Linear Algebra Done Right 5E

1. 给出一例$S,T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$且$S,T$可交换,且$\mathbb{F}^4$中存在在$S$下不变但不在$T$下不变的子空间,也存在在$T$下不变但不在$S$下不变的子空间.

Solution.

令$S(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2,x_1,0,0),T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,x_4,x_3)$.

于是$ST(x_1,x_2,x_3,x_4)=TS(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)=\mathbf{0}$,因此$S$和$T$可交换.

注意到$U_1=\{(0,0,x,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$S$下不变,但不在$T$下不变.

$U_2=\{(x,0,0,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$T$下不变,但不在$S$下不变.

2. 设$\mathcal{E}$是$\mathcal{L}(V)$的子集,且$\mathcal{E}$中的每个元素均可对角化.证明:存在V的一个基使得$\mathcal{E}$的每个元素关于这组基都有对角矩阵,当且仅当$\mathcal{E}$中的每对元素可交换.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意$S,T\in\mathcal{E}$,存在V的一组基$v_1,\cdots$使得它们关于这组基有对角矩阵,于是

$$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}(TS)$$

于是S,T可交换.

$\Leftarrow$:

3. 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$使得$ST=TS$.设$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(1) 试证明:null $p(S)$在T下不变.

(2) 试证明:range $p(S)$在T下不变.

Proof.

首先,对于任意$n\in N^*$有

$$S^nT=S^{n-1}ST=S^{n-1}TS=\cdots=TS^n$$

又

$$TI=IT=T$$

于是对于任意$p:=\sum_{i=0}^{m}a_iz^i\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$有

$$p(S)T=\sum_{i=0}^{m}a_iS^iT=\sum_{i=0}^{m}a_iTS^i=Tp(S)$$

于是$p(S)$和T可交换.

(1) 对于任意$v \in \text{null } p(S)$有

$$p(S)(Tv) = Tp(S)v = T\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

于是$Tv \in \text{null } p(S)$,即$\text{null } p(S)$在T下不变.

(2) 对于任意$v \in \text{range } p(S)$,设$u \in V$使得$p(S)u = v$.则有

$$Tv = T(p(S)u) = p(S)(Tu)$$

因为$p(S)(Tu) \in \text{range } p(S)$,于是$\text{range } p(S)$在$T$下不变.

4. 证明或给出一反例:若A是对角矩阵,B是与A大小相同的上三角矩阵,那么A和B可交换.

Solution.

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

那么A是对角矩阵,B是上三角矩阵.而

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad BA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

于是$AB \neq BA$,因而A, B不可交换.

5. 设V是有限维向量空间,$S, T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:S, T可交换,当且仅当S', T'可交换.

Proof.

取V的一组基$v_1, \cdots, v_n$和其对偶基$\phi_1, \cdots, \phi_n$.令

$$A = \mathcal{M}(S, (v_1, \cdots, v_n)) \qquad B = \mathcal{M}(T, (v_1, \cdots, v_n))$$

于是

$$A^{\mathrm{t}} = \mathcal{M}(S', (\phi_1, \cdots, \phi_n)) \qquad B^{\mathrm{t}} = \mathcal{M}(T', (\phi_1, \cdots, \phi_n))$$

于是

$$S, T\text{可交换} \Leftrightarrow AB = BA \Leftrightarrow (AB)^{\mathrm{t}} = (BA)^{\mathrm{t}} \Leftrightarrow B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}} \Leftrightarrow S', T'\text{可交换}$$

6. 设V是有限维复向量空间,且$S, T \in \mathcal{L}(V)$可交换.试证明:存在$\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$使得

$$\text{range } (S - \alpha I) + \text{range } (T - \lambda I) \neq V$$

Proof.

由于S, T可交换,于是它们有公共的特征向量v.令α, λ满足$Sv = \alpha v, Tv = \lambda v$.