Linear Algebra Done Right 6A

1. 证明: 如果 $v_1, \cdots, v_m \in V$, 那么

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j, v_k\rangle \geqslant 0$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}||v_1 + \cdots + v_m||^2 &= \sum_{j=1}^{m}||v_j||^2 + 2\sum_{j,k\in\{1,\cdots,m\},j\neq k}\langle v_j, v_k\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j, v_k\rangle\end{aligned}$$

于是

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j, v_k\rangle = ||v_1 + \cdots + v_m||^2 \geqslant 0$$

2. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$, 定义 $\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ 为

$$\langle u, v\rangle_S = \langle Su, Sv\rangle$$

对所有 $u, v \in V$ 成立. 试证明:$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$ 是 V 上的内积, 当且仅当 S 是单射.

Proof.

我们有

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_S\text{是内积} \Leftrightarrow \langle v, v\rangle_S = 0\text{当且仅当}v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle Sv, Sv\rangle = 0\text{当且仅当}Sv = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{null } S = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow S\text{是单射}$$

3. 证明下列命题.

(1) 证明: 将 $\mathbb{R}^2$ 中的有序对 $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ 映射到 $|x_1y_1| + |x_2y_2|$ 的函数不是 $\mathbb{R}^2$ 上的内积.

(2) 证明: 将 $\mathbb{R}^3$ 中的有序对 $((x_1, x_1, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ 映射到 $x_1y_1 + x_3y_3$ 的函数不是 $\mathbb{R}^3$ 上的内积.

Proof.

(1) 令 $u = (1, 0), v = (-1, 0), w = (1, 0)$, 于是

$$f(u, w) = 1 \qquad f(v, w) = 1 \qquad f(u + v, w) = 0$$

于是 $f(u+v,w)\neq f(u,w)+f(v,w)$, 因而这映射 f 不满足第一位上的可加性, 不是 $\mathbb{R}^2$ 上的内积.

(2) 令 $v=(0,1,0)$, 则 $g(v,v)=0$, 而 $v\neq\mathbf{0}$, 因而这映射 g 不满足定性, 不是 $\mathbb{R}^3$ 上的内积.

4. 设 $T\in\mathcal{L}(V)$ 使得 $||Tv||\leqslant||v||$ 对任意 $v\in V$ 成立. 试证明:$T-\sqrt{2}I$ 是单射.

Proof.

若 $T-\sqrt{2}I$ 不是单射, 则存在 $v\in V$ 且 $v\neq\mathbf{0}$ 使得 $Tv=\sqrt{2}v$. 于是

$$||Tv||=||\sqrt{2}v||=\sqrt{2}||v||>||v||$$

这与题设矛盾, 从而 $T-\sqrt{2}I$ 是单射.

5. 设 V 是实内积空间. 证明下列命题.

(1) 证明:$\langle u+v,u-v\rangle=||u||^2-||v||^2$ 对任意 $u,v\in V$ 成立.

(2) 证明: 若 $u,v\in V$ 满足 $||u||=||v||$, 那么 $u+v$ 正交于 $u-v$.

(3) 证明: 菱形的对角线相互垂直.

Proof.

(1) 我们有

$$\begin{aligned}\langle u+v,u-v\rangle&=\langle u,u-v\rangle+\langle v,u-v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=||u||^2-||v||^2\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$||u||=||v||\Rightarrow\langle u+v,u-v\rangle=0\Rightarrow u+v\perp u-v$$

(3) 令 $V=\mathbb{R}^2$, 考虑菱形 $ABCD$, 令 $u=\overrightarrow{BA},v=\overrightarrow{BC}$, 则有 $u+v=\overrightarrow{BD},u-v=\overrightarrow{CA}$.

由于 $BA=BC$, 则 $||u||=||v||$, 由 **(2)** 可知 $\overrightarrow{BD}$ 和 $\overrightarrow{CA}$ 正交, 因而 $BD\perp AC$, 命题得证.

6. 设 $u,v\in V$, 试证明:$\langle u,v\rangle=0$ 当且仅当对任意 $a\in\mathbb{F}$ 都有 $||u||\leqslant||u+av||$.

Proof.

$\Rightarrow$: 对任意 $a \in \mathbb{F}$ 有 $\langle u, av \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle = 0$, 于是 u 和 av 正交. 于是

$$||u + av||^2 = ||u||^2 + ||av||^2 \geqslant ||u||^2$$

于是 $||u|| \leqslant ||u + av||$.

$\Leftarrow$: 考虑 u 的正交分解, 取 $c = \dfrac{\langle u, v \rangle}{||v||^2}$. 取 $w = u - cv$, 则 $\langle w, v \rangle = 0$. 于是

$$||u + cv||^2 = ||w||^2 = ||u||^2 - ||cv||^2 = ||u||^2 - c^2 ||v||^2 \geqslant ||u||^2$$

于是 $c = 0$, 因而 $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.

7. 设 $u, v \in V$. 试证明:$||au + bv|| = ||bu + av||$ 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 成立, 当且仅当 $||u|| = ||v||$.

Proof.

$\Rightarrow$: 取 $a = 1, b = 0$ 即有 $||u|| = ||v||$.

$\Leftarrow$: 当 $||u|| = ||v||$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}
||au + bv||^2 &= \langle au + bv, au + bv \rangle \\
&= a^2 ||u||^2 + b^2 ||v||^2 + 2ab \langle u, v \rangle \\
&= a^2 ||v||^2 + b^2 ||u||^2 + 2ab \langle u, v \rangle \\
&= \langle bu + av, bu + av \rangle \\
&= ||bu + av||^2
\end{aligned}$$

于是 $||au + bv|| = ||bu + av||$.

8. 设 $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 \leqslant 1$. 试证明:$a + b + c + 4x + 9y \leqslant 10$.

Proof.

我们有

$$(a + b + c + 4x + 9y)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2) \leqslant 100$$

两边开平方即得

$$a + b + c + 4x + 9y \leqslant 10$$

9. 设 $u, v \in V, ||u|| = ||v|| = \langle u, v\rangle = 1$. 试证明:$u = v$.

Proof.

据 Cauchy-Schwarz 不等式,$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$ 当且仅当 $u = \lambda v, \lambda \in \mathbb{F}$ 时成立.

又 $1 = \langle u, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda ||v||^2 = \lambda$, 于是 $\lambda = 1$, 即 $u = v$.

10. 设 $u, v \in V, ||u|| < 1$ 且 $||v|| < 1$. 试证明

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - |\langle u, v\rangle|$$

Proof.

我们有

$$(||u|| - ||v||)^2 \geqslant 0$$

于是

$$||u||^2 + ||v||^2 \geqslant 2||u||||v||$$

变形可得

$$\left(1 - ||u||^2\right)\left(1 - ||v||^2\right) \leqslant (1 - ||u||||v||)^2$$

而 $||u||, ||v|| < 1$, 于是

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - ||u||||v||$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

于是

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - |\langle u, v\rangle|$$

11. 求向量 $u, v \in \mathbb{R}^2$ 使得 u 是 $(1, 3)$ 的标量倍,v 正交于 $(1, 3)$, 且 $u + v = (1, 2)$.

Solution.

考虑 $(1, 2)$ 在 $(1, 3)$ 上的正交分解 $(1, 2) = c(1, 3) + w$, 其中 $c = \dfrac{\langle (1, 2), (1, 3)\rangle}{||(1, 3)||^2} = \dfrac{7}{10}$.

于是令 $u = \left(\dfrac{7}{10}, \dfrac{21}{10}\right), v = \left(\dfrac{3}{10}, -\dfrac{1}{10}\right)$.

12. 设 $a,b,c,d \in \mathbb{R}^*$.

(1) 试证明:$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$.

(2) 求上述不等式的取等条件.

Solution.

(1) 令 $u=\left(\sqrt{a},\sqrt{b},\sqrt{c},\sqrt{d}\right), v=\left(\sqrt{\frac{1}{a}},\sqrt{\frac{1}{b}},\sqrt{\frac{1}{c}},\sqrt{\frac{1}{d}}\right)$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u,v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

即

$$4 \leqslant \sqrt{a+b+c+d}\cdot\sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

两边平方即得

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$$

(2) 据 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件, 当且仅当 $u=\lambda v$ 时取等, 即 $a=b=c=d$.

13. 证明: 如果 $a_1,\cdots,a_n \in \mathbb{R}$, 那么

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$$

Proof.

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)^2 \leqslant \left(n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\left(a_1^2+\cdots+a_n^2\right) = \frac{a_1^2+\cdots+a_n^2}{n}$$

于是命题得证.

14. 设 $v \in V$ 且 $v \neq \mathbf{0}$. 试证明: 如果 $u \in V$ 且 $||u||=1$, 那么

$$\left|\left|v-\frac{v}{||v||}\right|\right| \leqslant ||v-u||$$

当且仅当 $u=\frac{v}{||v||}$ 时等号成立.

Proof.

我们有

$$||v-u||^2-(||v||-||u||)^2=2\langle v,u\rangle+2||u||||v||\geqslant 0$$

即

$$|||v||-||u|||\leqslant ||v-u||^2$$

当且仅当 v,u 成标量倍关系时等式成立, 即 $u=\dfrac{v}{||v||}$ 或 $u=-\dfrac{v}{||v||}$ 时等号成立.
我们有

$$\left|1-\frac{1}{||v||}\right|<1+\frac{1}{||v||}$$

于是

$$\min||v-u||=\left|\left|v-\frac{v}{||v||}\right|\right|$$

命题得证.

15. 设 $u,v\in\mathbb{R}^2$ 且 $u,v\neq\mathbf{0}$, 试证明:

$$\langle u,v\rangle=||u||||v||\cos\theta$$

其中 θ 为向量 u,v 的夹角.

Proof.

对于 $u,v,u-v$ 构成的三角形使用余弦定理, 则有

$$\cos\theta=\frac{||u||^2+||v||^2-||u-v||^2}{2||u||||v||}$$

而

$$||u-v||^2=||u||^2+||v^2||-2\langle u,v\rangle$$

代入上式有

$$\cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{||u||||v||}$$

变形可得

$$\langle u,v\rangle=||u||||v||\cos\theta$$

于是命题得证.

16. $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中向量的夹角可以用几何方法定义, 然而对于更高维的空间 $\mathbb{R}^n$ 中的几何则并不明晰. 因此, 定义 $x,y\in\mathbb{R}^n$ 的夹角 θ 为

$$\arccos\frac{\langle x,y\rangle}{||x||||y||}$$

这一定义的动机来源于 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中夹角的几何意义. 试解释: 证明这一定义的成立需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

Solution.

为保证 arccos 函数有意义, 这一定义的成立至少要求

$$-1 \leqslant \frac{\langle x, y\rangle}{||x||||y||} \leqslant 1$$

即

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant ||x||||y||$$

这就需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

17. 试证明: 对于任意 $a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$, 都有

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}\right)$$

Proof.

令 $u = \left(a_1, \sqrt{2}a_2, \cdots, \sqrt{n}a_n\right), v = \left(b_1, \frac{b_2}{\sqrt{2}}, \cdots, \frac{b_n}{\sqrt{n}}\right)$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v\rangle|^2 \leqslant ||u||^2||v||^2$$

即

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} k a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{b_k^2}{k}\right)$$

18. 设函数 $f(x) : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ 连续.

(1) 试证明:

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_1^{+\infty} x^2 \left(f(x)\right)^2 \mathrm{d}x$$

.

(2) 试给出上述不等式两边均有限且取等时 $f(x)$ 满足的条件.

Proof.

(1) 考虑 $\mathbb{R}^{[1,t]}$ 上的内积

$$\langle u, v\rangle = \int_1^t uv$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left(\int_1^t uv\right)^2 \leqslant \left(\int_1^t u^2\right)\left(\int_1^t v^2\right)$$

于是

$$\left(\int_1^t f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \left(\int_1^t \frac{x}{x} f(x)\mathrm{d}x\right) \leqslant \left(\int_1^t x^2\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\left(\int_1^t \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x\right) = \left(\int_1^t x^2\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x\right)\left(1-\frac{1}{t}\right)$$

而 $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1-\dfrac{1}{t}\right) = 1$, 又 $f(x)$ 非负, 于是

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant \int_1^{+\infty} x^2\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$$

(2) 当且仅当 $xf(x)$ 是 $\dfrac{1}{x}$ 的标量倍, 即 $f(x) = \dfrac{\lambda}{x^2}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}^*$. 此时

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right)^2 = \int_1^{+\infty} x^2\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x = \lambda^2$$

19. 设 $v_1, \cdots, v_n$ 是 V 的一个基, 且 $T \in \mathcal{L}(V)$. 试证明: 如果 λ 是 T 的特征值, 那么

$$|\lambda|^2 \leqslant \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left|\mathcal{M}(T)_{j,k}\right|^2$$

Proof.

考虑 V 上的内积

$$\langle a_1v_1 + \cdots + a_nv_n, b_1v_1 + \cdots + b_nv_n\rangle = a_1\overline{b_1} + \cdots + a_n\overline{b_n}$$

考虑 T 的特征向量 $v := a_1v_1 + \cdots + a_nv_n$ 使得 $Tv = \lambda v$, 则有

$$Tv = \sum_{k=1}^n a_k Tv_k = \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{j=1}^n \mathcal{M}(T)_{j,k} v_j\right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k}\right) v_j$$

于是

$$||Tv||^2 = \sum_{j=1}^n \left|\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k}\right|^2$$

又因为 $||Tv||^2 = |\lambda|^2 ||v||^2$, 于是

$$|\lambda|^2 = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{||v||^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2}$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式, 对于任意 $j \in \{1, \cdots, n\}$ 有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^{n} |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2 \right)$$

于是

$$|\lambda|^2 \leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2$$

20. 试证明: 如果 $u, v \in V$, 那么 $|||u|| - ||v||| \leqslant ||u - v||$.

Proof.

我们有

$$||u - v||^2 - (||u|| - ||v||)^2 = 2 \langle u, v \rangle + 2||u||||v|| \geqslant 0$$

即

$$|||u|| - ||v||| \leqslant ||u - v||^2$$

当且仅当 v, u 成标量倍关系时等式成立.

21. 设 $u, v \in V$ 使得

$$||u|| = 3 \qquad ||u + v|| = 4 \qquad ||u - v|| = 6$$

求 $||v||$.

Solution.

根据平行四边形不等式有

$$4^2 + 6^2 = 2 \left(3^2 + ||v||^2 \right)$$

于是 $||v|| = \sqrt{17}$.

22. 试证明: 如果 $u, v \in V$, 那么

$$||u+v|| ||u-v|| \leqslant ||u||^2 + ||v||^2$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}
&\left(||u||^2+||v||^2\right)^2-(||u+v|| ||u-v||)^2 \\
=&\left(||u||^2+||v||^2\right)^2-||u+v||^2||u-v||^2 \\
=&\left(||u||^2+||v||^2\right)^2-\left(||u||^2+||v||^2+2\left|\langle u, v\rangle\right|\right)\left(||u||^2+||v||^2-2\left|\langle u, v\rangle\right|\right) \\
=&\left(||u||^2+||v||^2\right)^2-\left(||u||^2+||v||^2\right)^2+4\left|\langle u, v\rangle\right|^2 \\
=&4\left|\langle u, v\rangle\right|^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

即

$$(||u+v|| ||u-v||)^2 \leqslant \left(||u||^2+||v||^2\right)^2$$

两边开平方即得

$$||u+v|| ||u-v|| \leqslant ||u||^2+||v||^2$$

23. 设 $v_1, \cdots, v_m \in V$ 使得对任意 $k \in \{1, \cdots, m\}$ 都有 $||v_k|| \leqslant 1$. 试证明: 存在 $a_1, \cdots, a_m \in \{-1, 1\}$ 使得

$$||a_1 v_1 + \cdots + a_m v_m|| \leqslant \sqrt{m}$$

Proof.

对 m 使用归纳法. 当 $m=1$ 时, 命题的成立是显然的, 因为 $||v_1|| \leqslant 1$.

现在假设 $m>1$, 且命题对所有小于 m 的正整数均成立. 令 $v=a_1 v_1+\cdots+a_{m-1} v_{m-1}$, 于是 $||v|| \leqslant \sqrt{m-1}$.

我们有

$$||v+a_m v_m||^2=||v||^2+||v_m||^2+2 a_m\left\langle v, v_m\right\rangle=m+2 a_m\left\langle v, v_m\right\rangle$$

若 $\left\langle v, v_m\right\rangle \geqslant 0$, 则令 $a_m=-1$, 否则令 $a_m=1$, 则有

$$||v+a_m v_m||^2 \leqslant m$$

两边开平方即得

$$||v+a_m v_m||=||a_1 v_1+\cdots+a_m v_m|| \leqslant \sqrt{m}$$

归纳可知命题成立.

24. 证明或给出一反例: 如果 $||\cdot||$ 是与 $\mathbb{R}^2$ 上与一内积关联的范数, 那么存在 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $||(x,y)||\neq\max\{|x|,|y|\}$.

Proof.

如果对于任意 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 都有 $||(x,y)||=\max\{|x|,|y|\}$，不妨令 $f((x,y))=\max\{|x|,|y|\}$.

令 $u=(1,0),v=(1,1)$, 则有

$$f^2(u+v)+f^2(u-v)=5\neq 4=2\left(f^2(u)+f^2(v)\right)$$

于是这定义不满足范数的性质. 于是对于任意 $\mathbb{R}^2$ 上的范数, 总存在 $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ 使得 $||(x,y)||\neq\max\{|x|,|y|\}$.

25. 设 $p>0$. 试证明:$\mathbb{R}^2$ 上存在一内积, 使得与其关联的范数由下式给出:

$$||(x,y)||=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}},\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$

当且仅当 $p=2$.

Proof.

令 $f(x,y)=(|x|^p+|y|^p)^{\frac{1}{p}}$,$u=(1,0),v=(0,1)$, 则有

$$f^2(u+v)+f^2(u-v)=2\cdot 2^{\frac{2}{p}}$$

$$f^2(u)+f^2(v)=2$$

由平行四边形等式可得

$$2\cdot 2^{\frac{2}{p}}=2\cdot 2$$

于是 $2^{\frac{2}{p}}=2$, 即 $p=2$.

26. 设 V 是实内积空间, 试证明: 对任意 $u,v\in V$, 有

$$\langle u,v\rangle=\frac{||u+v||^2-||u-v||^2}{4}$$

Proof.

我们有

$$||u+v||^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle$$

同理有

$$||u-v||^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle - \langle v,v\rangle$$

在实内积空间上有

$$\langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle$$

于是将两式相减可得

$$||u+v||^2 - ||u-v||^2 = 4\langle u,v\rangle$$

整理可得

$$\langle u,v\rangle = \frac{||u+v||^2 - ||u-v||^2}{4}$$

27. 设 V 是复内积空间, 试证明: 对任意 $u, v \in V$, 有

$$\langle u,v\rangle = \frac{||u+v||^2 - ||u-v||^2 + ||u+\mathrm{i}v||^2\mathrm{i} - ||u-\mathrm{i}v||^2\mathrm{i}}{4}$$

Proof.

我们有

$$||u+v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle$$

同理有

$$||u-v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle$$

$$||u+\mathrm{i}v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - \mathrm{i}\langle u,v\rangle + \mathrm{i}\langle v,u\rangle$$

$$||u-\mathrm{i}v||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 + \mathrm{i}\langle u,v\rangle - \mathrm{i}\langle v,u\rangle$$

在复内积空间上有

$$\langle v,u\rangle = \overline{\langle u,v\rangle}$$

于是

$$\begin{aligned}
&||u+v||^2 - ||u-v||^2 + ||u+\mathrm{i}v||^2\mathrm{i} - ||u-\mathrm{i}v||^2\mathrm{i} \\
=&(2\langle u,v\rangle + 2\langle v,u\rangle) + (\langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle u,v\rangle = \langle v,u\rangle) \\
=&4\langle u,v\rangle
\end{aligned}$$

整理可得

$$\langle u,v\rangle=\frac{||u+v||^2-||u-v||^2+||u+\mathrm{i}v||^2\mathrm{i}-||u-\mathrm{i}v||^2\mathrm{i}}{4}$$

28. 设向量空间 U 上的范数是这样的一个函数

$$||\cdot||:U\to[0,+\infty)$$

其满足如下性质.

(1) $||u||=0$ 当且仅当 $u=\mathbf{0}$.

(2) $||\alpha u||=|\alpha|||u||$ 对任意 $\alpha\in\mathbb{F}$ 和任意 $u\in U$ 成立.

(3) $||u+v||\leqslant||u||+||v||$ 对任意 $u,v\in U$ 成立.

证明: 如果 $||\cdot||$ 满足平行四边形等式, 那么 U 上存在一内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 使得对任意 $u\in U$ 有 $||u||=\sqrt{\langle u,u\rangle}$.

Proof.

若 U 是实向量空间, 那么定义 U 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为

$$\langle u,v\rangle=\frac{||u+v||^2-||u-v||^2}{4}$$

首先有

$$\langle u,u\rangle=\frac{||2u||^2}{4}=||u||^2$$

于是这一定义满足

$$||u||=\sqrt{\langle u,u\rangle}$$

我们现在来证明这定义是满足内积的性质的.

(1) **正性**: 对于任意 $u\in U$, 都有 $\langle u,u\rangle=||u||^2\geqslant0$.

(2) **定性**:$\langle u,u\rangle=||u||^2=0$ 当且仅当 $||u||=0$, 即当且仅当 $u=\mathbf{0}$.

(3) **共轭对称性**: 我们有

$$\langle u,v\rangle=\frac{||u+v||^2-||u-v||^2}{4}=\frac{||v+u||^2-||v-u||^2}{4}=\langle v,u\rangle$$

(4) **第一位上的可加性**: 对于任意 $u,v,w\in U$, 有

$$||v+2w||^2+||v||^2=2||v+w||^2+2||w||^2$$

$$||v-2w||^2+||v||^2=2||v-w||^2+2||w||^2$$

上述两式相减可得

$$||v+2w||^2-||v-2w||^2=2||v+w||^2-2||v-w||^2$$

再次运用平行四边形定理可得

$$2||u+v+w||^2+2||u-w||^2=||v+2u||^2+||v+2w||^2$$

$$2||u+v-w||^2+2||u+w||^2=||v+2u||^2+||v-2w||^2$$

两式相减, 结合前面的推导可得

$$||u+v+w||^2-||u+v-w||^2+||u-w||^2-||u+w||^2=||v+w||^2-||v-w||^2$$

即

$$\frac{||u+v+w||^2-||u+v-w||^2}{4}=\frac{||u+w||^2-||u-w||^2}{4}+\frac{||v+w||^2-||v-w||^2}{4}$$

即

$$\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$$

于是这内积满足可加性.

(5) 第一位上的齐次性: 我们首先证明对于任意 $n\in\mathbb{Z}$. 对于任意 $u,v\in U$ 有 $\langle nu,v\rangle=n\langle u,v\rangle$.

为此, 采取归纳法. 当 $n=1$ 时, 命题的成立是显然的.

现在假设 $n>1$, 且命题对所有小于 n 的正整数都成立. 于是

$$\langle nu,v\rangle=\langle (n-1)u+u,v\rangle=\langle (n-1)u,v\rangle+\langle u,v\rangle=(n-1)\langle u,v\rangle+\langle u,v\rangle=n\langle u,v\rangle$$

而 $n=0$ 时有

$$\langle 0u,v\rangle=\langle \mathbf{0},v\rangle=0=0\langle u,v\rangle$$

对于任意负整数 n, 有

$$\langle nu,v\rangle=\frac{||v-(-nu)||^2-||v+(-nu)||^2}{4}=-n\langle -u,v\rangle=n\langle u,v\rangle$$

当 $n\neq 0$ 时, 有

$$n\left\langle \frac{1}{n}u,v\right\rangle=\sum_{k=1}^{n}\left\langle \frac{1}{n}u,v\right\rangle=\left\langle \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}u,v\right\rangle=\langle u,v\rangle$$

于是

$$\left\langle \frac{1}{n}u,v\right\rangle=\frac{1}{n}\langle u,v\rangle$$

于是对于任意 $\dfrac{p}{q}\in\mathbb{Q}:p,q\in\mathbb{Z}$ 有

$$\left\langle \frac{p}{q}u,v\right\rangle=p\left\langle \frac{1}{q}u,v\right\rangle=\frac{p}{q}\langle u,v\rangle$$

对于任意 $r \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$, 总存在有理序列 $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty} r_k = r$.

又根据三角不等式, 不难推出 $||\cdot||$ 是 $U \to \mathbb{R}$ 的连续函数. 我们有

$$\begin{aligned} r\langle u,v\rangle &= \lim_{k\to\infty} r_k\langle u,v\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty}\langle r_k u,v\rangle \\ &= \lim_{k\to\infty}\frac{||r_k u+v||^2-||r_k u-v||^2}{4} \\ &= \frac{||ru+v||^2-||ru-v||^2}{4} \\ &= \langle ru,v\rangle \end{aligned}$$

综上所述, 对于任意 $u, v \in U$ 和任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u,v\rangle$. 于是这内积满足齐次性.

因此这内积的定义是成立的.

若 U 是复向空间, 那么定义 U 上的内积 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 为

$$\langle u,v\rangle = \frac{||u+v||^2-||u-v||^2+||u+\mathrm{i}v||^2\mathrm{i}-||u-\mathrm{i}v||^2\mathrm{i}}{4}$$

如此证明, 过程是相似的, 在此不再赘述.

综上可知命题成立.

29. 设 $V_1, \cdots, V_m$ 是内积空间, 试证明等式

$$\langle(u_1,\cdots,u_m),(v_1,\cdots,v_m)\rangle = \langle u_1,v_1\rangle+\cdots+\langle u_m,v_m\rangle$$

定义了 $V_1\times\cdots\times V_m$ 上的一个内积.

Proof.

我们逐条证明这定义符合内积的性质.

(1) 正性: 对于任意 $v_1, \cdots, v_m$ 满足 $v_k \in V_k$, 有

$$\langle(v_1,\cdots,v_m),(v_1,\cdots,v_m)\rangle = \langle v_1,v_1\rangle+\cdots+\langle v_m,v_m\rangle \geqslant 0$$

(2) 定性: 我们有

$$\begin{aligned} \langle(v_1,\cdots,v_m),(v_1,\cdots,v_m)\rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle v_1,v_1\rangle+\cdots+\langle v_m,v_m\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle v_1,v_1\rangle=\cdots=\langle v_m,v_m\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow v_1=\cdots=v_m=\mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow (v_1,\cdots,v_m)=\mathbf{0} \end{aligned}$$

(3) 第一位上的可加性: 对于任意 $v_1, \cdots, v_m, u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_m$ 满足 $u_k, v_k, w_k \in V_k$, 我们有

$$\begin{aligned}
&\langle (u_1, \cdots, u_m) + (v_1, \cdots, v_m), w_1, \cdots, w_m \rangle \\
=&\langle (u_1 + v_1, \cdots, u_m + v_m), w_1, \cdots, w_m \rangle \\
=&\langle u_1 + v_1, w_1 \rangle + \cdots + \langle u_m + v_m, w_m \rangle \\
=&\langle u_1, w_1 \rangle + \langle v_1, w_1 \rangle + \cdots + \langle u_m, w_m \rangle + \langle v_m, w_m \rangle \\
=&\langle u_1, w_1 \rangle + \cdots + \langle u_m, w_m \rangle + \langle v_1, w_1 \rangle + \cdots + \langle v_m, w_m \rangle \\
=&\langle (u_1, \cdots, u_m), (w_1, \cdots, w_m) \rangle + \langle (v_1, \cdots, v_m), (w_1, \cdots, w_m) \rangle
\end{aligned}$$

(4) 第一位上的齐次性: 对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}$, 任意 $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ 满足 $u_k, v_k \in V_k$, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(u_1, \cdots, u_m), (v_1, \cdots, v_m) \rangle &= \langle (\lambda u_1, \cdots, \lambda u_m), (v_1, \cdots, v_m) \rangle \\
&= \langle \lambda u_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle \lambda u_m, v_m \rangle \\
&= \lambda \left(\langle u_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle u_m, v_m \rangle \right) \\
&= \lambda \left\langle (u_1, \cdots, u_m), (v_1, \cdots, v_m) \right\rangle
\end{aligned}$$

(5) 共轭对称性: 对于任意 $u_1, \cdots, u_m, v_1, \cdots, v_m$ 满足 $u_k, v_k \in V_k$, 我们有

$$\begin{aligned}
\langle (v_1, \cdots, v_m), (u_1, \cdots, u_m) \rangle &= \langle v_1, u_1 \rangle + \cdots + \langle v_m, u_m \rangle \\
&= \overline{\langle u_1, v_1 \rangle} + \cdots + \overline{\langle u_m, v_m \rangle} \\
&= \overline{\langle u_1, v_1 \rangle + \cdots + \langle u_m, v_m \rangle} \\
&= \overline{\langle (u_1, \cdots, u_m), (v_1, \cdots, v_m) \rangle}
\end{aligned}$$

于是这定义满足内积的性质, 因而是 $V_1 \times \cdots \times V_m$ 上的内积.

30. 设 V 是实内积空间. 对于 $u, v, w, x \in V$, 定义

$$\langle u + \mathrm{i}v, w + \mathrm{i}x \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, w \rangle + \langle v, x \rangle + (\langle v, w \rangle - \langle u, x \rangle)\, \mathrm{i}$$

(1) 试证明:$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{C}}$ 使 $V_{\mathbb{C}}$ 成为复内积空间.

(2) 试证明: 如果 $u, v \in V$, 那么

$$\langle u, v \rangle_{\mathbb{C}} = \langle u, v \rangle \ \text{且} ||u + \mathrm{i}v||_{\mathbb{C}}^2 = ||u||^2 + ||v||^2$$

Proof.

(1) 只需依次证明这定义满足内积的性质即可, 在此不再赘述.

(2) 我们有

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle_{\mathbb{C}} &= \langle u,v\rangle + \langle \mathbf{0},\mathbf{0}\rangle + (\langle \mathbf{0},v\rangle - \langle u,\mathbf{0}\rangle)\,\mathrm{i} \\ &= \langle u,v\rangle + 0 + (0-0)\,\mathrm{i} \\ &= \langle u,v\rangle\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}||u+\mathrm{i}v||_{\mathbb{C}}^2 &= \langle u+\mathrm{i}v, u+\mathrm{i}v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + (\langle v,u\rangle - \langle u,v\rangle)\,\mathrm{i} \\ &= ||u||^2 + ||v||^2\end{aligned}$$

于是命题得证.

31. 设 V 是内积空间, 试证明: 对于任意 $u,v,w\in V$, 有

$$\left|\left|w-\frac{1}{2}(u+v)\right|\right|^2 = \frac{||w-u||^2+||w-v||^2}{2} - \frac{||u-v||^2}{4}$$

Proof.

根据平行四边形等式有

$$||u+v-2w||^2 + ||u-v||^2 = 2||u-w||^2 + 2||v-w||^2$$

移项后两边除以 4 即可得到欲证等式.

32. 设 E 是 V 的子集, 满足对任意 $u,v\in E$ 都有 $\frac{1}{2}(u+v)\in E$. 令 $w\in V$, 试证明: 至多存在一个 $u\in E$ 使得

$$||w-u|| \leqslant ||w-x||$$

对所有 $x\in E$ 成立.

Proof.

如果存在 $u,v\in E$ 满足题意且 $u\neq v$, 那么 $\frac{1}{2}(u+v)\in E$. 根据 **6A.31** 可得

$$\begin{aligned}\left|\left|w-\frac{1}{2}(u+v)\right|\right|^2 &= \frac{||w-u||^2+||w-v||^2}{2} - \frac{||u-v||^2}{4} \\ &= ||w-u||^2 - \frac{||u-v||^2}{4} \\ &< ||w-u||^2\end{aligned}$$

这就推出了矛盾, 于是命题得证.

33. 设 f, g 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ 的可微函数.

(1) 试证明:

$$(\langle f(t), g(t)\rangle)' = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$$

(2) 设 $c > 0$, 且 $||f(t)|| = c$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 成立. 试证明:$\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$ 对任意 $t \in \mathbb{R}$ 成立.

(3) 用几何的方式, 从 $\mathbb{R}^n$ 中以原点为球心的球上一曲线的切向量这一角度解释上一问的结果.

Proof.

(1) 设 $f_1, \cdots, f_n, g_1, \cdots, g_n$ 使得对任意 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$f(t) = (f_1(t), \cdots, f_n(t)) \qquad g(t) = (g_1(t), \cdots, g_n(t))$$

于是

$$\langle f(t), g(t)\rangle = (f_1(t)g_1(t), \cdots, f_n(t)g_n(t))$$

又对于任意 $k \in \{1, \cdots, n\}$ 有

$$(f_k(t)g_k(t))' = f_k'(t)g_k(t) + f_k(t)g_k'(t)$$

于是

$$\begin{aligned}(\langle f(t), g(t)\rangle)' &= \big((f_1(t)g_1(t)), \cdots, (f_n(t)g_n(t))'\big)\\ &= (f_1'(t)g_1(t) + f_1(t)g_1'(t), \cdots, f_n'(t)g_n(t) + f_n(t)g_n'(t))\\ &= (f_1'(t)g_1(t), \cdots, f_n'(t)g_n(t)) + (f_1(t)g_1'(t), \cdots, f_n(t)g_n'(t))\\ &= \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle\end{aligned}$$

于是命题得证.

(2) 我们有

$$c^2 = ||f(t)||^2 = \langle f(t), f(t)\rangle$$

于是

$$0 = (\langle f(t), f(t)\rangle)' = \langle f(t), f'(t)\rangle + \langle f'(t), f(t)\rangle = 2\langle f'(t), f(t)\rangle$$

于是

$$\langle f'(t), f(t)\rangle = 0$$

于是命题得证.

(3) 当曲线恒在球面上时, 其切向量一定在球面的切面上, 于是一定与该曲线正交.

34. 证明阿波罗尼斯恒等式成立: 在三边长为 a, b, c 的三角形中, 令 d 为 c 对应边上的中线长度, 则有

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2$$

Proof.

令 $\triangle ABC$ 中 $AB = c, AC = b, BC = a, \overrightarrow{AB} = u, \overrightarrow{AC} = v$. 于是

$$||u+v||^2 + ||u-v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2$$

即

$$(2d)^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2$$

整理可得

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{2}c^2 + 2d^2$$

35. 取定一正整数 n.$\mathbb{R}^n$ 上的二阶可微实值函数 p 的 Laplace 算子 Δp 是 $\mathbb{R}^n$ 上的函数, 定义为

$$\Delta p = \frac{\partial^2 p}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 p}{\partial x_n^2}$$

如果 $\Delta p = 0$, 则称 p 是调和的.

$\mathbb{R}^n$ 上的多项式是形如 $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ 的函数的线性组合 (其系数在 $\mathbb{R}$ 中), 其中 $m_1, \cdots, m_n$ 是非负整数.

设 q 是 $\mathbb{R}^n$ 上的多项式. 试证明:$\mathbb{R}^n$ 上存在一调和多项式 p, 使得 $p(x) = q(x)$ 对任意满足 $||x|| = 1$ 的 $x \in \mathbb{R}^n$ 都成立.

Proof.

在说明问题之前, 我们先做一些定义.

令多项式 p 的次数 $\deg p$ 为形如 $x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ 的所有项各中 m_k 的最大值.

定义 $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ 为所有次数不高于 m 的 $\mathbb{R}^n$ 上的多项式的集合. 不难验证 $\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n)$ 是向量空间.

根据 Laplace 算子的定义, 当 $\deg p \geqslant 2$ 时,$\deg \Delta p = \deg p - 2$. 又因为

$$1 - ||x||^2 = 1 - x_1^2 - \cdots - x_n^2$$

于是 $\deg \Delta \left((1 - ||x||^2) \, r \right) = \deg r + 2 - 2 = \deg r$.

于是, 定义映射 $T \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_m(\mathbb{R}^n))$ 为 $Tr = \Delta \left((1 - ||x||^2) \right) r$. 不难验证 T 是线性映射.

现在我们来证明 T 是单射.