

## Linear Algebra Done Right 6A

1. 证明: 如果  $v_1, \dots, v_m \in V$ , 那么

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle \geq 0$$

**Proof.**

我们有

$$\begin{aligned} \|v_1 + \dots + v_m\|^2 &= \sum_{j=1}^m \|v_j\|^2 + 2 \sum_{j,k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle = \|v_1 + \dots + v_m\|^2 \geq 0$$

2. 设  $S \in \mathcal{L}(V)$ , 定义  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  为

$$\langle u, v \rangle_S = \langle Su, Sv \rangle$$

对所有  $u, v \in V$  成立. 试证明:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$  是  $V$  上的内积, 当且仅当  $S$  是单射.

**Proof.**

我们有

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_S \text{ 是内积} \Leftrightarrow \langle v, v \rangle_S = 0 \text{ 当且仅当 } v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle Sv, Sv \rangle = 0 \text{ 当且仅当 } Sv = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{null } S = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow S \text{ 是单射}$$

3. 证明下列命题.

(1) 证明: 将  $\mathbb{R}^2$  中的有序对  $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$  映射到  $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$  的函数不是  $\mathbb{R}^2$  上的内积.

(2) 证明: 将  $\mathbb{R}^3$  中的有序对  $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$  映射到  $x_1 y_1 + x_3 y_3$  的函数不是  $\mathbb{R}^3$  上的内积.

**Proof.**

(1) 令  $u = (1, 0), v = (-1, 0), w = (1, 0)$ , 于是

$$f(u, w) = 1 \quad f(v, w) = 1 \quad f(u + v, w) = 0$$

于是  $f(u+v, w) \neq f(u, w) + f(v, w)$ , 因而这映射  $f$  不满足第一位上的可加性, 不是  $\mathbb{R}^2$  上的内积.  
 (2) 令  $v = (0, 1, 0)$ , 则  $g(v, v) = 0$ , 而  $v \neq \mathbf{0}$ , 因而这映射  $g$  不满足定性, 不是  $\mathbb{R}^3$  上的内积.

4. 设  $T \in \mathcal{L}(V)$  使得  $\|Tv\| \leq \|v\|$  对任意  $v \in V$  成立. 试证明:  $T - \sqrt{2}I$  是单射.

**Proof.**

若  $T - \sqrt{2}I$  不是单射, 则存在  $v \in V$  且  $v \neq \mathbf{0}$  使得  $Tv = \sqrt{2}v$ . 于是

$$\|Tv\| = \|\sqrt{2}v\| = \sqrt{2}\|v\| > \|v\|$$

这与题设矛盾, 从而  $T - \sqrt{2}I$  是单射.

5. 设  $V$  是实内积空间. 证明下列命题.

- (1) 证明:  $\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$  对任意  $u, v \in V$  成立.
- (2) 证明: 若  $u, v \in V$  满足  $\|u\| = \|v\|$ , 那么  $u+v$  正交于  $u-v$ .
- (3) 证明: 菱形的对角线相互垂直.

**Proof.**

(1) 我们有

$$\begin{aligned} \langle u+v, u-v \rangle &= \langle u, u-v \rangle + \langle v, u-v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 \end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\|u\| = \|v\| \Rightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0 \Rightarrow u+v \perp u-v$$

(3) 令  $V = \mathbb{R}^2$ , 考虑菱形  $ABCD$ , 令  $u = \overrightarrow{BA}, v = \overrightarrow{BC}$ , 则有  $u+v = \overrightarrow{BD}, u-v = \overrightarrow{CA}$ .

由于  $BA = BC$ , 则  $\|u\| = \|v\|$ , 由 (2) 可知  $\overrightarrow{BD}$  和  $\overrightarrow{CA}$  正交, 因而  $BD \perp AC$ , 命题得证.

6. 设  $u, v \in V$ , 试证明:  $\langle u, v \rangle = 0$  当且仅当对任意  $a \in \mathbb{F}$  都有  $\|u\| \leq \|u + av\|$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$ : 对任意  $a \in \mathbb{F}$  有  $\langle u, av \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle = 0$ , 于是  $u$  和  $av$  正交. 于是

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + \|av\|^2 \geq \|u\|^2$$

于是  $\|u\| \leq \|u + av\|$ .

$\Leftarrow$ : 考虑  $u$  的正交分解, 取  $c = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$ . 取  $w = u - cv$ , 则  $\langle w, v \rangle = 0$ . 于是

$$\|u + cv\|^2 = \|w\|^2 = \|u\|^2 - \|cv\|^2 = \|u\|^2 - c^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

于是  $c = 0$ , 因而  $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle = 0$ .

7. 设  $u, v \in V$ . 试证明:  $\|au + bv\| = \|bu + av\|$  对任意  $a, b \in \mathbb{R}$  成立, 当且仅当  $\|u\| = \|v\|$ .

**Proof.**

$\Rightarrow$ : 取  $a = 1, b = 0$  即有  $\|u\| = \|v\|$ .

$\Leftarrow$ : 当  $\|u\| = \|v\|$  时, 我们有

$$\begin{aligned}\|au + bv\|^2 &= \langle au + bv, au + bv \rangle \\ &= a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab\langle u, v \rangle \\ &= a^2\|v\|^2 + b^2\|u\|^2 + 2ab\langle u, v \rangle \\ &= \langle bu + av, bu + av \rangle \\ &= \|bu + av\|^2\end{aligned}$$

于是  $\|au + bv\| = \|bu + av\|$ .

8. 设  $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$  且  $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 \leq 1$ . 试证明:  $a + b + c + 4x + 9y \leq 10$ .

**Proof.**

我们有

$$(a + b + c + 4x + 9y)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2) \leq 100$$

两边开平方即得

$$a + b + c + 4x + 9y \leq 10$$

9. 设  $u, v \in V, \|u\| = \|v\| = \langle u, v \rangle = 1$ . 试证明:  $u = v$ .

**Proof.**

据 Cauchy-Schwarz 不等式,  $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$  当且仅当  $u = \lambda v, \lambda \in \mathbb{F}$  时成立.

又  $1 = \langle u, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda$ , 于是  $\lambda = 1$ , 即  $u = v$ .

10. 设  $u, v \in V, \|u\| < 1$  且  $\|v\| < 1$ . 试证明

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$$

**Proof.**

我们有

$$(\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0$$

于是

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \geq 2\|u\| \|v\|$$

变形可得

$$(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2) \leq (1 - \|u\| \|v\|)^2$$

而  $\|u\|, \|v\| < 1$ , 于是

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - \|u\| \|v\|$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

于是

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$$

11. 求向量  $u, v \in \mathbb{R}^2$  使得  $u$  是  $(1, 3)$  的标量倍,  $v$  正交于  $(1, 3)$ , 且  $u + v = (1, 2)$ .

**Solution.**

考虑  $(1, 2)$  在  $(1, 3)$  上的正交分解  $(1, 2) = c(1, 3) + w$ , 其中  $c = \frac{\langle (1, 2), (1, 3) \rangle}{\|(1, 3)\|^2} = \frac{7}{10}$ .

于是令  $u = \left(\frac{7}{10}, \frac{21}{10}\right), v = \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$ .

12. 设  $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$ .

(1) 试证明:  $(a + b + c + d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$ .

(2) 求上述不等式的取等条件.

**Solution.**

(1) 令  $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}), v = \left( \sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b}}, \sqrt{\frac{1}{c}}, \sqrt{\frac{1}{d}} \right)$ . 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

即

$$4 \leq \sqrt{a+b+c+d} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$$

两边平方即得

$$(a+b+c+d) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$$

(2) 据 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件, 当且仅当  $u = \lambda v$  时取等, 即  $a = b = c = d$ .

13. 证明: 如果  $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ , 那么

$$\left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

**Proof.**

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left( \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \left( n \cdot \frac{1}{n^2} \right) (a_1^2 + \dots + a_n^2) = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

于是命题得证.

14. 设  $v \in V$  且  $v \neq \mathbf{0}$ . 试证明: 如果  $u \in V$  且  $\|u\| = 1$ , 那么

$$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq \|v - u\|$$

当且仅当  $u = \frac{v}{\|v\|}$  时等号成立.

**Proof.**

我们有

$$\|v - u\|^2 - (\|v\| - \|u\|)^2 = 2\langle v, u \rangle + 2\|u\|\|v\| \geq 0$$

即

$$\| \|v\| - \|u\| \| \leq \|v - u\|^2$$

当且仅当  $v, u$  成标量倍关系时等式成立, 即  $u = \frac{v}{\|v\|}$  或  $u = -\frac{v}{\|v\|}$  时等号成立.

我们有

$$\left| 1 - \frac{1}{\|v\|} \right| < 1 + \frac{1}{\|v\|}$$

于是

$$\min \|v - u\| = \left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\|$$

命题得证.

**15.** 设  $u, v \in \mathbb{R}^2$  且  $u, v \neq \mathbf{0}$ , 试证明:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos \theta$$

其中  $\theta$  为向量  $u, v$  的夹角.

**Proof.**

对于  $u, v, u - v$  构成的三角形使用余弦定理, 则有

$$\cos \theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

而

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

代入上式有

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$$

变形可得

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos \theta$$

于是命题得证.

**16.**  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{R}^3$  中向量的夹角可以用几何方法定义, 然而对于更高维的空间  $\mathbb{R}^n$  中的几何则并不明晰. 因此, 定义  $x, y \in \mathbb{R}^n$  的夹角  $\theta$  为

$$\arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$$

这一定义的动机来源于  $\mathbb{R}^2$  和  $\mathbb{R}^3$  中夹角的几何意义. 试解释: 证明这一定义的成立需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

**Solution.**

为保证  $\arccos$  函数有意义, 这一定义的成立至少要求

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

即

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

这就需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

17. 试证明: 对于任意  $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ , 都有

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

**Proof.**

令  $u = (a_1, \sqrt{2}a_2, \dots, \sqrt{n}a_n), v = (b_1, \frac{b_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{b_n}{\sqrt{n}})$ . 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

即

$$\left( \sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

18. 设函数  $f(x) : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  连续.

(1) 试证明:

$$\left( \int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx$$

(2) 试给出上述不等式两边均有限且取等时  $f(x)$  满足的条件.

**Proof.**

(1) 考虑  $\mathbb{R}^{[1,t]}$  上的内积

$$\langle u, v \rangle = \int_1^t uv$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left( \int_1^t uv \right)^2 \leq \left( \int_1^t u^2 \right) \left( \int_1^t v^2 \right)$$

于是

$$\left( \int_1^t f(x) dx \right)^2 = \left( \int_1^t \frac{x}{x} f(x) dx \right) \leq \left( \int_1^t x^2 (f(x))^2 dx \right) \left( \int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right) = \left( \int_1^t x^2 (f(x))^2 dx \right) \left( 1 - \frac{1}{t} \right)$$

而  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left( 1 - \frac{1}{t} \right) = 1$ , 又  $f(x)$  非负, 于是

$$\left( \int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx$$

(2) 当且仅当  $xf(x)$  是  $\frac{1}{x}$  的标量倍, 即  $f(x) = \frac{\lambda}{x^2}$ , 其中  $\lambda \in \mathbb{R}^*$ . 此时

$$\left( \int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx = \lambda^2$$

19. 设  $v_1, \dots, v_n$  是  $V$  的一个基, 且  $T \in \mathcal{L}(V)$ . 试证明: 如果  $\lambda$  是  $T$  的特征值, 那么

$$|\lambda|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2$$

**Proof.**

考虑  $V$  上的内积

$$\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \rangle = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

考虑  $T$  的特征向量  $v := a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$  使得  $Tv = \lambda v$ , 则有

$$Tv = \sum_{k=1}^n a_k T v_k = \sum_{k=1}^n \left( a_k \sum_{j=1}^n \mathcal{M}(T)_{j,k} v_j \right) = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right) v_j$$

于是

$$\|Tv\|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2$$



又因为  $\|Tv\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2$ , 于是

$$|\lambda|^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{\|v\|^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式, 对于任意  $j \in \{1, \dots, n\}$  有

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2 \leq \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left( \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2 \right)$$

于是

$$|\lambda|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2$$

**20.** 试证明: 如果  $u, v \in V$ , 那么  $|||u|| - ||v||| \leq \|u - v\|$ .

**Proof.**

我们有

$$\|u - v\|^2 - (||u|| - ||v||)^2 = 2 \langle u, v \rangle + 2||u||||v|| \geq 0$$

即

$$|||u|| - ||v||| \leq \|u - v\|$$

当且仅当  $v, u$  成标量倍关系时等式成立.

**21.** 设  $u, v \in V$  使得

$$\|u\| = 3 \quad \|u + v\| = 4 \quad \|u - v\| = 6$$

求  $\|v\|$ .

**Solution.**

根据平行四边形不等式有

$$4^2 + 6^2 = 2(3^2 + \|v\|^2)$$

于是  $\|v\| = \sqrt{17}$ .

22. 试证明: 如果  $u, v \in V$ , 那么

$$\|u + v\| \|u - v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Proof.**

我们有

$$\begin{aligned} & (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u + v\| \|u - v\|)^2 \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - \|u + v\|^2 \|u - v\|^2 \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle|) (\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2|\langle u, v \rangle|) \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 + 4|\langle u, v \rangle|^2 \\ &= 4|\langle u, v \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

即

$$(\|u + v\| \|u - v\|)^2 \leq (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2$$

两边开平方即得

$$\|u + v\| \|u - v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

23. 设  $v_1, \dots, v_m \in V$  使得对任意  $k \in \{1, \dots, m\}$  都有  $\|v_k\| \leq 1$ . 试证明: 存在  $a_1, \dots, a_m \in \{-1, 1\}$  使得

$$\|a_1 v_1 + \dots + a_m v_m\| \leq \sqrt{m}$$

**Proof.**

对  $m$  使用归纳法. 当  $m = 1$  时, 命题的成立是显然的, 因为  $\|v_1\| \leq 1$ .

现在假设  $m > 1$ , 且命题对所有小于  $m$  的正整数均成立. 令  $v = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$ , 于是  $\|v\| \leq \sqrt{m-1}$ .

我们有

$$\|v + a_m v_m\|^2 = \|v\|^2 + \|v_m\|^2 + 2a_m \langle v, v_m \rangle = m + 2a_m \langle v, v_m \rangle$$

若  $\langle v, v_m \rangle \geq 0$ , 则令  $a_m = -1$ , 否则令  $a_m = 1$ , 则有

$$\|v + a_m v_m\|^2 \leq m$$

两边开平方即得

$$\|v + a_m v_m\| = \|a_1 v_1 + \dots + a_m v_m\| \leq \sqrt{m}$$

归纳可知命题成立.

24. 证明或给出一反例: 如果  $\|\cdot\|$  是与  $\mathbb{R}^2$  上的一内积关联的范数, 那么存在  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  使得  $\|(x, y)\| \neq \max\{|x|, |y|\}$ .

**Proof.**

如果对于任意  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  都有  $\|(x, y)\| = \max\{|x|, |y|\}$ , 不妨令  $f((x, y)) = \max\{|x|, |y|\}$ .

令  $u = (1, 0), v = (1, 1)$ , 则有

$$f^2(u+v) + f^2(u-v) = 5 \neq 4 = 2(f^2(u) + f^2(v))$$

于是这定义不满足范数的性质. 于是对于任意  $\mathbb{R}^2$  上的范数, 总存在  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  使得  $\|(x, y)\| \neq \max\{|x|, |y|\}$ .

25. 设  $p > 0$ . 试证明:  $\mathbb{R}^2$  上存在一内积, 使得与其关联的范数由下式给出:

$$\|(x, y)\| = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

当且仅当  $p = 2$ .

**Proof.**

令  $f(x, y) = (|x|^p + |y|^p)^{\frac{1}{p}}, u = (1, 0), v = (0, 1)$ , 则有

$$f^2(u+v) + f^2(u-v) = 2 \cdot 2^{\frac{2}{p}}$$

$$f^2(u) + f^2(v) = 2$$

由平行四边形等式可得

$$2 \cdot 2^{\frac{2}{p}} = 2 \cdot 2$$

于是  $2^{\frac{2}{p}} = 2$ , 即  $p = 2$ .

26. 设  $V$  是实内积空间, 试证明: 对任意  $u, v \in V$ , 有

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2}{4}$$

**Proof.**

我们有

$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle$$

同理有

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v \rangle = \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle$$

在实内积空间上有

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$$

于是将两式相减可得

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle u, v \rangle$$

整理可得

$$\langle u, v \rangle = \frac{||u+v||^2 - ||u-v||^2}{4}$$

**27.** 设  $V$  是复内积空间, 试证明: 对任意  $u, v \in V$ , 有

$$\langle u, v \rangle = \frac{||u+v||^2 - ||u-v||^2 + ||u+iv||^2i - ||u-iv||^2i}{4}$$

**Proof.**

我们有

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle$$

同理有

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - \langle u, v \rangle - \langle v, u \rangle$$

$$||u+iv||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - i\langle u, v \rangle + i\langle v, u \rangle$$

$$||u-iv||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + i\langle u, v \rangle - i\langle v, u \rangle$$

在复内积空间上有

$$\langle v, u \rangle = \overline{\langle u, v \rangle}$$

于是

$$\begin{aligned} & ||u+v||^2 - ||u-v||^2 + ||u+iv||^2i - ||u-iv||^2i \\ &= (2\langle u, v \rangle + 2\langle v, u \rangle) + (i\langle u, v \rangle - i\langle v, u \rangle + i\langle u, v \rangle - i\langle v, u \rangle) \\ &= 4\langle u, v \rangle \end{aligned}$$

整理可得

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u + iv\|^2 - \|u - iv\|^2}{4}$$

28. 设向量空间  $U$  上的范数是这样的一个函数

$$\|\cdot\| : U \rightarrow [0, +\infty)$$

其满足如下性质.

- (1)  $\|u\| = 0$  当且仅当  $u = 0$ .
- (2)  $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$  对任意  $\alpha \in \mathbb{F}$  和任意  $u \in U$  成立.
- (3)  $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$  对任意  $u, v \in U$  成立.

证明: 如果  $\|\cdot\|$  满足平行四边形等式, 那么  $U$  上存在一内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  使得对任意  $u \in U$  有  $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ .

**Proof.**

若  $U$  是实向量空间, 那么定义  $U$  上的内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4}$$

首先有

$$\langle u, u \rangle = \frac{\|2u\|^2}{4} = \|u\|^2$$

于是这一定义满足

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

我们现在来证明这定义是满足内积的性质的.

- (1) 正性: 对于任意  $u \in U$ , 都有  $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 \geq 0$ .
- (2) 定性:  $\langle u, u \rangle = \|u\|^2 = 0$  当且仅当  $\|u\| = 0$ , 即当且仅当  $u = 0$ .
- (3) 共轭对称性: 我们有

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2}{4} = \frac{\|v + u\|^2 - \|v - u\|^2}{4} = \langle v, u \rangle$$

- (4) 第一位上的可加性: 对于任意  $u, v, w \in U$ , 有

$$\|v + 2w\|^2 + \|v\|^2 = 2\|v + w\|^2 + 2\|w\|^2$$

$$\|v - 2w\|^2 + \|v\|^2 = 2\|v - w\|^2 + 2\|w\|^2$$

上述两式相减可得

$$\|v + 2w\|^2 - \|v - 2w\|^2 = 2\|v + w\|^2 - 2\|v - w\|^2$$

再次运用平行四边形定理可得

$$2\|u + v + w\|^2 + 2\|u - w\|^2 = \|v + 2u\|^2 + \|v + 2w\|^2$$

$$2\|u + v - w\|^2 + 2\|u + w\|^2 = \|v + 2u\|^2 + \|v - 2w\|^2$$

两式相减, 结合前面的推导可得

$$\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2 + \|u - w\|^2 - \|u + w\|^2 = \|v + w\|^2 - \|v - w\|^2$$

即

$$\frac{\|u + v + w\|^2 - \|u + v - w\|^2}{4} = \frac{\|u + w\|^2 - \|u - w\|^2}{4} + \frac{\|v + w\|^2 - \|v - w\|^2}{4}$$

即

$$\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$$

于是这内积满足可加性.

**(5) 第一位上的齐次性:** 我们首先证明对于任意  $n \in \mathbb{Z}$ . 对于任意  $u, v \in U$  有  $\langle nu, v \rangle = n \langle u, v \rangle$ .

为此, 采取归纳法. 当  $n = 1$  时, 命题的成立是显然的.

现在假设  $n > 1$ , 且命题对所有小于  $n$  的正整数都成立. 于是

$$\langle nu, v \rangle = \langle (n-1)u + u, v \rangle = \langle (n-1)u, v \rangle + \langle u, v \rangle = (n-1) \langle u, v \rangle + \langle u, v \rangle = n \langle u, v \rangle$$

而  $n = 0$  时有

$$\langle 0u, v \rangle = \langle \mathbf{0}, v \rangle = 0 = 0 \langle u, v \rangle$$

对于任意负整数  $n$ , 有

$$\langle nu, v \rangle = \frac{\|v - (-nu)\|^2 - \|v + (-nu)\|^2}{4} = -n \langle -u, v \rangle = n \langle u, v \rangle$$

当  $n \neq 0$  时, 有

$$n \left\langle \frac{1}{n}u, v \right\rangle = \sum_{k=1}^n \left\langle \frac{1}{n}u, v \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n \frac{1}{n}u, v \right\rangle = \langle u, v \rangle$$

于是

$$\left\langle \frac{1}{n}u, v \right\rangle = \frac{1}{n} \langle u, v \rangle$$

于是对于任意  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q} : p, q \in \mathbb{Z}$  有

$$\left\langle \frac{p}{q}u, v \right\rangle = p \left\langle \frac{1}{q}u, v \right\rangle = \frac{p}{q} \langle u, v \rangle$$

对于任意  $r \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ , 总存在有理序列  $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$  满足  $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k = r$ .

又根据三角不等式, 不难推出  $\|\cdot\|$  是  $U \rightarrow \mathbb{R}$  的连续函数. 我们有

$$\begin{aligned} r \langle u, v \rangle &= \lim_{k \rightarrow \infty} r_k \langle u, v \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \langle r_k u, v \rangle \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|r_k u + v\|^2 - \|r_k u - v\|^2}{4} \\ &= \frac{\|ru + v\|^2 - \|ru - v\|^2}{4} \\ &= \langle ru, v \rangle \end{aligned}$$

综上所述, 对于任意  $u, v \in U$  和任意  $\lambda \in \mathbb{R}$ , 都有  $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$ . 于是这内积满足齐次性.

因此这内积的定义是成立的.

若  $U$  是复向空间, 那么定义  $U$  上的内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为

$$\langle u, v \rangle = \frac{\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + \|u + iv\|^2 i - \|u - iv\|^2 i}{4}$$

如此证明, 过程是相似的, 在此不再赘述.

综上可知命题成立.

**29.** 设  $V_1, \dots, V_m$  是内积空间, 试证明等式

$$\langle (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle = \langle u_1, v_1 \rangle + \dots + \langle u_m, v_m \rangle$$

定义了  $V_1 \times \dots \times V_m$  上的一个内积.

**Proof.**

我们逐条证明这定义符合内积的性质.

**(1) 正性:** 对于任意  $v_1, \dots, v_m$  满足  $v_k \in V_k$ , 有

$$\langle (v_1, \dots, v_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle = \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \langle v_m, v_m \rangle \geq 0$$

**(2) 定性:** 我们有

$$\begin{aligned} \langle (v_1, \dots, v_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle &= 0 \Leftrightarrow \langle v_1, v_1 \rangle + \dots + \langle v_m, v_m \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v_1, v_1 \rangle = \dots = \langle v_m, v_m \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow v_1 = \dots = v_m = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (v_1, \dots, v_m) = \mathbf{0} \end{aligned}$$

(3) 第一位上的可加性: 对于任意  $v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_m, w_1, \dots, w_m$  满足  $u_k, v_k, w_k \in V_k$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 & \langle (u_1, \dots, u_m) + (v_1, \dots, v_m), w_1, \dots, w_m \rangle \\
 &= \langle (u_1 + v_1, \dots, u_m + v_m), w_1, \dots, w_m \rangle \\
 &= \langle u_1 + v_1, w_1 \rangle + \dots + \langle u_m + v_m, w_m \rangle \\
 &= \langle u_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_1 \rangle + \dots + \langle u_m, w_m \rangle + \langle v_m, w_m \rangle \\
 &= \langle u_1, w_1 \rangle + \dots + \langle u_m, w_m \rangle + \langle v_1, w_1 \rangle + \dots + \langle v_m, w_m \rangle \\
 &= \langle (u_1, \dots, u_m), (w_1, \dots, w_m) \rangle + \langle (v_1, \dots, v_m), (w_1, \dots, w_m) \rangle
 \end{aligned}$$

(4) 第一位上的齐次性: 对于任意  $\lambda \in \mathbb{F}$ , 任意  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$  满足  $u_k, v_k \in V_k$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 \langle \lambda(u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle &= \langle (\lambda u_1, \dots, \lambda u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle \\
 &= \langle \lambda u_1, v_1 \rangle + \dots + \langle \lambda u_m, v_m \rangle \\
 &= \lambda (\langle u_1, v_1 \rangle + \dots + \langle u_m, v_m \rangle) \\
 &= \lambda \langle (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle
 \end{aligned}$$

(5) 共轭对称性: 对于任意  $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m$  满足  $u_k, v_k \in V_k$ , 我们有

$$\begin{aligned}
 \langle (v_1, \dots, v_m), (u_1, \dots, u_m) \rangle &= \langle v_1, u_1 \rangle + \dots + \langle v_m, u_m \rangle \\
 &= \overline{\langle u_1, v_1 \rangle} + \dots + \overline{\langle u_m, v_m \rangle} \\
 &= \overline{\langle u_1, v_1 \rangle + \dots + \langle u_m, v_m \rangle} \\
 &= \overline{\langle (u_1, \dots, u_m), (v_1, \dots, v_m) \rangle}
 \end{aligned}$$

于是这定义满足内积的性质, 因而是  $V_1 \times \dots \times V_m$  上的内积.

30. 设  $V$  是实内积空间. 对于  $u, v, w, x \in V$ , 定义

$$\langle u + iv, w + ix \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, w \rangle + \langle v, x \rangle + (\langle v, w \rangle - \langle u, x \rangle) i$$

(1) 试证明:  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$  使  $V_{\mathbb{C}}$  成为复内积空间.

(2) 试证明: 如果  $u, v \in V$ , 那么

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle \text{ 且 } \|u + iv\|_{\mathbb{C}}^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

**Proof.**

(1) 只需依次证明这定义满足内积的性质即可, 在此不再赘述.



(2) 我们有

$$\begin{aligned}\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u, v \rangle + \langle \mathbf{0}, \mathbf{0} \rangle + (\langle \mathbf{0}, v \rangle - \langle u, \mathbf{0} \rangle) i \\ &= \langle u, v \rangle + 0 + (0 - 0) i \\ &= \langle u, v \rangle\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\|u + iv\|_{\mathbb{C}}^2 &= \langle u + iv, u + iv \rangle \\ &= \langle u, u \rangle + \langle v, v \rangle + (\langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle) i \\ &= \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

于是命题得证.

31. 设  $V$  是内积空间, 试证明: 对于任意  $u, v, w \in V$ , 有

$$\left\| w - \frac{1}{2}(u + v) \right\|^2 = \frac{\|w - u\|^2 + \|w - v\|^2}{2} - \frac{\|u - v\|^2}{4}$$

**Proof.**

根据平行四边形等式有

$$\|u + v - 2w\|^2 + \|u - v\|^2 = 2\|u - w\|^2 + 2\|v - w\|^2$$

移项后两边除以 4 即可得到欲证等式.

32. 设  $E$  是  $V$  的子集, 满足对任意  $u, v \in E$  都有  $\frac{1}{2}(u + v) \in E$ . 令  $w \in V$ , 试证明: 至多存在一个  $u \in E$  使得

$$\|w - u\| \leq \|w - x\|$$

对所有  $x \in E$  成立.

**Proof.**

如果存在  $u, v \in E$  满足题意且  $u \neq v$ , 那么  $\frac{1}{2}(u + v) \in E$ . 根据 6A.31 可得

$$\begin{aligned}\left\| w - \frac{1}{2}(u + v) \right\|^2 &= \frac{\|w - u\|^2 + \|w - v\|^2}{2} - \frac{\|u - v\|^2}{4} \\ &= \|w - u\|^2 - \frac{\|u - v\|^2}{4} \\ &< \|w - u\|^2\end{aligned}$$

这就推出了矛盾, 于是命题得证.

**33.** 设  $f, g$  是  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  的可微函数.

(1) 试证明:

$$(\langle f(t), g(t) \rangle)' = \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle$$

(2) 设  $c > 0$ , 且  $\|f(t)\| = c$  对任意  $t \in \mathbb{R}$  成立. 试证明:  $\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$  对任意  $t \in \mathbb{R}$  成立.

(3) 用几何的方式, 从  $\mathbb{R}^n$  中以原点为球心的球上一曲线的切向量这一角度解释上一问的结果.

**Proof.**

(1) 设  $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n$  使得对任意  $t \in \mathbb{R}$  有

$$f(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t)) \quad g(t) = (g_1(t), \dots, g_n(t))$$

于是

$$\langle f(t), g(t) \rangle = (f_1(t)g_1(t), \dots, f_n(t)g_n(t))$$

又对于任意  $k \in \{1, \dots, n\}$  有

$$(f_k(t)g_k(t))' = f'_k(t)g_k(t) + f_k(t)g'_k(t)$$

于是

$$\begin{aligned} (\langle f(t), g(t) \rangle)' &= ((f_1(t)g_1(t)), \dots, (f_n(t)g_n(t)))' \\ &= (f'_1(t)g_1(t) + f_1(t)g'_1(t), \dots, f'_n(t)g_n(t) + f_n(t)g'_n(t)) \\ &= (f'_1(t)g_1(t), \dots, f'_n(t)g_n(t)) + (f_1(t)g'_1(t), \dots, f_n(t)g'_n(t)) \\ &= \langle f'(t), g(t) \rangle + \langle f(t), g'(t) \rangle \end{aligned}$$

于是命题得证.

(2) 我们有

$$c^2 = \|f(t)\|^2 = \langle f(t), f(t) \rangle$$

于是

$$0 = (\langle f(t), f(t) \rangle)' = \langle f(t), f'(t) \rangle + \langle f'(t), f(t) \rangle = 2 \langle f'(t), f(t) \rangle$$

于是

$$\langle f'(t), f(t) \rangle = 0$$

于是命题得证.

(3) 当曲线恒在球面上时, 其切向量一定在球面的切面上, 于是一定与该曲线正交.