线性代数 B 第二次作业订正

蒋锦豪 2400011785

习题 2.5

3 求 λ 使得下面的齐次线性方程组有非零解:

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + (\lambda-8)x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_1 + 14x_2 + (\lambda+3)x_3 = 0 \end{cases}$$

解. 该齐次方程组有非零解当且仅当系数行列式为零, 即

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = 0$$

而

$$\begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 2 & 14 & \lambda+3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -3 & -2 \\ -1 & \lambda-8 & -2 \\ 0 & 2\lambda-2 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & 0 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 1 \\ -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)(\lambda^2-6\lambda+9)$$

当且仅当$\lambda=1$ 或 $\lambda=3$时系数行列式为 0, 此时原方程有非零解.

6 对于本节 **5** 中的方程, 求 a, b 使得方程组无解/有无穷多解.

解. 我们只需讨论 **5** 结论以外的情形. 当 $b=0$ 时, 方程组的增广矩阵可以变换如下:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

出现 $0=d$ 类型的行, 因此原方程无解.

当 $a=1$ 时, 对方程组的增广矩阵进行初等行变换可得:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

如果 $b=\frac{1}{2}$, 那么非零行数目为 2, 小于变量数, 原方程组有无穷多解. 否则继续行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 2b-1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & b-1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2b-1}{b-1} \end{vmatrix}$$

无论 b 是否为 1, 都会出现 $0=d$ 的情形, 因此此时方程无解.

综上所述,当 $b=0$ 或 $a=1, b\neq 1/2$时原方程组无解; 当 $b\neq 0$ 且 $a=1$ 时原方程组有无穷多解