

北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(10') 设 V 是一个 n 维线性空间, \mathcal{A} 和 \mathcal{B} 是 V 到 V 的线性映射, 判断下列结论是否正确.

- (1) \mathcal{A} 是可逆线性映射当且仅当 \mathcal{A} 的行列式不为 0.
- (2) $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + 2\mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}^2$.
- (3) 如果 $\text{rank}(\mathcal{A}) = \text{rank}(\mathcal{B})$, 那么 $\text{rank}(\mathcal{A}^2) = \text{rank}(\mathcal{B}^2)$.
- (4) $\text{rank}(\mathcal{A}) + \text{rank}(\mathcal{B}) \geq \text{rank}(\mathcal{A} + \mathcal{B})$.
- (5) \mathcal{A}, \mathcal{B} 在基 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 下的矩阵分别为 A, B , 则 $\mathcal{A}\mathcal{B}$ 在上述基下的矩阵为 AB .

解.

- (1) 正确.
- (2) 错误. 实际上应当为

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^2 = \mathcal{A}^2 + \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} + \mathcal{B}^2$$

- (3) 错误.
- (4) 正确.
- (5) 正确.

2(10') 用非退化线性替换将下面的六元二次型化为标准形:

$$f(x_1, \dots, x_6) = x_1x_6 + x_2x_5 + x_3x_4$$

解. 首先设

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 - y_6 \\ y_2 - y_5 \\ y_3 - y_4 \\ y_3 + y_4 \\ y_2 + y_5 \\ y_1 + y_6 \end{bmatrix}$$

则有

$$f(x_1, \dots, x_6) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_4^2 - y_5^2 - y_6^2$$

容易看出上述线性变换是非退化的, 因此做上述变换即可将题设二次型化为标准形.

3(12') 设 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_5$ 为 \mathbb{R}^5 的标准正交基. 令

$$\alpha_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_5, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_4, \quad \alpha_3 = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

求与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交单位向量组.

解. 根据 Schmidt 正交化的过程, 令

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \alpha_1 \\ \beta_2 &= \alpha_2 - \frac{\langle \alpha_2, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 = (\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_4) - \frac{1}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_5) = \frac{1}{2}\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_4 - \frac{1}{2}\epsilon_5 \\ \beta_3 &= \alpha_3 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_1 \rangle}{\langle \beta_1, \beta_1 \rangle} \beta_1 - \frac{\langle \alpha_3, \beta_2 \rangle}{\langle \beta_2, \beta_2 \rangle} \beta_2 \\ &= (2\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3) - \frac{2}{2}(\epsilon_1 + \epsilon_5) - \frac{0}{\frac{5}{2}} \left(\frac{1}{2}\epsilon_1 - \epsilon_2 + \epsilon_4 - \frac{1}{2}\epsilon_5 \right) \\ &= \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 - \epsilon_5\end{aligned}$$

然后令

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{1}{\|\beta_1\|} \beta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon_5 \\ \gamma_2 &= \frac{1}{\|\beta_2\|} \beta_2 = \frac{\sqrt{10}}{10}\epsilon_1 - \frac{\sqrt{10}}{5}\epsilon_2 + \frac{\sqrt{10}}{5}\epsilon_4 - \frac{\sqrt{10}}{10}\epsilon_5 \\ \gamma_3 &= \frac{1}{\|\beta_3\|} \beta_3 = \frac{1}{2}\epsilon_1 + \frac{1}{2}\epsilon_2 + \frac{1}{2}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\epsilon_5\end{aligned}$$

则 $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ 是与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 等价的正交单位向量组.

4(16') 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a+1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 a 的取值范围使得 A 可对角化.

(2) 当 A 可对角化时, 求可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵.

解.

(1) 考虑 A 的特征多项式:

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ -1 & \lambda & a \\ 0 & -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \lambda & a \\ -1 & \lambda - (a+1) \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - a)$$

首先当 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时, A 有 3 个不同的特征值, 因此此时 A 可以对角化.

当 $a = 0$ 时, A 的对应于特征值 0 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$, 特征子空间的维数为 1, 与代数重数不等, 故此时 A 不可对角化.

当 $a = 1$ 时, A 的对应于特征值 1 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^t$, 特征子空间的维数与代数重数不等, 故此时 A 不可对角化.

于是 $a \neq 0$ 且 $a \neq 1$ 时 A 可对角化.

(2) 对于特征值 0, 考虑齐次方程 $(0\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a \\ 0 & -1 & -a-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 0 的特征向量 $\alpha_1 = \begin{bmatrix} a & -(a+1) & 1 \end{bmatrix}^t$.

对于特征值 1, 考虑齐次方程 $(1\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & a \\ 0 & -1 & -a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 1 的特征向量 $\alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & -a & 1 \end{bmatrix}^t$.

对于特征值 a , 考虑齐次方程 $(a\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 对系数矩阵做行变换可得

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -1 & a & a \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是对应于特征值 a 的特征向量为 $\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$.

于是令

$$\mathbf{P} = [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3] = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ -(a+1) & -a & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即有

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P} = \text{diag}\{0, 1, a\}$$

5(18') 令矩阵

$$\mathbf{A}(x, a, n) = \begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}_{n \times n}$$

于是有如下等式成立:

$$\mathbf{A}(x, a, n)\mathbf{A}(y, b, n) = \mathbf{A}(z, c, n)$$

(1) 试用 x, y, a, b 表示出 z, c .

(2) 判断矩阵 $\mathbf{A}(0, 1, 4)$ 是否可逆, 若可逆则求出其逆矩阵.

解.

(1) 令 E_n 为系数全为 1 的 $n \times n$ 矩阵, 则 $E_n^2 = nE_n$. 注意到

$$A(x, a, n) = (x - a)I_n + aE_n$$

从而

$$\begin{aligned} A(x, a, n)A(y, b, n) &= [(x - a)I_n + aE_n][(y - b)I_n + bE_n] \\ &= (x - a)(y - b)I_n + (x - a)bE_n + a(y - b)E_n + abnE_n \\ &= (x - a)(y - b)I_n + [(x - a)b + a(y - b) + abn]E_n \end{aligned}$$

从而

$$c = ay + bx + (n - 2)ab$$

$$z = (x - a)(y - b) + c = xy + (n - 1)ab$$

(2) 假定 $A(0, 1, 4)$ 可逆, 于是存在 $A(y, b, n)$ 使得

$$A(0, 1, 4)A(y, b, n) = A(1, 0, 4) = I$$

于是可以列出方程

$$\begin{cases} 3b = 1 \\ y + 2b = 0 \end{cases}$$

从而

$$y = -\frac{2}{3}, \quad b = \frac{1}{3}$$

于是题设矩阵可逆, 其逆矩阵为 $A\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 4\right)$.

6(24') 令 $V = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : \text{tr}(A) = 0\}$ 是迹为 0 的 2×2 实矩阵构成的线性空间. 取可逆矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, 定义映射 $\Phi_P: V \rightarrow V$ 为 $\Phi_P(A) = P^{-1}AP$.

(1) 证明: $E_{11} - E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$, $E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 构成 V 的一组基.

(2) 求 Φ_P 在基 $\{E_{11} - E_{22}, E_{12}, E_{21}\}$ 下的矩阵.

(3) 求线性映射 Φ_P 的特征值及其在 V 中的一个特征向量.

(4) 对于一个可逆的 2×2 矩阵 U , 类似地定义线性映射 $\Phi_U: V \rightarrow V$ 为 $\Phi_U(A) = U^{-1}AU$. 如果 U 有特征值 2 和 4, 求映射 Φ_U 的特征值并说明理由.

解.

(1) 对于任意 $A \in V$, 由于 $\text{tr}(A) = 0$, 因此其对角元互为相反数. 这样的 A 总可以表示为 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix}$,

于是则有

$$A = a(E_{11} - E_{22}) + bE_{12} + cE_{21}$$

于是 V 中的任意元素都可以被上述三个矩阵线性表出; 并且 $\mathbf{A} = \mathbf{0}$ 当且仅当 $a = b = c = 0$, 因此上述三个矩阵线性无关. 于是它们构成 V 的一组基.

(2) 首先有

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{P}} \mathbf{P}^* = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

于是

$$\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22})\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = -(\mathbf{E}_{11} - \mathbf{E}_{22})$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{12}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{21}$$

$$\mathbf{P}^{-1}\mathbf{E}_{21}\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{E}_{12}$$

于是 $\Phi_{\mathbf{P}}$ 在题设的基下的矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\Phi_{\mathbf{P}}$ 的矩阵 \mathbf{M} 的特征多项式为

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & -1 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda + 1)^2(\lambda - 1)$$

对于特征值 -1 , 其特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^t$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^t$, 即 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

对于特征值 1 , 其特征向量为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^t$, 即 $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(4) 设 $\Phi_U(\mathbf{A}) = \lambda \mathbf{A}$, 则有

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \lambda \mathbf{A}$$

考虑 \mathbf{U} 的对应于特征值 2 的特征向量 α , 对上式两边右乘 α 可得

$$2\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\alpha = \lambda \mathbf{A}\alpha$$

假定 $\mathbf{A}\alpha \neq \mathbf{0}$, 则它是 \mathbf{U}^{-1} 的对应于特征值 $\frac{\lambda}{2}$ 的特征向量. 由于 \mathbf{U}^{-1} 的特征值分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{4}$, 因此 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = \frac{1}{2}$.

同理考虑 \mathbf{U} 的对应于特征值 4 的特征向量, 可得 $\lambda = 1$ 或 $\lambda = 2$. 综上可知 Φ_U 的特征值为 $\frac{1}{2}, 1, 2$.

7(10') 证明: 如果 A 是 n 级正定矩阵, B 是 n 级实对称矩阵, 则存在一个 n 级实可逆矩阵 C 使得 $C^t A C$ 和 $C^t B C$ 均为对角矩阵.

证明. 由于 A 是正定矩阵, 因此其合同于 I_n , 于是存在 n 级可逆矩阵 Q 使得

$$Q^t A Q = I$$

由于 B 是实对称矩阵, 因此 $Q^t B Q$ 也是实对称矩阵, 于是存在 n 级可逆矩阵 P 使得

$$P^t (Q^t B Q) P = D$$

其中对角矩阵 D 是 $Q^t B Q$ 的合同标准形. 令 $C = QP$, 则

$$C^t A C = P^t I_n P = I_n$$

于是存在 n 级实可逆矩阵 C 满足题设条件.

□