

Linear Algebra Done Right 6A

1. 证明: 如果 $v_1, \dots, v_m \in V$, 那么

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle \geq 0$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned} \|v_1 + \dots + v_m\|^2 &= \sum_{j=1}^m \|v_j\|^2 + 2 \sum_{j,k \in \{1, \dots, m\}, j \neq k} \langle v_j, v_k \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle \end{aligned}$$

于是

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle v_j, v_k \rangle = \|v_1 + \dots + v_m\|^2 \geq 0$$

2. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$, 定义 $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ 为

$$\langle u, v \rangle_S = \langle Su, Sv \rangle$$

对所有 $u, v \in V$ 成立. 试证明: $\langle \cdot, \cdot \rangle_S$ 是 V 上的内积, 当且仅当 S 是单射.

Proof.

我们有

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_S \text{ 是内积} \Leftrightarrow \langle v, v \rangle_S = 0 \text{ 当且仅当 } v = \mathbf{0} \Leftrightarrow \langle Sv, Sv \rangle = 0 \text{ 当且仅当 } Sv = \mathbf{0} \Leftrightarrow \text{null } S = \{\mathbf{0}\} \Leftrightarrow S \text{ 是单射}$$

3. 证明下列命题.

(1) 证明: 将 \mathbb{R}^2 中的有序对 $((x_1, x_2), (y_1, y_2))$ 映射到 $|x_1 y_1| + |x_2 y_2|$ 的函数不是 \mathbb{R}^2 上的内积.

(2) 证明: 将 \mathbb{R}^3 中的有序对 $((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3))$ 映射到 $x_1 y_1 + x_3 y_3$ 的函数不是 \mathbb{R}^3 上的内积.

Proof.

(1) 令 $u = (1, 0), v = (-1, 0), w = (1, 0)$, 于是

$$f(u, w) = 1 \quad f(v, w) = 1 \quad f(u + v, w) = 0$$

于是 $f(u+v, w) \neq f(u, w) + f(v, w)$, 因而这映射 f 不满足第一位上的可加性, 不是 \mathbb{R}^2 上的内积.
 (2) 令 $v = (0, 1, 0)$, 则 $g(v, v) = 0$, 而 $v \neq \mathbf{0}$, 因而这映射 g 不满足定性, 不是 \mathbb{R}^3 上的内积.

4. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\|Tv\| \leq \|v\|$ 对任意 $v \in V$ 成立. 试证明: $T - \sqrt{2}I$ 是单射.

Proof.

若 $T - \sqrt{2}I$ 不是单射, 则存在 $v \in V$ 且 $v \neq \mathbf{0}$ 使得 $Tv = \sqrt{2}v$. 于是

$$\|Tv\| = \|\sqrt{2}v\| = \sqrt{2}\|v\| > \|v\|$$

这与题设矛盾, 从而 $T - \sqrt{2}I$ 是单射.

5. 设 V 是实内积空间. 证明下列命题.

- (1) 证明: $\langle u+v, u-v \rangle = \|u\|^2 - \|v\|^2$ 对任意 $u, v \in V$ 成立.
- (2) 证明: 若 $u, v \in V$ 满足 $\|u\| = \|v\|$, 那么 $u+v$ 正交于 $u-v$.
- (3) 证明: 菱形的对角线相互垂直.

Proof.

(1) 我们有

$$\begin{aligned} \langle u+v, u-v \rangle &= \langle u, u-v \rangle + \langle v, u-v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \langle u, u \rangle - \langle v, v \rangle \\ &= \|u\|^2 - \|v\|^2 \end{aligned}$$

(2) 我们有

$$\|u\| = \|v\| \Rightarrow \langle u+v, u-v \rangle = 0 \Rightarrow u+v \perp u-v$$

(3) 令 $V = \mathbb{R}^2$, 考虑菱形 $ABCD$, 令 $u = \overrightarrow{BA}, v = \overrightarrow{BC}$, 则有 $u+v = \overrightarrow{BD}, u-v = \overrightarrow{CA}$.

由于 $BA = BC$, 则 $\|u\| = \|v\|$, 由 (2) 可知 \overrightarrow{BD} 和 \overrightarrow{CA} 正交, 因而 $BD \perp AC$, 命题得证.

6. 设 $u, v \in V$, 试证明: $\langle u, v \rangle = 0$ 当且仅当对任意 $a \in \mathbb{F}$ 都有 $\|u\| \leq \|u + av\|$.

Proof.

\Rightarrow : 对任意 $a \in \mathbb{F}$ 有 $\langle u, av \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle = 0$, 于是 u 和 av 正交. 于是

$$\|u + av\|^2 = \|u\|^2 + \|av\|^2 \geq \|u\|^2$$

于是 $\|u\| \leq \|u + av\|$.

\Leftarrow : 考虑 u 的正交分解, 取 $c = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$. 取 $w = u - cv$, 则 $\langle w, v \rangle = 0$. 于是

$$\|u + cv\|^2 = \|w\|^2 = \|u\|^2 - \|cv\|^2 = \|u\|^2 - c^2\|v\|^2 \geq \|u\|^2$$

于是 $c = 0$, 因而 $\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.

7. 设 $u, v \in V$. 试证明: $\|au + bv\| = \|bu + av\|$ 对任意 $a, b \in \mathbb{R}$ 成立, 当且仅当 $\|u\| = \|v\|$.

Proof.

\Rightarrow : 取 $a = 1, b = 0$ 即有 $\|u\| = \|v\|$.

\Leftarrow : 当 $\|u\| = \|v\|$ 时, 我们有

$$\begin{aligned}\|au + bv\|^2 &= \langle au + bv, au + bv \rangle \\ &= a^2\|u\|^2 + b^2\|v\|^2 + 2ab\langle u, v \rangle \\ &= a^2\|v\|^2 + b^2\|u\|^2 + 2ab\langle u, v \rangle \\ &= \langle bu + av, bu + av \rangle \\ &= \|bu + av\|^2\end{aligned}$$

于是 $\|au + bv\| = \|bu + av\|$.

8. 设 $a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$ 且 $a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 \leq 1$. 试证明: $a + b + c + 4x + 9y \leq 10$.

Proof.

我们有

$$(a + b + c + 4x + 9y)^2 \leq (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2) \leq 100$$

两边开平方即得

$$a + b + c + 4x + 9y \leq 10$$

9. 设 $u, v \in V, \|u\| = \|v\| = \langle u, v \rangle = 1$. 试证明: $u = v$.

Proof.

据 Cauchy-Schwarz 不等式, $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$ 当且仅当 $u = \lambda v, \lambda \in \mathbb{F}$ 时成立.

又 $1 = \langle u, v \rangle = \langle v, \lambda v \rangle = \lambda \|v\|^2 = \lambda$, 于是 $\lambda = 1$, 即 $u = v$.

10. 设 $u, v \in V, \|u\| < 1$ 且 $\|v\| < 1$. 试证明

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$$

Proof.

我们有

$$(\|u\| - \|v\|)^2 \geq 0$$

于是

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 \geq 2\|u\| \|v\|$$

变形可得

$$(1 - \|u\|^2)(1 - \|v\|^2) \leq (1 - \|u\| \|v\|)^2$$

而 $\|u\|, \|v\| < 1$, 于是

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - \|u\| \|v\|$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

于是

$$\sqrt{1 - \|u\|^2} \sqrt{1 - \|v\|^2} \leq 1 - |\langle u, v \rangle|$$

11. 求向量 $u, v \in \mathbb{R}^2$ 使得 u 是 $(1, 3)$ 的标量倍, v 正交于 $(1, 3)$, 且 $u + v = (1, 2)$.

Solution.

考虑 $(1, 2)$ 在 $(1, 3)$ 上的正交分解 $(1, 2) = c(1, 3) + w$, 其中 $c = \frac{\langle (1, 2), (1, 3) \rangle}{\|(1, 3)\|^2} = \frac{7}{10}$.

于是令 $u = \left(\frac{7}{10}, \frac{21}{10}\right), v = \left(\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}\right)$.

12. 设 $a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$.

(1) 试证明: $(a + b + c + d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$.

(2) 求上述不等式的取等条件.

Solution.

(1) 令 $u = (\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}), v = \left(\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b}}, \sqrt{\frac{1}{c}}, \sqrt{\frac{1}{d}} \right)$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|$$

即

$$4 \leq \sqrt{a+b+c+d} \cdot \sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}}$$

两边平方即得

$$(a+b+c+d) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} \right) \geq 16$$

(2) 据 Cauchy-Schwarz 不等式的取等条件, 当且仅当 $u = \lambda v$ 时取等, 即 $a = b = c = d$.

13. 证明: 如果 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 那么

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

Proof.

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left(\frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right)^2 \leq \left(n \cdot \frac{1}{n^2} \right) (a_1^2 + \dots + a_n^2) = \frac{a_1^2 + \dots + a_n^2}{n}$$

于是命题得证.

14. 设 $v \in V$ 且 $v \neq \mathbf{0}$. 试证明: 如果 $u \in V$ 且 $\|u\| = 1$, 那么

$$\left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq \|v - u\|$$

当且仅当 $u = \frac{v}{\|v\|}$ 时等号成立.

Proof.

我们有

$$\|v - u\|^2 - (\|v\| - \|u\|)^2 = 2\langle v, u \rangle + 2\|u\|\|v\| \geq 0$$

即

$$\| \|v\| - \|u\| \| \leq \|v - u\|^2$$

当且仅当 v, u 成标量倍关系时等式成立, 即 $u = \frac{v}{\|v\|}$ 或 $u = -\frac{v}{\|v\|}$ 时等号成立.

我们有

$$\left| 1 - \frac{1}{\|v\|} \right| < 1 + \frac{1}{\|v\|}$$

于是

$$\min \|v - u\| = \left\| v - \frac{v}{\|v\|} \right\|$$

命题得证.

15. 设 $u, v \in \mathbb{R}^2$ 且 $u, v \neq \mathbf{0}$, 试证明:

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos \theta$$

其中 θ 为向量 u, v 的夹角.

Proof.

对于 $u, v, u - v$ 构成的三角形使用余弦定理, 则有

$$\cos \theta = \frac{\|u\|^2 + \|v\|^2 - \|u - v\|^2}{2\|u\|\|v\|}$$

而

$$\|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v \rangle$$

代入上式有

$$\cos \theta = \frac{\langle u, v \rangle}{\|u\|\|v\|}$$

变形可得

$$\langle u, v \rangle = \|u\|\|v\| \cos \theta$$

于是命题得证.

16. \mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^3 中向量的夹角可以用几何方法定义, 然而对于更高维的空间 \mathbb{R}^n 中的几何则并不明晰. 因此, 定义 $x, y \in \mathbb{R}^n$ 的夹角 θ 为

$$\arccos \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$$

这一定义的动机来源于 \mathbb{R}^2 和 \mathbb{R}^3 中夹角的几何意义. 试解释: 证明这一定义的成立需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

Solution.

为保证 \arccos 函数有意义, 这一定义的成立至少要求

$$-1 \leq \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1$$

即

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

这就需要用到 Cauchy-Schwarz 不等式.

17. 试证明: 对于任意 $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$, 都有

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

Proof.

令 $u = (a_1, \sqrt{2}a_2, \dots, \sqrt{n}a_n), v = (b_1, \frac{b_2}{\sqrt{2}}, \dots, \frac{b_n}{\sqrt{n}})$. 据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$|\langle u, v \rangle|^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$$

即

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k b_k \right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n k a_k^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n \frac{b_k^2}{k} \right)$$

18. 设函数 $f(x) : [1, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$ 连续.

(1) 试证明:

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx$$

(2) 试给出上述不等式两边均有限且取等时 $f(x)$ 满足的条件.

Proof.

(1) 考虑 $\mathbb{R}^{[1,t]}$ 上的内积

$$\langle u, v \rangle = \int_1^t uv$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式有

$$\left(\int_1^t uv \right)^2 \leq \left(\int_1^t u^2 \right) \left(\int_1^t v^2 \right)$$

于是

$$\left(\int_1^t f(x) dx \right)^2 = \left(\int_1^t \frac{x}{x} f(x) dx \right) \leq \left(\int_1^t x^2 (f(x))^2 dx \right) \left(\int_1^t \frac{1}{x^2} dx \right) = \left(\int_1^t x^2 (f(x))^2 dx \right) \left(1 - \frac{1}{t} \right)$$

而 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{t} \right) = 1$, 又 $f(x)$ 非负, 于是

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 \leq \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx$$

(2) 当且仅当 $xf(x)$ 是 $\frac{1}{x}$ 的标量倍, 即 $f(x) = \frac{\lambda}{x^2}$, 其中 $\lambda \in \mathbb{R}^*$. 此时

$$\left(\int_1^{+\infty} f(x) dx \right)^2 = \int_1^{+\infty} x^2 (f(x))^2 dx = \lambda^2$$

19. 设 v_1, \dots, v_n 是 V 的一个基, 且 $T \in \mathcal{L}(V)$. 试证明: 如果 λ 是 T 的特征值, 那么

$$|\lambda|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2$$

Proof.

考虑 V 上的内积

$$\langle a_1 v_1 + \dots + a_n v_n, b_1 v_1 + \dots + b_n v_n \rangle = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}$$

考虑 T 的特征向量 $v := a_1 v_1 + \dots + a_n v_n$ 使得 $Tv = \lambda v$, 则有

$$Tv = \sum_{k=1}^n a_k T v_k = \sum_{k=1}^n \left(a_k \sum_{j=1}^n \mathcal{M}(T)_{j,k} v_j \right) = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right) v_j$$

于是

$$\|Tv\|^2 = \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2$$

又因为 $\|Tv\|^2 = |\lambda|^2 \|v\|^2$, 于是

$$|\lambda|^2 = \frac{\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{\|v\|^2} = \frac{\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2}{\sum_{k=1}^n |a_k|^2}$$

据 Cauchy-Schwarz 不等式, 对于任意 $j \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k \mathcal{M}(T)_{j,k} \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right) \left(\sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2 \right)$$

于是

$$|\lambda|^2 \leq \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |\mathcal{M}(T)_{j,k}|^2$$

20. 试证明: 如果 $u, v \in V$, 那么 $|||u|| - ||v||| \leq \|u - v\|$.

Proof.

我们有

$$\|u - v\|^2 - (||u|| - ||v||)^2 = 2\langle u, v \rangle + 2||u||||v|| \geq 0$$

即

$$|||u|| - ||v||| \leq \|u - v\|$$

当且仅当 v, u 成标量倍关系时等式成立.

21. 设 $u, v \in V$ 使得

$$\|u\| = 3 \quad \|u + v\| = 4 \quad \|u - v\| = 6$$

求 $\|v\|$.

Solution.

根据平行四边形不等式有

$$4^2 + 6^2 = 2(3^2 + \|v\|^2)$$

于是 $\|v\| = \sqrt{17}$.

22. 试证明: 如果 $u, v \in V$, 那么

$$\|u+v\|\|u-v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned} & (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u+v\|\|u-v\|)^2 \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - \|u+v\|^2\|u-v\|^2 \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v \rangle|)(\|u\|^2 + \|v\|^2 - 2|\langle u, v \rangle|) \\ &= (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 - (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2 + 4|\langle u, v \rangle|^2 \\ &= 4|\langle u, v \rangle|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

即

$$(\|u+v\|\|u-v\|)^2 \leq (\|u\|^2 + \|v\|^2)^2$$

两边开平方即得

$$\|u+v\|\|u-v\| \leq \|u\|^2 + \|v\|^2$$

23. 设 $v_1, \dots, v_m \in V$ 使得对任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 都有 $\|v_k\| \leq 1$. 试证明: 存在 $a_1, \dots, a_m \in \{-1, 1\}$ 使得

$$\|a_1 v_1 + \dots + a_m v_m\| \leq \sqrt{m}$$

Proof.

对 m 使用归纳法. 当 $m = 1$ 时, 命题的成立是显然的, 因为 $\|v_1\| \leq 1$.

现在假设 $m > 1$, 且命题对所有小于 m 的正整数均成立. 令 $v = a_1 v_1 + \dots + a_{m-1} v_{m-1}$, 于是 $\|v\| \leq \sqrt{m-1}$.

我们有

$$\|v + a_m v_m\|^2 = \|v\|^2 + \|v_m\|^2 + 2a_m \langle v, v_m \rangle = m + 2a_m \langle v, v_m \rangle$$

若 $\langle v, v_m \rangle \geq 0$, 则令 $a_m = -1$, 否则令 $a_m = 1$, 则有

$$\|v + a_m v_m\|^2 \leq m$$

两边开平方即得

$$\|v + a_m v_m\| = \|a_1 v_1 + \dots + a_m v_m\| \leq \sqrt{m}$$

归纳可知命题成立.

|