Linear Algebra Done Right 5A

1. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且U是V的子空间.

(1) 证明:如果$U \subseteq \text{null } T$,那么$U$在$T$下不变.

(2) 证明:如果$\text{range } T \subseteq U$,那么$U$在$T$下不变.

Proof.

(1) 对于任意$u \in U \subseteq \text{null } T$,都有$Tu = \mathbf{0} \in U$,于是$U$在$T$下不变.

(2) 对于任意$u \in U \subseteq V$,都有$Tu \in \text{range } T \subseteq U$,于是$U$在$T$下不变.

2. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且$V_1, \cdots, V_m$是V在T下的不变子空间.证明$V_1 + \cdots + V_m$在T下不变.

Proof.

对于任意$v = v_1 + \cdots + v_m, v_k \in V_k$有

$$Tv = T(v_1 + \cdots + v_m) = Tv_1 + \cdots + Tv_m$$

而$Tv_k \in V_k$,于是$Tv_1 + \cdots + Tv_m \in V_1 + \cdots + V_m$.于是$V_1 + \cdots + V_m$在$T$下不变.

3. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.证明V的任意一族T下的不变子空间的交集在T下不变.

Proof.

设$V_1, \cdots, V_m$在T下不变.

对于任意$v \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} V_j$和任意$1 \leqslant k \leqslant m$有$v \in V_k$,于是$Tv \in V_k$.

这表明$Tv \in \bigcap\limits_{j=1}^{m} V_j$,从而$\bigcap\limits_{j=1}^{m} V_j$在$T$下不变.

4. 证明或给出一反例:若V是有限维的,其子空间U在V上任意算子下均不变,那么$U = \{\mathbf{0}\}$或V.

Proof.

当$U = \{\mathbf{0}\}$或V,不难验证它们在任意算子下不变.

若$U \neq \{\mathbf{0}\}$或V,那么假定U的基为$u_1, \cdots, u_m$,将其扩展为V的一组基$u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_n$.

根据上面的假设,$m \geqslant 1$且$n \geqslant 1$.定义$T \in \mathcal{L}(V)$为

$$\begin{cases} Tu_1 = v_1 \\ Tv_1 = u_1 \\ Tu_k = u_k, 2 \leqslant k \leqslant m \\ Tv_j = v_j, 2 \leqslant j \leqslant n \end{cases}$$

于是$Tu_1 = v_1 \notin U$,从而这样的U不能在任意T下不变.

于是命题得证.

5. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$定义为$T(x, y) = (-3y, x)$,求$T$的特征值.

Solution.

设$(x, y) \neq (0, 0)$满足$T(x, y) = \lambda(x, y)$,即

$$\begin{cases} -3y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}$$

变形可得$\lambda^2 + 3 = 0$.这方程没有实根,于是T不存在实特征值.

6. 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$为$T(w, z) = (z, w)$.求$T$的所有特征值和对应的特征向量.

Solution.

设$(w, z) \neq (0, 0)$满足$T(w, z) = \lambda(z, w)$,即

$$\begin{cases} z = \lambda w \\ w = \lambda z \end{cases}$$

变形可得$\lambda^2 - 1 = 0$,即$\lambda = \pm 1$.

于是T的特征值为1和-1,对应的特征向量为(w, w)和$(w, -w)$,其中$w \neq 0 \in \mathbb{F}$.

7. 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$为$T(z_1, z_2, z_3) = (2z_2, 0, 5z_3)$.求$T$的所有特征值和对应的特征向量.

Solution.

设$(z_1, z_2, z_3) \neq (0, 0, 0) \in \mathbb{F}^3$满足$T(z_1, z_2, z_3) = \lambda(z_1, z_2, z_3)$,即

$$\begin{cases} \lambda z_1 = 2z_2 \\ \lambda z_2 = 0 \\ \lambda z_3 = 5z_3 \end{cases}$$

这方程组的解为$z_1 = z_2 = 0, \lambda = 5$.于是$T$的特征值为5,特征向量为$(0, 0, z_3)$,其中$z_3 \in \mathbb{F}$.

8. 设$P \in \mathcal{L}(V)$且$P^2 = P$.证明:若λ是P的特征值,那么$\lambda = 0$或1.

Proof.

设$v \neq \mathbf{0} \in V$使得$Pv = \lambda v$.于是$(P^2)(v) = P(P(v)) = P(\lambda v) = \lambda P v = \lambda^2 v$.

由$P = P^2$可知$\lambda v = \lambda^2 v$,又$v \neq \mathbf{0}$,于是$\lambda^2 - \lambda = 0$,即$\lambda = 0$或1.

9. 定义$T : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}(\mathbb{R})$为$Tp = p'$.求出$T$的所有特征值和对应的特征向量.

Proof.

设T的特征值为λ,特征向量为p,于是$Tp = \lambda p = p'$.

设$p = a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m$,其中$a_m \neq 0$.于是$p' = a_1 + 2a_2 x + \cdots + m a_m x^{m-1}$.

若$\lambda = 0$,则$p' = \mathbf{0}$,这要求p为任意常值函数.

若$\lambda \neq 0$且$m \geqslant 1$,那么$\deg(\lambda p) = m > m - 1 = \deg p'$,于是不存在这样的$p$使得式子成立.

综上可知T的特征值为0,特征向量为常值多项式t,$t \in \mathbb{F}$.

10. 定义$T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_4(\mathbb{R}))$为$(Tp)(x) = xp'(x)$对所有$x \in \mathbb{R}$成立.求出$T$的所有特征值和对应的特征向量.

Proof.

设T的特征值为λ,特征向量为$p \neq \mathbf{0}$.于是对于任意$x \in \mathbb{R}$有$(Tp)(x) = (\lambda p)(x) = xp'(x)$.

即$\lambda p(x) = xp'(x)$对所有$x \in \mathbb{R}$成立.设$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$,其中各$a$不全为0.

于是我们有

$$\lambda \left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4\right) = a_1 x + 2a_2 x^2 + 3a_3 x^3 + 4a_4 x^4$$

于是

$$\begin{cases} \lambda a_0 = 0 \\ \lambda a_1 = a_1 \\ \lambda a_2 = 2a_2 \\ \lambda a_3 = 3a_3 \\ \lambda a_4 = 4a_4 \end{cases}$$

于是$\lambda = 1, 2, 3, 4$.

综上可知T的特征值为$1, 2, 3$和4,对应的特征向量分别为$a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3$和$a_4 x^4$,其中各$a_k \neq 0 \in \mathbb{F}$.

11. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$且$\alpha \in \mathbb{F}$.证明:存在$\delta > 0$使得对所有满足$0 < |\alpha - \lambda| < \delta$的$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$T - \lambda I$可逆.

Proof.

若T没有特征值,那么对于任意$\lambda \in \mathbb{F}$,$T - \lambda I$都是可逆的,这时任取$\delta > 0$即可.

若T有特征值,不妨设为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$,其中$m \leqslant \dim V$.

令$\delta = \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant m, \lambda_k \neq \alpha} |\alpha - \lambda_k|$.于是对于任意$\lambda \in (\alpha - \delta, \alpha) \cup (\alpha, \alpha + \delta)$,都有$\lambda \neq \lambda_k$.

这就表明λ不是T的特征值,于是$T - \lambda I$可逆.

12. 设$V = U \oplus W$,其中U和W都是V的非零子空间.定义$P \in \mathcal{L}(V)$为,对任意$u \in U$和$w \in W$都有$P(u+w) = u$.求出P的所有特征值和对应的特征向量.

Proof.

设P的特征值为λ.设$v := u + w \in V$且$v \neq \mathbf{0}$是对应的特征向量,于是$Pv = \lambda v$.

因此$P(u + w) = \lambda(u + w) = u$,即$(1 - \lambda)u = \lambda w$.

注意到$U + W$是直和,于是上式成立当且仅当$(1 - \lambda)u = \lambda w = \mathbf{0}$.

于是P的特征值为$0, 1$对应的特征向量为w, u,其中$w \in W, u \in U$且$w, u \neq \mathbf{0}$.

13. 设$T \in \mathcal{L}(V)$,并设$S \in \mathcal{L}(V)$可逆.

(1) 证明T和$S^{-1}TS$具有相同的特征值.

(2) 说明T和$S^{-1}TS$的特征向量间的关系.

Proof.

(1) 设T的特征值为λ,对应的特征向量为v.由于S可逆,不妨设$u \in V$使得$Su = v$.
于是$(S^{-1}TS)u = S^{-1}T(Su) = S^{-1}(Tv) = S^{-1}(\lambda v) = \lambda(S^{-1}v) = \lambda u$.
这表明$S^{-1}TS$也有特征值λ,对应的特征向量为$S^{-1}v$.

(2) 见**(1)**的论述.

14. 给出一例$\mathbb{R}^4$上没有实特征值的算子.

Solution.

定义$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^4) : (a, b, c, d) \mapsto (-b, a, c, d)$.这$T$就没有实特征值.

15. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V), \lambda \in \mathbb{F}$.证明$\lambda$是$T$的特征值当且仅当$\lambda$是对偶算子$T' \in \mathcal{L}(V')$的特征值.

Proof.

$$\begin{aligned} T\text{有特征值}\lambda &\Leftrightarrow (T - \lambda I)\text{不可逆} \\ &\Leftrightarrow (T - \lambda I)'\text{不可逆} \\ &\Leftrightarrow T' - \lambda I'\text{不可逆} \\ &\Leftrightarrow T'\text{有特征值}\lambda \end{aligned}$$

16. 设$v_1, \cdots, v_n$是V的基,$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:如果λ是T的特征值,那么

$$|\lambda| \leqslant n \max_{1 \leqslant j,k \leqslant n} |\mathcal{M}(T)_{j,k}|$$

Proof.

记$\mathcal{M}(T) = A$.设$v := a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n \in V$是$T$对应$\lambda$的特征向量.

于是

$$Tv = \sum_{k=1}^{n} a_k T v_k = \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \sum_{j=1}^{n} A_{j,k} v_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k A_{j,k} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} \lambda a_j v_j$$

即$\lambda = \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k A_{j,k}}{a_j}$对任意$1 \leqslant j \leqslant n$都成立.于是$|\lambda| \, |a_j| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |A_{j,k}| \, |a_k|$. 取$a_j$使得$|a_j| = \max\limits_{1 \leqslant j \leqslant n} |b_j|$.于是

$$|\lambda| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}| \left| \frac{a_k}{a_j} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |A_{j,k}| \leqslant n \max_{1 \leqslant j,k \leqslant n} |\mathcal{M}(T)_{j,k}|$$

17. 设$\mathbb{F} = \mathbb{R}$,$T \in \mathcal{L}(V)$,$\lambda \in \mathbb{R}$.证明:λ是T的特征值,当且仅当λ是复化$T_{\mathbb{C}}$的特征值.

Proof.

$\Rightarrow$:设$v \in V$是对应λ的特征向量.存在$v + v\mathrm{i} \in V_{\mathbb{C}}$使得

$$T(v + v\mathrm{i}) = Tv + Tv\mathrm{i} = \lambda v + \lambda v\mathrm{i} = \lambda(v + v\mathrm{i})$$

于是λ为$T_{\mathbb{C}}$的特征值.

$\Leftarrow$:设$v + u\mathrm{i} \in V_{\mathbb{C}}$是对应$\lambda$的特征向量.于是存在$u, v \in V$使得

$$T(v + u\mathrm{i}) = Tv + Tu\mathrm{i} = \lambda(v + u\mathrm{i})$$

于是$Tv = \lambda v, Tu = \lambda u$,即$\lambda$是$T$的特征值.

18. 设$\mathbb{F} = \mathbb{R}$,$T \in \mathcal{L}(V)$,$\lambda \in \mathbb{C}$.证明:λ是$T_{\mathbb{C}}$的特征值,当且仅当$\overline{\lambda}$是$T_{\mathbb{C}}$的特征值.

Proof.

设$v + u\mathrm{i}$是$T_{\mathbb{C}}$对应λ的特征向量.不妨设$\lambda = a + b\mathrm{i}$.

$$T(v + u\mathrm{i}) = Tv + Tu\mathrm{i} = \lambda(v + u\mathrm{i}) = (a + b\mathrm{i})(v + u\mathrm{i}) = (av - bu) + (au + bv)i$$

于是$Tv = av - bu, Tu = au + bv$.因此有

$$T(u + v\mathrm{i}) = Tu + Tv\mathrm{i} = (au + bv) + (av - bu)\mathrm{i} = (a - b\mathrm{i})(u + v\mathrm{i}) = \overline{\lambda}(u + v\mathrm{i})$$

于是$\overline{\lambda}$为$T_{\mathbb{C}}$的特征值.反之亦同理.

19. 证明:定义为$T(z_1, z_2, \cdots) = (0, z_1, z_2, \cdots)$的前向位移算子$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{\infty})$没有特征值.

Proof.

假定T有特征值$\lambda \in \mathbb{F}$,对应的特征向量为v.那么有$Tz_1 = 0 = \lambda z_1, Tz_k = z_{k-1} = \lambda z_k (\forall k \geqslant 2)$.

若$z_1 = 0$,则对任意$k \in \mathbb{N}^*$都有$z_k = 0$,于是$v = \mathbf{0}$,舍去.

若$\lambda = 0$,则对于任意$k \in \mathbb{N}^*$有$z_k = \lambda z_{k+1} = 0$,于是$v = \mathbf{0}$,舍去.

综上可知T没有特征值.

20. 定义后向位移算子$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{\infty})$为$S(z_1, z_2, z_3, \cdots) = (z_2, z_3, \cdots)$.

(1) 证明$\mathbb{F}$的任意元素均为S的特征值.

(2) 求出S的所有特征向量.

Proof.

(1) 对任意$\lambda \in \mathbb{F}$,都有$v = (1, \lambda, \lambda^2, \cdots)$满足

$$Tv = (\lambda, \lambda^2, \cdots) = \lambda v$$

于是命题得证.

(2) 对于任意$c \in \mathbb{F}$且$c \neq 0$和任意$k \in \mathbf{Z}$,$v = (c\lambda^k, c\lambda^{k+1}, \cdots)$均为$S$对应$\lambda$的特征向量.

21. 设$T \in \mathcal{L}(V)$可逆.

(1) 设$\lambda \in \mathbb{F}$且$\lambda \neq 0$.证明:λ是T的特征值当且仅当$\dfrac{1}{\lambda}$是T^{-1}的特征值.

(2) 证明:T和T^{-1}的特征向量相同.

Proof.

(1) 设v是T对应λ的特征向量,即$Tv = \lambda v$.于是

$$T^{-1}v = \frac{1}{\lambda}T^{-1}(\lambda v) = \frac{1}{\lambda}T^{-1}Tv = \frac{1}{\lambda}v$$

于是$\dfrac{1}{\lambda}$是T^{-1}的特征值,特征向量为v.

至于另一方向的蕴含关系,注意到$\dfrac{1}{\frac{1}{\lambda}} = \lambda, (T^{-1})^{-1} = T$即可得证.

(2) 见**(1)**.

22. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且存在$u, w \in V(v, w \neq \mathbf{0})$使得$Tu = 3w, Tw = 3u$.证明3或$-3$是$T$的特征值.

Proof.

由题意$Tu + Tw = T(u + w) = 3(u + w)$.

若$u + w \neq \mathbf{0}$,那么T的特征值为3,对应的特征向量为$u + w$.

若$u + w = \mathbf{0}$,那么$Tu = 3w = -3u$,从而T的特征值为-3,对应的特征向量为u和w.

23. 设V是有限维的,$S, T \in \mathcal{L}(V)$.证明:ST与TS的特征值相同.

Proof.

设λ为ST的特征值,对应的特征向量为v.于是$STv = \lambda v$.

于是$TS(Tv) = T(STv) = T(\lambda v) = \lambda Tv$.于是$TS$的特征值为$\lambda$,对应的特征向量为$Tv$.

24. 设$A \in \mathbb{F}^{n,n}$,定义$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^{n,1})$为$Tx = Ax$.

(1) 设A的每一行元素之和均为1.证明:1是T的特征值.

(2) 设A的每一列元素之和均为1.证明:1是T的特征值.

Proof.

(1) 取$v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{n,1}$.于是

$$Tv = Av = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} A_{1,k} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} A_{n,k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = v$$

于是1是T的特征值.

(2) 记$B = \mathcal{M}(T') = A^{\mathrm{t}}$.根据**(1)**可知$T'$有特征值1,根据**15.**可知$T$有特征值1.

25. 设$T \in \mathcal{L}(V)$,u, w是T的特征向量且$u + w$也是T的特征向量.证明:u, w是T对应于同一特征值的特征向量.

Proof.

假设$u, w, u + w$对应的特征值为λ, μ, ξ.于是$Tu = \lambda u, Tw = \mu w$.

于是$T(u + w) = \lambda u + \mu w = \xi(u + w)$,即$(\lambda - \xi)u = (\xi - \mu)w$.

又$u, w \neq \mathbf{0}$.若$\lambda - \xi, \xi - \mu \neq 0$,那么有$w = \dfrac{\lambda - \xi}{\xi - \mu}u$.于是

$$Tw = \mu w = \mu \cdot \frac{\lambda - \xi}{\xi - \mu}u = T\left(\frac{\lambda - \xi}{\xi - \mu}u\right) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \xi}{\xi - \mu}u$$

于是$\lambda = \mu$,从而u, w对应于同一特征值.

若$\lambda - \xi = \xi - \mu = 0$,即$\lambda = \xi = \mu$,于是$u, w$对应于同一特征值.

命题得证.

26. 设$T \in \mathcal{L}(V)$使得V中任意非零向量都是T的特征向量.证明:T是恒等算子的标量倍.

Proof.

任取$u, w \neq \mathbf{0} \in V$且$u + w \neq \mathbf{0}$.则$u + w$也是$T$的特征向量.据**25.**可知$u, w$对应于同一特征值$\lambda$.

于是对于任意$v \in V$有$Tv = \lambda v$,从而$(T - \lambda I)v = \mathbf{0}$,于是$T = \lambda I$.命题得证.

27. 设V是有限维的,且$k \in \{1, \cdots, \dim V - 1\}$.设$T \in \mathcal{L}(V)$使得$V$的任意$k$维子空间都在$T$下不变.证明:$T$是恒等算子的标量倍.

Proof.

28. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$.证明:T最多有$1 + \dim \operatorname{range} T$个不同的特征值.

Proof.

设T的特征值为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.设$v_1, \cdots, v_n$满足$Tv_k = \lambda_k v_k$.

由于不同特征值对应的向量组线性无关,于是$v_1, \cdots, v_k$线性无关.

由于至多存在一个$1 \leqslant k \leqslant n$使得$\lambda_k = 0$,于是$\operatorname{span}(\lambda_1 v_1, \cdots, \lambda_n v_n)$至少是维度为$n - 1$的空间.

于是$n - 1 \leqslant \dim \operatorname{range} T$,即$n \leqslant 1 + \dim \operatorname{range} T$.

29. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$,且有特征值$-4, 5, \sqrt{7}$.证明:存在$x \in \mathbb{R}^3$使得$Tx - 9x = (-4, 5\sqrt{7})$.

Proof.

由于$T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$最多有$\dim \mathbb{R}^3 = 3$个不同的特征值,于是9不是$T$的特征值.

这等价于$T - 9I$可逆,于是一定存在$x \in \mathbb{R}^3$使得$(T - 9I)x = (-4, 5, \sqrt{7})$.

30. 设$T \in \mathcal{L}(V)$,且$(T - 2I)(T - 3I)(T - 4I) = \mathbf{0}$.设$\lambda$为$T$的特征值,证明:$\lambda = 2, 3$或4.

Proof.

由$(T - 2I)(T - 3I)(T - 4I) = \mathbf{0}$可知对于任意$v \in V$有$(T - 2I)(T - 3I)(T - 4I)v = \mathbf{0}$.

若$(T - 4I)v = \mathbf{0}$,则$\lambda = 4$为T的特征值,对应的特征向量为v.

若$(T - 4I)v \neq \mathbf{0}$,不妨令$u = (T - 4I)v$.

若$(T - 3I)u = \mathbf{0}$,则$\lambda = 3$为T的特征值,对应的特征向量为u.

若$(T-3I)u\neq\mathbf{0}$,则$\lambda=2$为T的特征值,对应的特征向量为$(T-3I)u=(T-3I)(T-2I)v$.
综上,命题得证.

31. 给出一例$T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$使得$T^4=-I$.

Solution.
令T满足对任意$(x,y)\in\mathbb{R}^2$有$T(x,y)=\left(\dfrac{x-y}{\sqrt{2}},\dfrac{x+y}{\sqrt{2}}\right)$即可.这实际上是将向量逆时针旋转$\dfrac{\pi}{4}$.

32. 设$T\in\mathcal{L}(V)$没有特征值且$T^4=I$.证明$T^2=-I$.

Proof.
由题意$T^4-I=(T^2+I)(T+I)(T-I)=\mathbf{0}$.
由于T没有特征值,于是$T+I,T-I$均为可逆算子.于是$T^2+I=\mathbf{0}$,即$T^2=-I$.

33. 设$T\in\mathcal{L}(V)$且$m\in\mathbb{N}^*$.

(1) 证明:T是单射,当且仅当T^m是单射.

(2) 证明:T是满射,当且仅当T^m是满射.

Proof.

(1) $\Rightarrow$:由于T是单射,于是$\operatorname{null}T=\{\mathbf{0}\}$.于是$T^2v=T(Tv)=\mathbf{0}$当且仅当$Tv=\mathbf{0}$,即$v=\mathbf{0}$.这表明$T^2$是单射.依次类推可知$T^m$是单射.
$\Leftarrow$:若T不是单射,于是存在$v\neq\mathbf{0}$使得$Tv=\mathbf{0}$,即$T^mv=T^{m-1}(Tv)=T^{m-1}\mathbf{0}=\mathbf{0}$,进而$T^m$不是单射,这与假设不符,于是$T$是单射.

(2) T是满射 $\Leftrightarrow$ T是单射 $\Leftrightarrow$ T^m是单射 $\Leftrightarrow$ T^m是满射.

34. 设V是有限维的,$v_1,\cdots,v_m\in V$.证明:$v_1,\cdots,v_m$线性无关当且仅当存在$T\in\mathcal{L}(V)$使得$v_1,\cdots,v_m$是T对应于不同特征值的特征向量.

Proof.
$\Rightarrow$:设$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$满足$Tv_k=\lambda_kv_k$,各$\lambda_k$不相同.
将$v_1,\cdots,v_m$扩展为V的一组基$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n$,令任意$1\leqslant j\leqslant n$有$Tu_j=\mathbf{0}$.

这就定义了$T \in \mathcal{L}(V)$满足题意.

$\Leftarrow$:我们已经证明了不同特征值对应的特征向量构成的组线性无关.

35. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是一组相异实数.证明:$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$在由$\mathbb{R}$上的实值函数构成的向量空间中线性无关.

Proof.

令$V = \operatorname{span}(\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x})$.定义$D \in \mathcal{L}(V)$为$Df = f'$.

于是对于任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$D\mathrm{e}^{\lambda_k x} = \lambda_k \mathrm{e}^{\lambda_k x}$.故$\lambda_k$是$T$的特征值,特征向量为$\mathrm{e}^{\lambda_k x}$.

又$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$相异,于是$\mathrm{e}^{\lambda_1 x}, \cdots, \mathrm{e}^{\lambda_n x}$线性无关.

36. 设$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是一组相异正数.证明:$\cos \lambda_1 x, \cdots, \cos \lambda_n x$在由$\mathbb{R}$上的实值函数构成的向量空间中线性无关.

Proof.

令$V = \operatorname{span}(\cos \lambda_1 x, \cdots, \cos \lambda_n x)$.定义$D \in \mathcal{L}(V)$为$Df = f''$.

于是对于任意$1 \leqslant k \leqslant n$有$D \cos \lambda_k x = -\lambda_k^2 \cos \lambda_k x$.故$-\lambda_k^2$是$T$的特征值,特征向量为$\cos \lambda_k x$.

又$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$是相异的正数,于是$-\lambda_1^2, \cdots, -\lambda_n^2$相异,于是$\cos \lambda_1 x, \cdots, \cos \lambda_n x$线性无关.

37. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$.定义$\mathcal{A} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$为$\mathcal{A}(S) = TS$对任意$S \in \mathcal{L}(V)$都成立.证明:$T$与$\mathcal{A}$的特征值相同.

Proof.

设λ是T的特征值,对应的特征向量为v.于是存在$S \in \mathcal{L}(V)$使得对任意$u \in V, Su = v$.

于是对于任意$u \in V$有$(\mathcal{A}(S))u = TSu = Tv = \lambda v = \lambda Su = (\lambda S)u$.

于是λ是$\mathcal{A}$的特征值,对应的特征向量S如上定义.

38. 设V是有限维的,$T \in \mathcal{L}(V)$,且U是V在T下的不变子空间.**商算子**$T/U \in \mathcal{L}(V/U)$定义为$(T/U)(v + U) = Tv + U$对任意$v \in V$成立.

(1) 证明:T/U的定义是有意义的,并且T/U是V/U上的算子.

(2) 证明:T/U的每个特征值都是T的特征值.

Proof.

(1) 考虑$v,w\in V$使得$v+U=w+U$,于是$v-w\in U$.由于U在T下不变,于是$T(v-w)=Tv-Tw\in U$.
于是$(T/U)(v+U)=Tv+U=Tw+U=(T/U)(w+U)$,因而$T/U$的定义是有意义的.
考虑$v+U,w+U\in V/U$,则有

$$(T/U)(v+w+U)=T(v+w)+U=Tv+Tw+U=(Tv+U)+(Tw+U)=(T/U)(v+U)+(T/U)(w+U)$$

又$v+w+U=(v+U)+(w+U)$,于是T/U满足可加性.齐次性的证明亦同理,不再赘述.
于是T/U是V/U上的算子.

(2) 考虑T/U的特征值λ和对应的特征向量$v+U$,显然$v\notin U$.于是

$$(T/U)(v+U)=Tv+U=\lambda(v+U)=\lambda v+U$$

于是$Tv-\lambda v\in U$.设$Tv-\lambda v=u\in U$.考虑$R:=(T-\lambda I)|_U$.
若null $R\neq\{\mathbf{0}\}$,则存在$w\in U$使得$(T-\lambda I)w=\mathbf{0}$,于是$\lambda$为$T$的特征值,对应的特征向量为$w$.
若null $R=\{\mathbf{0}\}$,则R是单射,于是R可逆.设$w\in U$满足$Rw=-u$,即$Tw=\lambda w-u$,于是

$$T(v+w)=Tv+Tw=\lambda v+u+Tw=\lambda v+\lambda w=\lambda(v+w)$$

于是λ为T的特征值,对应的特征向量为$v+w$.

39. 设V是有限维的,$T\in\mathcal{L}(V)$.证明:T有特征值,当且仅当存在V的$\dim-1$维子空间在T下不变.

Proof.
$\Rightarrow$:设T的特征值为λ,对应的特征向量为v_1.将其扩展为V的一组基$v_1,\cdots,v_n$.
不难得出$\dim\operatorname{null}(T-\lambda I)\geqslant 1$而$\dim\operatorname{range}(T-\lambda I)\leqslant\dim V-1$. 设range $(T-\lambda I)$的一组基$v_1,\cdots,v_m$,将其扩展为线性无关组$v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_{\dim V-1-m}$,令$n=\dim V-1-m$,记$U=\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_m,u_1,\cdots,u_n)$.
于是对于任意$w:=a_1v_1+\cdots+a_mv_m+b_1u_1+\cdots+b_nu_n\in U$有

$$Tw=\sum_{k=1}^{m}a_kTv_k\in\operatorname{range}(T-\lambda I)\subseteq U$$

于是U在$(T-\lambda I)$下不变.对于任意$u\in U$有$Tu=(T-\lambda I)u+\lambda u\in U$,于是$U$在$T$下不变.
$\Leftarrow$:设U在T下不变且$\dim U=\dim V-1$.考虑$T/U\in\mathcal{L}(V/U)$.
由于$\dim\mathcal{L}(V/U)=\dim V-\dim U=1$,于是据**3A.7.**可知$T/U=\lambda I$.据**38.**可知$T$的特征值为$\lambda$.

40. 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$且S可逆.设$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$.证明:$p(STS^{-1})=Sp(T)S^{-1}$.

Proof.
设$p(z)=\sum\limits_{k=0}^{m}c_kz^k$.于是$p(STS^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k(STS^{-1})^k$.
注意到$(STS^{-1})^0=I=SS^{-1}=ST^0S^{-1}$.假定$(STS^{-1})^k=ST^kS^{-1}$,那么

$$(STS^{-1})^{k+1}=(STS^{-1})^k(STS^{-1})=ST^kS^{-1}STS^{-1}=ST^kITS^{-1}=ST^{k+1}S^{-1}$$

于是对任意$k\in\mathbb{N}$有$(STS^{-1})^k=ST^kS^{-1}$.
于是$p(STS^{-1})=\sum\limits_{k=0}^{m}c_k(STS^{-1})^k=\sum\limits_{k=0}^{m}c_kST^kS^{-1}=Sp(T)S^{-1}$.

41. 设$T\in\mathcal{L}(V)$且U是V在T下的不变子空间.证明:对任意$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$,均有$U$在$p(T)$下不变.

Proof.
首先$T^0u=Iu=u\in U$.若$T^ku\in U$,那么$T^{k+1}u=T(T^ku)\in U$.
于是对于任意$k\in\mathbb{N}$有$T^ku\in U$,即U在T^k下不变.
于是$p(T)u=\sum\limits_{k=0}^{m}c_kT^ku\in U$,于是$U$在$p(T)$下不变.

42. 定义$T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$为$T(x_1,\cdots,x_n)=(x_1,2x_2,\cdots,nx_n)$.

(1) 求出T的所有特征值和对应的特征向量.

(2) 求出$\mathbb{F}^n$的所有在T下不变的子空间.

Lemma.L.4 设$T\in\mathcal{L}(V)$,且U是V在T下的不变子空间.若$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$是$T$的互异特征值且对应特征向量为$v_1,\cdots,v_m$,那么$v_1+\cdots+v_m\in U$当且仅当$v_k\in U$对任意$k\in\{1,\cdots,m\}$成立.

Proof.
$\Leftarrow$:由于$v_k\in U$对所有k成立,又因为U是子空间,于是$v_1+\cdots+v_m\in U$.
$\Rightarrow$:我们采取归纳证明的方式.当$m=1$时,结论是显然的.
若结论对于某个$m\in\mathbb{N}^*$时成立,那么取T的互异特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1}$和对应的特征向量$v_1,\cdots,v_{m+1}$.
令$v=v_1+\cdots+v_{m+1}\in U$,则有

$$Tv=T(v_1+\cdots+v_{m=1})=\lambda_1v_1+\cdots+\lambda_{m+1}v_{m+1}\in U$$

于是

$$Tv-\lambda_{m+1}v_{m+1}=(\lambda_1-\lambda_{m+1})v_1+\cdots+(\lambda_m-\lambda_{m+1})v_m\in U$$

由于$\lambda_1,\cdots,\lambda_{m+1}$互异,因而对于所有$k\in\{1,\cdots,m\}$都有$\lambda_k-\lambda_{m+1}\neq 0$.
于是$(\lambda_k-\lambda_{m+1})v_k$是$T$对应$\lambda_k$的特征向量.
我们的假设表明$(\lambda_k-\lambda_{m+1})v_k\in U$,于是$v_k\in U$.又因为$v=v_1+\cdots+v_{m+1}\in U$,于是$v_{m+1}\in U$.
归纳可知命题成立.

Solution.

(1) 观察可得T的特征值为$1,2,\cdots,n$,对应的特征向量为$\mathbb{F}^n$的标准基.

(2) 设$\mathbb{F}^n$的标准基为$e_1,\cdots,e_n$.$\mathbb{F}^n$的所有在T下不变的子空间为任意选取这些标准基构成的向量组张成的空间.

43. 设V是有限维的,$\dim V>1$,且$T\in\mathcal{L}(V)$.证明:$\{p(T):p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\}\neq\mathcal{L}(V)$.

Proof.
对于任意$p,q\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$,都有$p(T)q(T)=q(T)p(T)$,于是$\{p(T):p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\}$中的任意两个算子都是可交换的.
然而**3A.16.**表明$\mathcal{L}(V)$中存在两个不可交换的算子,于是$\{p(T):p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})\}\neq\mathcal{L}(V)$.