

Linear Algebra Done Right 5D

1. 设 V 是有限维复向量空间,且 $T \in \mathcal{L}(V)$.
 - (1) 证明:如果 $T^4 = I$,那么 T 可对角化.
 - (2) 证明:如果 $T^4 = T$,那么 T 可对角化.
 - (3) 给出一例 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,使得 $T^4 = T^2$ 且 T 不可对角化.

Proof.

- (1) 因为 $T^4 = I$,于是存在 $p(z) = z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+i)(z-i)$ 使得 $p(T) = \mathbf{0}$.
于是 p 是 T 的最小多项式 q 的多项式倍,因而 q 也具有 $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ 的形式,其中各 λ 互异.
因而 T 是可对角化的.
- (2) 因为 $T^4 = T$,于是存在 $p(z) = z^4 - z = z(z-1)(z+i)(z-i)$ 使得 $p(T) = \mathbf{0}$.
于是 p 是 T 的最小多项式 q 的多项式倍,因而 q 也具有 $(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m)$ 的形式,其中各 λ 互异.
因而 T 是可对角化的.