Linear Algebra Done Right 7B

1. 试证明:复内积空间上的正规算子是自伴的,当且仅当它的所有特征值是实的.

Proof.

设$\mathbb{F}=\mathbb{C},T\in\mathcal{L}(V)$.如果$T$是自伴的,那么它的特征值就应当是实数.

如果T的所有特征值都是实数,那么根据复谱定理可得T关于V的某个规范正交基有对角矩阵$\mathcal{M}(T)$,这矩阵的对角线上元素均为实数,从而可知$\mathcal{M}(T)$与其共轭转置相等,因而T自伴.

2. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$,$T\in\mathcal{L}(V)$是正规算子且仅有一个特征值.试证明:T是恒等算子的标量倍.

Proof.

设T的特征值为λ.根据复谱定理,存在V的某个规范正交基使得T有对角矩阵$\mathcal{M}(T)$.

于是这矩阵的对角线上元素均为λ,因而$\mathcal{M}(T)=\lambda I$,即$T=\lambda I$.

3. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$是正规算子.试证明:T的特征值构成的集合包含于$\{0,1\}$,当且仅当存在V的子空间U使得$T=P_U$.

Proof.

$\Rightarrow$:设T对应于0和1的特征向量分别为$e_1,\cdots,e_m,f_1,\cdots,f_n$.根据复谱定理,这向量组构成$V$的规范正交基.

令$U=\operatorname{span}(f_1,\cdots,f_n)$.于是对于任意$v:=a_1e_1+\cdots+a_me_m+b_1f_1+\cdots+b_nf_n$有

$$\begin{aligned}Tv&=T(a_1e_1+\cdots+a_me_m+b_1f_1+\cdots+b_nf_n)\\&=a_1Te_1+\cdots+a_mTe_m+b_1Tf_1+\cdots+b_nTf_n\\&=b_1f_1+\cdots+b_nf_n\\&=P_Uv\end{aligned}$$

于是$T=P_U$.

$\Leftarrow$:设U的一组规范正交基为$f_1,\cdots,f_n$,$U^\perp$的一组规范正交基为$e_1,\cdots,e_m$.

于是$P_Uf_k=f_k,P_Ue_j=\mathbf{0}$对任意$k\in\{1,\cdots,n\},j\in\{1,\cdots,m\}$都成立.

于是V有P_U的特征向量$f_1,\cdots,f_n,e_1,\cdots,e_m$构成的规范正交基,且分别对应于特征值$0,1$.

根据复谱定理,P_U是珍贵算子,且其特征值构成的集合包含于$\{0,1\}$.

4. 试证明:复内积空间上的正规算子是斜的,当且仅当它的所有特征值都是纯虚数.

Proof.

设$\mathbb{F}=\mathbb{C}, T\in\mathcal{L}(V)$.由于$T$是正规算子,于是$T$关于$V$的一组规范正交基有对角矩阵$\mathcal{M}(T)$,不妨记为$A$.于是

$$\begin{aligned}T\text{是斜的} &\Leftrightarrow T^*=-T\\ &\Leftrightarrow A^*=-A\\ &\Leftrightarrow A_{k,k}+\overline{A_{k,k}}=0,\forall k\in\{1,\cdots,\dim V\}\\ &\Leftrightarrow A_{k,k}\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R},\forall k\in\{1,\cdots,\dim V\}\\ &\Leftrightarrow T\text{的所有特征值都是纯虚数}\end{aligned}$$

5. 证明或给出一反例:若$T\in\mathcal{L}(C^3)$可对角化,那么T是正规的.

Solution.

考虑$\mathbb{C}^3$的基$v_1=(1,0,0), v_2=(0,1,0), v_3=(1,0,1)$和$T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$使得

$$Tv_1=v_1, Tv_2=v_2, Tv_3=2v_3$$

于是T关于v_1,v_2,v_3有对角矩阵.然而$\langle v_1,v_3\rangle=1$,于是v_1,v_3不正交.
这和正规算子对应于不同特征值的特征向量正交相矛盾,于是T不是正规算子.

6. 设V是复内积空间,$T\in\mathcal{L}(V)$是使得$T^9=T^8$的正规算子.试证明:T是自伴的且$T^2=T$.

Proof.

由复谱定理,存在T的特征向量$e_1,\cdots,e_n$构成的V的规范正交基.
对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$,设$Te_k=\lambda_k e_k$,于是我们有

$$T^9=T^8\Leftrightarrow T^9e_k=T^8e_k\Leftrightarrow \lambda_k^9e_k=\lambda_k^8e_k\Leftrightarrow\lambda_k^8(\lambda_k-1)=0\Leftrightarrow\lambda_k\in\{0,1\}$$

根据**7B.3**可知存在V的子空间U使得$T=P_U$.此时$T^2=P_U^2=P_U=T$.
另外,根据**7B.1**可知T是自伴算子.

7. 给出一例复内积空间V上的算子使得$T^9=T^8$而$T^2\neq T$.

Solution.

考虑$V=\mathbb{C}^2$和$T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$使得$T(x,y)=(y,0)$.于是$T^9=T^8=T^2=\mathbf{0}$而$T\neq\mathbf{0}$.

8. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T是正规的,当且仅当T的每个特征向量都是T^*的特征向量.

Proof.

$\Rightarrow$:假设T是正规的,我们已经在正规算子的性质中证明了$Tv=\lambda v$当且仅当$T^*v=\overline{\lambda}v$.

$\Leftarrow$:根据Schur定理,存在一组V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得T关于其有上三角矩阵A.

于是$Te_1=A_{1,1}e_1$.因此,e_1也是T^*的特征向量,不妨设$T^*e_1=\mu_1e_1$.另一方面,由于$\mathcal{M}(T^*)=A^*$,于是

$$T^*e_1=\overline{A_{1,1}}e_1+\cdots+\overline{A_{n,1}}e_n$$

于是$A_{2,1}=\cdots=A_{n,1}=0$.因此$Te_2=A_{2,2}e_2$.同理有

$$T^*e_2=\overline{A_{2,2}}e_2+\cdots+\overline{A_{n,2}}e_n$$

于是$A_{3,2}=\cdots=A_{n,2}=0$.以此类推,可知A是对角矩阵.

于是根据复谱定理可知T是正规算子.

9. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T是正规的,当且仅当存在$p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$使得$T^*=p(T)$.

Proof.

$\Leftarrow$:假设存在$p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$使得$T^*=p(T)$,那么令$q(z):=zp(z)\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$.我们有

$$T^*T=p(T)T=q(T)=Tp(T)=TT^*$$

于是T是正规算子.

$\Rightarrow$:假设T是正规的.根据复谱定理,存在由T的特征向量$e_1,\cdots,e_n$使得其为V的规范正交基.

不妨设它们对应的特征向量分别为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

4.7表明存在$p\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$使得$p(\lambda_k)=\overline{\lambda_k}$对任意$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.于是有

$$p(T)e_k=p(\lambda_k)e_k=\overline{\lambda_k}e_k=T^*e_k$$

于是$p(T)=T^*$,命题得证.

10. 设V是复内积空间,试证明:V上每个正规算子都有平方根.

Proof.

设$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的,于是根据复谱定理可知T关于V的一规范正交基$e_1, \cdots, e_n$有对角矩阵$\mathcal{M}(T)$.

设$\mathcal{M}(T)$的对角线元素依次为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.根据代数基本定理,$z^2 - \lambda_k$一定有复根,不妨设$\mu_k^2 = \lambda_k$.

设$S \in \mathcal{L}(V)$关于$e_1, \cdots, e_n$的矩阵为对角矩阵,且对角线上元素以此为$\mu_1, \cdots, \mu_n$.

不难得到$(\mathcal{M}(S))^2 = \mathcal{M}(T)$,于是$S^2 = T$,即$S$是$T$的平方根.

11. 试证明:V上的每个自伴算子都有立方根.

Proof.

证明方法与**7B.10**基本一致,在此略去.

12. 设V是复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$是正规算子,试证明:如果$S \in \mathcal{L}(V)$与T可交换,那么S和T^*可交换.

Proof.

设$S, T \in \mathcal{L}(V)$且两者可交换.由**7B.9**可知存在$p \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$使得$T^* = p(T)$.于是

$$ST^* = Sp(T) = S\sum_{k=0}^{\deg p} a_k T^k = \sum_{k=0}^{\deg p} a_k (T^k S) = p(T)S = T^*S$$

于是S和T^*可交换.

13. 用Schur定理证明:如果$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的,那么T关于V的某个规范正交基有对角矩阵.

Proof.

在**6B.20**中令$\mathcal{E} = \{T, T^*\}$可知存在V的一组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得T, T^*关于其有上三角矩阵.

又因为$\mathcal{M}(T^*) = (\mathcal{M}(T))^*$,于是$\mathcal{M}(T)$既是上三角矩阵又是下三角矩阵,因而$\mathcal{M}(T)$是对角矩阵.

14. 设$\mathbb{F} = \mathbb{R}$且$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:T是自伴的,当且仅当T的对应于不同特征值的特征向量两两正交且$V = \bigoplus_{k=1}^{m} E(\lambda_k, T)$,其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$为$T$的互异特征值.

Proof.

选定$E(\lambda_k,T)$的规范正交基$e_{k,1},\cdots,e_{k,n_k}$,其中$n_k=\dim E(\lambda_k,T)$.

对于任意$j,k\in\{1,\cdots,m\}$且$j\neq k$,有$Te_{j,\cdot}=\lambda_j e_{j,\cdot}$,$Te_{k,\cdot}=\lambda_k e_{k,\cdot}$.由题意可知$\lambda_j\neq\lambda_k$,于是$\langle e_{j,\cdot},e_{k,\cdot}\rangle=0$.

于是不难得知所有的$e_{k,\cdot}$构成的向量组是V的规范正交基.即上述条件等价于V有T的特征向量构成的规范正交基.

根据实谱定理,这与T是自伴的等价,于是命题得证.

15. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T是正规的,当且仅当T的对应于不同特征值的特征向量两两正交且$V=\bigoplus_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T)$,其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$为$T$的互异特征值.

Proof.

与**7B.14**同理,这条件等价于V有T的特征向量构成的规范正交基.

根据复谱定理,这与T是正规的等价,于是命题得证.

16. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{L}(V)$.试证明:存在$V$的规范正交基使得$\mathcal{E}$中每个元素关于其有对角矩阵,当且仅当对于所有$S,T\in\mathcal{E}$都有$S,T$是可交换的正规算子.

Proof.

$\Rightarrow$:设$e_1,\cdots,e_n$是V的规范正交基使得对任意$T\in\mathcal{E}$,T关于其都有对角矩阵.

根据复谱定理,这样的T是正规算子.另外,对任意$S,T\in\mathcal{E}$有

$$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}(TS)$$

于是$ST=TS$,即$\mathcal{E}$中的元素两两可交换.

$\Leftarrow$:根据**6B.20**可知存在V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得$\mathcal{E}$中每个元素关于其有上三角矩阵.

又因为$\mathcal{E}$中每个元素都是正规的,于是根据复谱定理可知这上三角矩阵实际上都是对角矩阵.

综上可知命题成立.

17. 设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$且$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{L}(V)$.试证明:存在$V$的规范正交基使得$\mathcal{E}$中每个元素关于其有对角矩阵,当且仅当对于所有$S,T\in\mathcal{E}$都有$S,T$是可交换的自伴算子.

Proof.

$\Rightarrow$:设$e_1,\cdots,e_n$是V的规范正交基使得对任意$T\in\mathcal{E}$,T关于其都有对角矩阵.

根据实谱定理,这样的T是自伴算子.另外,对任意$S,T\in\mathcal{E}$有

$$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}(TS)$$

于是$ST=TS$,即$\mathcal{E}$中的元素两两可交换.

$\Leftarrow$:根据**5E.2**可知存在V的基$v_1,\cdots,v_n$使得$\mathcal{E}$中每个元素关于其有对焦矩阵.

对$e_1,\cdots,e_n$应用Gram-Schmidt过程得到V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.于是对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_k)=\operatorname{span}(e_1,\cdots,e_k)$$

于是对于任意$T\in\mathcal{E}$,T关于$e_1,\cdots,e_n$有上三角矩阵.又因为$\mathcal{E}$中每个元素都是自伴的,于是根据复谱定理可知这上三角矩阵实际上都是对角矩阵.

综上可知命题成立.

18. 给出一例实内积空间V上的算子$T\in\mathcal{L}(V)$以及实数$b,c(b^2<4c)$使得$T^2+bT+cI$不是可逆的.

Solution.

令$T(x,y)=(-y,x)$且$b=0,c=1$.于是$T^2+bT+cI=T^2+I=\mathbf{0}$不是可逆的.

19. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的,U是V在T下不变的子空间.试证明下列命题.

(1) $U^\perp$在T下不变.

(2) $T|_U\in\mathcal{L}(U)$自伴.

(3) $T|_{U^\perp}\in\mathcal{L}(U^\perp)$自伴.

Proof.

(1) 对于任意$u\in U$和$w\in U^\perp$有$Tu\in U$,于是

$$\langle Tu,w\rangle=\langle u,T^*w\rangle=\langle u,Tw\rangle=0$$

于是$Tw\in U^\perp$对所有$w\in U^\perp$成立,因而$U^\perp$在T下不变.

(2) 这是显然的.

(3) 这也是显然的.

20. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正规的,U是V在T下不变的子空间.试证明下列命题.

(1) $U^{\perp}$在T下不变.

(2) U在T^*下不变.

(3) $(T|_U)^* = (T^*)|_U$.

(4) $T|_U$和$T|_{U^{\perp}}$是正规算子.

Proof.

(1) 考虑U的一组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$和$U^{\perp}$的一组规范正交基$f_1, \cdots, f_m$.由于$V = U \oplus U^{\perp}$,于是

$$e_1, \cdots, e_n, f_1, \cdots, f_m$$

是V的规范正交基.由于U在T下不变,于是T关于这基的矩阵A应有如下形式.

$$\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} & A_{n+1,1} & \cdots & A_{n+m,1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1,n} & \cdots & A_{n,n} & A_{n+1,n} & \cdots & A_{n+m,n} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n+1,n+1} & \cdots & A_{n+m,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{n+1,n+m} & \cdots & A_{n+m,n+m} \end{pmatrix}$$

由于T是正规算子,于是$||Tv|| = ||T^*v||$对所有$v \in V$都成立.对于任意$j \in \{1, \cdots, m\}$有

$$||Tf_j||^2 = \sum_{k=1}^{n+m} |A_{n+j,k}|^2, ||T^*f_j||^2 = \sum_{k=1}^{n+m} |A_{k,n+j}|^2 = \sum_{k=n+1}^{n+m} |A_{k,n+j}|^2$$

于是$A_{n+j,1} = \cdots = A_{n+j,n} = 0$.这表明$Tf_j \in U^{\perp}$,于是$U^{\perp}$在$T$下不变.

(2) 观察上面的矩阵即可得出结论.

(3) 观察上面的矩阵即可得出结论.

(4) 观察上面的矩阵即可得出结论.

21. 设T是有限维内积空间上的自伴算子,且2和3是T仅有的特征值.试证明:$T^2 - 5T + 6I = \mathbf{0}$.

Proof.

由**7B.14**可知$V = E(2, T) \oplus E(3, T)$.

于是对于任意$v \in V$,令$x \in E(2,T), y \in E(3,T)$使得$v = x + y$.我们有

$$(T^2 - 5T + 6I)v = (T^2 - 5T + 6I)(x + y) = (T - 3I)(T - 2I)x + (T - 2I)(T - 3I)y = \mathbf{0}$$

于是$T^2 - 5T + 6I = \mathbf{0}$.

22. 给出一例$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$使得2和3是$T$仅有的特征值,而$T^2 - 5T + 6I \neq 0$.

Solution.

令T关于$\mathbb{C}^3$的标准基e_1, e_2, e_3的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

这是一个上三角矩阵,于是T的特征值为$2, 3$.另一方面又有

$$(T^2 - 5T + 6I)e_2 = -e_1 \neq \mathbf{0}$$

于是$T^2 - 5T + 6I \neq \mathbf{0}$.

23. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的,$\lambda \in \mathbb{F}$且$\varepsilon > 0$.设存在$v \in V$使得$||v|| = 1$且$||Tv - \lambda v|| < \varepsilon$.试证明:存在$T$的特征值$\lambda'$使得$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

Proof.

谱定理表明,存在T的特征向量构成的V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$.设$Te_k = \lambda_k e_k$对任意$k \in \{1, \cdots, n\}$成立.
于是$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$即$T$的特征值.我们有

$$||Tv - \lambda v||^2 = |\lambda_1 - \lambda|^2 \left|\langle v, e_1\rangle\right|^2 + \cdots + |\lambda_n - \lambda|^2 \left|\langle v, e_n\rangle\right|^2$$

令λ'是$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$中使得$|\lambda - \lambda'|$最小的,于是

$$\begin{aligned} |\lambda - \lambda'|^2 &= |\lambda - \lambda'|^2 \left|\langle v, e_1\rangle\right|^2 + \cdots + |\lambda - \lambda'|^2 \left|\langle v, e_n\rangle\right|^2 \\ &\leqslant |\lambda_1 - \lambda|^2 \left|\langle v, e_1\rangle\right|^2 + \cdots + |\lambda_n - \lambda|^2 \left|\langle v, e_n\rangle\right|^2 \\ &= ||Tv - \lambda v||^2 \\ &< \varepsilon^2 \end{aligned}$$

于是$|\lambda - \lambda'| < \varepsilon$.

24. 设V是有限维向量空间,$T \in \mathcal{L}(V)$.回答下列问题.

(1) 设$\mathbb{F} = \mathbb{R}$.试证明:T是可对角化的,当且仅当存在V的一组基使得V关于这基的矩阵等于其转置.

(2) 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$.试证明:T可对角化,当且仅当存在V的一组基使得V关于这基的矩阵与其共轭转置可交换.

Proof.

(1) $\Rightarrow$:设T关于V的基$v_1, \cdots, v_n$有矩阵A,那么自然有$A = A^{\mathrm{t}}$.

$\Leftarrow$:假设存在这样的基$e_1, \cdots, e_n$使得T关于$e_1, \cdots, e_n$的矩阵等于其转置.

对于任意$v := a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n, u := b_1 e_1 + \cdots + b_n e_n \in V$,定义内积

$$\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$$

容易证明这内积是符合要求的,$e_1, \cdots, e_n$即为对应于这内积的规范正交基.

于是可知T关于这内积自伴.根据实谱定理,存在由T的特征向量构成的V的规范正交基,因而T可对角化.

(2) $\Rightarrow$:设T关于V的基$v_1, \cdots, v_n$有矩阵A,那么自然有$AA^* = A^*A$.

$\Leftarrow$:与**(1)**同理可知T关于V的这组基的矩阵与其共轭转置可交换,即T是正规的.

根据复谱定理,存在由T的特征向量构成的V的规范正交基,因而T可对角化.

25. 设$T \in \mathcal{L}(V)$且V有一规范正交基$e_1, \cdots, e_n$由T对应于特征值$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$的特征向量构成.试证明:对于任意$k \in \{1, \cdots, n\}$,伪逆$T^\dagger$满足

$$T^\dagger e_k = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_k} e_k, \lambda_k \neq 0 \\ \mathbf{0}, \lambda_k = 0 \end{cases}$$

Proof.

考虑$k \in \{1, \cdots, n\}$.若$\lambda_k = 0$,那么$Te_k = \mathbf{0}$,即$e_k \in \operatorname{null} T = (\operatorname{range} T)^\perp$.自然,我们有

$$T^\dagger e_k = \left(T|_{(\operatorname{null} T)^\perp}\right)^{-1} P_{\operatorname{range} T} e_k = \left(T|_{(\operatorname{null} T)^\perp}\right)^{-1} \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

若$\lambda_k \neq 0$,那么我们有$\dfrac{1}{\lambda_k} Te_k = e_k$,于是$e_k \in \operatorname{range} T$.于是$P_{\operatorname{range} T} e_k = e_k$.又因为

$$T|_{(\operatorname{null} T)^\perp} e_k = T|_{\operatorname{range} T} e_k = \lambda_k e_k$$

于是

$$T^\dagger e_k = \left(T|_{(\operatorname{null} T)^\perp}\right)^{-1} P_{\operatorname{range} T} e_k = \left(T|_{(\operatorname{null} T)^\perp}\right)^{-1} e_k = \frac{1}{\lambda_k} e_k$$

于是命题得证.