线性代数 B 第八次作业

蒋锦豪 2400011785

7.2: 1 (3), 4, 6, 7, 9; 7.3: 2, 4; 8.1: 2 (2), 3, 5, 7; 8.2: 1, 2, 4, 6, 8, 9(1)+10, 11

习题 7.2

1(3) 判断下列数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 元方程的解集是否为 $\mathbb{K}^n$ 的子空间:

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2 - x_n^2 = 0$$

解. 不是. 考虑上述方程的两个解

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

显然

$$\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

有 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots - x_n^2 = -2 \neq 0$ 不是上述方程的解, 因此该解集对加法不封闭, 不是 $\mathbb{K}^n$ 的子空间.

4 设 $V = \mathbb{K}^4$, $V_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3 \rangle$, $V_2 = \langle \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2 \rangle$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

分别求 $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ 的一个基和维数.

解. 首先注意到 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$. 而显然 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关, 因此它们可以作为 V_1 的基.

考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$ 的前三个分量为列向量的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

于是上述三个向量线性无关. 考虑以 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2$ 为列向量的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 3 & -8 & -24 \\ 1 & -2 & -6 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -8 & -24 \\ -2 & -6 \end{vmatrix} = 0$$

从而上述四个向量线性相关.

于是 $\dim(V_1 + V_2) = 3$, 其一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\beta}_1$; $\dim(V_1 \cap V_2) = 2 + 2 - 3 = 1$, 其一个基为 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

6 设 $V = \mathbb{K}^n$, 把齐次线性方程

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$$

的解集记作 W_1, 把齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ \quad \vdots \\ x_1 - x_n = 0 \end{cases}$$

的解集记作 W_2. 证明: $V = W_1 \oplus W_2$.

证明. 对任意 $\boldsymbol{x} \in V$ 总有

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} = \begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

而

$$\begin{bmatrix} x_1 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i & \cdots & x_n - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} \in W_1, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}} \in W_2$$

于是 $W_1 + W_2 = V$. 现在考虑 $\boldsymbol{w}_1 \in W_1$ 和 $\boldsymbol{w}_2 \in W_2$ 使得 $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = 0$, 则有

$$\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 = \begin{bmatrix} y_1 + z_1 & \cdots & y_n + z_n \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

于是 $y_1 + z_1 = \cdots = y_n + z_n = 0$. 因为 $z_1 = \cdots = z_n$, 于是 $y_1 = \cdots = y_n = -z_1$, 从而 $-nz_1 = 0$, 因而 $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2 = \mathbf{0}$. 于是 $W_1 + W_2$ 是直和. 命题得证. □

7 证明: 数域 $\mathbb{K}$ 上任一 n 维线性空间 V 都可以表示为 n 个一维子空间的直和.

证明. 考虑 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 记 $V_1 = \langle \boldsymbol{\alpha}_i \rangle$. 显然 $\dim V_i = 1$, 并且 V_i 是 V 的子空间. 对于 V 中的任一向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 可将其用这组基表示为

$$\boldsymbol{\alpha} = k_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \cdots + k_n\boldsymbol{\alpha}_n$$

从而 $V = \sum_{i=1}^{n} V_i$. 又因为 $\sum_{i=1}^{n} \dim V_i = n = \dim V = \dim\left(\sum_{i=1}^{n} V_i\right)$, 于是上述和是直和, 命题得证. □

9 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 阶矩阵, $\lambda_1, \cdots, \lambda_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的全部不同特征值, 用 W_{λ_j} 表示 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ_j 的特征子空间, 证明: $\boldsymbol{A}$ 可对角化当且仅当

$$\mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W_{\lambda_i}$$

证明. 已经知道分属不同特征值的特征向量线性无关. 考虑 W_{λ_i} 的一组基 $\boldsymbol{\eta}_{i1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{ir_i}$, 其中 $r_i = \dim W_{\lambda_i}$. 有

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\text{可对角化} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} \dim W_{\lambda_s} = n \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} r_i = n \\
&\Leftrightarrow \boldsymbol{\eta}_{11}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{1r_1}, \boldsymbol{\eta}_{21}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{2r_2}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{n1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{nr_n}\text{是}\mathbb{K}^n\text{的一组基} \\
&\Leftrightarrow \mathbb{K}^n = \bigoplus_{i=1}^{s} W_{\lambda_i}
\end{aligned}$$

□

习题 7.3

2 证明: 数域 $\mathbb{K}$ 上的线性空间 $\mathbb{K}[x]_n$ 与 $\mathbb{K}^n$ 同构, 并写出一个同构映射.

证明. 由于 $\dim \mathbb{K}[x]_n = \dim \mathbb{K}^n = n$, 因此它们同构. 考虑 $f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1}$, 一个可行的同构映射为

$$\sigma(f(x)) = \begin{bmatrix} a_0 & \cdots & a_{n-1} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

□

4 令

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

(1) 证明: L 是实数域上线性空间 $M_2(\mathbb{R})$ 的一个子空间, 并求 L 的一个基和维数.

(2) 证明: 复数域 $\mathbb{C}$ 作为实数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间与 L 同构, 并写出一个同构映射.

证明. **(1)** 考虑任意 $\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \in L$, 有

$$\boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ -(b_1 + b_2) & a_1 + a_2 \end{bmatrix} \in L$$

考虑任意 $k \in \mathbb{K}$ 有

$$k\boldsymbol{L}_1 = \begin{bmatrix} ka_1 & kb_1 \\ -kb_1 & ka_1 \end{bmatrix} \in L$$

于是 L 对加法和数量乘法封闭, 因此 L 是 $M_2(\mathbb{R})$ 的子空间. L 的一个基为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

因此 $\dim L = 2$.

(2) 由于 $\dim L = \dim \mathbb{C} = 2$, 因此二者同构. 一个可行的同构映射为

$$\sigma(a + b\mathrm{i}) = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

□

习题 8.1

2(2) 判断下面定义的 $M_n(\mathbb{K})$ 上的变换是否为线性变换: 设 $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{K})$, 令

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{BXC}, \quad \forall \boldsymbol{X} \in M_n(\mathbb{K})$$

解. 考虑任意 $\boldsymbol{X}_1, \boldsymbol{X}_2 \in M_n(\mathbb{K})$ 和 $k \in \mathbb{K}$. 有

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{X}_1 + \boldsymbol{X}_2)\boldsymbol{C} = \boldsymbol{BX}_1\boldsymbol{C} + \boldsymbol{BX}_2\boldsymbol{C} = \mathcal{A}(\boldsymbol{X}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{X}_2)$$

$$\mathcal{A}(k\boldsymbol{X}_1) = \boldsymbol{B}(k\boldsymbol{X}_1)\boldsymbol{C} = k\boldsymbol{BX}_1\boldsymbol{C} = k\mathcal{A}(\boldsymbol{X}_1)$$

于是 $\mathcal{A}$ 是线性变换.

3 判断下面定义的 $\mathbb{K}[x]$ 上的变换是否为线性变换: 给定 $a \in \mathbb{K}$, 令

$$\mathcal{A}(f(x)) = f(x + a), \quad \forall f(x) \in \mathbb{K}[x]$$

解. 考虑任意 $f(x), g(x) \in \mathbb{K}[x]$ 和 $k \in \mathbb{K}$. 有

$$\mathcal{A}(f + g) = (f + g)(x + a) = f(x + a) + g(x + a) = \mathcal{A}f + \mathcal{A}g$$

$$\mathcal{A}(kf) = (kf)(x + a) = k(f(x + a)) = k(\mathcal{A}f)$$

于是 $\mathcal{A}$ 是线性变换.

5 在 $\mathbb{K}[x]$ 中令

$$\mathcal{A}(f(x)) = xf(x), \quad \forall f(x) \in \mathbb{K}[x]$$

(1) 证明: $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}[x]$ 上的一个线性变换.

(2) 用 $\mathcal{D}$ 表示求导, 证明:

$$\mathcal{D}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{D}=\mathcal{I}$$

证明. **(1)** 考虑任意 $f(x),g(x)\in\mathbb{K}[x]$ 和 $k\in\mathbb{K}$. 有

$$\mathcal{A}(f+g)=x[(f+g)(x)]=x[f(x)+g(x)]=xf(x)+xg(x)=\mathcal{A}f+\mathcal{A}g$$

$$\mathcal{A}(kf)=x[(kf)(x)]=x[kf(x)]=kxf(x)=k\mathcal{A}f$$

于是 $\mathcal{A}$ 是线性变换.

(2) 对任意 $f(x)\in\mathbb{K}[x]$ 有

$$(\mathcal{D}\mathcal{A}-\mathcal{A}\mathcal{D})f=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(xf(x))-x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)=\mathcal{I}f$$

于是命题得证.

□

7 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的一个线性变换, 证明: 如果

$$\mathcal{A}^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})\neq\mathbf{0},\quad \mathcal{A}^{m}(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0},\quad m\in\mathbb{N}^{+},\boldsymbol{\alpha}\in V$$

那么 $\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathcal{A}^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.

证明. 假定 $\boldsymbol{\alpha},\mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}),\mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}),\cdots,\mathcal{A}^{m-1}(\boldsymbol{\alpha})$ 线性相关, 于是存在非零的 $k_0,\cdots,k_{m-1}$ 使得

$$k_0\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{m-1}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

在两边同时作用一次 $\mathcal{A}$ 可得

$$k_0\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}+k_1\mathcal{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\cdots+k_{m-2}\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

倘若 $k_{m-1}=0$, 那么余下的系数非零; 倘若 $k_{m-1}\neq 0$, 那么余下的系数也不可全为 0, 否则 $\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$ 与题意矛盾. 因此 $\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha},\cdots,\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性相关. 重复此操作, 最终可得

$$k_0\mathcal{A}^{m-1}\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}$$

由此 $k_0=0$, 但这和余下的系数不全为 0 矛盾. 于是假设不成立, 命题得证. □

习题 8.2

1 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{K}^3$ 上的一个线性变换:

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_3 - x_2 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

求 $\mathcal{A}$ 在标准基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1, \boldsymbol{\varepsilon}_2, \boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵.

解. 不难得出矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

2 在 $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ 中, 将函数

$$f_1 = \mathrm{e}^{ax}\cos bx, \quad f_2 = \mathrm{e}^{ax}\sin bx$$

所生成的二维子空间记作 V, 说明求导 $\mathcal{D}$ 是 V 上的线性变换, 并求 $\mathcal{D}$ 在 V 的一个基 f_1, f_2 下的矩阵.

解. 首先对任意 $f = k_1 f_1 + k_2 f_2$ 有

$$\mathcal{D}f = k_1\mathrm{e}^{ax}(a\cos bx - b\sin bx) + k_2\mathrm{e}^{ax}(a\sin bx + b\cos bx) = (k_1 a + k_2 b)f_1 + (k_2 a - k_1 b)f_2 \in V$$

于是 $\mathcal{D}$ 是 V 到 V 的映射. 不难证明 $\mathcal{D}$ 是保持加法和数量乘法的, 因此 $\mathcal{D}$ 是 V 上的线性变换, 其在基 f_1, f_2 下的矩阵为

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$$

4 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, 存在 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 与 V 中的向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 使得 $\mathcal{A}^{n-1}(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}$ 且 $\mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$, 证明: V 中存在一个基使得 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

证明. 在上一节已经证明 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}, \cdots, \mathcal{A}^{n-1}\boldsymbol{\alpha}$ 线性无关. 现在取 $\boldsymbol{\eta}_i = \mathcal{A}^{n-i}\boldsymbol{\alpha}(i = 1, \cdots, n)$ 作为 $\mathcal{A}$ 的基, 则有

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_1 = \mathcal{A}^n\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\eta}_j = \mathcal{A}\mathcal{A}^{n-j}\boldsymbol{\alpha} = \mathcal{A}^{n-j+1}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\eta}_{j-1}, \quad j = 2, \cdots, n$$

恰为题设矩阵的形式. 于是命题得证. □

6 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 n 维线性空间, V 到 $\mathbb{K}$ 的线性映射称为 V 上的线性函数. 把 $\hom(V,\mathbb{K})$ 记作 V^*, 称 V^* 是 V 的对偶空间. 证明: $V^* \cong V$.

证明. 我们有

$$\dim V^* = \dim \hom(V,\mathbb{K}) = \dim V \cdot \dim \mathbb{K} = n \cdot 1 = n = \dim V$$

于是 $V^* \cong V$. □

8 已知 $\mathbb{K}^3$ 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{bmatrix}$$

设

$$\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

它们构成 $\mathbb{K}^3$ 的一个基. 求 $\mathcal{A}$ 在 $\boldsymbol{\eta}_1, \boldsymbol{\eta}_2, \boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{B}$.

解.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_1 = 2\begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} -11 \\ -15 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_2 = 3\begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -11 \\ -15 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\eta}_3 = \begin{bmatrix} 15 \\ 20 \\ 8 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} -11 \\ -15 \\ -7 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 3 & 8 & 6 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}$$

9(1) 设 V 是数域 $\mathbb{K}$ 上的 3 维线性空间,V 上的一个线性变换 $\mathcal{A}$ 在 V 的一个基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 如下, 求 $\mathcal{A}$ 的全部特征值和特征向量:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

解.

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 2 & 4 & \lambda-5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -2 & 2 \\ -2 & \lambda-5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 & 2 \\ -2 & \lambda-9 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-2 & -4 \\ -2 & \lambda-9 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

对应于特征值 1 的特征向量为 $\{k_1(-2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) : k_1 \in \mathbb{K}, k_1 \neq 0\}, \{k_2(2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) : k_2 \in \mathbb{K}, k_2 \neq 0\}$.

对应于特征值 10 的特征向量为 $\{k_3(\boldsymbol{\alpha}_1 + 2\boldsymbol{\alpha}_2 - 2\boldsymbol{\alpha}_3) : k_3 \in \mathbb{K}, k_3 \neq 0\}$.

10 上述线性变换 $\mathcal{A}$ 是否可对角化? 如果 $\mathcal{A}$ 可对角化, 求其标准形.

解. 可以对角化, 其标准形为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$$

11 设 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 是数域 $\mathbb{K}$ 上 4 维线性空间 V 的一个基, V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在这个基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 的全部特征值和特征向量.

(2) 求 V 的一个基使得 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为对角矩阵, 并写出这个对角矩阵.

解.

(1)

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \lambda(\lambda-1) \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-1)^2$$

于是 $\mathcal{A}$ 的特征值为 $1, 0$.

考虑线性方程组 $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, 可知对应于特征值 1 的特征向量为

$$\{k_1(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3) + k_2\boldsymbol{\alpha}_4 : k_1, k_2 \in \mathbb{K}, k_1, k_2\text{不全为}0\}$$

同理可知对应于特征值 0 的特征向量为

$$\{k_3\boldsymbol{\alpha}_2 + k_4\boldsymbol{\alpha}_3 : k_3, k_4 \in \mathbb{K}, k_3, k_4\text{不全为}0\}$$

(2) 取 V 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$, $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$