1 二次型

例题 1.1 求实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+tx_1x_2+2tx_1x_3+4x_2x_3$$

的秩和正惯性指数.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & \frac{t}{2} & t\\ \frac{t}{2} & 1 & 2\\ t & 2 & 0\end{bmatrix}$$

它的顺序主子式分别为

$$\begin{vmatrix}1\end{vmatrix}=1,\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2}\\ \frac{t}{2} & 1\end{vmatrix}=1-\frac{t^2}{4},\quad \begin{vmatrix}1 & \frac{t}{2} & t\\ \frac{t}{2} & 1 & 2\\ t & 2 & 0\end{vmatrix}=t^2-4$$

如果 $t^2=4$, 则 $\boldsymbol{A}$ 不满秩. 此时 $\boldsymbol{A}$ 的 $(1,1)$ 元的余子式非零, 因此 $\operatorname{rank}\boldsymbol{A}=2$, 正惯性指数为 1.

如果 $t^2\neq 4$, 则矩阵满秩, 只需判断 $\boldsymbol{A}$ 的特征值的正负. $\boldsymbol{A}$ 的特征多项式为

$$\lambda^3-2\lambda^2+\left(-\frac{5t^2}{4}-3\right)\lambda+(4-t^2)$$

设它的三个实根为 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$, 则有

$$\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2,\quad \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3=-\frac{5t^2}{4}-3,\quad \lambda_1\lambda_2\lambda_3=t^2-4$$

前两个式子表明三个根中有正数也有负数. 如果 $t^2>4$, 则正惯性指数为 1; 如果 $t^2<4$, 则正惯性指数为 2.

例题 1.2 判断当参数 a 满足什么条件时, 实二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+2(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)$$

是正定的.

解. 这二次型的矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}a & 1 & 1\\ 1 & a & 1\\ 1 & 1 & a\end{bmatrix}$$

其特征多项式为

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda \boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}) &= \begin{vmatrix} \lambda - a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - a \end{vmatrix} \\
&= (\lambda - a)(\lambda - a - 1)(\lambda - a + 1) + (-\lambda + a - 1) - (\lambda - a + 1) \\
&= (\lambda - a + 1)(\lambda^2 - (2a+1)\lambda + a^2 + a - 2) \\
&= (\lambda - a + 1)^2(\lambda - a - 2)
\end{aligned}
$$

上述二次型正定当且仅当 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值大于零, 即

$$a - 1 > 0, \quad a + 2 > 0$$

从而 $a > 1$.

例题 1.3 设实二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2ax_2x_3 + 2ax_1x_3$$

可以做非退化线性变换成为

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2 + 2y_1y_2$$

求 a 的值和相应的非退化线性变换.

解. 二次型 $g = (y_1 + y_2)^2 + 4y_3^2$, 其秩和正惯性指数均为 2. 考虑二次型 f 对应的矩阵:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & a \\ a & 1 & a \\ a & a & 1 \end{bmatrix}$$

于是

$$\det \boldsymbol{A} = (1 - a^2) - a(a - a^2) + a(a^2 - a) = (a-1)^2(2a+1)$$

当 $a = 1$ 时, $\operatorname{rank} \boldsymbol{A} = 1$, 不存在相应的变换, 于是只能有 $a = -\dfrac{1}{2}$. 现在求相应的非退化线性变换:

$$
\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{4} & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
\longrightarrow
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

于是令

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}1 & \frac{1}{2} & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

然后令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{C}\boldsymbol{z}$, 就有 $f(x_1,x_2,x_3)=z_1^2+\dfrac{3}{4}z_2^2$, 再令

$$\boldsymbol{z}=\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1+y_2\\ \frac{16}{\sqrt{3}}y_3\\ 0\end{bmatrix}$$

即可.

例题 1.4 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, $\boldsymbol{B}$ 是与 $\boldsymbol{A}$ 阶数相同的实对称矩阵. 证明: 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 都是对角矩阵.

证明. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵, 因此它合同于 $\boldsymbol{I}_n$, 即存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\boldsymbol{I}$$

由于 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}$ 也是实对称矩阵, 因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 使得

$$\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}(\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P})\boldsymbol{Q}$$

也为对角矩阵. 令 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}$ 为可逆矩阵, 则有

$$\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{I}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}$$

于是存在可逆的 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 均为对角矩阵. □

例题 1.5 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是两个半正定矩阵. 证明: $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$ 当且仅当 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=0$.

证明. $\Rightarrow$: 显然.

$\Leftarrow$: 现在假设 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=0$. 由于 $\boldsymbol{A}$ 是半正定的, 因此存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$ 使得

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\operatorname{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_s,0,\cdots,0\}\boldsymbol{P}$$

令

$$\boldsymbol{S}=\boldsymbol{P}^{\mathrm{t}}\operatorname{diag}\{\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_s},0,\cdots,0\}\boldsymbol{P}$$

则

$$\boldsymbol{S}^2=\boldsymbol{A}$$

同理构造 $\boldsymbol{T}$ 使得 $\boldsymbol{T}^2=\boldsymbol{B}$. 并且 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$ 都是半正定矩阵. 于是

$$\operatorname{tr}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{SSB})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{SBS})=\operatorname{tr}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{BS})$$

$\boldsymbol{S}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{BS}$ 是一个半正定矩阵, 它的迹为 0 说明它的特征值全部为 0; 它又可以对角化, 于是 $\boldsymbol{SBS}=\boldsymbol{STTS}=\boldsymbol{0}$. 而 $\boldsymbol{ST}(\boldsymbol{ST})^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{STTS}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{ST}=\boldsymbol{0}$, 于是 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{SSTT}=\boldsymbol{0}$. □

例题 1.6 设 $\boldsymbol{A}$ 是正定实矩阵. 证明: 存在对角元均为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{L}$ 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}$.

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 做归纳.

当 $n=1$ 时, 命题显然成立.

当 $n>1$ 时, 根据归纳假设, 命题对所有阶数小于 n 的矩阵均成立. 将 $\boldsymbol{A}$ 做如下分块:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn}\end{bmatrix}$$

由于 $\boldsymbol{A}_1$ 的顺序主子式也是 $\boldsymbol{A}$ 的顺序主子式, 因此 $\boldsymbol{A}_1$ 也是正定矩阵, 于是存在对角元均为正数的上三角矩阵 $\boldsymbol{L}_1$ 使得 $\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}_1=\boldsymbol{A}_1$. 由于 $\boldsymbol{L}_1$ 的对角元为正数, 于是 $\det\boldsymbol{L}_1>0$, 因此 $\boldsymbol{L}_1$ 可逆.

考虑行列变换

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}_1(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha})$$

由于 $\det\boldsymbol{A}>0,\det\boldsymbol{A}_1>0$, 于是

$$a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}>0$$

记上式为 b. 而

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}$$

于是令

$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{L}_1 & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \sqrt{b}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}\\ \boldsymbol{0} & 1\end{bmatrix}^{-1}$$

即有 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{L}$, 归纳可知命题对所有正定矩阵 $\boldsymbol{A}$ 都成立. □

例题 1.7 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶正定矩阵, 证明: 二次型

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\det\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} & \boldsymbol{0}\end{bmatrix}$$

是负定的.

证明. 只需证明对任意 $\boldsymbol{x}$ 有 $f(\boldsymbol{x})<0$ 即可. 根据前一题的变换方式, 注意到

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_n & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & -\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x} \end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$f(\boldsymbol{x}) = -\det \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x})$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 因此 $\det \boldsymbol{A}>0, \boldsymbol{x}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{x}>0$, 因此 $f(\boldsymbol{x})<0$, 于是题设二次型负定. □

例题 1.8 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 是 n 级正定矩阵. 证明:

$$\det \boldsymbol{A} \leqslant \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

证明. 对 $\boldsymbol{A}$ 的阶数 n 采用数学归纳法.

当 $n=1$ 时命题显然成立.

当 $n>1$ 时对 $\boldsymbol{A}$ 分块如下:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn} \end{bmatrix}$$

考虑行列变换

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}} & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_{n-1} & -\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \\ \boldsymbol{0} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{t}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}$$

两边取行列式可得

$$\det \boldsymbol{A} = \det \boldsymbol{A}_1(a_{nn}-\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}_1^{-1}\boldsymbol{\alpha}) \leqslant a_{nn}\det \boldsymbol{A}_1 \leqslant a_{nn}\prod_{i=1}^{n-1} a_{ii} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

□

例题 1.9 设 $\boldsymbol{C}=(c_{ij})$ 是 n 级实可逆矩阵. 证明:

$$(\det \boldsymbol{C})^2 \leqslant \prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} c_{ji}^2\right)$$

证明. 首先注意到 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{C}$ 是正定矩阵, 于是利用上一问的结论即可得证. □

例题 1.10 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是阶数相同的半正定矩阵. 证明:

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \geqslant \max\{\det \boldsymbol{A}, \det \boldsymbol{B}\}$$

证明. 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都不是正定矩阵, 那么 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{B}=0$, 而 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 也是半正定矩阵, 因此其行列式非负, 于是命题得证.

现在不妨假设 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵. 由前面题目的结论可知存在可逆矩阵 $\boldsymbol{C}$ 使得 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{C}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ 都是对角矩阵, 不妨分别设为 $\boldsymbol{S},\boldsymbol{T}$, 并且对角元都非负. 于是

$$\det\boldsymbol{S}=\prod_{i=1}^{n}s_{ii}=(\det\boldsymbol{C})^2\det\boldsymbol{A}$$

$$\det\boldsymbol{T}=\prod_{i=1}^{n}t_{ii}=(\det\boldsymbol{C})^2\det\boldsymbol{B}$$

$$\det(\boldsymbol{S}+\boldsymbol{T})=\prod_{i=1}^{n}(s_{ii}+t_{ii})=(\det\boldsymbol{C})^2\det(\boldsymbol{A}+\det\boldsymbol{B})$$

而

$$\prod_{i=1}^{n}(s_{ii}+t_{ii})^2\geqslant\max\left\{\prod_{i=1}^{n}s_{ii},\prod_{i=1}^{n}t_{ii}\right\}$$

并且 $(\det\boldsymbol{C})^2>0$. 于是

$$\det(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\geqslant\max\{\det\boldsymbol{A},\det\boldsymbol{B}\}$$

命题得证. □

例题 1.11 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵, 满足存在唯一的矩阵 $\boldsymbol{M}$ 使得 $\boldsymbol{AM}+\boldsymbol{MA}=\boldsymbol{B}$. 证明: $\boldsymbol{M}$ 是半正定矩阵.

证明. 对题设等式两边取转置, 并由 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是半正定矩阵可得

$$\boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{B}$$

由于这样的 $\boldsymbol{M}$ 是唯一的, 因此 $\boldsymbol{M}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{M}$, 于是 $\boldsymbol{M}$ 是对称矩阵.

首先证明 $\boldsymbol{A}$ 是正定矩阵. 否则考虑其对应特征值 0 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}$, 有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}^{\mathrm{t}}=\boldsymbol{0}$$

并且 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}\neq\boldsymbol{0}$. 于是如果 $\boldsymbol{M}$ 是上述矩阵方程的解, 那么 $\boldsymbol{M}+\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{t}}$ 也是上述方程的解, 从而不满足唯一性, 因此 $\boldsymbol{A}$ 是正定的.

取 $\boldsymbol{M}$ 的特征值 λ 和它对应的特征向量 $\boldsymbol{\beta}$, 则有

$$\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{AM}\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{MA}\boldsymbol{\beta}=2\lambda\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 正定, 因此 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}>0$; 又由于 $\boldsymbol{B}$ 半正定, 于是 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}\geqslant 0$, 于是

$$\lambda=\frac{\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\beta}}{2\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{t}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}}\geqslant 0$$

从而 $\boldsymbol{M}$ 是半正定矩阵. □

例题 1.12 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵, 证明: 如果 $\boldsymbol{A}$ 有 r 个线性无关的特征向量, 则存在正惯性指数为 r 的半正定矩阵 $\boldsymbol{B}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{t}}$.

证明. 考虑 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_r$, 将它扩充为 $\mathbb{K}^n$ 的一组基 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$, 然后令

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{t}} & \vdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{t}} \end{bmatrix}$$

于是 $\boldsymbol{B}$ 是秩为 r 的半正定矩阵. 此时有

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{A} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1 & \cdots \boldsymbol{\alpha}_r & \boldsymbol{0} \cdots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{t}} & \vdots & \boldsymbol{\alpha}_n^{\mathrm{t}} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \boldsymbol{\alpha}_i \boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{t}}$$

从而 $\boldsymbol{AB}$ 是对称矩阵. 于是

$$\boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{AB})^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{t}} \boldsymbol{A}^{\mathrm{t}} = \boldsymbol{BA}^{\mathrm{t}}$$

□