北京大学数学科学学院 2023-24 学年第二学期线性代数 B 期末试题

1(15') 设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ x & -2 & 0 \\ -1 & -1 & y \end{bmatrix}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & z \\ 0 & -1 & 0 \\ z & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 相似.

(1) 求 x, y, z 的值.

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

(3) 求 $\boldsymbol{A}^m$, 其中 $m \in \mathbb{N}^+$.

解.

(1) 相似的矩阵具有相同的特征多项式. 对于 $\boldsymbol{A}$ 有

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -x & \lambda + 2 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda - y \end{vmatrix} = \lambda^3 + (1-y)\lambda^2 - (x+y+3)\lambda + (x+2)(y-1)$$

对于 $\boldsymbol{B}$ 有

$$\det(\lambda\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & -z \\ 0 & \lambda + 1 & 0 \\ -z & 0 & \lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)(\lambda^2 - \lambda - z^2) = \lambda^3 - (1+z^2)\lambda - z^2$$

于是

$$\begin{cases} 1 - y = 0 \\ x + y + 3 = 1 + z^2 \\ (x+2)(y-1) = -z^2 \end{cases}$$

解得

$$x = -3, \quad y = 1, \quad z = 0$$

(2) 此时 $\boldsymbol{B}$ 为对角矩阵.

考虑 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 1 的特征向量, 齐次线性方程组 $(1\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})$ 的一个解为

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

同理, $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 -1 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$, 对应于特征值 0 的一个特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 于是令

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

即可使得 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

(3) 我们有

$$A^m = (PBP^{-1})^m = PB^mP^{-1}$$

而 $B^3 = B$, 于是对于任意奇数 m 都有 $A^m = A$, 对于任意偶数 m 都有 $A^m = A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

2(10') 设 $t \in \mathbb{R}$, 求实二次型

$$q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + tx_1x_2 + 2tx_1x_3 + 4x_2x_3$$

的秩和正惯性指数.

解. 该二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{t}{2} & t \\ \frac{t}{2} & 1 & 2 \\ t & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

顺序主子式依次为 $1, 1 - \dfrac{t^2}{4}, t^2 - 4$.

当 $t^2 \neq 4$ 时, 矩阵的秩为 3, 考虑其特征多项式

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^3 - 2\lambda^2 - \left(\frac{5}{4}t^2 + 3\right)\lambda + (4 - t^2)$$

根据韦达定理, 设 A 的特征值分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, 则有

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2, \quad \lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = -\left(\frac{5}{4}t^2 + 3\right), \quad x_1x_2x_3 = t^2 - 4$$

于是当 $t^2 > 4$ 时, A 的特征值两负一正, 正惯性指数为 1; 当 $t^2 < 4$ 时, A 的正惯性指数两正一负, 正惯性指数为 2.

当 $t^2 = 4$ 时, 容易验证 A 的秩为 2, 此时特征多项式为 $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 8\lambda$, 正惯性指数为 1.

3(10') 求 a 满足的条件使得实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3)$$

正定.

解. 该二次型的矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{bmatrix}$$

其顺序主子式依次为 $a, (a+1)(a-1), (a+2)(a-1)^2$. 由于上述二次型正定, 因此所有顺序主子式均为正数, 从而 $a > 1$.

4(10') 设 $V = \mathbb{K}^5$, $V_1 = \operatorname{span}(\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $V_2 = \operatorname{span}(\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 其中

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 6 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

分别求 $V_1 + V_2$, $V_1 \cap V_2$ 的维数和一个基.

解. 由于

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \quad \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} = -7 \neq 0$$

于是 $\dim V_1 = \dim V_2 = 3$. 考虑

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \boldsymbol{\alpha}_3 & \boldsymbol{\alpha}_4 & \boldsymbol{\alpha}_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 6 \\ 0 & -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ -5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 48 \neq 0$$

于是 $\dim(V_1 + V_2) = 5$, 其一组基为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$. 而

$$\dim(V_1 \cap V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 + V_2) = 1$$

考虑 $x_1\boldsymbol{\alpha}_1 + x_2\boldsymbol{\alpha}_2 + x_3\boldsymbol{\alpha}_3 + x_4\boldsymbol{\beta}_1 + x_5\boldsymbol{\beta}_2 + x_6\boldsymbol{\beta}_3 = \mathbf{0}$, 这线性方程组的一组解为

$$\begin{bmatrix} -1 & -5 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

于是 $V_1 \cap V_2$ 的一组基为

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

5(15') 设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in M_n(\mathbb{K})$ 是 n 级矩阵, 其中 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 是严格上三角矩阵, 满足 $i \geqslant j$ 时 $b_{ij} = 0$. 令

$$f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{AX} - \boldsymbol{XB}, \quad \forall \boldsymbol{X} \in M_n(\mathbb{K})$$

(1) 证明 f 是 $M_n(\mathbb{K})$ 上的一个线性变换.

(2) 求 f 在基 $\boldsymbol{E}_{11}, \boldsymbol{E}_{21}, \cdots, \boldsymbol{E}_{n1}, \boldsymbol{E}_{12}, \boldsymbol{E}_{22}, \cdots, \boldsymbol{E}_{n2}, \cdots, \boldsymbol{E}_{nn}$ 下的矩阵, 这里 $\boldsymbol{E}_{ij}$ 是只有 (i,j) 元为 1, 其余元素为 0 的基本矩阵.

(3) 如果 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 证明: 对任意 $\boldsymbol{C} \in M_n(\mathbb{K})$, 存在唯一的 $\boldsymbol{X}$ 使得 $f(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}$.

解.

(1) 对于任意 $\boldsymbol{X}, \boldsymbol{Y} \in M_n(\mathbb{K})$ 和 $k \in \mathbb{K}$ 有

$$f(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y}) - (\boldsymbol{X}+\boldsymbol{Y})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{X}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{Y}\boldsymbol{B} = f(\boldsymbol{X}) + f(\boldsymbol{Y})$$

$$f(k\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{A}(k\boldsymbol{X}) - (k\boldsymbol{X})\boldsymbol{B} = k\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} - k\boldsymbol{X}\boldsymbol{B} = kf(\boldsymbol{X})$$

于是 f 是 $M_n(\mathbb{K})$ 上的线性变换.

(2) 设 f 在这组基下的矩阵 $\boldsymbol{M} = (m_{ij})$, 设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$. 于是有

$$f(\boldsymbol{E}_{ij}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{E}_{ij} - \boldsymbol{E}_{ij}\boldsymbol{B} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{E}_{kj} - \sum_{k=1}^{n} b_{jk}\boldsymbol{E}_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\boldsymbol{E}_{kj} - \sum_{k=j+1}^{n} b_{ki}\boldsymbol{E}_{kj}$$

(3) 首先证明唯一性. 如果这样的 $\boldsymbol{X}$ 不唯一, 那么总存在非零的 $\boldsymbol{X}$ 使得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{X}\boldsymbol{B}$$

设 $\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_1 & \cdots & \boldsymbol{x}_k \end{bmatrix}$, 则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ki}\boldsymbol{x}_k = \sum_{k<i} b_{ki}\boldsymbol{x}_k$$

当 $i=1$ 时可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$, 又因为 $\boldsymbol{A}$ 可逆, 于是 $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$.

当 $i=2$ 时可得 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_2 = b_{12}\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{0}$, 同理可得 $\boldsymbol{x}_2 = \boldsymbol{0}$. 于是如此推断可得 $\boldsymbol{x}_1 = \cdots = \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{0}$, 这与 $\boldsymbol{X}$ 非零矛盾, 于是满足条件的 $\boldsymbol{X}$ 是唯一的.

现在证明存在性. 考虑 $\boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}_1 & \cdots \boldsymbol{c}_n \end{bmatrix}$. 依题意可得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_i - \sum_{k<i} b_{ki}\boldsymbol{x}_k = \boldsymbol{c}_i$$

于是令

$$\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{A}^{-1}\left(\boldsymbol{c}_i + \sum_{k<i} b_{ki}\boldsymbol{x}_k\right)$$

依次令 $i = 1, 2, \cdots, n$ 即可构造出符合题意的 $\boldsymbol{X}$.

6(14') 设 n 级矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值, 证明: 存在 n 级可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 以及 n 级矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}$.

(2) 如果把前提条件 $\boldsymbol{A}$ 有 n 个互不相同的特征值去掉, 上一小题的结论是否成立? 如果成立, 请给出证明; 如果不成立, 请给出反例.

解.

(1) 由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均有 n 个互不相同的特征值, 且两者的特征值相同, 于是二者具有相同的特征多项式 $f(\lambda)=\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)$, 从而二者相似. 于是存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$. 令 $\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}$, 则有

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PP}^{-1}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{PQ},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{QP}$$

于是命题得证.

(2) 不成立. 如果 $\boldsymbol{A}$ 没有 n 个互不相同的特征值, 那么 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的特征多项式的根的重数可能不同, 也即两者可能不相似, 此时就无法推出题设的结论.

7(10') 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}\in M_n(\mathbb{K})$ 两两可交换, 且满足 $\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BD}=\boldsymbol{I}$. 设齐次线性方程组 $\boldsymbol{ABx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 V, $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 V_1, $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解空间为 V_2. 证明: $V=V_1\oplus V_2$.

证明. 首先证明 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$. 假定存在非零的 $\boldsymbol{x}\in V_1\cap V_2$, 则有

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$$

由于 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$ 两两可交换, 于是 $\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB}=\boldsymbol{I}$, 于是则有

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ix}=(\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{DB})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}(\boldsymbol{Ax})+\boldsymbol{D}(\boldsymbol{Bx})=\boldsymbol{C0}+\boldsymbol{D0}=\boldsymbol{0}$$

这与 $\boldsymbol{x}$ 非零矛盾, 从而 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$.
根据解空间的维数定理有

$$\dim V_1=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{B},\quad \dim V_2=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{A},\quad \dim V=n-\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}$$

根据 Sylvester 秩不等式, 总有

$$\operatorname{rank}\boldsymbol{AB}\geqslant\operatorname{rank}\boldsymbol{A}+\operatorname{rank}\boldsymbol{B}-n$$

即

$$\dim V_1+\dim V_2\geqslant\dim V$$

既然 V_1,V_2 都是 V 的子空间, 并且 $V_1\cap V_2=\{\boldsymbol{0}\}$, 于是 $V_1\oplus V_2=V$. □

8(16') 考虑欧几里得空间 $\mathbb{R}[x]_3=\{a+bx+cx^2:a,b,c\in\mathbb{R}\}$, 其上内积的定义为

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)\mathrm{d}x$$

(1) 求 α,β,γ 的值使得下述向量组是正交基:

$$p_1(x)=1,\quad p_2(x)=\alpha+x,\quad p_3(x)=\beta+\gamma x+x^2$$

(2) 求二次首一多项式 $r(x)=a+bx+x^2$ 的长度最小值.