

北京大学数学科学学院 2021-22 学年第一学期线性代数 B 期中试题

1(20') 求 a 为何值时, 下述线性方程组有 **a.** 唯一解; **b.** 无解; **c.** 无穷多解? 在有无穷多解的情况下写出解集的结构.

$$\begin{cases} x_1 - ax_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 + ax_3 = 2 \\ 5x_1 - 5x_2 - 4x_3 = 1 \end{cases}$$

2(10') 判断 \mathbb{R}^3 中下列子集是否为 \mathbb{R}^3 的子空间, 并说明理由.

(1) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0\}$.

(2) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4\}$.

(3) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = 0\}$.

(4) $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + 5x_3)^2 = 0\}$.

3(10') 找出一个非零的 3×3 矩阵 P 使得 PA 为简化行阶梯形矩阵, 其中

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

4(20') 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 和线性无关的向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 满足如下关系:

$$\begin{cases} \beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 = \alpha_1 \\ \beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3 = \alpha_1 \\ 5\beta_1 - 3\beta_2 + 9\beta_3 = \alpha_3 \\ -2\beta_1 + \beta_2 - 4\beta_3 = \alpha_4 \end{cases}$$

求出所有满足 $l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + l_3\alpha_3 + l_4\alpha_4$ 的向量 $\begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 & l_4 \end{bmatrix}^t$.

5(10') 设 $E_{i,i+1} (i = 1, \dots, n-1)$ 是 $n \times n$ 的基本矩阵. 证明:

(1) 如果 $|i - j| > 1$, 那么 $E_{i,i+1}E_{j,j+1} = E_{j,j+1}E_{i,i+1}$.

(2) 如果 $|i - j| = 1$, 那么 $E_{i,i+1}^2 E_{j,j+1} - 2E_{i,i+1}E_{j,j+1}E_{i,i+1} + E_{i,i+1}E_{j,j+1}^2 = 0$.

6(10') 设 $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ 是 n 级方阵, A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式. 证明:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + x & a_{12} + x & \cdots & a_{1n} + x \\ a_{21} + x & a_{22} + x & \cdots & a_{2n} + x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} + x & a_{n2} + x & \cdots & a_{nn} + x \end{vmatrix} = \det A + x \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}$$

7(10') 令 $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k x_k$. 设 $\zeta^0, \zeta^1, \dots, \zeta^{n-1} \in \mathbb{C}$ 是所有 n 次单位根. 证明:

$$\begin{vmatrix} x_0 & x_{n-1} & \cdots & x_1 \\ x_1 & x_0 & \cdots & x_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n-1} & x_{n-2} & \cdots & x_0 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^{n-1} f(\zeta^i)$$

8(10') 设 A, P 均为 n 级方阵, 矩阵 P 为若干 $P(i, j)$ 型初等矩阵的乘积. 令 $B = PAP'$. 判断 a_{ij} 在 A 中的代数余子式 A_{ij} 是否等于 b_{ij} 在 B 中的代数余子式 B_{ij} , 并说明理由.