北京大学数学科学学院 2023-24 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(10') 判断下面的方程组是否有解. 如果有解, 给出方程组的全部解; 如果无解, 请给出理由.

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 2 \\ -x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

解. 对该方程的增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

增广矩阵中存在形如 $0 = d$ 的行, 于是原方程组无解.

2(10') 已知线性方程组

$$\begin{cases} (a_1 + b)\, x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \\ a_1 x_1 + (a_2 + b)\, x_2 + \cdots + a_n x_n = 0 \\ \qquad \cdots \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + (a_n + b)\, x_n = 0 \end{cases}$$

其中 $\sum_{i=1}^{n} a_i \neq 0$.

(1) 计算上述方程组的系数矩阵的行列式.

(2) 讨论 $a_1, \cdots, a_n, b$ 满足何种条件时 **a.** 方程仅有零解; **b.** 方程组有非零解.

(3) 当方程组有非零解时, 求出方程的一个基础解系.

解.

(1) 设系数矩阵为 $\boldsymbol{A}$. 注意到 $\boldsymbol{A}$ 的每一行的和均为 $\sum_{i=1}^{n} a_i + b$, 于是将第二列及以后的列加到第一列上即可得

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} a_i + b & a_2 & \cdots & a_n \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + b & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} a_i + b & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b \right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 1 & a_2 + b & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_2 & \cdots & a_n + b \end{vmatrix}$$

注意到第一列均为 1, 于是将第二行及以后的行减去第一行可得

$$\det \boldsymbol{A} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right) \begin{vmatrix} 1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right) \begin{vmatrix} b & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & b \end{vmatrix} = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i + b\right) b^{n-1}$$

(2) 齐次方程仅有零解要求 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$, 于是 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + b \neq 0$ 且 $b \neq 0$. 于是 $a_1 + \cdots + a_n + b \neq 0$ 且 $b \neq 0$ 时原方程仅有零解; $a_1 + \cdots + a_n + b = 0$ 或 $b = 0$ 时原方程有非零解.

(3) 当 $b = 0$ 时, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

设 a_i 是 $a_1, \cdots, a_n$ 中第一个不为零的元素, 则方程组的解为

$$x_i = -\frac{a_1}{a_i}x_1 - \cdots - \frac{a_{i-1}}{a_i}x_{i-1} - \frac{a_{i+1}}{a_i}x_{i+1} - \cdots - \frac{a_n}{a_i}x_n$$

其中除 x_i 外均为自由变量. 于是方程组的一个基础解系为 $\boldsymbol{\eta}_1, \cdots, \boldsymbol{\eta}_{i-1}, \boldsymbol{\eta}_{i+1}, \cdots, \boldsymbol{\eta}_n$, 其中 $\boldsymbol{\eta}_k$ 的第 k 个分量为 1, 第 i 个分量为 $-\dfrac{a_1}{a_i}$. 当 $b \neq 0$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + b = 0$ 时, 对系数矩阵做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} b & 0 & 0 & \cdots & -b \\ 0 & b & 0 & \cdots & -b \\ 0 & 0 & b & \cdots & -b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n + b \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

于是方程的解为 $x_i = -x_n (i = 1, \cdots, n-1)$, 方程组的基础解系为 $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$.

3(15') 计算下面的行列式:

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ n-2 & n-3 & n-4 & \cdots & 0 & 1 \\ n-1 & n-2 & n-3 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

解. 将第二行及以后的行减去第一行可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

将第二列及以后的列减去第一列可得

$$A_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 1 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{n-1}{2} & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ 0 & -2 & -2 & \cdots & -2 & -2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{n-1}{2}(-2)^{n-1}$$

于是

$$A_n = (-1)^{n-1}(n-1)2^{n-2}$$

4(13') 求下面行列式中所有元素的代数余子式之和:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

解. 记行列式对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 由于 $\boldsymbol{A}$ 是下三角矩阵, 于是 $\det \boldsymbol{A} = 1$.

于是有

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant 5} A_{ij} = \sum_{j=1}^{5} a_{5j}A_{5j} + \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{5} a_{5j}A_{ij} = \det \boldsymbol{A} + 0 = 1$$

5(10') 已知向量组

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$$

求该向量组的一个极大线性无关组.

解. 首先有

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -23 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关. 然后有

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 2 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 考虑由 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 构成的矩阵, 其行秩与列秩最大为 3, 于是原向量组的一个极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.

6(12') 求下列 n 级方阵的秩:

$$\begin{bmatrix} x & a & \cdots & a \\ a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & \cdots & x \end{bmatrix}$$

解. 记上述矩阵为 $\boldsymbol{A}_n(x)$, 注意到 $\boldsymbol{A}_n$ 的每一行元素之和均为 $x+(n-1)a$, 于是有

$$\det \boldsymbol{A}(x) = \begin{vmatrix} x+(n-1)a & a & \cdots & a \\ x+(n-1)a & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x+(n-1)a & a & \cdots & x \end{vmatrix} = [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 1 & x & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a & \cdots & x \end{vmatrix}$$

$$= [x+(n-1)a] \begin{vmatrix} 1 & a & \cdots & a \\ 0 & x-a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x-a \end{vmatrix} = [x+(n-1)a]\,(x-a)^{n-1}$$

当 $x \neq a$ 且 $x+(n-1)a \neq 0$ 时 $\det \boldsymbol{A}_n(x) \neq 0$, 即 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x) = n$.

当 $x = a$ 时注意到每一列均相同. 此时如果 $a = 0$ 则 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x) = 0$, 否则 $\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x) = 1$.

当 $x = (1-n)a$ 时 (这里 $x = a = 0$ 已经讨论过) 考虑 $\boldsymbol{A}_n(x)$ 的 $(1,1)$ 元的余子式, 恰为 $\boldsymbol{A}_{n-1}(x)$. 于是

$$A_{11} = \boldsymbol{A}_{n-1}(x) = [x-(n-2)a]\,(x-a)^{n-2} = a(-na)^{n-2} \neq 0$$

于是 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}_n(x) = n-1$. 于是总结如下:

$$\operatorname{rank}\ \boldsymbol{A}_n(x) = \begin{cases} n, \quad x \neq a\text{且}x \neq (1-n)a \\ n-1, \quad x = (1-n)a\text{且}a \neq 0 \\ 1, \quad x = a\text{且}a \neq 0 \\ 0, \quad x = a = 0 \end{cases}$$

7(10') 给定 n 个两两不同的数 $a_1, \cdots, a_n$. 设 $b_1, \cdots, b_n$ 为任意的 n 个数, 证明: 存在唯一的次数不超过 $n-1$ 的多项式 $f(x)$ 使得 $f(a_i) = b_i$ 成立.

证明. 考虑线性方程组

$$\begin{cases} c_0 + c_1 a_1 + c_2 a_1^2 + \cdots + c_{n-1} a_1^{n-1} = b_1 \\ c_0 + c_1 a_2 + c_2 a_2^2 + \cdots + c_{n-1} a_2^{n-1} = b_2 \\ \cdots \\ c_0 + c_1 a_n + c_2 a_n^2 + \cdots + c_{n-1} a_n^{n-1} = b_n \end{cases}$$

这一方程组的系数矩阵的行列式为

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) \neq 0$$

于是原方程组有唯一解, 因此存在唯一的多项式

$$f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^{n-1}$$

使其满足题意. □

8(10') 设 5 级方阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\det \boldsymbol{M} \neq 0$. 试证明: 存在一个 5 级上三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $\det \boldsymbol{B} \neq 0$ 使得 $\boldsymbol{BM}$ 有如下性质: 对于任一 $1 \leqslant i \leqslant 5$, 都有且仅有 $\boldsymbol{BM}$ 的一行满足该行的前 $i-1$ 个位置为 0, 第 i 个位置不为 0.