Linear Algebra Done Right 5D

1. 设V是有限维复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$.

(1) 证明:如果$T^4 = I$,那么T可对角化.

(2) 证明:如果$T^4 = T$,那么T可对角化.

(3) 给出一例$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,使得$T^4 = T^2$且$T$不可对角化.

Proof.

(1) 因为$T^4 = I$,于是存在$p(z) = z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$使得$p(T) = \mathbf{0}$.
于是p是T的最小多项式q的多项式倍,因而q也具有$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$的形式,其中各$\lambda$互异.
因而T是可对角化的.

(2) 因为$T^4 = T$,于是存在$p(z) = z^4 - z = z(z-1)\left(z - \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)$使得$p(T) = \mathbf{0}$.
于是p是T的最小多项式q的多项式倍,因而q也具有$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$的形式,其中各$\lambda$互异.
因而T是可对角化的.

(3) 令$T(x,y) = (y,0)$,于是T的最小多项式为$p(z) = z^2$,满足$T^4 - T^2 = \mathbf{0}$,且不可对角化($p(z)$有重根).

2. 设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的一个基有对角矩阵A.试证明:若$\lambda \in \mathbb{F}$,那么λ在A的对角线上恰好出现$\dim E(\lambda, T)$次.

Proof.

如果λ不是T的特征值,则λ不会出现在A的对角线上.而$E(\lambda,T) = \operatorname{null}\ (T - \lambda I) = \{\mathbf{0}\}$,于是命题成立.
如果λ是T的特征值,考虑A对应的一组基$v_1, \cdots, v_n$(其中$n = \dim V$)和对角线上的元素$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.我们有

$$Tv_k = \lambda v_k, \forall k \in \{1, \cdots, n\}$$

当且仅当$\lambda_k = \lambda$时有$(T - \lambda I)v_k = \mathbf{0}$.这样的$v_{k_1}, \cdots, v_{k_i}$构成了$E(\lambda,T)$的基,恰好对应$i$个$\lambda_k$.即$\lambda$恰好在$A$的对角线上出现$\dim E(\lambda,T)$次.于是命题成立.

3. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:如果T可对角化,那么$V = \operatorname{null}\ T \oplus \operatorname{range}\ T$.

Proof.

令$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$表示$T$的非零互异特征值.于是有

$$V = E(0,T) \oplus E(\lambda_1, T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m, T)$$

其中$E(0,T)=\text{null }T$.如果$E(0,T)=\{\mathbf{0}\}$,那么$\text{range }T=V$.

如果T没有非零特征值,那么$\text{null }T=E(0,T)=V$.

否则,令$W=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$,则有$T=\text{null }T\oplus W$.我们只需证明$W=\text{range }T$.

对于任意$v\in V$,令$v=u+w_1+\cdots+w_m\in\text{null }T\oplus W$,其中$u\in\text{null }T,w_k\in E(\lambda_k,T)$.于是

$$Tv=Tu+Tw_1+\cdots+Tw_m=\lambda_1 w_1+\cdots+\lambda_m w_m\in W$$

于是$\text{range }T\subseteq W$.又对于任意$w:=w_1+\cdots+w_m\in W$有

$$w_1+\cdots+w_m=T\left(\frac{w_1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{w_m}{\lambda_m}\right)\in\text{range }T$$

于是$W\subseteq\text{range }T$.综上可知$W=\text{range }T$,即$V=\text{null }T\oplus\text{range }T$.

4. 设V是有限维的,且$T\in\mathcal{L}(V)$.证明下列三个命题相互等价.

(a) $V=\text{null }T\oplus\text{range }T$.

(b) $V=\text{null }T+\text{range }T$.

(c) $\text{null }T\cap\text{range }T=\{\mathbf{0}\}$.

Proof.

(a)⇒(b):显然.

(b)⇒(c):我们有

$$\dim(\text{null }T\cap\text{range }T)=\dim\text{null }T+\dim\text{range }T-\dim(\text{null }T+\text{range }T)$$

根据线性映射基本定理,我们有

$$\dim\text{null }T+\dim\text{range }T=\dim V$$

根据假设又有

$$\dim(\text{null }T+\text{range }T)=\dim V$$

于是$\dim(\text{null }T\cap\text{range }T)=0$,即$\text{null }T\cap\text{range }T=\{\mathbf{0}\}$,于是**(c)**成立.

(c)⇒(a):我们有

$$\dim(\text{null }T+\text{range }T)=\dim\text{null }T+\dim\text{range }T-\dim(\text{null }T\cap\text{range }T)=\dim V$$

又因为$\text{null }T$与$\text{range }T$是T的子空间,于是$V=\text{null }T+\text{range }T$.

又因为$\text{null }T\cap\text{range }T=\{\mathbf{0}\}$,于是$\text{null }T+\text{range }T$是直和.于是$V=\text{null }T\oplus\text{range }T$.

5. 设T是有限维复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:T可以对角化,当且仅当

$$V = \text{null }(T - \lambda I) \oplus \text{range }(T - \lambda I)$$

对任意$\lambda \in \mathbb{C}$均成立.

Proof.

$\Rightarrow$:若T可以对角化,不妨设T关于V的某组基的对角矩阵上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

于是$T - \lambda I$也是对角矩阵,其对角线上的元素为$\lambda_1 - \lambda, \cdots, \lambda_n - \lambda$.

因此,对于任意$\lambda \in \mathbb{C}$,$T - \lambda I$都是可对角化算子.

于是根据**5D.3**,$V = \text{null }(T - \lambda I) \oplus \text{range }(T - \lambda I)$对任意$\lambda \in \mathbb{C}$都成立.

$\Leftarrow$:假设T不可以对角化,那么T的最小多项式p应当具有重根.不妨设$p = (z - \lambda)q$,其中$q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$且$q(\lambda) = 0$.

对于任意$v \in V$,有

$$p(T)v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (T - \lambda I)q(T)v = \mathbf{0} \Leftrightarrow q(T)v \in \text{null }(T - \lambda I)$$

$$q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \text{s.t.} q(z) = (z - \lambda)r(z) \Leftrightarrow q(T)v = (T - \lambda I)(r(T)v) \Rightarrow q(T)v \in \text{range }(T - \lambda I)$$

于是$q(T)v \in \text{null }(T - \lambda I) \cap \text{range }(T - \lambda I)$.

由于p是T的最小多项式,且$\deg q < \deg p$,因而$q(T) \neq \mathbf{0}$.于是存在$v \in V$使得$q(T)v \neq \mathbf{0}$.

即$\text{null }(T - \lambda I) \cap \text{range }(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$,因而根据**5D.4**可知两者不是直和,与条件矛盾.于是T可以对角化.

6. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5)$且$\dim E(8, T) = 4$.试证明$T - 2I$或$T - 6I$可逆.

Proof.

假定$T - 2I$和$T - 6I$均不可逆,那么2和6均为T的特征值.于是

$$\dim E(2, T) \geqslant 1, \dim E(6, T) \geqslant 1$$

又因为$\dim E(8, T) > 0$,于是8也为T的特征值. 于是

$$\dim V \geqslant \dim E(2, T) + \dim E(6, T) + \dim E(8, T) \geqslant 1 + 1 + 4 = 6$$

而$\dim V = 5$,于是推出矛盾.因而$T - 2I$和$T - 6I$至少有一个可逆.

7. 设$T \in \mathcal{L}(V)$可逆,试证明

$$E(\lambda, T) = E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$$

对任意$\lambda \in \mathbb{F}(\lambda \neq 0)$都成立.

Proof.

对于任意$v \in V$都有

$$v \in E(\lambda, T) \Leftrightarrow Tv = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda T^{-1}v \Leftrightarrow T^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v \Leftrightarrow v \in E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$$

于是$E(\lambda, T) = E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$.

8. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.令$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$表示$T$的非零互异特征值,试证明:

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim \operatorname{range} T$$

Proof.

我们有

$$\dim E(0, T) + \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim V$$

而$E(0, T) = \operatorname{null} T$,于是

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim V - \dim E(0, T) = \dim V - \dim \operatorname{null} T = \dim \operatorname{range} T$$

于是命题成立.

9. 设$R, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$,都有特征值$2, 6, 7$.证明:存在一可逆算子$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$使得$R = S^{-1}TS$.

Proof.

设R关于$2, 6, 7$的特征向量为u_1, u_2, u_3,T关于$2, 6, 7$的特征向量为v_1, v_2, v_3.

于是u_1, u_2, u_3和v_1, v_2, v_3是$\mathbb{F}^3$的基.令$Su_k = v_k$,则对于任意$v := a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 \in \mathbb{F}^3$有

$$S^{-1}Sv = S^{-1}T(a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3) = S^{-1}(2a_1v_1 + 6a_2v_2 + 7a_3v_3) = 2a_1u_1 + 6a_2u_2 + 7a_3u_3 = Rv$$

于是$R = S^{-1}TS$.

10.