Linear Algebra Done Right 7F

1. 设$S,T\in\mathcal{L}(V,W)$.试证明:$|||S||-||T|||\leqslant||S-T||$.

Proof.

由线性映射的范数的定义可知存在$v\in V$且$||v||\leqslant1$使得$||S-T||=||(S-T)v||$.于是

$$||S-T||=||(S-T)v||=||Sv-Tv||\geqslant|||Sv||-||Tv|||\geqslant|||S||-||T|||$$

以上不等式即**反向三角不等式**.

2. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的(如果$\mathbb{F}=\mathbb{C}$则令T是正规的),试证明:$||T||=\max\{|\lambda|:\lambda\text{是}T\text{的特征值}\}$.

Proof.

由**7.88**和**7E.7**可知

$$||T||=T\text{的最大奇异值}=T\text{的绝对值最大的特征值}$$

3. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$且$v\in V$.试证明:$||Tv||=||T||||v||$当且仅当$T^*Tv=||T||^2v$.

Proof.

$\Leftarrow$:由**7.88(c)**和**7.91**可得

$$||T||^2||v||=||T^*Tv||\leqslant||T^*||||Tv||=||T||||Tv||\Rightarrow||Tv||\geqslant||T||||v||$$

而$||Tv||\leqslant||T||||v||$,于是$||Tv||=||T||||v||$.

$\Rightarrow$:我们有

$$\begin{aligned}||T^*Tv-||T||^2v||^2&=\left\langle T^*Tv-||T||^2v,T^*Tv-||T||^2v\right\rangle\\&=||T^*Tv||^2+||T||^4||v||^2-2\mathrm{Re}\left\langle T^*Tv,||T||^2v\right\rangle\\&\leqslant||T^*||^2||Tv||^2+||T||^4||v||^2-2||T||^2||Tv||^2\\&=0\end{aligned}$$

于是$T^*Tv=||T||^2v$.

4. 设$T \in \mathcal{L}(V, W), v \in V$且$||Tv|| = ||T||||v||$.试证明:如果$u \in V$且$\langle u, v \rangle = 0$,那么$\langle Tu, Tv \rangle = 0$.

Proof.

根据**7F.3**有

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle = \left\langle u, ||T||^2 v \right\rangle = ||T||^2 \langle u, v \rangle = 0$$

5. 设U是有限维内积空间,$T \in \mathcal{L}(V, U)$且$S \in \mathcal{L}(U, W)$.试证明:$||ST|| \leqslant ||S||||T||$.

Proof.

由线性映射的范数的定义可知存在$v \in V$且$||v|| \leqslant 1$使得$||ST|| = ||STv||$.于是

$$||ST|| = ||STv|| = ||Tv|| \left|\left| S\left(\frac{Tv}{||Tv||}\right) \right|\right| \leqslant ||Tv||||S|| \leqslant ||S||||T||$$

6. 证明或给出一反例:如果$S, T \in \mathcal{L}(V)$,那么$||ST|| = ||TS||$.

Solution.

令$V = \mathbb{F}^2$,$S(x, y) = (x, 0), T(x, y) = (y, 0)$.于是$ST = \mathbf{0} \neq TS$.根据**7.87(b)**,即$||ST|| = 0 \neq ||TS||$.

8. 回答下列问题.

(1) 试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||I - T|| < 1$,那么T可逆.

(2) 设$S \in \mathcal{L}(V)$可逆.试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||S - T|| < \dfrac{1}{||S^{-1}||}$,那么$T$是可逆的.

Proof.

(1) 如果T不可逆,那么存在$v \in V$使得$Tv = \mathbf{0}$.令$u = \dfrac{v}{||v||}$,于是$||u|| = 1$.于是

$$||I - T|| \geqslant ||(I - T)u|| = ||u - \mathbf{0}|| = ||u|| = 1$$

这与$||I - T|| < 1$矛盾,于是T可逆.

(2) 取与**(1)**同样的v, u,我们有$||S - T|| \geqslant ||(S - T)u||| = ||Su||$.
而$1 = ||u|| = ||S^{-1}Su|| \leqslant ||S^{-1}||||Su||$,即$||Su|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.即$||S - T|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.
这与题设不符,于是T可逆.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可逆的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$.

Proof.

取$\delta \in (0, \varepsilon)$且$\delta$不是$T$的特征值,于是$T - \delta I$可逆.令$S = T - \delta I$,则有

$$||T - S|| = ||\delta I|| = |\delta| \in (0, \varepsilon)$$

于是命题得证.

10. 设$\dim V > 1$,$T \in \mathcal{L}(V)$不可逆.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$且$S$不可逆.

Proof.

由于T不可逆,于是存在$e_1 \in V$且$||e_1|| = 1$使得$Te_1 = \mathbf{0}$.将e_1扩展为V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$.
令$Se_1 = \mathbf{0}, Se_k = Te_k - \frac{\varepsilon}{2} e_k (k = 2, \cdots, n)$,于是$S$不可逆.对于任意$v \in V$且$v \notin \operatorname{span}(e_1)$有

$$0 < ||(T - S)v||^2 = \left|\left| \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=2}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k \right|\right|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$$

于是$0 < ||T - S|| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

11. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可对角化的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$.

Proof.

根据Schur定理,存在V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得T关于其有上三角矩阵A,其对角线元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
考虑$D \in \mathcal{L}(V)$满足$De_k = ke_k$,显然$||D|| = n$.
由于$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$的数目是有限的,于是存在$\delta \in \left(0, \frac{\varepsilon}{n}\right)$使得$\lambda_k + k\delta$互异.
令$S = T + \delta D$,于是

$$0 < ||T - S|| = ||\delta D|| = \delta ||D|| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$$

于是命题得证.

12. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:$\left|\left|\sqrt{T}\right|\right| = \sqrt{||T||}$.

Proof.

不妨设T的最大特征值为λ,于是$\sqrt{T}$的最大特征值为$\sqrt{\lambda}$.

根据**7E.7**可知T和$\sqrt{T}$的最大奇异值分别为λ和$\sqrt{\lambda}$.于是命题得证.

13. 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$是正算子.试证明$||S-T||\leqslant\max\{||S||,||T||\}\leqslant||S+T||$.

Lemma.L.13 如果$A\in\mathcal{L}(V)$是自伴的,那么$||A||I-A$是正算子.

Proof.

考虑到A,I均为自伴算子,于是$||A||I-A$也是自伴的.

考虑$||A||I-A$的特征值λ,则存在非零的$v\in V$使得$||A||v-Av=\lambda v$,从而$||A||-\lambda$是A的特征值.

根据**7F.2**可得$|||A||-\lambda|\leqslant||A||$,从而$\lambda\geqslant 0$,即$||A||I-A$是正算子.

Lemma.L.14 如果$A,B\in\mathcal{L}(V)$且$A,B-A$均为正算子,那么$||A||\leqslant||B||$.

Proof.

根据**7C.6**可知$B=A+(B-A)$是正算子,于是根据**Lemma.L.13**可知$||B||I-B$是正算子.于是

$$||B||I-A=(||B||I-B)+(B-A)$$

是正算子.考虑A的任意特征值$\lambda\geqslant 0$和对应的特征向量v,我们有

$$(||B||I-A)\,v=(||B||-\lambda)\,v$$

由于$B-A$是正算子,于是$||B||-\lambda\geqslant 0$,从而$||B||\geqslant\lambda$.

于是$||A||=\max\{\lambda:\lambda\text{为}A\text{的特征值}\}\leqslant||B||$,命题得证.

Proof.

回到我们的命题.设λ为自伴算子$S-T$的特征值,其特征向量为v.于是

$$(||S||I-(S-T))\,v=(||S||-\lambda)\,v$$

根据**Lemma.L.13**和**7C.6**可知$||S||I-(S-T)$是正算子,于是$||S||-\lambda\geqslant 0$.

同理可知$||T||+\lambda\geqslant 0$.由于上述两条等式对于所有$S-T$的特征值λ都成立,于是$||S-T||\leqslant\max\{||S||,||T||\}$.

根据**Lemma.L.14**,令$A=S,B=S+T$可知$||S||\leqslant||S+T||$,同理有$||T||\leqslant||S+T||$.

于是$\max\{||S||,||T||\}\leqslant||S+T||$.

14. 设U, W是V的子空间且$||P_U - P_W|| < 1$.试证明$\dim U = \dim W$.

Proof.

注意到$P_U = I - P_{U^\perp}, P_W = I - P_{W^\perp}$.根据**7F.8(1)**可知$P_U + P_{W^\perp}$和$P_W + P_{U^\perp}$都是可逆的.于是

$$U \cap W^\perp = (\text{null } P_{U^\perp}) \cap (\text{null } P_W) \subseteq \text{null } (P_{U^\perp} + P_W) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow U \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

$$V = \text{range } (P_U + P_{W^\perp}) \supseteq (\text{range } P_U) + (\text{range } P_{W^\perp}) = U + W^\perp \Rightarrow U + W^\perp = V$$

于是

$$\dim V = \dim(U + W^\perp) = \dim U + \dim W^\perp - \dim(U \cap W^\perp) = \dim U + \dim V - \dim W$$

于是$\dim U = \dim W$.