

## 北京大学数学科学学院 2022-23 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1 判断二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

是否正定, 并说明理由.

2 实二次型  $f(x_1, x_2, x_3)$  的矩阵为  $A$ , 其特征值为 1(二重),  $-1$ . 属于特征值 1 的特征向量是

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(1) 求属于特征值  $-1$  的全部特征向量.

(2) 求  $A$ .

3 将二次型

$$f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 4xy - 4yz$$

做正交替换化为标准形.

4 设  $\mathcal{A}: M_2(\mathbb{K}) \mapsto M_2(\mathbb{K})$  对任意  $X \in M_2(\mathbb{K})$  都有

$$\mathcal{A}(X) = X^t$$

(1) 证明:  $\mathcal{A}$  是线性变换.

(2) 求  $\mathcal{A}$  在基  $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$  下的矩阵.

5 证明: 任意  $\mathbb{C}$  上的  $n$  级矩阵  $A$ , 总存在  $\mathbb{C}$  上的  $n$  级上三角矩阵  $B$  使得  $A$  与  $B$  相似.

6 证明: 所有二级正交矩阵均可表示为

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad \text{或} \quad \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$$

中的一种, 其中  $\theta \in \mathbb{R}$ .

7 设  $A$  是  $\mathbb{R}$  上  $m \times n$  的列满秩矩阵, 其中  $m > n$ . 记  $A$  的列空间为  $U$ , 记

$$P_A = A(A^t A)^{-1} A^t$$

令  $\mathcal{P}_A(\mathbf{X}) = \mathbf{P}_A \mathbf{X}$  对所有  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^m$  成立.

(1) 证明:  $\mathbf{P}_A \mathbf{X} \in U$ .

(2) 证明:  $\mathcal{P}_A$  是  $\mathbb{R}^m$  到  $U$  的正交投影.