北京大学数学科学学院 2025-26 学年第一学期线性代数 B 期末试题

1(13') 将二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+4x_2x_3$$

化为规范型, 写出其正惯性指数和负惯性指数.

2(18') 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的逆.

(2) 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值.

(3) 判断 $\boldsymbol{A}$ 是否可对角化.

3(20') 设线性空间 V 是由所有形如

$$\begin{bmatrix}a&-b&c&d\\b&a&d&-c\\-c&-d&a&-b\\-d&c&b&a\end{bmatrix}$$

的 4×4 矩阵和矩阵的加法和数量乘法构成的线性空间. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

定义线性映射 $f:V\to V$ 为 $f(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ 对所有 $\boldsymbol{X}\in V$ 成立.

(1) 写出 V 的一组基.

(2) 求出 f 在上述基下的矩阵.

4(10') 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别是 m 级方阵和 p 级方阵. 定义 mp 级方阵

$$\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{B}&\cdots&a_{1m}\boldsymbol{B}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}\boldsymbol{B}&\cdots&a_{mm}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

(1) 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 可逆, 那么 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也可逆.

(2) 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 是对称矩阵且正定, 那么 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}$ 也是正定矩阵.

5(10') 设 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 满足

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \neq 0, \quad \forall k = 1, \cdots, n$$

证明: 存在可逆的 n 级下三角矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{BA}$ 为上三角矩阵.

6(10') 设 n 级实方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式可以写成一次多项式的乘积, 证明: $\boldsymbol{A}$ 与某一下三角矩阵相似.

7(10') 设 n 级半正定对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 证明: 存在线性无关的 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 使得

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} & \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

8(9') 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性映射. 设 $\boldsymbol{\alpha} \in V$ 和 $n \in \mathbb{N}^*$ 满足

$$\mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha}) \neq \mathbf{0}, \quad \mathcal{A}^{n+1}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}$$

证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \mathcal{A}(\boldsymbol{\alpha}), \mathcal{A}^2(\boldsymbol{\alpha}), \cdots, \mathcal{A}^n(\boldsymbol{\alpha})$ 线性无关.