北京大学数学科学学院 2024-25 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&2&4\\1&3&9\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵.

解. 对 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$ 做初等行变换, 得到

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1&0&0\\1&2&4&0&1&0\\1&3&9&0&0&1\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&3&-3&1\\0&1&0&-\frac{5}{2}&4&-\frac{3}{2}\\0&0&1&\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

因此

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}3&-3&1\\-\frac{5}{2}&4&-\frac{3}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

2(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&2&2\\2&1&-2\\2&-2&1\end{bmatrix}$$

求正交矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得 $\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}$ 为对角矩阵.

解. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda-1&-2&-2\\-2&\lambda-1&2\\-2&2&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-3)^2(\lambda+3)$$

对于特征值 -3, $(-3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\-1\end{bmatrix}$$

对于特征值 3, $(3\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix},\quad\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$$

分别对各个特征空间的基进行正交归一化, 得到

$$\boldsymbol{U}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{6}}{6}\\ -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 & \frac{\sqrt{6}}{3}\end{bmatrix}$$

则有

$$\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}=\operatorname{diag}\{-3,3,3\}$$

于是 $\boldsymbol{U}$ 即为所求正交矩阵.

3(10') 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 2\\ 2 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

求二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的正, 负惯性指数.

解. 该二次型的矩阵的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\lambda & -2 & -2\\ -2 & \lambda & -2\\ -2 & -2 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda+2)^2$$

于是该二次型的正惯性指数为 1, 负惯性指数为 2.

设 $V_1=\langle\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3\rangle$, $V_2=\langle\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3\rangle$ 为 $\mathbb{K}^4$ 的子空间, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_2=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}$$

求 $V_1\cap V_2$ 的一组基和维数.

解. 考虑齐次线性方程组

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3+l_1\boldsymbol{\beta}_1+l_2\boldsymbol{\beta}_2+l_3\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{0}$$

对方程组的系数矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 2 & 1 & 2 & 2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

其一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{t}},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}-1 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是 $V_1\cap V_2$ 的维数为 2, 其一组基为

$$\boldsymbol{\gamma}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\gamma}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\1\end{bmatrix}$$

5(15') 设 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 是线性空间 V 的一组基, 而 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 和 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3$ 是 V 的另外两组基, 已知

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\2 & 1 & -1\\-3 & -1 & 2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

分别是基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 到基 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3$ 和到基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 的过渡矩阵. 再设 $\mathcal{A}$ 是 V 上的线性变换, 其在基 $\boldsymbol{\varepsilon}_1,\boldsymbol{\varepsilon}_2,\boldsymbol{\varepsilon}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}-5 & -10 & -4\\7 & 12 & 4\\-2 & -3 & 1\end{bmatrix}$$

(1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵.

(2) 求基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 到基 $\boldsymbol{\delta}_1,\boldsymbol{\delta}_2,\boldsymbol{\delta}_3$ 的过渡矩阵.

解.

(1) 依照线性变换的矩阵的定义,$\mathcal{A}$ 在基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\2 & 3 & 1\\3 & 4 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-5 & -10 & -4\\7 & 12 & 4\\-2 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -2 & 1\\-1 & 2 & -1\\-1 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 3 & 1\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}$$

(2) 依题意有

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \boldsymbol{\eta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}$$

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{\delta}_1 & \boldsymbol{\delta}_2 & \boldsymbol{\delta}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\varepsilon}_1 & \boldsymbol{\varepsilon}_2 & \boldsymbol{\varepsilon}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}_1 & \boldsymbol{\eta}_2 & \boldsymbol{\eta}_3\end{bmatrix}\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}$$

于是所求的过渡矩阵为

$$\boldsymbol{Q}^{-1}\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}3 & 3 & -1\\5 & 6 & -1\\5 & 8 & 0\end{bmatrix}$$

6(10') 设

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

为分块矩阵, 其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为方阵.

(1) 问当 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足什么条件时 $\boldsymbol{X}$ 可逆, 并证明你的结论.

(2) 设 $\boldsymbol{X}$ 可逆, 求其逆矩阵, 假定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 是已知的矩阵.

解.

(1) 不妨设 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的阶数分别为 n,m. 于是

$$m+n=\operatorname{rank}\boldsymbol{X}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\leqslant\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}+\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

而 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\\ \boldsymbol{C}\end{bmatrix}\leqslant n$, 于是 $\operatorname{rank}\boldsymbol{B}\geqslant m$, 从而 $\boldsymbol{B}$ 可逆. 同理, 对 $\boldsymbol{X}$ 的行进行拆分可知 $\boldsymbol{C}$ 可逆. 于是 $\det\boldsymbol{B}\neq 0$ 且 $\det\boldsymbol{C}\neq 0$, 从而

$$\det\boldsymbol{X}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{vmatrix}\neq 0$$

于是此时 $\boldsymbol{X}$ 可逆.

(2) 不妨设

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{P} & \boldsymbol{Q}\\ \boldsymbol{R} & \boldsymbol{S}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$$

于是

$$\boldsymbol{AP}+\boldsymbol{BR}=\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{AQ}+\boldsymbol{BS}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{CP}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{CQ}=\boldsymbol{I}$$

由于 $\boldsymbol{C}$ 可逆, 于是 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{C}^{-1}$, 于是 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{B}^{-1}$, $\boldsymbol{S}=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}$. 于是

$$\boldsymbol{X}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{C}^{-1}\\ \boldsymbol{B}^{-1} & -\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}^{-1}\end{bmatrix}$$

7(15') 设 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 是线性空间 V 上的线性变换, 其在 V 的基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ -3 & 1 & 3\\ -2 & 0 & 3\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 4 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

(1) 求 V 上的线性变换 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$.

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的所有特征值及其特征子空间, 证明 V 可以表示成这些特征子空间的直和.

(3) 试判断是否存在 V 的基 $\boldsymbol{\eta}_1,\boldsymbol{\eta}_2,\boldsymbol{\eta}_3$ 使得 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{B}$ 在此基下的矩阵均为对角矩阵, 并说明理由.

解.

(1) $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$ 的矩阵为 $\boldsymbol{AB}-\boldsymbol{BA}$. 而

$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-10&4&8\\-7&1&8\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}-1&1&2\\-10&4&8\\-7&1&8\end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{0}$, 因而 $\mathcal{AB}-\mathcal{BA}$ 是零映射, 对任意 $\boldsymbol{v}\in V$ 都有 $(\mathcal{AB}-\mathcal{BA})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$.

(2) $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{bmatrix}\lambda&0&-1\\3&\lambda-1&-3\\2&0&\lambda-3\end{bmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-2)$$

对于特征值 1, $(1\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\eta}_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 的对应于特征值 1 的特征子空间 $V_1=\{k_1(\boldsymbol{\varepsilon}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_3)+k_2\boldsymbol{\varepsilon}_2:k_1,k_2\in\mathbb{K}\}$.

对于特征值 2, $(2\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系为

$$\boldsymbol{\eta}_3=\begin{bmatrix}1\\3\\2\end{bmatrix}$$

于是 $\mathcal{A}$ 的对应于特征值 2 的特征子空间 $V_2=\{k_3(\boldsymbol{\varepsilon}_1+3\boldsymbol{\varepsilon}_2+2\boldsymbol{\varepsilon}_3):k_3\in\mathbb{K}\}$.

由于对应于不同特征值的特征向量无关, 因此 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$. 而 $\dim V_1+\dim V_2=3=\dim V$, 于是 $V_1\oplus V_2=V$.

(3) 存在. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征空间 V_i 和对应于此特征空间的特征值 λ_i, 任取 $\boldsymbol{x}_i\in V_i$, 总有

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}\boldsymbol{x}_i)=\mathcal{BA}\boldsymbol{x}_i=\lambda(\mathcal{B}\boldsymbol{x}_i)$$

于是 $\mathcal{B}\boldsymbol{x}_i\in V_i$, 因此 V_i 是 $\mathcal{B}$ 的不变子空间. 容易证明 $\boldsymbol{B}$ 可对角化, 于是 $\boldsymbol{B}$ 在 V_i 上可对角化. 考虑 $\boldsymbol{B}$ 在 V_i 上的特征向量组成的基, 这同时也是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量. 于是 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 可同时对角化.

8(9') 考虑实二次型

$$Q(x,y,z)=\lambda(x^2+y^2+z^2)-2xy-2xz+2yz$$

其中 λ 为参数. 请回答下面的问题并证明你的结论:

(1) 当 $\lambda=1$ 时, $Q(x,y,z)$ 为何种二次型.

(2) 当且仅当 λ 取何值时, 存在不全为零的 $a,b,c\in\mathbb{R}$ 使得

$$Q(x,y,z)=(ax+by+cz)^2$$

解.

(1) 当 $\lambda=1$ 时, 该二次型的矩阵的特征多项式

$$\det(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\mu-1 & 1 & 1\\ 1 & \mu-1 & -1\\ 1 & -1 & \mu-1\end{vmatrix}=\mu^2(\mu-3)$$

所有特征值非负, 因此该二次型是半正定二次型.

(2) 此时二次型的秩为 1, 于是

$$\begin{vmatrix}\lambda & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ -1 & 1 & \lambda\end{vmatrix}=(\lambda+2)(\lambda-1)^2=0$$

解得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=-2$. 当 $\lambda=1$ 时 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}=1$, 当 $\lambda=-2$ 时 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}-2 & -1 & -1\\ -1 & -2 & 1\\ -1 & 1 & -2\end{bmatrix}=2$.

于是当且仅当 $\lambda=1$ 时题设成立.

9(6') 设 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 上的线性变换, 满足

$$\mathcal{A}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2x\\ 3y+z\\ y+3z\end{bmatrix},\quad \forall\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^3$$

问是否存在 $\mathbb{R}^3$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 使得

$$\mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1,\quad \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\quad \mathcal{A}\boldsymbol{\alpha}_3=4\boldsymbol{\alpha}_3$$

并证明你的结论.

解. $\mathcal{A}$ 在标准基下的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{bmatrix}$$

在题设的基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 下的矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

只需验证 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是否相似即可. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 3 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 3 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

$\boldsymbol{B}$ 的特征多项式为

$$\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda - 4 \end{vmatrix} = (\lambda - 2)^2(\lambda - 4)$$

于是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相同的特征多项式, 因而两者相似, 于是存在一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 使得题设成立.