Linear Algebra Done Right 7C

1. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:如果T和$-T$都是正算子,那么$T = \mathbf{0}$.

Proof.

由题意可知对任意$v \in V$有

$$\langle Tv, v \rangle \geqslant 0$$

且

$$\langle -Tv, v \rangle = -\langle Tv, v \rangle \geqslant$$

于是$\langle Tv, v \rangle = 0$,因而$T = \mathbf{0}$(在实内积空间上需要$T$自伴,这由正算子的定义可得).

2. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$关于其标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

试证明:T是可逆正算子.

Proof.

$\mathbb{F}^4$的标准基也是$\mathbb{F}^4$的规范正交基.观察这矩阵,可知$(\mathcal{M}(T))^* = \mathcal{M}(T)$,于是$T^* = T$,即$T$自伴.

一些计算表明T的特征值为

$$\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

于是T的特征值均非零且非负,因而它是可逆正算子.

3. 设$n \in \mathbb{N}^*$,算子$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$关于其标准基的矩阵中的元素均为1.试证明:$T$是正算子.

Proof.

对于任意$v := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle T(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \rangle \\ &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

于是T是正算子.

4. 设$n \in \mathbb{N}^*$且$n > 1$,试证明:存在$n \times n$矩阵A,其所有元素都是正数且$A = A^*$,但$\mathbb{F}^n$上关于其标准基的矩阵为A的算子不是正算子.

Proof.

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

令A为$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$对应于$\mathbb{F}^2$的标准基的矩阵.于是

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (x+2y, 2x+y),(x,y)\rangle = (x+y)^2 + 2xy$$

令$(x,y) = (1,-1)$,则有$\langle T(x,y),(x,y)\rangle < 0$,于是$T$不是正算子.

5. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的.试证明:T是正算子当且仅当对于V的任意规范正交基$e_1, \cdots, e_n$都有T关于其的矩阵的对角线元素全为非负数.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$和任意$k \in \{1, \cdots, n\}$,由于T是正算子,于是

$$\langle Te_k, e_k\rangle \geqslant 0$$

又因为$Te_k = \langle Te_k, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle Te_k, e_n\rangle e_n$,于是

$$\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n))_{k,k} = \langle Te_k, e_k\rangle \geqslant 0$$

于是此矩阵的对角线上均为非负数.

$\Leftarrow$:由于T是自伴的,于是存在V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得T关于其有对角矩阵A.

根据题意,$A_{1,1}, \cdots, A_{n,n} \geqslant 0$,从而对于任意$v := a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in V$有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= \langle A_{1,1}a_1e_1, a_1e_1\rangle + \cdots + \langle A_{n,n}a_ne_n, a_ne_n\rangle \\ &= A_{1,1}a_1^2 + \cdots + A_{n,n}a_n^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

从而T为正算子.

6. 试证明:V上两正算子之和为正算子.

Proof.
对于任意正的$S,T\in\mathcal{L}(V)$和任意$v\in V$有

$$\langle (S+T)v,v\rangle=\langle Sv+Tv,v\rangle=\langle Sv,v\rangle+\langle Tv,v\rangle\geqslant 0$$

于是$S+T$是正的.

7. 设$S\in\mathcal{L}(V)$是可逆正算子,$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:$S+T$可逆.

Lemma.L.11 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,那么T可逆当且仅当$\langle Tv,v\rangle>0$对所有非零的$v\in V$成立.

Proof.
$\Rightarrow$:由于T可逆,于是对于任意非零的$v\in V$有$Tv\neq\mathbf{0}$.于是$\langle Tv,v\rangle>0$.
$\Leftarrow$:如果T不可逆,那么存在非零的$v\in V$使得$Tv=\mathbf{0}$,从而$\langle Tv,v\rangle=0$,这与条件矛盾.于是T可逆.

Proof.
根据**Lemma.L.11**可知$\langle Sv,v\rangle>0$对所有非零的$v\in V$成立.于是对于任意非零的$v\in V$有

$$\langle (S+T)v,v\rangle=\langle Sv,v\rangle+\langle Tv,v\rangle>0$$

从而$S+T$是可逆的.

8. 设$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T是正算子,当且仅当$T^\dagger$是正算子.

Proof.
由于T是正算子,于是令V有一规范正交基$e_1,\cdots,e_n$是分别对应于T的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的特征向量.
于是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$.根据**7B.25**有

$$T^\dagger e_k=\begin{cases}\frac{1}{\lambda_k}e_k,\lambda_k\neq 0\\ \mathbf{0},\lambda_k=0\end{cases}$$

对所有$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.于是$T^\dagger$关于$e_1,\cdots,e_n$的矩阵是对角线上均为非负数的对角矩阵,从而$T^\dagger$是正算子.
交换T和$T^\dagger$即可证得另一方向.于是命题得证.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,$S \in \mathcal{L}(W,V)$.试证明:S^*TS是W上的正算子.

Proof.

对于任意$w \in W$有

$$\langle S^*TSw, w\rangle = \langle T(Sw), Sw\rangle \geqslant 0$$

于是S^*TS是W上的正算子.

10. 设T是V上的正算子,设$v,w \in V$满足$Tv = w$且$Tw = v$.试证明:$v = w$.

Proof.

我们有

$$\langle T(v-w), v-w\rangle = \langle w-v, v-w\rangle = -||v-w||^2 \geqslant 0$$

于是$||v-w|| = 0$,即$v = w$.

11. 设T是V上的正算子,U是V在T下不变的子空间,试证明:$T|_U \in \mathcal{L}(U)$是U上的正算子.

Proof.

对于任意$u \in U$都有$Tu \in U \subseteq V$,又因为T是正的,于是

$$\langle T|_U u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle \geqslant 0$$

于是$T|_U$是U上的正算子.

12. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:对于任意$k \in \mathbb{N}^*$,T^k都是正算子.

Proof.

由于T是正算子,于是T关于V的某组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

且$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$.

于是T^k关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T^k)=(\mathcal{M}(T))^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n^k\end{pmatrix}$$

这是对角线均为非负数的对角矩阵,从而T^k也是正算子.

13. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的,设$\alpha\in\mathbb{R}$.回答下列问题.

(1) 试证明:$T-\alpha I$是正算子,当且仅当α不大于T的任意特征值.

(2) 试证明:$\alpha I-T$是正算子,当且仅当α不小于T的任意特征值.

Proof.

(1) 由于T是自伴算子,于是考虑V的某个规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得T关于其有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$T$的特征值.

于是$T-\alpha I$关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T-\alpha I)=\begin{pmatrix}\lambda_1-\alpha & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n-\alpha\end{pmatrix}$$

因为$\alpha\leqslant\min\limits_{k\in\{1,\cdots,n\}}\{\lambda_k\}$,于是$\lambda_1-\alpha,\cdots,\lambda_n-\alpha\geqslant 0$.

于是$T-\alpha I$关于这基有对角线元素非负的对角矩阵,于是$T-\alpha I$是正算子.

(2) 与**(1)**类似,不再赘述.