北京大学数学科学学院 2021-22 学年第二学期线性代数 B 期中试题

1(20') 求 a 为何值时, 下述线性方程组有有解? 在有解时求出所有解.

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-7 \\ x_1+3x_3-x_4=8 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=2a+2 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=-11 \\ 2x_1+2x_2+2x_3+x_4=2a \end{cases}$$

解. 对方程的增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 1 & 0 & 3 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2a+2 \\ 3 & 3 & 3 & 2 & -11 \\ 2 & 2 & 2 & 1 & 2a \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -7 \\ 0 & -1 & 2 & -2 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 2a+9 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2a+14 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2a+4 \end{bmatrix}$$

方程组有解要求增广矩阵不能出现 $0=d(d\neq 0)$ 类型的行, 于是原方程组有解当且仅当 $a=-2$. 此时方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-2-x_3 \\ x_2=5+2x_3 \\ x_4=-10 \end{cases}$$

2(20') 求下述矩阵的行空间和列空间的维数和各自的一个基:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是列空间的维数为 3, 其一个基为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}-1\\-2\\0\\3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}1\\-2\\-1\\0\end{bmatrix}$$

行空间的维数为 3, 其一个基为

$$\boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}1&-1&2&1&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}2&-2&4&-2&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}0&3&0&0&1\end{bmatrix}$$

3(20') 给定 $\mathbb{K}^5$ 中的向量

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\8\\16\end{bmatrix}$$

试求一个齐次线性方程组, 使得 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 构成该方程组的一个基础解系.

解. 方程组的每一行的系数 $a_1,\cdots,a_5$ 都满足

$$\begin{cases}a_1+2a_2+3a_3+4a_4+5a_5=0\\a_1-a_2+a_3-a_4+a_5=0\\a_1+2a_2+4a_3+8a_4+16a_5=0\end{cases}$$

因此, 对以 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 为行的矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\1&-1&1&-1&1\\1&2&4&8&16\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&-1&1&-1&1\\0&3&2&5&4\\0&0&1&4&11\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-6&-16\\0&1&0&-1&-6\\0&0&1&4&11\end{bmatrix}$$

于是原方程的解为

$$\begin{cases}a_1=6a_4+16a_5\\a_2=a_4+6a_5\\a_3=-4a_4-11a_5\end{cases}$$

于是原方程可以是

$$\begin{cases}6x_1+x_2-4x_3+x_4=0\\16x_1+6x_2-11x_3+x_5=0\end{cases}$$

4(10') 设正整数 $n>1$, 已知 $\boldsymbol{\gamma}\in\mathbb{K}^n$ 是有 n 个未知量的非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的一个解, 并且 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}\in\mathbb{K}^n(1<r<n)$ 是该方程组的导出组的一个基础解系. 证明:

(1) 向量组 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性无关.

(2) 方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的任一解都可以被向量组 $\boldsymbol{\gamma},\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_2,\cdots,\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性表出.

解.

(1) 设 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{K}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\gamma}+k_1\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1\right)+\cdots+k_{n-r}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}\right)=\mathbf{0}$$

则有

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\sum_{i=0}^{n-r}k_i\boldsymbol{\gamma}$$

如果 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-r}k_i\neq 0$, 则

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=\frac{k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_{n-r}}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n-r}k_i}=\mathbf{0}$$

与 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\beta}\neq\mathbf{0}$ 矛盾. 如果 $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-r}k_i=0$ 而 $k_0,k_1,\cdots,k_{n-r}$ 不全为零, 则

$$k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}=\mathbf{0}$$

于是 $\boldsymbol{\eta}_1,\cdots,\boldsymbol{\eta}_{n-r}$ 线性相关, 这与基础解系的定义矛盾.

于是原式成立当且仅当 $k_1=\cdots=k_{n-r}=0$, 即题述向量组线性无关.

(2) 该线性方程组的解集为

$$W=\left\{\boldsymbol{\gamma}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}:k_1,\cdots,k_{n-r}\in\mathbb{K}\right\}$$

对于任意 $\boldsymbol{\delta}\in W$, 令 $a_0=1-\displaystyle\sum_{i=1}^{n-r}k_i, a_i=k_i(1\leqslant i\leqslant n-r)$, 于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\delta}&=\boldsymbol{\gamma}+k_1\boldsymbol{\eta}_1+\cdots+k_{n-r}\boldsymbol{\eta}_{n-r}\\&=\left(1-\sum_{i=1}^{n-r}k_i\right)\boldsymbol{\gamma}+\sum_{i=1}^{n-r}k_i\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_i\right)\\&=a_0\boldsymbol{\gamma}+a_1\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_1\right)+\cdots+a_{n-r}\left(\boldsymbol{\gamma}+\boldsymbol{\eta}_{n-r}\right)\end{aligned}$$

于是任意 $\boldsymbol{\delta}\in W$ 都能写成上述向量组的线性组合.

5(10') 设 $\boldsymbol{A}_{s\times n}$ 满足 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$. 证明: $\boldsymbol{A}$ 的任意 r 个线性无关的行与任意 r 个线性无关的列交叉处元素形成的子式一定非零.

证明. 先将这 r 行 r 列分别移动到 $\boldsymbol{A}$ 的前 r 行和前 r 列. 由于 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=r$, 因此前 r 行和前 r 列分别构成行向量组和列向量组的极大线性无关组.

于是第 r 行后的每一行都可以由前 r 行线性表出, 因而可以对 $\boldsymbol{A}$ 进行初等行变换使得第 r 行后的每一行的元素均变为 0.

由于初等行变换不改变列向量组的线性无关性, 因此此时第 r 列后的每一列仍可以由前 r 列线性表出. 因而可以对 $\boldsymbol{A}$ 继续初等列变换使得第 r 列后的每一列的元素均变为 0.

初等行列变换不改变矩阵的秩, 因此此时前 r 行与前 r 列构成的子式仍应当非零. 于是在行列变换前这子式也非零, 命题得证. □

6(10') 设 n 为正整数,$\mathbb{R}$ 上的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足

$$a_i i>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\cdots,n$$

证明:

(1) $\det\boldsymbol{A}\neq 0$.

(2) 定义 $f(t)=\det(t\boldsymbol{I}+\boldsymbol{A})$, 则 $\forall t\in[0,+\infty)$ 有 $f(t)>0$.

证明. **(1)** 为证明 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$, 只需证明齐次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0\\ \vdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0 \end{cases}$$

仅有零解即可. 假定该方程有非零解, 那么设 x_k 是 $x_1,\cdots,x_n$ 中绝对值最大的, 则 $|x_k|>0$. 于是根据第 k 个方程可得

$$|a_{kk}x_k|=\left|\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq k}a_{kj}x_j\right|$$

由于 $a_{kk}>0$, 于是

$$a_{kk}|x_k|\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq k}|a_{kj}||x_j|\leqslant|x_k|\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq k}|a_{kj}|$$

即

$$x_{kk}\leqslant\sum_{1\leqslant j\leqslant n,j\neq k}|a_{kj}|$$

这与题意矛盾. 于是 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$.

(2) 令 $t \geqslant 0$, 设

$$f(t)=\begin{vmatrix} a_{11}+t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}+t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}+t \end{vmatrix}$$

于是上述行列式也是主对角占优的, 因此 $f(t)\neq 0$. 又因为 $f(t)$ 是关于 t 的首一多项式, 于是

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=+\infty$$

根据连续函数的介值定理可得 $f(t)>0$(如果存在 $t_0\in[0,+\infty]$ 使得 $f(t_0)\leqslant 0$, 则总存在 $t\in[t_0,+\infty)$ 使得 $f(t)=0$, 这与 $f(t)\neq 0$ 矛盾). 于是命题得证.

□

7(10') 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij}=\frac{1}{a_i+b_j}$, 求 $\det\boldsymbol{A}$.

解. 将第 n 列前的所有列减去第 n 列可得

$$A_n=\begin{vmatrix} \frac{b_n-b_1}{(a_1+b_1)(a_1+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_1+b_2)(a_1+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{b_n-b_1}{(a_2+b_1)(a_2+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_2+b_2)(a_2+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{b_n-b_1}{(a_n+b_1)(a_n+b_n)} & \frac{b_n-b_2}{(a_n+b_2)(a_n+b_n)} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}$$

注意到第 i 行具有公因式 $\frac{1}{a_1+b_n}$, 第 j 列具有公因式 b_n-b_j. 于是有

$$A_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_n}\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & 1 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

将上述等式右端的行列式的第 n 行以前的所有行减去第 n 行可得

$$|\cdot|=\begin{vmatrix} \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_1}{(a_1+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & 0 \\ \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_1)(a_n+b_1)} & \frac{a_n-a_2}{(a_2+b_2)(a_n+b_2)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & 1 \end{vmatrix}=\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_n+b_i}\prod_{i=1}^{n}(a_n-a_i)\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & 0 \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

现在, 将行列式按最后一列展开, 其 (n,n) 元的余子式恰好为 A_{n-1}. 于是可得

$$A_n=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i+b_n}\prod_{j=1}^{n-1}(b_n-b_j)\prod_{j=1}^{n-1}\frac{1}{a_n+b_i}\prod_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)\,A_{n-1}$$

这样, 递推完成后分子应当包括所有 $a_i+b_j(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, 分母应当包括所有 a_j-a_i 和 $b_j-b_i(1 \leqslant i<j \leqslant n)$. 于是

$$A_n=\frac{\prod\limits_{1 \leqslant i<j \leqslant n}\left(a_j-a_i\right)\left(b_j-b_i\right)}{\prod\limits_{1 \leqslant i, j \leqslant n}\left(a_i+b_j\right)}$$