Linear Algebra Done Right 7F

1. 设$S,T\in\mathcal{L}(V,W)$.试证明:$|||S||-||T|||\leqslant||S-T||$.

Proof.
由线性映射的范数的定义可知存在$v\in V$且$||v||\leqslant 1$使得$||S-T||=||(S-T)v||$.于是

$$||S-T||=||(S-T)v||=||Sv-Tv||\geqslant|||Sv||-||Tv|||\geqslant|||S||-||T|||$$

以上不等式即**反向三角不等式**.

2. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的(如果$\mathbb{F}=\mathbb{C}$则令T是正规的),试证明:$||T||=\max\{|\lambda|:\lambda\text{是}T\text{的特征值}\}$.

Proof.
由**7.88**和**7E.7**可知

$$||T||=T\text{的最大奇异值}=T\text{的绝对值最大的特征值}$$

3. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$且$v\in V$.试证明:$||Tv||=||T||||v||$当且仅当$T^*Tv=||T||^2v$.

Proof.
$\Leftarrow$:由**7.88(c)**和**7.91**可得

$$||T||^2||v||=||T^*Tv||\leqslant||T^*||||Tv||=||T||||Tv||\Rightarrow||Tv||\geqslant||T||||v||$$

而$||Tv||\leqslant||T||||v||$,于是$||Tv||=||T||||v||$.
$\Rightarrow$:我们有

$$\begin{aligned}||T^*Tv-||T||^2v||^2&=\left\langle T^*Tv-||T||^2v,T^*Tv-||T||^2v\right\rangle\\&=||T^*Tv||^2+||T||^4||v||^2-2\mathrm{Re}\left\langle T^*Tv,||T||^2v\right\rangle\\&\leqslant||T^*||^2||Tv||^2+||T||^4||v||^2-2||T||^2||Tv||^2\\&=0\end{aligned}$$

于是$T^*Tv=||T||^2v$.

4. 设$T \in \mathcal{L}(V, W), v \in V$且$||Tv|| = ||T||||v||$.试证明:如果$u \in V$且$\langle u, v \rangle = 0$,那么$\langle Tu, Tv \rangle = 0$.

Proof.

根据**7F.3**有

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, T^*Tv \rangle = \left\langle u, ||T||^2 v \right\rangle = ||T||^2 \langle u, v \rangle = 0$$

5. 设U是有限维内积空间,$T \in \mathcal{L}(V, U)$且$S \in \mathcal{L}(U, W)$.试证明:$||ST|| \leqslant ||S||||T||$.

Proof.

由线性映射的范数的定义可知存在$v \in V$且$||v|| \leqslant 1$使得$||ST|| = ||STv||$.于是

$$||ST|| = ||STv|| = ||Tv|| \left|\left| S\left(\frac{Tv}{||Tv||}\right) \right|\right| \leqslant ||Tv||||S|| \leqslant ||S||||T||$$

6. 证明或给出一反例:如果$S, T \in \mathcal{L}(V)$,那么$||ST|| = ||TS||$.

Solution.

令$V = \mathbb{F}^2$,$S(x, y) = (x, 0), T(x, y) = (y, 0)$.于是$ST = \mathbf{0} \neq TS$.根据**7.87(b)**,即$||ST|| = 0 \neq ||TS||$.

8. 回答下列问题.

(1) 试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||I - T|| < 1$,那么T可逆.

(2) 设$S \in \mathcal{L}(V)$可逆.试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||S - T|| < \dfrac{1}{||S^{-1}||}$,那么$T$是可逆的.

Proof.

(1) 如果T不可逆,那么存在$v \in V$使得$Tv = \mathbf{0}$.令$u = \dfrac{v}{||v||}$,于是$||u|| = 1$.于是

$$||I - T|| \geqslant ||(I - T)u|| = ||u - \mathbf{0}|| = ||u|| = 1$$

这与$||I - T|| < 1$矛盾,于是T可逆.

(2) 取与**(1)**同样的v, u,我们有$||S - T|| \geqslant ||(S - T)u||| = ||Su||$.
而$1 = ||u|| = ||S^{-1}Su|| \leqslant ||S^{-1}||||Su||$,即$||Su|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.即$||S - T|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.
这与题设不符,于是T可逆.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可逆的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$.

Proof.
取$\delta \in (0, \varepsilon)$且$\delta$不是$T$的特征值,于是$T - \delta I$可逆.令$S = T - \delta I$,则有

$$||T - S|| = ||\delta I|| = |\delta| \in (0, \varepsilon)$$

于是命题得证.

10. 设$\dim V > 1$,$T \in \mathcal{L}(V)$不可逆.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$且$S$不可逆.

Proof.
由于T不可逆,于是存在$e_1 \in V$且$||e_1|| = 1$使得$Te_1 = \mathbf{0}$.将e_1扩展为V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$.
令$Se_1 = \mathbf{0}, Se_k = Te_k - \dfrac{\varepsilon}{2}e_k (k = 2, \cdots, n)$,于是$S$不可逆.对于任意$v \in V$且$v \notin \operatorname{span}(e_1)$有

$$0 < ||(T - S)v||^2 = \left|\left|\frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=2}^{n}\langle v, e_k\rangle e_k\right|\right|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$$

于是$0 < ||T - S|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

11. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可对角化的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T - S|| < \varepsilon$.

Proof.
根据Schur定理,存在V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得T关于其有上三角矩阵A,其对角线元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
考虑$D \in \mathcal{L}(V)$满足$De_k = ke_k$,显然$||D|| = n$.
由于$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$的数目是有限的,于是存在$\delta \in \left(0, \dfrac{\varepsilon}{n}\right)$使得$\lambda_k + k\delta$互异.
令$S = T + \delta D$,于是

$$0 < ||T - S|| = ||\delta D|| = \delta ||D|| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$$

于是命题得证.

12. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:$\left|\left|\sqrt{T}\right|\right| = \sqrt{||T||}$.

Proof.

不妨设T的最大特征值为λ,于是$\sqrt{T}$的最大特征值为$\sqrt{\lambda}$.

根据**7E.7**可知T和$\sqrt{T}$的最大奇异值分别为λ和$\sqrt{\lambda}$.于是命题得证.

13. 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$是正算子.试证明$||S - T|| \leqslant \max\{||S||, ||T||\} \leqslant ||S + T||$.

Lemma.L.