1 行列式

1.1 n 元排列

1.1.1 n 元排列的相关定义

定义 1.1 n 元排列 n 个不同正整数的一个全排列称为一个 n 元排列.

推论 1.2 n 元排列的总数是 $n!$.

证明. 小学二年级的同学就学过了. □

定义 1.3 顺序与逆序 在 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中, 任取 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 如果 $a_i < a_j$, 称这一对数构成**顺序**; 如果 $a_i > a_j$, 称这一对数构成**逆序**.

定义 1.4 逆序数 一个 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中的逆序的总数称为**逆序数**, 记作 $\tau(a_1a_2\cdots a_n)$.

定义 1.5 奇排列与偶排列 逆序数为奇数的排列称为**奇排列**, 逆序数为偶数的排列称为**偶排列**.

定义 1.6 对换 保持 n 元排列 $a_1a_2\cdots a_n$ 中的其余数不变, 交换 a_i 与 a_j 的位置 (其中 $1 \leqslant i < j \leqslant n$), 这一操作称**对换**.

1.1.2 n 元排列的性质

定理 1.7 对换操作的特性 对换改变 n 元排列的奇偶性.

证明. 我们假定对换操作是对 n 元排列 $a_1\cdots a_n$ 中的 a_i, a_j(不妨假定 $1 \leqslant i < j \leqslant n$) 进行的. 现在分类讨论.

如果 a_i 与 a_j 相邻, 那么交换两者不会改变它们与前后的数的大小关系, 因此只需考虑 a_i 与 a_j 即可. 如果 $a_i < a_j$, 那么对换后逆序数增大 1; 如果 $a_i > a_j$, 那么对换后逆序数减小 1, 两种情形下逆序数的奇偶性都会发生改变.

如果 a_i 与 a_j 不相邻, 那么假定它们之间有 k 个数. 我们做如下操作: 将 a_i 与其后面 k 个数依次对换, 再将 a_i 与 a_j 对换, 最后将 a_j 与前面 n 个数依次对换. 容易看出, 这一系列操作的结果就是将 a_i 与 a_j 对换而不改变其它数. 这相当于进行了 $2n+1$ 次相邻对换, 每次都改变逆序数的奇偶性, 因此最终仍改变排列的奇偶性.

综上, 命题得证. □

定理 1.8 任一 n 元排列与排列 $12\cdots n$ 可以通过一系列对换互变, 并且作对换的次数与该 n 元排列的奇偶性相同.

证明. 这容易从前面的定理推得. □

例题 1.1 如果 n 元排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数为 r, 求 $j_nj_{n-1}\cdots j_1$ 的逆序数.

解. $j_1j_2\cdots j_n$ 中构成顺序的数对在 $j_nj_{n-1}\cdots j_1$ 构成逆序, 反之亦然. 又因为 n 个数一共构成

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

对数, 于是

$$\tau\left(j_nj_{n-1}\cdots j_1\right)=\frac{n(n+1)}{2}-r$$

例题 1.2 设 $c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k}$ 是由 $1,2,\cdots,n$ 形成的 n 元排列, 试证明:

$$(-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{c_1+\cdots+c_k}\cdot(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}$$

证明. 将 $c_1\cdots c_k$ 经过 s 次对换成 $a_1\cdots a_k$, 其中 $a_1<\cdots<a_k$. 后者是偶排列, 因此 $c_1\cdots c_k$ 的奇偶性与 s 相同.

对于变换后的 $a_1\cdots a_k$ 而言, 考虑 $1\leqslant i\leqslant k$,a_i 后比它小的数共有 a_i-i 个. 于是

$$\begin{aligned}(-1)^{\tau(c_1\cdots c_kd_1\cdots d_{n-k})}&=(-1)^s(-1)^{\tau(a_1\cdots a_kd_1\cdots d_{n-k})}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)}(-1)^{(a_1-1)+\cdots+(a_k-k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{a_1+\cdots+a_k}\cdot(-1)^{-\frac{k(k+1)}{2}}\\&=(-1)^{\tau(c_1\cdots c_k)+\tau(d_1\cdots d_{n-k})}\cdot(-1)^{c_1+\cdots+c_k}\cdot(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\end{aligned}$$

□

1.2 n 阶行列式的定义

定义 1.9 n 阶行列式 定义 n 阶行列式

$$\begin{vmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}\xlongequal{\text{def}}\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1\cdots j_n}$ 表示对所有 n 元排列求和. 上式称为 n 元行列式的**完全展开式**.

考虑矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{bmatrix}$$

前面定义的 n 阶行列式也称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式, 记作 $|\boldsymbol{A}|$ 或 $\det \boldsymbol{A}$.

定理 1.10 上三角矩阵的行列式的值等于其主对角线上各元素的积.

证明. 考虑 n 阶上三角矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

其行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的展开式中的各项为

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

当 $j_n \neq n$ 时,$a_{nj_n} = 0$, 从而求和项为 0, 仅当 $j_n = n$ 时才有可能不为 0.
同样地, 仅当 $j_{n-1} = n-1$ 时求和项才有可能不为 0.
依次类推, 当且仅当 $j_i = i$ 对所有 $1 \leqslant i \leqslant n$ 成立时, 求和项才有可能不为 0. 又因为 $12\cdots n$ 是偶排列, 于是这一项恰好就是 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线上各元素的乘积, 即

$$\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

命题得证. □

定理 1.11 对于 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$, 给定行指标的排列 $i_1\cdots i_n$, 有

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{k_1\cdots k_n} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)} a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

或者给定列指标的排列 $k_1\cdots k_n$, 有

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i_1\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)} a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

证明. 我们考虑 n 阶行列式的每一项

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$$

忽略指数项, 这必将一一对应于命题中求和的某一项

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)} a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$$

现在只需要证明

$$(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} = (-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}$$

即可. 考虑 $a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}$ 经 s 次对换成 $a_{i_1k_1}\cdots a_{i_nk_n}$, 那么 $12\cdots n$ 经 s 次对换成 $i_1\cdots i_n$,$j_1\cdots j_n$ 经 s 次对换成 $k_1\cdots k_n$.

于是

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)}=(-1)^s$$

$$(-1)^{\tau(k_1\cdots k_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}(-1)^s$$

上述两式左右分别相乘就有

$$(-1)^{\tau(i_1\cdots i_n)+\tau(k_1+\cdots k_n)}=(-1)^{2s}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}=(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}$$

于是命题得证. □

由上述命题可以得到以下的推论:

推论 1.12 行列式中的行和列是等价的, 也即对于 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 而言有

$$\det \boldsymbol{A}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{j_11}\cdots a_{j_nn}$$

1.3 行列式的性质

定理 1.13 对于方阵 $\boldsymbol{A}$ 而言,$\det \boldsymbol{A}=\det \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$.

证明. 这由行列式中行和列等价这一推论即可得到. □

由此我们知道, 关于行列式中行的性质对列同样成立. 因此我们下面只讨论行的性质.

定理 1.14 行列式的行公因子可以提出, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ pa_{i1} & pa_{i2} & \cdots & pa_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=p\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$LHS=\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots(pa_{ij_i})\cdots a_{nj_n}=p\sum_{j_1\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)}a_{1j_1}\cdots a_{nj_n}=RHS$$

□

定理 1.15 行列式按行可加, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1}+c_{ia} & b_{i2}+c_{i2} & \cdots & b_{in}+c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} LHS &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots(b_{ij_i}+c_{ij_i})\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots b_{ij_i}\cdots a_{nj_n} + \sum_{j_1\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots c_{ij_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= RHS \end{aligned}$$

□

定理 1.16 两行互换, 行列式反号, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明.

$$\begin{aligned} RHS &= -\sum_{j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1\cdots j_i\cdots j_k\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{nj_n} \\ &= -\sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n} (-1)\cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= \sum_{j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n} \cdot(-1)^{\tau(j_1\cdots j_k\cdots j_i\cdots j_n)} a_{1j_1}\cdots a_{ij_k}\cdots a_{kj_i}\cdots a_{nj_n} \\ &= LHS \end{aligned}$$

□

定理 1.17 两行相同, 行列式的值为 0, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

证明. 记行列式对应的矩阵为 $\boldsymbol{A}$, 互换相同的两行后对应的矩阵仍为 $\boldsymbol{A}$. 根据前面的定理可得

$$\det \boldsymbol{A} = -\det \boldsymbol{A}$$

于是

$$\det \boldsymbol{A} = 0$$

□

定理 1.18 两行成倍数, 行列式的值为 0.

证明. 根据前面的定理易证. □

定理 1.19 将行列式的一行的倍数加到另一行上, 行列式的值不变.

证明. 根据前面的定理易证. □

综上所述, 我们可以得到下面的命题.

定理 1.20 如果方阵 $\boldsymbol{A}$ 经初等行变换可以得到方阵 $\boldsymbol{B}$, 那么存在 $l \in \mathbb{F}$ 使得 $\det \boldsymbol{B} = l \det \boldsymbol{A}$.

利用前面的定理, 可以将行列式按行拆分成易于计算的行列式, 也可以将行列式变换为上三角行列式进行计算.

例题 1.3 计算行列式:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

解. 我们有

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 98 & 101 & 97 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 100 & 100 & 100 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 100 & 100 & 100 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 100 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & \frac{5}{4} \end{vmatrix} = -500$$

例题 1.4 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

解. 这个行列式的特点在于每一行的元素之和均为 $(n-1)\lambda + k$. 为此, 我们可以将第 2 到第 n 列的元素都加到第 1 列上, 然后提取公因子, 接着继续化简:

$$\begin{vmatrix} k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \lambda & k & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (n-1)\lambda + k & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ (n-1)\lambda + k & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)\lambda + k & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 1 & k & \lambda & \cdots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \lambda & \lambda & \cdots & k \end{vmatrix}$$

$$= [(n-1)\lambda + k] \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda & \cdots & \lambda \\ 0 & k-\lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k-\lambda \end{vmatrix} = [(n-1)\lambda + k]\,(k-\lambda)^{n-1}$$

1.4 行列式按行展开

定义 1.21 余子式和代数余子式 在 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 中删去元素 (i,j) 所在的行和列, 剩下的元素按原来次序形成的 $n-1$ 级方阵的行列式称为 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的余子式, 记作 M_{ij}. 令

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

称 A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 元的代数余子式.

定理 1.22 Laplace 定理 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 等于其第 i 行元素与自身代数余子式的乘积之和, 即对任意 $1 \leqslant i \leqslant n$ 有

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

证明. 我们可以把 $\det \boldsymbol{A}$ 的完全展开式的 $n!$ 项按照第 i 行的 n 个元素分组, 即

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{k_1 \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots\cdots k_n)} \prod_{p=1}^{n} a_{pk_p} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k_1 \cdots k_{i-1} j k_{i+1} \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_{i-1} j k_{i+1} \cdots k_n)} \prod_{p=1}^{n} a_{pk_p} \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k_1 \cdots j \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots j \cdots k_n)} \prod_{p=1, p \neq i}^{n} a_{pk_p} \right)
\end{aligned}$$

现在考虑把排列 $k_1 \cdots j \cdots k_n$. 将 j 移动到第一位变成 $jk_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n$ 需要经历 $i-1$ 次对换 (因为 j 在第 i 位), 于是

$$(-1)^{\tau(jk_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + i - 1} = (-1)^{\tau(k_1 \cdots j \cdots k_n)}$$

而 $jk_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n$ 与 $k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n$ 的逆序数之差就是比 j 小的数的数目, 即 $j-1$, 因此

$$(-1)^{\tau(k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + j - 1} = (-1)^{\tau(jk_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + j - 1}$$

于是就有

$$(-1)^{\tau(k_1 \cdots j \cdots k_n)} = (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + i + j - 2} = (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + i + j}$$

由于 j 的位置是固定的, 因此我们在前述求和项中可以只考虑排列 $k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n$. 于是, 前面的式子可以改写为

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \left(\sum_{k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n} (-1)^{\tau(k_1 \cdots k_{i-1} k_{i+1} \cdots k_n) + i + j} \prod_{p=1, p \neq i} a_{pk_p} \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i+j} M_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}
\end{aligned}$$

这就证明了 Laplace 定理. □

定理 1.23 Laplace 定理按列展开的形式 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 等于其第 j 列元素与自身代数余子式的乘积之和, 即对任意 $1 \leqslant j \leqslant n$ 有

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

证明. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的转置 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 我们已经知道 $\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$, 那么对 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}$ 使用 Laplace 定理即可证得命题. □

定理 1.24 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的第 i 行与第 k 行 $(k \neq i)$ 的对应元素的代数余子式的乘积之和为 0, 即

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

证明. 为了便于使用 Laplace 定理, 我们构造矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行与 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行一致, 其余元素和对应的 $\boldsymbol{A}$ 的元素相同. 这样,$\boldsymbol{B}$ 的第 k 行各元素的代数余子式与 $\boldsymbol{A}$ 相同.
由于 $\boldsymbol{B}$ 有相同的两行, 因此

$$\det \boldsymbol{B} = 0$$

对 $\boldsymbol{B}$ 的第 k 行应用 Laplace 定理, 有

$$\sum_{j=1}^{n} b_{kj} B_{kj} = \det \boldsymbol{B} = 0$$

又因为 $b_{kj} = b_{ij} = a_{ij}$,$B_{kj} = A_{kj}$, 于是

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{kj} = 0$$

□

定理 1.25 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$ 的第 j 列与第 k 列 $(k \neq j)$ 的对应元素的代数余子式的乘积之和为 0, 即

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ik} = 0$$

证明. 这由 Laplace 定理的列展开形式就可以得到. □

例题 1.5 计算 n 阶行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

解. 注意到除去第一行第一列后的矩阵为上三角矩阵, 除去最后一行第一列后的矩阵为下三角矩阵, 因此我们

先按第一列展开原行列式:

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a \end{vmatrix} + b(-1)^{n+1} \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

$$= aa^{n-1} + b(-1)^{n+1}b^{n-1}$$

$$= a^n + (-1)^{n+1}b^n$$

定义 1.26 Vandermonde 行列式 形如

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

的行列式称作 Vandermonde 行列式.

定理 1.27 Vandermonde 行列式的值为

$$\prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)$$

证明. 我们用归纳法证明上述命题. 对于 $n = 2$ 的情形, 有

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$$

现在考虑 $n \geqslant 3$ 的情形. 把第 i 行的 $-a_i$ 倍加到第 $i+1$ 行上, 就有

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\
a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1}
\end{vmatrix} \\
=&\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\
0 & a_2^2 - a_1 a_2 & \cdots & a_n^2 - a_1 a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2}
\end{vmatrix}
=\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_2 - a_1 & \cdots & a_n - a_1 \\
0 & a_2 (a_2 - a_1) & \cdots & a_n (a_n - a_1) \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_2^{n-2} (a_2 - a_1) & \cdots & a_n^{n-2} (a_n - a_1)
\end{vmatrix} \\
=&(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)
\begin{vmatrix}
1 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & 1 & \cdots & 1 \\
0 & a_2 & \cdots & a_n \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}
\end{vmatrix}
=(a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1)
\begin{vmatrix}
1 & \cdots & 1 \\
a_2 & \cdots & a_n \\
\vdots & \ddots & \vdots \\
a_2^{n-2} & \cdots & a_n^{n-2}
\end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

根据归纳假设, 后面的行列式即 $n-1$ 阶的 Vandermonde 行列式, 于是

$$
LHS = (a_2 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \prod_{2 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)
$$

于是归纳可得原命题成立. □

定义 1.28 三对角线行列式 形如

$$
\begin{vmatrix}
a & b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
c & a & b & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\
0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a
\end{vmatrix}
$$

的行列式称作三对角线行列式.

定理 1.29 上述 n 阶三对角线行列式 D_n 的值为

$$
D_n = \begin{cases}
(n+1)\left(\dfrac{a}{2}\right)^n, a^2 = 4bc \\
\dfrac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}, a^2 \neq 4bc
\end{cases}
$$

其中 λ_1, λ_2 是方程 $\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$ 的两根.

证明. 将 D_n 按第一列展开有

$$D_n = aD_{n-1} + (-1)^{1+2}c \begin{vmatrix} b & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ c & a & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c & a & b \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & c & a \end{vmatrix} = aD_{n-1} - bcD_{n-2}$$

令

$$D_n - \lambda_1 D_{n-1} = \lambda_2 \left(D_{n-1} - \lambda_1 D_{n-2}\right)$$

于是可得

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a \qquad \lambda_1\lambda_2 = bc$$

于是 λ_1, λ_2 是二元一次方程

$$\lambda^2 - a\lambda + bc = 0$$

的两个根.

当 $a^2 = 4bc$ 时,$\lambda_1 = \lambda_2 = \dfrac{a}{2}$. 此时

$$D_n - \frac{a}{2}D_{n-1} = \frac{a}{2}\left(D_{n-1} - \frac{a}{2}D_{n-2}\right)$$

又因为 $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc = \dfrac{3a^2}{4}$, 于是

$$D_n - \frac{a}{2}D_{n-1} = \left(\frac{a}{2}\right)^n$$

于是

$$D_n = (n+1)\left(\frac{a}{2}\right)^n$$

当 $a^2 \neq 4bc$ 时,$\lambda_1 \neq \lambda_2$. 不妨设

$$D_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n$$

由 $D_1 = a, D_2 = a^2 - bc$ 可解得

$$C_1 = \frac{\lambda_1^2 - (a^2 - bc)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \qquad C_2 = \frac{(a^2 - bc) - \lambda_2^2}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

于是

$$D_n = \frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}$$

□

1.5 Cramer 法则

定理 1.30 $\mathbb{F}$ 上有 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解, 当且仅当其系数行列式 (即系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A}$) 不等于 0.

证明. 对于一个有 n 个方程的 n 元线性方程组, 其无解当且仅当增广矩阵中出现主元在最后一列的情形. 这样, 其系数矩阵经初等行变换时出现全零行, 这意味着系数行列式为零 (初等行变换不会使得非零的行列式变为零).

现在考虑有解时的情形. 我们已经知道, 如果增广矩阵的非零行数目 r 小于未知量数目 n, 那么方程组有无穷多解. 此时, 系数矩阵经初等行变换时也会出现零行, 从而系数行列式为零.

当且仅当增广矩阵的非零行数目 r 等于未知量数目 n 时, 方程式有唯一解. 由于方程式有 n 个主元, 并且要求系数矩阵变换成的阶梯形矩阵中各主元不再同一列上, 因此其必定形如

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

这是一个上三角矩阵, 并且各 $c_{ii} \neq 0$, 于是系数行列式不为零.

这样就证明了前述定理. □

把上述定理应用到有 n 个方程的 n 元齐次线性方程组上可以得到下面的推论.

推论 1.31 $\mathbb{F}$ 上有 n 个方程的 n 元齐次方程线性组只有零解, 当且仅当其系数行列式不等于 0, 从而有非零解当且仅当其系数行列式等于 0.

定理 1.32 n 个方程的 n 元线性方程组的解 将 n 个方程的 n 元线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 j 列换成常数项对应的列后形成的矩阵记作 $\boldsymbol{B}_j$, 即

$$\boldsymbol{B}_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1(j-1)} & b_1 & a_{1(j+1)} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{n(j-1)} & b_n & a_{n(j+1)} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

当该方程组的系数行列式 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$ 时, 其唯一解为

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}}, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$$

证明. 我们只需验证上述解满足每一个方程即可. 为此, 考虑第 i 行方程

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i = b_i$$

将解代入可得

$$
\begin{aligned}
LHS &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\det \boldsymbol{B}_j \\
&= \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} b_k A_{kj}\right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right)
\end{aligned}
$$

根据前面的推论, 当且仅当 $k=i$ 时

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = \det \boldsymbol{A}$$

否则

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$$

于是

$$LHS = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}\sum_{k=1}^{n} b_k\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj}\right) = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} b_i \det \boldsymbol{A} = b_i = RHS$$

□

定理 1.33 Cramer 法则 $\mathbb{F}$ 上有 n 个方程的 n 元线性方程组有唯一解, 则其系数行列式不等于 0, 并且解为

$$x_j = \frac{\det \boldsymbol{B}_j}{\det \boldsymbol{A}}, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$$

1.6 行列式按 k 行 (列展开)

定义 1.34 k 阶子式 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 中任意取定 k 行 k 列 $(1 \leqslant k < n)$, 位于这些行和列交叉处的元素按原来的顺序排成的 k 级方阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的一个 k **阶子式**.

定义 1.35 k 阶子式的余子式和代数余子式 取定 n 级方阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i_1, \cdots, i_k$ 行和第 $j_1, \cdots, j_k$ 列形成的 k 阶子式记作

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}$$

划去这些行和列形成的 $n-k$ 阶子式称作上述方阵的**余子式**. 余子式前乘以系数

$$(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}$$

称作上述方阵的**代数余子式**.

令

$$\left\{i'_1, \cdots, i'_{n-k}\right\} = \{1, \cdots, n\} \backslash \{i_1, \cdots, i_k\}$$

$$\left\{j'_1, \cdots, j'_{n-k}\right\} = \{1, \cdots, n\} \backslash \{j_1, \cdots, j_k\}$$

并且 $i'_1 < \cdots < i'_{n-k}$,$j'_1 < \cdots < j'_{n-k}$, 那么前述 k 阶子式的代数余子式可以记作

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

定理 1.36 Laplace 定理按 k 行展开的版本 在 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中取定 $i_1, \cdots, i_k$ 行, 这 k 行形成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于 $\det \boldsymbol{A}$, 即

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}$$

证明. 给定行指标的排列 $i_1\cdots i_k i'_1\cdots i'_{n-k}$, 则 $\det \boldsymbol{A}$ 可以展写如下

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k}} (-1)^{\tau\left(i_1\cdots i_k i'_1\cdots i'_{n-k}\right)+\tau(\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k})} a_{i_1\alpha_1}\cdots a_{i_k\alpha_k} a_{i'_1\beta_1}\cdots a_{i'_{n-k}\beta_{n-k}}$$

现在将上述 $n!$ 项按照下面的方式分成 C_n^k 组: 任意取定 $j_1, \cdots, j_k$ 列, 将 n 的全排列 $\alpha_1\cdots\alpha_k\beta_1\cdots\beta_{n-k}$ 对应于

$$j_1\cdots j_k j'_1\cdots j'_{n-k}$$

在研究排列的性质时, 我们已经知道

$$(-1)^{\tau\left(i_1\cdots i_k i'_1\cdots i_{n-k}\right)} = (-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau\left(i'_1\cdots i'_{n-k}\right)}\cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$(-1)^{\tau\left(j_1\cdots j_k j'_1\cdots j_{n-k}\right)} = (-1)^{\tau(j_1\cdots j_k)+\tau\left(j'_1\cdots j'_{n-k}\right)}\cdot(-1)^{j_1+\cdots+j_k}\cdot(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

于是

$$\begin{aligned}
\det \boldsymbol{A} &= \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n} \begin{array}{l} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau(j_1\cdots j_k)}\cdot(-1)^{\tau\left(i'_1\cdots i'_{n-k}\right)+\tau\left(j'_1\cdots j'_{n-k}\right)}\cdot(-1)^{n(n+1)} \\ \cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\displaystyle\prod_{p=1}^{k} a_{i_pj_p}\prod_{q=1}^{n-k} a_{i'_qj'_q} \end{array} \\
&= \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n} \begin{array}{l} (-1)^{\tau(i_1\cdots i_k)+\tau(j_1\cdots j_k)}\displaystyle\prod_{p=1}^{k} a_{i_pj_p} \\ \cdot(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k} \\ \cdot(-1)^{\tau\left(i'_1\cdots i'_{n-k}\right)+\tau\left(j'_1\cdots j'_{n-k}\right)}\displaystyle\prod_{q=1}^{n-k} a_{i'_qj'_q} \end{array} \\
&= \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\cdots\leqslant j_k\leqslant n} \boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i_1, \cdots, i_k \\ j_1, \cdots, j_k \end{pmatrix}(-1)^{i_1+\cdots+i_k+j_1+\cdots+j_k}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} i'_1, \cdots, i'_{n-k} \\ j'_1, \cdots, j'_{n-k} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

于是命题得证. 显然, 当 $k = 1$ 时, 就是我们前面所述的 Laplace 定理. □

推论 1.37 我们有

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为 k 级和 $n-k$ 级方阵,$\boldsymbol{C}$ 为 $(n-k) \times k$ 级的任意矩阵,$\mathbf{0}$ 为零矩阵.

证明. 将上述矩阵按前 k 行展开, 仅有 $\boldsymbol{A}$ 这一子式对应的求和项中不包含 0, 它对应的余子式恰为 $\det \boldsymbol{B}$, 并且指数项为 $k(k+1)$, 因此上述结论成立. $\square$