北京大学数学科学学院 2025-26 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(16') 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 1 \end{cases}$$

回答下列问题:

(1) a, b 为何值时, 上述方程组 **a.** 有唯一解; **b.** 有无穷多解; **c.** 无解.

(2) 当方程组有无穷多解时, 求方程组的导出组的一个基础解系.

解.

(1) 对方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 2 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & 2b & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 2-a \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

当 $b = 0$ 时, 增广矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a & 2-a \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

非零行数目小于未知数数目, 并且没有 $0 = d(d \neq 0)$ 类型的行, 因此方程组有无穷多解.

当 $b \neq 0$ 时, 继续做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & 1-ab & 1-a & 2-a \\ 0 & b & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & b & 1 & 1 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a & 2-a \end{bmatrix}$$

当 $a = 1$ 时, 增广矩阵出现 $0 = d(d \neq 0)$ 类型的行, 方程组无解; 当 $a \neq 1$ 时, 非零行数目等于未知数数目, 方程组有唯一解.

(2) 方程组有无穷多组解时, 其导出组的系数矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1-a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -1 & a-1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

2(16') 判断下列向量组线性相关还是线性无关. 如果线性相关, 试找出其中一个向量使得它可以由其余向量线性表出, 并给出一种表出方式.

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

解. 对以上述向量组作为列向量组的矩阵初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 13 & -1 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & -14 & -14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是上述向量组构成的矩阵的秩为 3, 因此向量组线性相关. 由上述矩阵初等行变换的结果可知

$$\boldsymbol{\alpha}_4 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$$

3(10') 计算下面的 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$$

解. 首先将第 i 行 $(i \geqslant 2)$ 的公因子提出可得

$$D_n = (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

然后将第 i 行加到第 $i+1$ 行 $(2 \leqslant i \leqslant n-1)$ 可得

$$D_n = (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

然后将第 j 列加到第 1 列 $(2 \leqslant j \leqslant n)$ 可得

$$D_n = (n-1)! \begin{vmatrix} 1+2+\cdots+n & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

最后按第一列展开可得

$$D_n = (n-1)!(-1)^{(n-1)} \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)!(-1)^{n-1}}{2}$$

4(10') 计算下面的 n 阶行列式 $(n \geqslant 2)$:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-2} & \alpha^{n-1} \\ \beta & 1 & \alpha & \cdots & \alpha^{n-3} & \alpha^{n-2} \\ \beta^2 & \beta & 1 & \cdots & \alpha^{n-4} & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \beta^{n-2} & \beta^{n-3} & \beta^{n-4} & \cdots & 1 & \alpha \\ \beta^{n-1} & \beta^{n-2} & \beta^{n-3} & \cdots & \beta & 1 \end{vmatrix}$$

解. 将第 i 列减去第 $i+1$ 列的 β 倍 $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ 可得

$$D_n = \begin{vmatrix} 1-\alpha\beta & \alpha-\alpha^2\beta & \cdots & \alpha^{n-2}-\alpha^{n-1}\beta & \alpha^{n-1} \\ 0 & 1-\alpha\beta & \cdots & \alpha^{n-3}-\alpha^{n-2}\beta & \alpha^{n-2} \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha^{n-4}-\alpha^{n-3}\beta & \alpha^{n-3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-\alpha\beta & \alpha \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\alpha\beta)^{n-1}$$

5(13') 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&7&a\\2&2&1&b\\1&-1&5&c\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&1&5&9\\0&2&-1&1\\0&0&3&3\end{bmatrix}$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 可经初等行变换化为 $\boldsymbol{B}$, 求 a,b,c 的值.

解. 如果 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换能化为 $\boldsymbol{B}$, 那么二者经初等行变换化成的简化阶梯形矩阵应当相同. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换有

$$\boldsymbol{A}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&7&a\\0&0&-13&b-2a\\0&-2&-2&c-a\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&7&a\\0&1&1&\frac{a-c}{2}\\0&0&1&\frac{2a-b}{13}\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&\frac{-11a+12b+13c}{26}\\0&1&0&\frac{9a+2b-13c}{26}\\0&0&1&\frac{2a-b}{13}\end{bmatrix}$$

对 $\boldsymbol{B}$ 做初等行变换有

$$\boldsymbol{B}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&5&9\\0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&3\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

于是有

$$\begin{cases}-11a+12b+13c=78\\9a+2b-13c=26\\2a-b=13\end{cases}$$

解得

$$a=11,\quad b=9,\quad c=7$$

6(12') 设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\1\\6\end{bmatrix}$$

矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$. 设

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}\det\boldsymbol{A}\\0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}0\\\det\boldsymbol{A}\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0\\0\\\det\boldsymbol{A}\end{bmatrix}$$

求下面三个方程组的解:

$$x_1\boldsymbol{\alpha}_1+x_2\boldsymbol{\alpha}_2+x_3\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\beta}_i,\quad i=1,2,3.$$

解. 首先有

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -7 & -5 \\ 0 & -7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -5 \\ -7 & 2 \end{vmatrix} = -49 \neq 0$$

于是上述方程组均有解.

对于第一个方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_1$, 根据 Cramer 法则可得

$$x_1 = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} \begin{vmatrix} \det \boldsymbol{A} & 4 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = 29$$

同理有

$$x_2 = -16, \quad x_3 = -7$$

对于第二个方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_2$, 同理有

$$x_1 = -22, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 7$$

对于第三个方程 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\beta}_3$, 同理有

$$x_1 = -6, \quad x_2 = 5, \quad x_3 = -7$$

7(10') 证明:

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{A} + \operatorname{rank} \boldsymbol{B} + \operatorname{rank} \boldsymbol{C} + \operatorname{rank} \boldsymbol{D}$$

证明. 首先证明

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X} + \operatorname{rank} \boldsymbol{Y}$$

考虑 $\boldsymbol{X}$ 的行向量组的极大线性无关组 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_s\}$ 和 $\boldsymbol{Y}$ 的行向量组的极大线性无关组 $\{\boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_t\}$. 由于矩阵 $\begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix}$ 的每一行都属于 $\boldsymbol{X}$ 或 $\boldsymbol{Y}$, 因此它的行向量组能被 $\{\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_s, \boldsymbol{y}_1, \cdots, \boldsymbol{y}_t\}$ 线性表出, 于是

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} \\ \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \leqslant s + t = \operatorname{rank} \boldsymbol{X} + \operatorname{rank} \boldsymbol{Y}$$

同理可知

$$\operatorname{rank} \begin{bmatrix} \boldsymbol{X} & \boldsymbol{Y} \end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank} \boldsymbol{X} + \operatorname{rank} \boldsymbol{Y}$$

现在对 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix}$ 应用上述结论就有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix} + \operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{D}\end{bmatrix} \leqslant \operatorname{rank}\boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\boldsymbol{B} + \operatorname{rank}\boldsymbol{C} + \operatorname{rank}\boldsymbol{D}$$

□

8(8') 设如下方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1r}x_r = a_{1(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = a_{2(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{2n}x_n \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = a_{r(r+1)}x_{r+1} + \cdots + a_{rn}x_n \end{cases}$$

有解, 其中行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{r1} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0$$

设

$$\boldsymbol{\beta}_i = \begin{bmatrix} l_{i1} & l_{i2} & \cdots & l_{ir} & l_{i(r+1)} & \cdots & l_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots s$$

为上述方程组的解. 令

$$\boldsymbol{\beta}'_i = \begin{bmatrix} l_{i(r+1)} & \cdots & l_{in} \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, \cdots s$$

证明:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s\} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\beta}'_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}'_s\}$$

证明. 考虑以 $\boldsymbol{\beta}_1, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 为行向量组的矩阵

$$\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1r} & l_{1(r+1)} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{s1} & \cdots & l_{sr} & l_{s(r+1)} & \cdots & l_{sn} \end{bmatrix}$$

由题意, 只需证明上述矩阵的前 r 列能被第 $r+1$ 列到第 n 列线性表出即可. 为此, 考虑上述矩阵的第 i 行 $\begin{bmatrix} l_{i1} & \cdots & l_{ir} & l_{i(r+1)} & \cdots & l_{in} \end{bmatrix}$, 它是题设的方程组的解.

将 $x_1, \cdots, x_r$ 视作变量,$x_{r+1}, \cdots, x_n$ 视作可变的参量, 记方程组的系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 根据 Cramer 法则可得

$$x_k = \frac{\det \boldsymbol{B}_k}{\det \boldsymbol{A}}, \quad k = 1, 2, \cdots, r$$

其中 $\boldsymbol{B}_k$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列替换为

$$\begin{bmatrix} a_{1(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{2(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{r(r+1)}x_{r+1}+\cdots+a_{rn}x_n \end{bmatrix}$$

得到的矩阵. 根据行列式的性质, 对 $\det \boldsymbol{B}_k$ 的第 k 列拆分后提取公因子可知

$$\det \boldsymbol{B}_k = x_{r+1}\det \boldsymbol{C}_{k(r+1)}+\cdots+x_n\det \boldsymbol{C}_{kn}$$

其中 $\boldsymbol{C}_{kl}(r<l\leqslant n)$ 是把 $\boldsymbol{A}$ 的第 k 列替换为

$$\begin{bmatrix} a_{1l} \\ a_{2l} \\ \vdots \\ a_{rl} \end{bmatrix}$$

得到的矩阵. 于是有

$$x_k = x_{r+1}\frac{\det \boldsymbol{C}_{k(r+1)}}{\det \boldsymbol{A}}+\cdots+x_n\frac{\det \boldsymbol{C}_{kn}}{\det \boldsymbol{A}}$$

于是上式对每一个解均成立, 即对任意 $1\leqslant i\leqslant s$ 都有

$$l_{ik} = l_{i(r+1)}\frac{\det \boldsymbol{C}_{k(r+1)}}{\det \boldsymbol{A}}+\cdots+l_{in}\frac{\det \boldsymbol{C}_{kn}}{\det \boldsymbol{A}}$$

于是

$$\begin{bmatrix} l_{1k} \\ \cdots \\ l_{sk} \end{bmatrix} = \frac{\det \boldsymbol{C}_{k(r+1)}}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} l_{1(r+1)} \\ \cdots \\ l_{s(r+1)} \end{bmatrix}+\cdots+\frac{\det \boldsymbol{C}_{kn}}{\det \boldsymbol{A}}\begin{bmatrix} l_{1n} \\ \cdots \\ l_{sn} \end{bmatrix}$$

即上述矩阵的第 k 列 $(1\leqslant k\leqslant r)$ 能被第 $r+1$ 列到第 n 列线性表出, 从而命题得证. □

9(5') 设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \end{bmatrix}$$

其中 $s\leqslant n$. 定义

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j_1j_2\cdots j_s}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}$$

其中 $j_1j_2\cdots j_s$ 取遍 $1,2,\cdots,n$ 种任意 s 个不同数的排列. 当 $\det \boldsymbol{A}\neq 0$ 时, 问 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}$ 是否为 s. 若是, 请给出证明; 若不是, 请给出反例.

证明. $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=s$. 证明如下:

考虑 $1,2,\cdots,n$ 中任取的 s 个不同数 $i_1,\cdots,i_s(i_1<\cdots<i_s)$. 记 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1,\cdots,i_s$ 列组成的子矩阵为 $\boldsymbol{B}_{i_1\cdots i_s}$, 则有

$$\begin{aligned}\det\boldsymbol{A}&=\sum_{j_1j_2\cdots j_s}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_s)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{sj_s}\\&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_s}\sum_{j_1'j_2'\cdots j_s'}(-1)^{\tau\left(j_1'j_2'\cdots j_s'\right)}a_{1j_1'}a_{2j_2'}\cdots a_{sj_s'}\\&=\sum_{i_1<i_2<\cdots<i_s}\det\boldsymbol{B}_{i_1\cdots i_s}\end{aligned}$$

其中 $j_1',j_2',\cdots,j_s'$ 是 $i_1i_2\cdots i_s$ 的一个排列. 进而, 当 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$ 时, 至少存在一个 $\boldsymbol{B}_{i_1\cdots i_s}$ 使得 $\det\boldsymbol{B}_{i_1\cdots i_s}\neq 0$, 因此 $\boldsymbol{A}$ 存在不为 0 的 s 阶子式, 从而 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=s$. □