# 北京大学数学科学学院 2022-23 学年第二学期线性代数 B 期末试题

**1** 判断二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=4x_1^2+5x_2^2+6x_3^2+4x_1x_2-4x_2x_3$$

是否正定, 并说明理由.

**2** 实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 其特征值为 1(二重),$-1$. 属于特征值 1 的特征向量是

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix}$$

**(1)** 求属于特征值 $-1$ 的全部特征向量.

**(2)** 求 $\boldsymbol{A}$.

**3** 将二次型

$$f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-4xy-4yz$$

做正交替换化为标准形.

**4** 设 $\mathcal{A}:M_2(\mathbb{K})\mapsto M_2(\mathbb{K})$ 对任意 $\boldsymbol{X}\in M_2(\mathbb{K})$ 都有

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{X}^{\mathrm{t}}$$

**(1)** 证明: $\mathcal{A}$ 是线性变换.

**(2)** 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{E}_{11},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21},\boldsymbol{E}_{22}$ 下的矩阵.

**5** 证明: 任意 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 级矩阵 $\boldsymbol{A}$, 总存在 $\mathbb{C}$ 上的 $n$ 级上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似.

**6** 证明: 所有二级正交矩阵均可表示为

$$\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\quad \text{或} \quad \begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{bmatrix}$$

中的一种, 其中 $\theta\in\mathbb{R}$.

**7** 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $\mathbb{R}$ 上 $m\times n$ 的列满秩矩阵, 其中 $m>n$. 记 $\boldsymbol{A}$ 的列空间为 $U$, 记

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$$

令 $\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X}$ 对所有 $\boldsymbol{X} \in \mathbb{R}^m$ 成立.

**(1)** 证明: $\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{X} \in U$.

**(2)** 证明: $\mathcal{P}_{\boldsymbol{A}}$ 是 $\mathbb{R}^m$ 到 $U$ 的正交投影.