北京大学数学科学学院 2024-25 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1 求下列行向量构成的向量组的秩和一个极大线性无关组:

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{bmatrix}-1\\5\\3\\2\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{bmatrix}4\\1\\-2\\9\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{bmatrix}2\\0\\1\\4\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{bmatrix}0\\3\\4\\-5\end{bmatrix}$$

2 下述齐次线性方程组何时有非零解? 何时只有零解?

$$\begin{cases}x_1-3x_2-5x_3=0\\2x_1-7x_2-4x_3=0\\4x_1-9x_2+ax_3=0\\5x_1+bx_2-55x_3=0\end{cases}$$

3 计算下面的行列式:

$$A_n=\begin{vmatrix}1&1&1&\cdots&1\\1&2&0&\cdots&0\\1&0&3&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\1&0&0&\cdots&n\end{vmatrix}$$

4 已知

$$\begin{vmatrix}x&y&z&x+y+z\\3&0&2&0\\1&1&1&1\\2&2&2&1\end{vmatrix}=\frac{1}{2}$$

求

$$\begin{vmatrix}x-y&y&z-x&x+y+z\\3&0&-1&0\\y-x&2-y&x-z&2-x-y-z\\3&2&-1&1\end{vmatrix}$$

5 证明:

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \geqslant \operatorname{rank}\ \boldsymbol{A} + \operatorname{rank}\ \boldsymbol{B}$$

6 已知向量 $\boldsymbol{\beta}$ 能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性表出, 但不能由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}$ 线性表出. 证明:

$$\operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s\} = \operatorname{rank}\{\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_{s-1}, \boldsymbol{\beta}\}$$

7 矩阵

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2 & x\\ 3 & 2 & 1 & y\\ 1 & -1 & 0 & z\end{bmatrix}$$

的行向量组何时与矩阵

$$\begin{bmatrix}3 & 1 & 5 & 14\\ 0 & 2 & -1 & 11\\ 0 & 0 & 3 & 3\end{bmatrix}$$

的行向量组等价?

8 设 n 个方程的 n 元齐次线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式等于 0, 并且 $\boldsymbol{A}$ 的 (k, l) 元的代数余子式 $A_{kl} \neq 0$. 试证明:

$$\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix}A_{k1}\\ A_{k2}\\ \vdots\\ A_{kn}\end{bmatrix}$$

是该齐次线性方程组的一个基础解系.

9 已知方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0\\ \qquad\vdots\\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0\end{cases}$$

的解都是方程

$$b_1x_1 + \cdots + b_nx_n = 0$$

的解. 证明:$\boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_n \end{bmatrix}^{\mathrm{t}}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_n$ 线性表出, 其中 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是上述方程组系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量.