1 线性方程组

1.1 求解线性方程组

1.1.1 线性方程组的相关定义

定义 1.1 线性方程组 形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

的方程称作 k **元线性方程组**, 其中 $a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{nk}$ 为系数,$b_1, \cdots, b_n$ 为常数项.

定义 1.2 增广矩阵和系数矩阵 上述线性方程组的**增广矩阵**为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{pmatrix}$$

系数矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

1.1.2 线性方程组的解法

定理 1.3 解线性方程组的操作 我们一般对线性方程组做如下变换:

1. 把一个方程的倍数加到另一个方程上.
2. 互换两个方程的位置.
3. 用一个非零的数乘某一个方程.

上述操作被称为**线性方程组的初等变换**, 对应的在矩阵中对行的操作被称为**初等行变换**.

定义 1.4 阶梯形矩阵和简化行阶梯形矩阵 **阶梯形矩阵**应当满足下述条件:

1. 元素全为 0 的行 (即**零行**) 在下方.

2. 元素不全为 0 的行 (即**非零行**), 从左起第一个不为 0 的元素 (称**主元**) 的列指标随行指标的增大而严格增大.

通俗而言, 阶梯形矩阵的各行左起连续为 0 的元素数目是随行指标严格递增的. 例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即为阶梯形矩阵. 阶梯形矩阵和上三角矩阵的定义是有些类似的, 但上三角矩阵一定是方阵, 而阶梯形矩阵不一定.

一种特殊的阶梯形矩阵, 即**简化行阶梯形矩阵**, 应当满足如下条件:

1. 是阶梯形矩阵.
2. 每个非零行的主元均为 1.
3. 每个主元所在列的其余元素均为 0.

例如

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即为简化行阶梯形矩阵. 不难看出, 简化行阶梯形矩阵直接对应于线性方程组的解.

于是, 只要对线性方程组施以初等变换, 即可得到解或者判断出解的存在性.

1.2 线性方程组的解的情况与判别准则

1.2.1 阶梯形矩阵的必然存在性

定理 1.5 阶梯形矩阵的必然存在性 任一矩阵都能经初等行变换为阶梯形矩阵.

证明. 我们现在通过数学归纳法证明上述命题.

零矩阵按定义是阶梯形矩阵. 现在考虑非零矩阵, 对行数 m 做归纳.

当 $m = 1$ 时, 该矩阵一定是阶梯形矩阵.

当 $m > 1$ 时, 假定 $m-1$ 行矩阵可以经初等行变换为阶梯形矩阵. 考虑 m 行的矩阵 $\boldsymbol{A}$, 其 (i, j) 元记为 a_{ij}.

如果 $\boldsymbol{A}$ 的第一列不全为 0, 那么可以通过交换使得 $a_{11} \neq 0$, 因此不妨直接假设 $a_{11} \neq 0$. 对于任意 $2 \leqslant i \leqslant m$,

将第一行的 $-\frac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍加到第 i 行上. 于是, 变换后的矩阵 $\boldsymbol{J}_1$ 的第一列除 a_{11} 外将变为 0, 即

$$\boldsymbol{J}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{2n}-\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{12} & \cdots & a_{mn}-\frac{a_{m1}}{a_{11}}a_{1n} \end{pmatrix}$$

注意到这一矩阵除去第一行和第一列之外即为 $m-1$ 行的矩阵, 按照归纳假设, 它可以通过初等行变换为阶梯形矩阵 $\boldsymbol{K}_1$. 于是,$\boldsymbol{A}$ 可以经初等行变换为下面的矩阵:

$$\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{K}_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

依定义, 上述右边的矩阵也是阶梯形矩阵.

如果 $\boldsymbol{A}$ 的第一列全为 0, 那么就忽略首列直到出现不全为 0 的列为止, 记此时的矩阵为 $\boldsymbol{B}$. 根据前面的讨论,$\boldsymbol{B}$ 作为 m 行矩阵也是可以变换为阶梯形矩阵的, 记变换后的矩阵为 $\boldsymbol{K}_2$. 于是,$\boldsymbol{A}$ 可以经历如下变换:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1k} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{mk} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \boldsymbol{B} \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \boldsymbol{K}_2 \\ 0 & \cdots & 0 & \end{pmatrix}$$

依定义, 上述右边的矩阵也是阶梯形矩阵.

于是 m 行的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可以通过初等行变换成阶梯形矩阵.

于是对上述结论归纳可得: 所有矩阵都可以通过初等行变换成阶梯形矩阵. □

定理 1.6 简化阶梯形矩阵的必然存在性 任一矩阵都能经初等行变换为简化阶梯形矩阵.

证明. 这是简单的. 在变换成阶梯形矩阵的基础上, 自下而上的对矩阵消元即可. □

1.2.2 线性方程的解的情况及其判别准则

定理 1.7 线性方程的解的情况及其判别准则 系数和常数项为有理数 (或实数, 或复数) 的 n 元线性方程组的解的情况有且仅有三种: **无解**, **有唯一解**, **有无穷多解**.

把 n 元线性方程组的增广矩阵经初等行变换为阶梯形矩阵, 如果出现主元在最后一列 (即出现 $0=d$ 型的方程) 则原方程无解; 否则有解.

当有解时, 如果阶梯形矩阵的非零行数目 r 等于未知量数目 n, 那么原方程组有唯一解; 如果 $r<n$, 那么原方程组有无穷多解.

上述解线性方程组的办法称作 **Gauss-Jordan 算法**.

定义 1.8 齐次线性方程组 常数项全为 0 的线性方程组称作齐次线性方程组.

推论 1.9 齐次线性方程组有解的充要条件 n 元齐次线性方程组有非零解, 当且仅当它的系数矩阵经初等行变换成的阶梯形矩阵中, 非零行的数目 $r < n$.

证明. n 元齐次线性方程组必然存在 $(0, \cdots, 0)'$ 这一组解. 因此, 当且仅当方程组有无穷多解时才存在非零解. □

推论 1.10 齐次线性方程组有解的充分条件 当 n 元齐次线性方程组的方程数目 s 小于未知量的数目 n, 那么它有非零解.

证明. 注意到有 $r \leqslant s < n$, 故得证. □

1.3 数域

定义 1.11 数域 如果集合 $K \subseteq \mathbb{C}$ 满足

1. $0, 1 \in K$.
2. $\forall a, b \in K, a \pm b \in K$ 且 $ab \in K$.
3. $\forall a, b \in K$ 且 $b \neq 0, \dfrac{a}{b} \in K$.

那么称 K 是一个**数域**.

通俗而言, 数域就是对四则运算封闭的集合. 特别地, 上面第二条和第三条的运算都是 $\mathbb{C}$ 中的运算. 下面是一个典型的反例.

例题 1.1 令 $S = \{0, 1\}$, 并令 $0+1 = 1+0 = 1, 0+0 = 1+1 = 0, 1 \times 1 = 1, 0 \times 0 = 1 \times 1 = 0$. 说明 S 不是数域.

证明. 尽管 $S \subset \mathbb{C}$, 但上述定义的加法与 $\mathbb{C}$ 上定义的不同, 于是 S 不是数域. 事实上,S 是域的一种, 称作**有限域**. □

例题 1.2 令

$$F = \left\{ \frac{a_0 + a_1 \mathrm{e} + \cdots + a_n \mathrm{e}^n}{b_0 + b_1 \mathrm{e} + \cdots + b_m \mathrm{e}^m} : n, m \in \mathbb{N}, a_i, b_j \in \mathbb{Z}, \text{其中} 0 \leqslant i \leqslant n, 0 \leqslant j \leqslant m \right\}$$

试证明 F 是数域.

证明. 首先有

$$0=\frac{0}{1}\in F$$

$$1=\frac{1}{1}\in F$$

现在设

$$\alpha=\frac{a_0+a_1\mathrm{e}+\cdots+a_n\mathrm{e}^n}{b_0+b_1\mathrm{e}+\cdots+b_m\mathrm{e}^m}$$

$$\beta=\frac{c_0+c_1\mathrm{e}+\cdots+c_p\mathrm{e}^p}{d_0+d_1\mathrm{e}+\cdots+d_q\mathrm{e}^q}$$

于是

$$\begin{aligned}\alpha\pm\beta&=\frac{\left(a_0+\cdots+a_n\mathrm{e}^n\right)\left(d_0+\cdots+d_q\mathrm{e}^q\right)\pm\left(b_0+\cdots+b_m\mathrm{e}^m\right)\left(c_0+\cdots+c_p\mathrm{e}^p\right)}{\left(b_0+b_1\mathrm{e}+\cdots+b_m\mathrm{e}^m\right)\left(d_0+d_1\mathrm{e}+\cdots+d_q\mathrm{e}^q\right)}\\&=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+q}\left(\mathrm{e}^i\sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,n\}}a_jd_{i-j}\right)\pm\sum\limits_{i=0}^{m+p}\left(\mathrm{e}^i\sum\limits_{j=\max\{0,i-p\}}^{\min\{i,m\}}b_jc_{i-j}\right)}{\sum\limits_{i=0}^{m+q}\left(\mathrm{e}^i\sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,m\}}b_jd_{i-j}\right)}\\&=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+q}A_i\mathrm{e}^i\pm\sum\limits_{i=0}^{m+p}B_i\mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q}C_i\mathrm{e}^i}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{\max\{n+q,m+p\}}\left(A_i\pm B_i\right)\mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q}C_i\mathrm{e}^i}\in F\end{aligned}$$

当 $\beta=0$ 时 $\alpha\beta=0\in F$. 当 $\beta\neq 0$ 时有

$$\frac{1}{\beta}=\frac{d_0+d_1\mathrm{e}+\cdots+d_q\mathrm{e}^q}{c_0+c_1\mathrm{e}+\cdots+c_p\mathrm{e}^p}\in F$$

因此只需讨论乘法即可. 我们有

$$\begin{aligned}\alpha\beta&=\frac{a_0+a_1\mathrm{e}+\cdots+a_n\mathrm{e}^n}{b_0+b_1\mathrm{e}+\cdots+b_m\mathrm{e}^m}\cdot\frac{c_0+c_1\mathrm{e}+\cdots+c_p\mathrm{e}^p}{d_0+d_1\mathrm{e}+\cdots+d_q\mathrm{e}^q}\\&=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+p}\left(\mathrm{e}^i\sum\limits_{j=\max\{0,i-p\}}^{\min\{i,n\}}a_jc_{i-j}\right)}{\sum\limits_{i=0}^{m+q}\left(\mathrm{e}^i\sum\limits_{j=\max\{0,i-q\}}^{\min\{i,m\}}b_jd_{i-j}\right)}=\frac{\sum\limits_{i=0}^{n+p}D_i\mathrm{e}^i}{\sum\limits_{i=0}^{m+q}C_i\mathrm{e}^i}\in F\end{aligned}$$

综上,F 是数域. □