\\qquad\vdots\\a_{r1}x_1+a_{r2}x_2+\cdots+a_{rr}x_r=a_{r(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{rn}x_n\end{cases}$$

有解, 其中行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1r}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{r1}&\cdots&a_{rr}\end{vmatrix}\neq 0$$

设

$$\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}l_{i1}&l_{i2}&\cdots&l_{ir}&l_{i(r+1)}&\cdots&l_{in}\end{bmatrix},\quad i=1,2,\cdots s$$

为上述方程组的解. 令

$$\boldsymbol{\beta}_i' = \begin{bmatrix} l_{i(r+1)} & \cdots & l_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots s$$

证明:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1', \cdots, \boldsymbol{\beta}_s'\}$$

9(5') 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

其中 $s \leqslant n$. 定义

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_s} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_s)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{sj_s}$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_s$ 取遍 $1, 2, \cdots, n$ 种任意 s 个不同数的排列. 当 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 时, 问 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A}$ 是否为 s. 若是, 请给出证明; 若不是, 请给出反例.