

自伴算子和正规算子

1. 伴随

1.1 定义: 伴随

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, T 的伴随是使得对任意 $v \in V$ 和任意 $w \in W$ 都有 $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$ 的映射 $T^* : W \rightarrow V$.

我们简单看一下这个定义有意义的原因. 设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 取定 $w \in W$, 考虑 V 上的线性泛函 $v \mapsto \langle Tv, w \rangle$.

根据 Riesz 表示定理, V 中存在唯一的向量使得该线性泛函由与其的内积给出. 我们记这个向量为 T^*w .

换言之, T^*w 是 V 中唯一使得任意 $v \in V$ 都满足

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^*w \rangle$$

的向量. 上式中左侧的内积在 W 上, 右侧的内积在 V 上, 这里统一写作 $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

伴随作为一个函数似乎也具有线性映射的基本性质. 下面我们证明之.

1.2 线性映射的伴随也是线性映射

如果 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么 $T^* \in \mathcal{L}(W, V)$.

Proof.

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 对于 $v \in V$ 和 $w_1, w_2 \in W$, 有

$$\langle Tv, w_1 + w_2 \rangle = \langle Tv, w_1 \rangle + \langle Tv, w_2 \rangle = \langle v, T^*w_1 \rangle + \langle v, T^*w_2 \rangle$$

$$\langle Tv, w_1 + w_2 \rangle = \langle v, T^*(w_1 + w_2) \rangle$$

上面两式表明 $T^*w_1 + T^*w_2 = T^*(w_1 + w_2)$.

对于 $v \in V, w \in W$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$ 有

$$\langle Tv, \lambda w \rangle = \overline{\lambda} \langle Tv, w \rangle = \overline{\lambda} \langle v, T^*w \rangle = \langle v, \lambda T^*w \rangle$$

$$\langle Tv, \lambda w \rangle = \langle v, T^*(\lambda w) \rangle$$

上面两式表明 $\lambda T^*w = T^*(\lambda w)$.

从而 T^* 满足可加性和齐次性, 于是 T^* 是线性映射.

除此之外, 伴随还具有如下性质.

1.3 伴随的性质

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么有

(1) $(S + T)^* = S^* + T^*$ 对所有 $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ 成立.

(2) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{F}$ 成立.

(3) $(T^*)^* = T$.

(4) $(ST)^* = T^* S^*$ 对所有 $S \in \mathcal{L}(W, U)$ 成立.

(5) $I^* = I$, 其中 I 是 V 上的恒等算子.

(6) 如果 T 可逆, 那么 T^* 可逆且 $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

上面性质的证明从略. 不难发现, $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ 时 $T \mapsto T^*$ 是 $\mathcal{L}(V, W)$ 到 $\mathcal{L}(W, V)$ 的线性映射, 而当 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 时则不成立. 这是由于上面性质中出现的复共轭.

下面的结论给出了伴随的零空间和值域.

1.4 伴随的零空间和值域

设 $T \in \mathcal{L}(V, W)$, 那么

$$\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp, \text{range } T^* = (\text{null } T)^\perp$$

$$\text{null } T = (\text{range } T^*)^\perp, \text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp$$

Proof.

对于 $w \in W$, 我们有

$$w \in \text{null } T^* \Leftrightarrow T^* w = \mathbf{0} \Leftrightarrow \forall v \in V, \langle v, T^* w \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall v \in V, \langle Tv, w \rangle = 0 \Leftrightarrow w \in (\text{range } T)^\perp$$

于是 $\text{null } T^* = (\text{range } T)^\perp$. 两边取正交补即可知 $\text{range } T = (\text{null } T^*)^\perp$.

用 T^* 代替 T , 即可得出剩余两个等式.

那么, 线性伴随的矩阵具有什么样的特点呢? 为此, 我们先做共轭转置的定义.

1.5 定义: 共轭转置

$m \times n$ 矩阵 A 的**共轭转置**是将其转置后的矩阵中每个元素取复共轭得到的 $n \times m$ 矩阵 A^* .

换言之, 对于任意 $j, k \in \{1, \dots, n\}$, 有 $(A^*)_{j,k} = \overline{A_{k,j}}$.

接下来的结论表明线性伴随和共轭转置之间的联系.

1.6 线性伴随与共轭转置

令 $T \in \mathcal{L}(V, W)$. 设 e_1, \dots, e_n 是 V 的规范正交基, f_1, \dots, f_m 是 W 的规范正交基.

那么 $\mathcal{M}(T^*, (f_1, \dots, f_m), (e_1, \dots, e_n))$ 是 $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_m))$ 的共轭转置.

换句话说 $\mathcal{M}(T^*) = (\mathcal{M}(T))^*$.

Proof.

我们把命题中的两个较长的表达式分别简写为 $\mathcal{M}(T^*)$ 和 $\mathcal{M}(T)$.

因为 f_1, \dots, f_m 是 W 的规范正交基, 于是对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$Te_k = \langle Te_k, f_1 \rangle f_1 + \dots + \langle Te_k, f_m \rangle f_m$$

考虑线性映射的矩阵的含义, 可知 $\mathcal{M}(T)$ 的第 j 行第 k 列的元素为 $\langle Te_j, f_k \rangle$.

同理可知 $\mathcal{M}(T^*)$ 的第 j 行第 k 列的元素为 $\langle T^* f_k, e_j \rangle$. 而

$$\langle T^* f_k, e_j \rangle = \langle f_k, Te_j \rangle = \overline{\langle Te_j, f_k \rangle}$$

这就等于 $\mathcal{M}(T)$ 的第 k 行第 j 列的元素的复共轭. 于是命题得证.

我们看到伴随映射和对偶映射的相似性. 在处理内积空间时, 正交补和伴随更容易处理, 于是就不需要处理零化子和伴随映射了.

2. 自伴算子

现在, 我们把注意力重新放在内积空间上的算子.

2.1 定义: 自伴算子

算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 被称为自伴的, 如果 $T = T^*$.

自伴算子的矩阵都是实矩阵, 并且关于对角线对称. 我们还有如下命题.

2.2 $T = 0$ 的充要条件

设 V 是有限维复向量空间, $T \in \mathcal{L}(V)$, 那么 $\langle Tv, v \rangle = 0$ 对所有 $v \in V$ 成立, 当且仅当 $T = 0$.

Proof.

如果 $u, w \in V$, 那么有

$$\begin{aligned} \langle Tu, w \rangle &= \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4} \\ &\quad - \frac{\langle T(u+iv), u+iv \rangle - \langle T(u-iv), u-iv \rangle}{4} i \end{aligned}$$

现在假设 $\langle Tv, v \rangle = 0$ 对任意 $v \in V$ 成立, 于是上式表明 $\langle Tu, w \rangle = 0$ 对任意 $u, w \in V$ 成立. 取 $w = Tu$ 可知 $Tu =$

$\mathbf{0}$ 对所有 $u \in U$ 成立,于是 $T = \mathbf{0}$.

当 $T = \mathbf{0}$ 时,自然有 $\langle Tv, v \rangle = \langle \mathbf{0}, v \rangle = 0$.

综上可知命题得证.

下面的命题只在复向量空间上成立.它给出了自伴算子表现得像实数的一个例子.

2.3 复向量空间上自伴算子的充要条件

设 V 是有限维复向量空间,对于 $T \in \mathcal{L}(V)$, T 是自伴的,当且仅当 $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ 对任意 $v \in V$ 成立.

Proof.

如果 $v \in V$,那么就有 $\langle T^*v, v \rangle = \overline{\langle Tv, v \rangle}$.如此,就有

$$\begin{aligned} T \text{ 是自伴的} &\Leftrightarrow T - T^* = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \langle (T - T^*)v, v \rangle = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Tv, v \rangle - \overline{\langle Tv, v \rangle} = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}, \forall v \in V \end{aligned}$$

在实内积空间 V 上,一个非零算子也许可以满足对任意 $v \in V$ 都有 $\langle Tv, v \rangle = 0$.然而下面的定理表明,这不会发生在自伴算子上.

2.4 非零自伴算子不会使 $\langle Tv, v \rangle = 0$

设 T 是 V 上的自伴算子,那么 $\langle Tv, v \rangle = 0$ 对任意 $v \in V$ 成立,当且仅当 $T = \mathbf{0}$.

Proof.

在复内积空间上,我们不需要 T 自伴这一条件也可证明命题.

在实内积空间上,对于 $u, w \in V$,我们有

$$\langle Tu, w \rangle = \frac{\langle T(u+w), u+w \rangle - \langle T(u-w), u-w \rangle}{4}$$

证明上面的等式需要用到 $\langle Tw, u \rangle = \langle w, Tu \rangle = \langle Tu, w \rangle$.前一个等号是由于 T 是自伴算子,后一个等号是由于在实内积空间上操作.

用与2.2类似的方法可知 $T = \mathbf{0}$.

3.正规算子

3.1 定义:正规算子

如果内积空间上的算子与它的伴随可交换,我们就称它是**正规的**.

换言之,对于 $T \in \mathcal{L}(V)$,如果 $TT^* = T^*T$,那么称 T 是正规的.

特别地,自伴算子都是正规算子.接下来的命题给出了对正规算子的一个有用的刻画.

3.2 正规算子的充要条件I

设 $T \in \mathcal{L}(V)$,那么 T 是正规的,当且仅当 $\|Tv\| = \|T^*v\|$ 对任意 $v \in V$ 成立.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned} T \text{ 是正规的} &\Leftrightarrow TT^* - T^*T = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \langle (TT^*T - T^*T) v, v \rangle = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle TT^*v, v \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = 0, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*v, T^*v \rangle, \forall v \in V \\ &\Leftrightarrow \|Tv\| = \|T^*v\|, \forall v \in V \end{aligned}$$

正规算子有如下的性质.

3.3 正规算子的性质

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的,那么有

- (1) $\text{null } T = \text{null } T^*$.
- (2) $\text{range } T = \text{range } T^*$.
- (3) $V = \text{null } T \oplus \text{range } T$.
- (4) 对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, $T - \lambda I$ 都是正规的.
- (5) 对于 $v \in V$ 和 $\lambda \in \mathbb{F}$, $Tv = \lambda v$ 当且仅当 $T^*v = \bar{\lambda}v$.

正规算子的特征向量还具有如下的性质.

3.4 正规算子的特征向量

设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正规的,那么 T 对应于不同特征值的特征向量正交.

Proof.

设 α, β 是 T 的不同特征值,对应的特征向量为 u, v .于是

$$(\alpha - \beta) \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle - \langle u, \bar{\beta} v \rangle = \langle Tu, v \rangle - \langle u, T^* v \rangle = 0$$

因而 $\langle u, v \rangle = 0$,于是 u 和 v 正交.

我们还有一个判断算子是否正规的方法.

3.5 正规算子的充要条件II

设 $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ 且 $T \in \mathcal{L}(V)$.那么 T 是正规的当且仅当存在可交换的自伴算子 $A, B \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $T = A + iB$.

Proof.

首先假定 T 是正规的.令 $A = \frac{T + T^*}{2}, B = \frac{T - T^*}{2i}$.那么 A, B 都是自伴的,且 $T = A + iB$.我们有

$$AB - BA = \frac{TT^* - T^*T}{2i} = \mathbf{0}$$

于是 $AB = BA$,因而 A, B 是可交换的.

现在假设存在可交换的自伴算子 A, B 使得 $T = A + iB$,那么 $T^* = A - iB$.于是

$$TT^* - T^*T = 2i(AB - BA) = \mathbf{0}$$

于是 T 是正规的.综上可知命题得证.