自伴算子和正规算子

1.伴随

1.1 定义:伴随

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,T的**伴随**是使得对任意$v \in V$和任意$w \in W$都有$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$的映射$T^* : W \to V$.

我们简单看一下这个定义有意义的原因.设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,取定$w \in W$,考虑V上的线性泛函$v \mapsto \langle Tv, w\rangle$.
根据Riesz表示定理,V中存在唯一的向量使得该线性泛函由与其的内积给出.我们记这个向量为$T^* w$.
换言之,$T^* w$是V中唯一使得任意$v \in V$都满足

$$\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^* w\rangle$$

的向量.上式中左侧的内积在W上,右侧的内积在V上,这里统一写作$\langle \cdot, \cdot\rangle$.
伴随作为一个函数似乎也具有线性映射的基本性质.下面我们证明之.

1.2 线性映射的伴随也是线性映射

如果$T \in \mathcal{L}(V, W)$,那么$T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

Proof.

设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.对于$v \in V$和$w_1, w_2 \in W$,有

$$\langle Tv, w_1 + w_2\rangle = \langle Tv, w_1\rangle + \langle Tv, w_2\rangle = \langle v, T^* w_1\rangle + \langle v, T^* w_2\rangle$$

$$\langle Tv, w_1 + w_2\rangle = \langle v, T^* (w_1 + w_2)\rangle$$

上面两式表明$T^* w_1 + T^* w_2 = T^* (w_1 + w_2)$.
对于$v \in V, w \in W$和$\lambda \in \mathbb{F}$有

$$\langle Tv, \lambda w\rangle = \overline{\lambda} \langle Tv, w\rangle = \overline{\lambda} \langle v, T^* w\rangle = \langle v, \lambda T^* w\rangle$$

$$\langle Tv, \lambda w\rangle = \langle v, T^* (\lambda w)\rangle$$

上面两式表明$\lambda T^* w = T^* (\lambda w)$.
从而T^*满足可加性和齐次性,于是T^*是线性映射.

除此之外,伴随还具有如下性质.

1.3 伴随的性质

设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,那么有

(1) $(S+T)^* = S^* + T^*$对所有$S,T \in \mathcal{L}(V,W)$成立.

(2) $(\lambda T)^* = \overline{\lambda} T^*$对所有$\lambda \in \mathbb{F}$成立.

(3) $(T^*)^* = T$.

(4) $(ST)^* = T^* S^*$对所有$S \in \mathcal{L}(W,U)$成立.

(5) $I^* = I$,其中I是V上的恒等算子.

(6) 如果T可逆,那么T^*可逆且$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

上面性质的证明从略.不难发现,$\mathbb{F}=\mathbb{R}$时$T \mapsto T^*$是$\mathcal{L}(V,W)$到$\mathcal{L}(W,V)$的线性映射,而当$\mathbb{F}=\mathbb{C}$时则不成立.这是由于上面性质中出现的复共轭.

下面的结论给出了伴随的零空间和值域.

1.4 伴随的零空间和值域

设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,那么

$$\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp, \text{range } T^* = (\text{null } T)^\perp$$

$$\text{null } T = (\text{range } T^*)^\perp, \text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp$$

Proof.

对于$w \in W$,我们有

$$w \in \text{null } T^* \Leftrightarrow T^* w = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall v \in V, \langle v, T^* w \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V, \langle Tv, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w \in (\text{range } T)^\perp$$

于是$\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp$.两边取正交补即可知$\text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp$.

用T^*代替T,即可得出剩余两个等式.

那么,线性伴随的矩阵具有什么样的特点呢?为此,我们先做共轭转置的定义.

1.5 定义:共轭转置

$m \times n$矩阵A的**共轭转置**是将其转置后的矩阵中每个元素取复共轭得到的$n \times m$矩阵A^*.

换言之,对于任意$j,k \in \{1,\cdots,n\}$,有$(A^*)_{j,k} = \overline{A_{k,j}}$.

接下来的结论表明线性伴随和共轭转置之间的联系.

1.6 线性伴随与共轭转置

令$T \in \mathcal{L}(V,W)$.设$e_1,\cdots,e_n$是V的规范正交基,$f_1,\cdots,f_m$是W的规范正交基.

那么$\mathcal{M}\left(T^*,\left(f_1,\cdots,f_m\right),\left(e_1,\cdots,e_n\right)\right)$是$\mathcal{M}\left(T,\left(e_1,\cdots,e_n\right),\left(f_1,\cdots,f_m\right)\right)$的共轭转置.

换句话说$\mathcal{M}\left(T^*\right)=(\mathcal{M}(T))^*$.

Proof.

我们把命题中的两个较长的表达式分别简写为$\mathcal{M}\left(T^*\right)$和$\mathcal{M}(T)$.

因为$f_1,\cdots,f_m$是W的规范正交基,于是对于任意$k \in \{1,\cdots,n\}$有

$$Te_k=\langle Te_k,f_1\rangle f_1+\cdots+\langle Te_k,f_m\rangle f_m$$

考虑线性映射的矩阵的含义,可知$\mathcal{M}(T)$的第j行第k列的元素为$\langle Te_j,f_k\rangle$.

同理可知$\mathcal{M}\left(T^*\right)$的第$j$行第$k$列的元素为$\langle T^*f_k,e_j\rangle$.而

$$\langle T^*f_j,e_k\rangle=\langle f_k,Te_j\rangle=\overline{\langle Te_j,f_k\rangle}$$

这就等于$\mathcal{M}(T)$的第k行第j列的元素的复共轭.于是命题得证.

我们看到伴随映射和对偶映射的相似性.在处理内积空间时,正交补和伴随更容易处理,于是就不需要处理零化子和伴随映射了.

2.自伴算子

现在,我们把注意力重新放在内积空间上的算子.

2.1 定义:自伴算子

算子$T \in \mathcal{L}(V)$被称为**自伴的**,如果$T=T^*$.

自伴算子的矩阵都是实矩阵,并且关于对角线对称.我们还有如下命题.

2.2 $T=\mathbf{0}$的充要条件

设V是有限维复向量空间,$T \in \mathcal{L}(V)$,那么$\langle Tv,v\rangle=0$对所有$v \in V$成立,当且仅当$T=\mathbf{0}$.

Proof.

如果$u,w \in V$,那么有

$$\begin{aligned}\langle Tu,w\rangle=&\frac{\langle T(u+w),u+w\rangle-\langle T(u-w),u-w\rangle}{4}\\&-\frac{\langle T(u+\mathrm{i}v),u+\mathrm{i}v\rangle-\langle T(u-\mathrm{i}w),u-\mathrm{i}w\rangle}{4}\mathrm{i}\end{aligned}$$

现在假设$\langle Tv,v\rangle=0$对任意$v \in V$成立,于是上式表明$\langle Tu,w\rangle=0$对任意$u,w \in V$成立.取$w=Tu$可知$Tu=$

$\mathbf{0}$对所有$u \in U$成立,于是$T = \mathbf{0}$.
当$T = \mathbf{0}$时,自然有$\langle Tv, v\rangle = \langle \mathbf{0}, v\rangle = 0$.
综上可知命题得证.

下面的命题只在复向量空间上成立.它给出了自伴算子表现得像实数的一个例子.

2.3 复向量空间上自伴算子的充要条件

设V是有限维复向量空间,对于$T \in \mathcal{L}(V)$,T是自伴的,当且仅当$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$对任意$v \in V$成立.

Proof.

如果$v \in V$,那么就有$\langle T^* v, v\rangle = \overline{\langle Tv, v\rangle}$.如此,就有

$$\begin{aligned} T\text{是自伴的} &\Leftrightarrow T - T^* = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \langle (T - T^*)\, v, v\rangle = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Tv, v\rangle - \overline{\langle Tv, v\rangle} = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in V \end{aligned}$$

在实内积空间V上,一个非零算子也许可以满足对任意$v \in V$都有$\langle Tv, v\rangle = 0$.然而下面的定理表明,这不会发生在自伴算子上.

2.4 非零自伴算子不会使$\langle Tv, v\rangle = 0$

设T是V上的自伴算子,那么$\langle Tv, v\rangle = 0$对任意$v \in V$成立,当且仅当$T = \mathbf{0}$.

Proof.

在复内积空间上,我们不需要T自伴这一条件也可证明命题.
在实内积空间上,对于$u, w \in V$,我们有

$$\langle Tu, w\rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w\rangle - \langle T(u-w), u-w\rangle}{4}$$

证明上面的等式需要用到$\langle Tw, u\rangle = \langle w, Tu\rangle = \langle Tu, w\rangle$.前一个等号是由于$T$是自伴算子,后一个等号是由于在实内积空间上操作.
用与**2.2**类似的方法可知$T = \mathbf{0}$.