北京大学数学科学学院 2024-25 学年第二学期线性代数 B 期中试题

1 求下列线性方程组的导出组的基础解系, 方程组的特解和通解.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3-x_4=0 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ -x_1-2x_2+2x_3+4x_4=5 \end{cases}$$

解. 对方程组的增广矩阵做初等行变换可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & -2 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

于是方程组的导出组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

特解为

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

方程组的解集为

$$W = \{\boldsymbol{\gamma} + k\boldsymbol{\eta} : k \in K\}$$

2 求方程组

$$\begin{cases} (\lambda-2)x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+(\lambda-3)x_2+2x_3=1 \\ 2x_2+(\lambda-4)x_3=-3 \end{cases}$$

的解集与 λ 的关系.

解. 考虑方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式:

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{A} &= \begin{vmatrix} \lambda-2 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-3 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-3 & 2 \\ 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & \lambda-4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda-2)\left(\lambda^2-7\lambda+8\right) - 2\,(2\lambda-8) \\ &= \lambda^3-9\lambda^2+18\lambda \\ &= \lambda(\lambda-3)(\lambda-6) \end{aligned}$$

于是当 $\lambda=0,3,6$ 时方程组有无穷多解, 否则方程组有唯一解. 当 $\lambda \neq 0,3,6$ 时, 方程组的解为

$$x_1 = \frac{-2(\lambda+2)}{\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)}, \quad x_2 = \frac{(\lambda+2)(\lambda-2)}{\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)}, \quad x_3 = \frac{-3\lambda^2+13\lambda+2}{\lambda(\lambda-3)(\lambda-6)}$$

3 计算下面的行列式:

$$\begin{vmatrix} 5 & 7 & -2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & -4 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

解. 记题中的行列式为 A, 于是

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 13 & 0 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & -5 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 13 & 10 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 16 & 10 \\ 1 & 2 & -5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 16 & 10 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -100$$

4 现有以下一向量组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 7 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha}_5 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(1) 证明: 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关.

(2) 求上述向量组的所有包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的极大线性无关组.

解.

(1) 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的前两个分量构成的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -17 \neq 0$$

于是向量 $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ 线性无关, 因而它们的延伸组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 也线性无关.

(2) 观察可得 $\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$, 因此 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 不包含于所求的组中. 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的前三个分量构成的矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = -135 \neq 0$$

于是 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 线性无关. 考虑 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$ 构成的矩阵的行列式:

$$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 0 & 6 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 7 & 1 \\ 7 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 & 6 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 1 \\ 7 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1/2 & -5 & 15 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -10 & 30 \\ 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -10 & 30 \\ 0 & 34 & -89 \\ 0 & 20 & -55 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 34 & -89 \\ 20 & -55 \end{vmatrix} = 90 \neq 0$$

于是上述向量组包含 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 的极大线性无关组为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4, \boldsymbol{\alpha}_5$。

5 现有矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 5 & 0 \\ 3 & -2 & 3 & 6 & -1 \\ 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 5 & -3 \end{bmatrix}$$

写出 $\boldsymbol{A}$ 的一个子式, 使得它为 $\boldsymbol{A}$ 的最高阶非零子式, 并证明你的结论.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -16 & 12 & 8 & -12 \\ 0 & -20 & 15 & 9 & -13 \\ 0 & -12 & 9 & 7 & -11 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 6 & -4 & -1 & 4 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 3$, 即阶数最高的子式的阶数为 3. 由行变换的结果可得 $\boldsymbol{A}$ 的 $1, 2, 4$ 列列向量构成列向量组的极大线性无关组, 因此 $\boldsymbol{A}$ 的一个最高阶非零子式为

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 3 & -2 & 6 \\ 1 & 6 & -1 \end{bmatrix}$$

6 已知某 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 满足 $\det \boldsymbol{A} = 0$, 其 $(2,3)$ 元的代数余子式 $A_{23} \neq 0$. 求该线性方程组的解集.

解. 由于 $\det \boldsymbol{A} = 0$ 且 $\boldsymbol{A}$ 有 $n-1$ 阶非零子式 A_{23}, 于是 $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = n-1$, 因此解集 W 的维数

$$\dim W = n - \operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 1$$

并且当 $i=2$ 时有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{2j} = \sum_{j=1}^{n} a_{2j} A_{2j} = \det \boldsymbol{A} = 0$$

当 $i \neq 2$ 时有

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{2j} = 0$$

于是方程组的基础解系为

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2n} \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$$

由于 $A_{23} \neq 0$, 因此 $\boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}$. 于是方程组的解集 W 为

$$W = \{k\boldsymbol{\eta} : k \in K\}$$

7 设 $n > 100$, 向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 是否线性无关? 证明你的结论.

证明. 假定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n, \boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关, 于是存在非零的 $k_1, \cdots, k_n$ 使得

$$k_1 (\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) + \cdots + k_{n-1} (\boldsymbol{\alpha}_{n-1} + \boldsymbol{\alpha}_n) + k_n (\boldsymbol{\alpha}_n + \boldsymbol{\alpha}_1) = \mathbf{0}$$

即

$$(k_n + k_1) \boldsymbol{\alpha}_1 + (k_1 + k_2) \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + (k_{n-1} + k_n) \boldsymbol{\alpha}_n = \mathbf{0}$$

由于向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性无关, 于是要求

$$k_n + k_1 = k_1 + k_2 = \cdots = k_{n-1} + k_n = 0$$

这一齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}_n$ 的行列式为

$$\det \boldsymbol{A}_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+n} \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

后面两个行列式分别为下三角和上三角的, 并且对角线元素均为 1, 于是

$$\det \boldsymbol{A}_n = \begin{cases} 2, & n\text{为奇数} \\ 0, & n\text{为偶数} \end{cases}$$

于是当 n 为偶数时方程组有非零解, 即题设向量组线性相关, 否则题设向量组线性无关. □

8 现有矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 3 & a & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & b & 6 \end{bmatrix}$$

求 a, b 使得 rank $\boldsymbol{A} = 2$.

解. 对 $\boldsymbol{A}$ 做初等行变换可得

$$\boldsymbol{A} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & b-5 & 1 \\ 0 & a+3 & -4 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & b-5 & 1 \\ 0 & 0 & -4-\frac{(a+3)(b-5)}{8} & 1-\frac{a+3}{8} \end{bmatrix}$$

要求 rank $\boldsymbol{A} = 2$, 则须令

$$-4 - \frac{(a+3)(b-5)}{8} = 1 - \frac{a+3}{8} = 0$$

解得 $a = 5, b = 1$.

9 求以下行列式的值:

$$\begin{vmatrix} x_1 + a_1b_1 & a_1b_2 & \cdots & a_1b_n \\ a_2b_1 & x_2 + a_2b_2 & \cdots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_nb_1 & a_nb_2 & \cdots & x_n + a_nb_n \end{vmatrix}$$

解. 将题设行列式记作 A_n, 对 A_n 的第 j 列作如下拆分

$$\boldsymbol{A}_j = \boldsymbol{\alpha}_j + \boldsymbol{x}_j, \quad \boldsymbol{\alpha}_j = \begin{bmatrix} a_1b_j \\ a_2b_j \\ \vdots \\ a_nb_j \end{bmatrix} = b_j \begin{vmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{vmatrix}$$

其中 $\boldsymbol{x}_j$ 的第 j 个分量为 x_j, 其余分量均为 x_0. 可以看出, 各 $\boldsymbol{\alpha}_j$ 成比例. 题设行列式因此可以拆分为 2^n 个行列式. 在所有拆分方法中, 最多只能出现一次 $\boldsymbol{\alpha}_j$, 否则将有成比例的两列, 因而使得行列式为 0. 于是

$$A_n = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} + b_1 \begin{vmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & x_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & x_n \end{vmatrix} + \cdots + b_n \begin{vmatrix} x_1 & 0 & \cdots & a_1 \\ 0 & x_2 & \cdots & a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

将后面第 j 个行列式的第 j 行与第 1 行交换, 第 j 列和第 1 列交换, 可将其转化为下三角行列式. 其对角线上

的元素为 $x_1, \cdots, x_{j-1}, a_j, x_{j+1}, \cdots, x_n$. 于是有

$$A_n = \prod_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{n} \left(a_j b_j \prod_{i \neq j} x_i \right) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i \right) \left(1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i b_i}{x_i} \right)$$