广义特征向量和幂零算子

1.算子的幂的零空间

我们从研究算子的幂的零空间开始本章.

1.1 递增的零空间序列

设$T \in \mathcal{L}(V)$,那么

$$\{0\} = \text{null } T^0 \subseteq \text{null } T^1 \subseteq \cdots \subseteq \text{null } T^k \subseteq \text{null } T^{k+1} \subseteq \cdots$$

通过归纳法是可以很容易证明此定理成立的.下面的定理进一步说明,如果上述式子中有两个相邻项相同,那么排在它们之后的所有项都相同.

1.2 零空间序列中的等式

设$T \in \mathcal{L}(V)$,$m \in \mathbb{N}$,使得$\text{null } T^m = \text{null } T^{m+1}$,那么$\text{null } T^m = \text{null } T^{m+k}$对所有$k \in \mathbb{N}$成立.

Proof.

对于$k \in \mathbb{N}^*$,只需证明$\text{null } T^{m+k} = \text{null } T^{m+k+1}$即可.

根据**1.1**可知$\text{null } T^{m+k} \subseteq \text{null } T^{m+k+1}$.对于任意$v \in \text{null } T^{m+k+1}$有

$$T^{m+1}\left(T^k v\right) = T^{m+k+1} v = \mathbf{0}$$

于是$T^k v \in \text{null } T^{m+1} = \text{null } T^m$,因此

$$T^m\left(T^k v\right) = T^{k+m} v = \mathbf{0}$$

于是$v \in \text{null } T^{k+m}$,因此$\text{null } T^{k+m+1} \subseteq \text{null } T^{k+m}$,从而$\text{null } T^{k+m} = \text{null } T^{k+m+1}$.

归纳即可证明该命题.

上面的定理引出了一个问题:零空间在什么时候会停止增长?下面的定理给出了结论.

1.3 零空间停止增长

设$T \in \mathcal{L}(V)$,那么$\text{null } T^{\dim V} = \text{null } T^{\dim V+1} = \cdots$.

Proof.

由**1.2**,我们只需证明$\text{null } T^{\dim V} = \text{null } T^{\dim V+1}$.假定此式不成立,那么由**1.1**和**1.2**可知

$$\{0\} = \text{null } T^0 \subset \text{null } T^1 \subset \cdots \subset \text{null } T^{\dim V} \subset \text{null } T^{\dim V+1}$$

由于包含关系严格成立,那么每一项都至少比前一项的维度高1,从而$\dim \operatorname{null} T^{\dim V+1} \geqslant \dim V+1$.
由于V子空间的维度不可能大于$\dim V$,于是假设不成立,即$\operatorname{null} T^{\dim V}=\operatorname{null} T^{\dim V+1}$.

我们知道$V=\operatorname{null} T \oplus \operatorname{range} T$并不总是适用,但是我们有以下的替代结论.

1.4 V的直和分解

设$T \in \mathcal{L}(V)$,那么$V=\operatorname{null} T^{\dim V} \oplus \operatorname{range} T^{\dim V}$.

Proof.

令$n=\dim V$.我们先证明$\operatorname{null} T^{n} \cap \operatorname{range} T^{n}=\{\mathbf{0}\}$.
设$v \in \operatorname{null} T^{n} \cap \operatorname{range} T^{n}$,那么$T^{n} v=\mathbf{0}$.同时,存在$u \in V$使得$v=T^{n} u$.
于是$T^{n} v=T^{n}\left(T^{n}\right) u=T^{2 n} u=\mathbf{0}$,于是根据**1.3**可知$T^{n} u=\mathbf{0}$,即$v=\mathbf{0}$.
这就证明了$\operatorname{null} T^{n}+\operatorname{range} T^{n}$是直和.根据线性映射基本定理又有

$$\dim V=\dim \operatorname{null} T^{n}+\dim \operatorname{range} T^{n}$$

于是$V=\operatorname{null} T^{n} \oplus \operatorname{range} T^{n}$.

2.广义特征向量

仅凭特征向量不足以很好的描述算子.我们知道,对于实向量空间上的自伴算子和复向量空间上的正规算子有

$$V=E\left(\lambda_{1}, T\right) \oplus \cdots \oplus E\left(\lambda_{m}, T\right)$$

即谱定理所指出的那样.然而对于一般的算子则不然.为此,我们引入广义特征向量.

2.1 定义:广义特征向量

设$T \in \mathcal{L}(V)$,λ是T的特征值.称向量$v \in V$是T对应于λ的**广义特征向量**,如果$v \neq \mathbf{0}$且对某个$k \in \mathbb{N}^{*}$有$(T-\lambda I)^{k} v=\mathbf{0}$.

下面的定理说明,复向量空间上的算子的广义特征向量总能形成该空间的基.

2.2 广义特征向量构成基

设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T=\mathcal{L}(V)$,那么存在由T的广义特征向量构成的V的基.

Proof.

令$n=\dim V$,我们对n使用归纳法.
当$n=1$时,命题显然成立,因为V上的每个向量都是T的特征向量.

当$n>1$时,假定命题对所有小于n的正整数都成立.设λ为T的特征值,由**1.4**可得

$$V=\text{null }(T-\lambda I)^n\oplus\text{range }(T-\lambda I)^n$$

如果null $(T-\lambda I)^n=V$,那么V中的每个非零向量都是T的广义特征向量,自然V的任意一组基也包含在内.如果null $(T-\lambda I)^n\neq V$,那么range $(T-\lambda I)^n\neq\{\mathbf{0}\}$.同时,由于$\lambda$是$T$的特征向量,那么range $(T-\lambda I)^n\neq V$.于是我们有$0<\dim\text{range }(T-\lambda I)^n<n$.将$T$限制在range $(T-\lambda I)^n$上并应用归纳假设,可知该空间上存在T的广义特征向量构成的基.将这组基与null $(T-\lambda I)^n$的基合并,就得到了V的一组基.

2.3 广义特征向量对应唯一特征值

设$T\in\mathcal{L}(V)$,那么T的每个广义特征向量都仅对应于T的一个特征值.

Proof.

设$v\in V$是T对应于两个不同特征值α,β的广义特征向量.令m是满足$(T-\alpha I)^n v=\mathbf{0}$的最小正整数,令$n=\dim V$,则有

$$\mathbf{0}=(T-\beta I)^n v=((T-\alpha I)+(\alpha-\beta)I)^n\,v=\sum_{k=0}^{n}b_k\,(\alpha-\beta)^{n-k}\,(T-\alpha I)^k v$$

其中$b_0=1$,其余为二项展开的系数,在此可以不讨论.在上式两边作用$(T-\alpha I)^{m-1}$后有

$$\mathbf{0}=(\alpha-\beta)(T-\alpha I)^{m-1}v$$

于是$\alpha-\beta=0$,命题得证.

同样地,我们可以证明对应于不同特征值的广义特征向量是线性无关的.

2.4 线性无关的广义特征向量

设$T\in\mathcal{L}(V)$,那么由对应于T的互异特征值的广义特征向量构成的每个向量组都是线性无关组.

Proof.

设欲证结论不成立,那么存在最小的m使得对应于T的互异特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$的广义特征向量$v_1,\cdots,v_m$构成的线性相关组.于是,存在不全为0的$a_1,\cdots,a_m\in\mathbb{F}$使得

$$a_1v_1+\cdots+a_mv_m=\mathbf{0}$$

令$n=\dim V$,将$(T-\lambda_m I)^n$作用于上式两侧可得

$$a_1(T-\lambda_m I)^n v_1+\cdots+a_{m-1}(T-\lambda_m I)^n v_{m-1}=\mathbf{0}$$

设$k \in \{1, \cdots, m-1\}$,那么由**2.3**可知$(T-\lambda_m I)^n v_k \neq \mathbf{0}$.又有

$$(T-\lambda_k I)^n \left[(T-\lambda_m I)^n v_k\right] = (T-\lambda_m I)^n \left[(T-\lambda_k I)^n v_k\right] = \mathbf{0}$$

从而综合上述两式可得$(T-\lambda_m I)^n v_k$是T对应于λ_k的广义特征向量.因此

$$(T-\lambda_m I)^n v_1, \cdots, (T-\lambda_m I)^n v_{m-1}$$

是由对应于$m-1$个互异特征值构成的广义特征向量构成的线性相关组,从而这与m最小矛盾,因而假设不成立,即这样的向量组都是线性无关组.

3.幂零算子

3.1 定义:幂零

称一个算子是**幂零**的,如果它的某个幂等于零.

下面一个稍强一些的结论告诉我们不用考虑幂次高于空间维数的幂零算子的幂.

3.2 n维空间上幂零算子的n次幂为零

如果$T \in \mathcal{L}(V)$是幂零算子,那么$T^{\dim V} = \mathbf{0}$.

Proof.

由于T是幂零的,于是存在$k \in \mathbb{N}^*$使得$T^k = \mathbf{0}$.由**1.1**和**1.3**可得$T^{\dim V} = \mathbf{0}$.

3.3 幂零算子的特征值

设$T \in \mathcal{L}(V)$.

(1) 如果T是幂零的,那么0是T的唯一特征值.

(2) 若$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,且0是T的唯一特征值,那么T是幂零的.

Proof.

(1) 由于T是幂零的,那么存在$k \in \mathbb{N}^*$使得$T^k = \mathbf{0}$.设λ为T的特征值,对应特征向量为v,则有

$$T^k v = \lambda^k v = \mathbf{0}$$

于是$\lambda = 0$,命题得证.

(2) 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且0是T的唯一特征值,根据**5.27(b)**可知T的最小多项式为z^m(其中$m \in \mathbb{N}^*$),于是$T^m = \mathbf{0}$,即T是幂零的.

3.4 幂零算子的最小多项式和上三角矩阵

设$T \in \mathcal{L}(V)$,那么下列命题等价.

(a) T是幂零的.

(b) T的最小多项式为z^m,其中$m \in \mathbb{N}^*$.

(c) 存在V的一个基使得T关于该基的矩阵是对角线全为0的上三角矩阵.

上述定理是不难证明的,在此略去过程.