北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(10') 设 V 是一个 n 维线性空间, $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是 V 到 V 的线性映射, 判断下列结论是否正确.

(1) $\mathcal{A}$ 是可逆线性映射当且仅当 $\mathcal{A}$ 的行列式不为 0.

(2) $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2$.

(3) 如果 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) = \operatorname{rank}(\mathcal{B})$, 那么 $\operatorname{rank}(\mathcal{A}^2) = \operatorname{rank}(\mathcal{B}^2)$.

(4) $\operatorname{rank}(\mathcal{A}) + \operatorname{rank}(\mathcal{B}) \geqslant \operatorname{rank}(\mathcal{A}+\mathcal{B})$.

(5) $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 在基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 下的矩阵分别为 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$, 则 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 在上述基下的矩阵为 $\boldsymbol{AB}$.

解.

(1) 正确.

(2) 错误. 实际上应当为

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2$$

(3) 错误.

(4) 正确.

(5) 错误. 实际上有

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{A}$$

同理

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{B}$$

于是

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}\boldsymbol{BA}$$

2(10') 用非退化线性替换将下面的六元二次型化为标准形:

$$f(x_1, \cdots, x_6) = x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$$

解. 首先设

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}y_1-y_6\\y_2-y_5\\y_3-y_4\\y_3+y_4\\y_2+y_5\\y_1+y_6\end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, \cdots, x_6) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2$$

容易看出上述线性变换是非退化的, 因此做上述变换即可将题设二次型化为标准形.

3(12') 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \cdots, \boldsymbol{\varepsilon}_5$ 为 $\mathbb{R}^5$ 的标准正交基. 令

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_5, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_4, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = 2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3$$

求与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交单位向量组.

解. 根据 Schmidt 正交化的过程, 令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \boldsymbol{\alpha}_1 \\
\boldsymbol{\beta}_2 &= \boldsymbol{\alpha}_2 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}\boldsymbol{\beta}_1 = (\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_4) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_5) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_4 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_5 \\
\boldsymbol{\beta}_3 &= \boldsymbol{\alpha}_3 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \rangle}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{\langle \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle}{\langle \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle}\boldsymbol{\beta}_2 \\
&= (2\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3) - \frac{2}{2}(\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_5) - \frac{0}{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_4 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_5\right) \\
&= \boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_2 + \boldsymbol{\varepsilon}_3 - \boldsymbol{\varepsilon}_5
\end{aligned}$$

然后令

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\gamma}_1 &= \frac{1}{||\boldsymbol{\beta}_1||}\boldsymbol{\beta}_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_5 \\
\boldsymbol{\gamma}_2 &= \frac{1}{||\boldsymbol{\beta}_2||}\boldsymbol{\beta}_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}\boldsymbol{\varepsilon}_1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\boldsymbol{\varepsilon}_4 - \frac{\sqrt{10}}{10}\boldsymbol{\varepsilon}_5 \\
\boldsymbol{\gamma}_3 &= \frac{1}{||\boldsymbol{\beta}_3||}\boldsymbol{\beta}_3 = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}_5
\end{aligned}$$

则 $\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \boldsymbol{\gamma}_3$ 是与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 等价的正交单位向量组.

4(16') 设

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 a 的取值范围使得 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 当 $\boldsymbol{A}$ 可对角化时, 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵.

解.

(1) 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式:

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & a \\ 0 & -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a \\ -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - a)$$

首先当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 有 3 个不同的特征值, 因此此时 $\boldsymbol{A}$ 可以对角化.

当 $a=0$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 0 的特征向量为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 特征子空间的维数为 1, 与代数重数不等, 故此时 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

当 $a=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 的对应于特征值 1 的特征向量为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 特征子空间的维数与代数重数不等, 故此时 $\boldsymbol{A}$ 不可对角化.

于是 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时 $\boldsymbol{A}$ 可对角化.

(2) 对于特征值 0, 考虑齐次方程 $(0\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a\\ 0 & -1 & -a-1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -a\\ 0 & 1 & a+1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}a & -(a+1) & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

对于特征值 1, 考虑齐次方程 $(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & a\\ 0 & -1 & -a\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & a\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 1 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}0 & -a & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

对于特征值 a, 考虑齐次方程 $(a\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\mathbf{0}$, 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ -1 & a & a\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 a 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

于是令

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ -(a+1) & -a & -1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

即有

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\operatorname{diag}\{0,1,a\}$$

5(18') 令矩阵

$$\boldsymbol{A}(x,a,n)=\begin{bmatrix}x & a & \cdots & a\\ a & x & \cdots & a\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a & a & \cdots & x\end{bmatrix}_{n\times n}$$

于是有如下等式成立:

$$\boldsymbol{A}(x,a,n)\boldsymbol{A}(y,b,n)=\boldsymbol{A}(z,c,n)$$

(1) 试用 x,y,a,b 表示出 z,c.

(2) 判断矩阵 $\boldsymbol{A}(0,1,4)$ 是否可逆, 若可逆则求出其逆矩阵.

解.

(1) 令 $\boldsymbol{E}_n$ 为系数全为 1 的 $n\times n$ 矩阵, 则 $\boldsymbol{E}_n^2=n\boldsymbol{E}_n$. 注意到

$$\boldsymbol{A}(x,a,n)=(x-a)\boldsymbol{I}_n+a\boldsymbol{E}_n$$

从而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(x,a,n)\boldsymbol{A}(y,b,n)&=[(x-a)\boldsymbol{I}_n+a\boldsymbol{E}_n][(y-b)\boldsymbol{I}_n+b\boldsymbol{E}_n]\\&=(x-a)(y-b)\boldsymbol{I}_n+(x-a)b\boldsymbol{E}_n+a(y-b)\boldsymbol{E}_n+abn\boldsymbol{E}_n\\&=(x-a)(y-b)\boldsymbol{I}_n+[(x-a)b+a(y-b)+abn]\boldsymbol{E}_n\end{aligned}$$

从而

$$c=ay+bx+(n-2)ab$$

$$z=(x-a)(y-b)+c=xy+(n-1)ab$$

(2) 假定 $\boldsymbol{A}(0,1,4)$ 可逆, 于是存在 $\boldsymbol{A}(y,b,n)$ 使得

$$\boldsymbol{A}(0,1,4)\boldsymbol{A}(y,b,n)=\boldsymbol{A}(1,0,4)=\boldsymbol{I}$$

于是可以列出方程

$$\begin{cases}3b=1\\y+2b=0\end{cases}$$

从而

$$y=-\frac{2}{3},\quad b=\frac{1}{3}$$

于是题设矩阵可逆, 其逆矩阵为 $\boldsymbol{A}\left(-\dfrac{2}{3},\dfrac{1}{3},4\right)$.

6(24') 令 $V=\{\boldsymbol{A}\in M_2(\mathbb{R}):\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=0\}$ 是迹为 0 的 2×2 实矩阵构成的线性空间. 取可逆矩阵 $\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}$, 定义映射 $\Phi_{\boldsymbol{P}}:V\to V$ 为 $\Phi_{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

(1) 证明:$\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22}=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}$ 构成 V 的一组基.

(2) 求 $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 在基 $\{\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22},\boldsymbol{E}_{12},\boldsymbol{E}_{21}\}$ 下的矩阵.

(3) 求线性映射 $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 的特征值及其在 V 中的一个特征向量.

(4) 对于一个可逆的 2×2 矩阵 $\boldsymbol{U}$, 类似地定义线性映射 $\Phi_{\boldsymbol{U}}:V\to V$ 为 $\Phi_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$. 如果 $\boldsymbol{U}$ 有特征值 2 和 4, 求映射 $\Phi_{\boldsymbol{U}}$ 的特征值并说明理由.

解.

(1) 对于任意 $\boldsymbol{A}\in V$, 由于 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A})=0$, 因此其对角元互为相反数. 这样的 $\boldsymbol{A}$ 总可以表示为 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & -a\end{bmatrix}$, 于是则有

$$\boldsymbol{A}=a(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22})+b\boldsymbol{E}_{12}+c\boldsymbol{E}_{21}$$

于是 V 中的任意元素都可以被上述三个矩阵线性表出; 并且 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $a=b=c=0$, 因此上述三个矩阵线性无关. 于是它们构成 V 的一组基.

(2) 首先有

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{P}}\boldsymbol{P}^{*}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{P}^{-1}(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22})\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=-(\boldsymbol{E}_{11}-\boldsymbol{E}_{22})$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{12}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{21}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{E}_{21}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}=\boldsymbol{E}_{12}$$

于是 $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 在题设的基下的矩阵为

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

(3) $\Phi_{\boldsymbol{P}}$ 的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{M})=\begin{vmatrix}\lambda+1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda & -1\\ 0 & -1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+1)^2(\lambda-1)$$

对于特征值 -1, 其特征向量为 $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & -1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 即 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$.

对于特征值 1, 其特征向量为 $\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 即 $\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$.

(4) 设 $\Phi_{\boldsymbol{U}}(\boldsymbol{A})=\lambda\boldsymbol{A}$, 则有

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\lambda\boldsymbol{A}$$

考虑 $\boldsymbol{U}$ 的对应于特征值 2 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 对上式两边右乘 $\boldsymbol{\alpha}$ 可得

$$2\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}$$

假定 $\boldsymbol{A\alpha} \neq \boldsymbol{0}$, 则它是 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的对应于特征值 $\dfrac{\lambda}{2}$ 的特征向量. 由于 $\boldsymbol{U}^{-1}$ 的特征值分别为 $\dfrac{1}{2}$ 和 $\dfrac{1}{4}$, 因此 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = \dfrac{1}{2}$.

同理考虑 $\boldsymbol{U}$ 的对应于特征值 4 的特征向量, 可得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$. 综上可知 $\Phi_{\boldsymbol{U}}$ 的特征值为 $\dfrac{1}{2}, 1, 2$.

7(10') 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 是 n 级正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 均为对角矩阵.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 因此其合同于 $\boldsymbol{I}_n$, 于是存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵, 因此 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ 也是实对称矩阵, 于是存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}$$

其中对角矩阵 $\boldsymbol{D}$ 是 $\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}$ 的合同标准形. 令 $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$, 则

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}_n$$

于是存在 n 级实可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 满足题设条件. □