Linear Algebra Done Right 7D

1. 设$\dim V \geqslant 2$,$S \in \mathcal{L}(V,W)$.试证明:S是等距映射,当且仅当对于任意V中一长度为2的规范正交组e_1,e_2都有Se_1,Se_2是W中的规范正交组.

Proof.

$\Rightarrow$:考虑$U=\operatorname{span}(e_1,e_2)$,于是$S|_U$是等距映射.

根据**7.49(d)**可知这等价于Se_1,Se_2是range $(S|_U)$中的规范正交组,即W中的规范正交组.

$\Leftarrow$:考虑V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.对任意$j,k\in\{1,\cdots,n\}$且$j<k$有Se_j,Se_k是W中的规范正交组,即

$$||Se_j||=||Se_k||=1,\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

于是$Se_1,\cdots,Se_n$是W中的规范正交组.根据**7.49(d)**可知S是等距映射.

2. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$,试证明:T是等距映射的标量倍,当且仅当T保持正交性.

注:所谓T保持正交性,即$\langle Tu,Tv\rangle=0$对所有满足$\langle u,v\rangle=0$的$u,v\in V$都成立.

Proof.

$\Rightarrow$:设T满足$T=\lambda S$,其中$S\in\mathcal{L}(V,W)$是等距映射.$\lambda\in\mathbb{F}$.

于是根据**7.49(c)**可知$\langle Su,Sv\rangle=\langle u,v\rangle$对所有$u,v\in V$都成立.于是

$$\langle Tu,Tv\rangle=\langle\lambda Su,\lambda Sv\rangle=|\lambda|^2\langle Su,Sv\rangle=|\lambda|^2\langle u,v\rangle=0$$

于是T保持正交性.

$\Leftarrow$:假定T保持正交性.设$e_1,\cdots,e_n$为V的规范正交基,于是对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$\langle e_1+e_k,e_1-e_k\rangle=||e_1||-||e_k||=0\Rightarrow\langle Te_1+Te_k,Te_1-Te_k\rangle=||Te_1||-||Te_k||=0$$

于是令$\lambda=||Te_1||$,则有$\lambda=||Te_k||$对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$都成立.

若$\lambda=0$,则$T=0I$是等距映射的标量倍.若$\lambda\neq0$,那么令$S=\dfrac{T}{\lambda}$,则有

$$\langle e_j,e_k\rangle=0\Rightarrow\langle Te_j,Te_k\rangle=0\Rightarrow\langle\lambda Se_j,\lambda Se_k\rangle=0\Rightarrow\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

对所有$j,k\in\{1,\cdots,n\},j\neq k$成立.又因为$||Se_k||=\left|\left|\dfrac{Te_k}{\lambda}\right|\right|=\left|\dfrac{\lambda}{\lambda}\right|=1$,于是$Se_1,\cdots,Se_n$是$W$中的规范正交组.

根据**7.49(d)**可知S是等距映射,于是T是等距映射的标量倍.

3. 证明下列命题.

(1) V上的两酉算子之积是酉算子.

(2) V上的酉算子之逆是酉算子.

Proof.

(1) 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$是酉算子,$e_1,\cdots,e_n$是V的规范正交基.
根据**7.53(d)**可知$Se_1,\cdots,Se_n$是V的规范正交基,于是$T(Se_1),\cdots,T(Se_n)$是V的规范正交基.
于是TS是V上的酉算子.

(2) 设$S\in\mathcal{L}(V)$是酉算子,由**7.53(c)**可知$S^{-1}=S^*$,由**7.53(f)**可知S^*是酉算子,于是命题得证.

4. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$,且$A,B\in\mathcal{L}(V)$自伴.试证明:$A+\mathrm{i}B$是酉算子,当且仅当$AB=BA$且$A^2+B^2=I$.

Proof.
我们有

$$\begin{aligned}A+\mathrm{i}B\text{是酉算子}&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A+\mathrm{i}B)^*=I\\&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A^*-\mathrm{i}B^*)=I\\&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)=I\\&\Leftrightarrow A^2+B^2+\mathrm{i}(BA-AB)=I\\&\Leftrightarrow A^2+B^2=I,AB=BA\end{aligned}$$

5. 设$S\in\mathcal{L}(V)$.试证明下列命题等价.

(a) S是自伴的酉算子.

(b) $S=2P-I$,其中P是V上的某个正交投影.

(c) 存在V的子空间U使得$Su=u$对任意$u\in U$成立而$Sw=-w$对所有$w\in U^\perp$成立.

Proof.
(a)⇒(b):设$S\in\mathcal{L}(V)$是自伴的酉算子,那么令$P=\dfrac{S+I}{2}$.
根据**7.53**可知$S^2=SS^*=I$,于是

$$P^2=\frac{S^2+2S+I}{4}=\frac{S+I}{2}=P$$

根据**7A.20(c)**可知存在V的子空间U使得$P=P_U$,于是P是V上的某个正交投影,此时有$S=2P-I$.
(b)⇒(c):对任意$u\in U$有$Su=2Pu-u=u$,对任意$w\in U^\perp$有$Sw=2P_Uw-w=\mathbf{0}-w=-w$.
(c)⇒(a):对任意$v_1:=u_1+w_1,v_2:=u_2+w_2\in V$,其中$u_1,u_2\in U,w_1,w_2\in U^\perp$有

$$\langle Sv_1,v_2\rangle=\langle u_1-w_1,u_2+w_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle-\langle w_1,w_2\rangle=\langle u_1+w_1,u_2-w_2\rangle=\langle v_1,Sv_2\rangle$$

于是S自伴.另外我们有

$$S^2v=S^2(u+w)=S(u-w)=u+w=v$$

于是$S^2=I$,即$SS^*=S^*=I$,因而S是酉算子.

6. 设T_1,T_2都是$\mathbb{F}^3$上以$2,5,7$为特征值的正规算子.试证明:存在酉算子$S\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$使得$T_1=S^*T_2S$.

Proof.
令$\lambda_1,\cdots,\lambda_3$为$T_1,T_2$共有的特征值.设$T_1$对应的特征向量为$e_1,\cdots,e_3$,$T_2$对应的特征向量为$f_1,\cdots,f_3$.
于是$e_1,\cdots,e_3$和$f_1,\cdots,f_3$均为V的基.现在,令$Se_k=f_k$对$k=1,2,3$成立,于是

$$Te_k=S^*T_2Se_k=S^{-1}T_2Se_k=S^{-1}T_2f_k=S^{-1}\lambda_kf_k=\lambda_ke_k$$

对$k=1,2,3$成立,从而$T=S^*T_2S$.

7. 给出两个自伴算子$T_1,T_2\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得其特征值均为$2,5,7$但不存在一酉算子$S\in\mathcal{L}(V)$使得$T_1=S^*T_2S$.

Proof.
令T_1,T_2关于$\mathbb{F}^4$的标准基$e_1,\cdots,e_4$的矩阵为

$$\mathcal{M}(T_1)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(T_2)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

假定存在酉算子$S\in\mathcal{L}(V)$使得$T_1=S^*T_2S$.由于$SS^*=S^*S=I$,于是

$$T_1-2I=S^*T_2S-2S^*S=S^*(T_2S-2S)=S^*(T_2-2I)S$$

从而根据**3D.8**可知$\dim\operatorname{null}\,(T_1-2I)=\dim\operatorname{null}\,(T_2-2I)$.
然而根据两者的矩阵可以看出

$$\dim\operatorname{null}\,(T_1-2I)=2\neq1=\dim\operatorname{null}\,(T_2-2I)$$

于是命题不成立.

8. 证明或给出一反例:如果$S \in \mathcal{L}(V)$且存在V的一规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得任意e_k都有$||Se_k|| = 1$,那么S是酉算子.

Proof.

考虑这样的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$,令$Se_k = e_1$对任意e_k成立.显然S不可逆,于是S不是酉算子.

9. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$.设T的每个特征值的绝对值都是1且$||Tv|| \leqslant ||v||$对任意$v \in V$都成立.试证明:T是酉算子.

Proof.

根据Schur定理可知T关于V的某组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$有上三角矩阵A.

由于T的每个特征值的绝对值都是1,于是$|A_{1,1}| = \cdots = |A_{n,n}|$.对于任意$k \in \{2, \cdots, n\}$有

$$||Te_k||^2 = \sum_{j=1}^{k} |A_{k,j}|^2 = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} |A_{k,j}|^2 \leqslant ||e_k||^2 = 1$$

于是

$$\sum_{j=1}^{k-1} |A_{k,j}|^2 = 0$$

这表明A是上三角矩阵,从而$e_1, \cdots, e_n$均为T的特征向量.根据**7.53**可知T为酉算子.

10. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$是使得$||Tv|| \leqslant ||v||$对所有$v \in V$成立的自伴算子.证明下列命题.

(1) $I - T^2$是正算子.

(2) $T + \mathrm{i}\sqrt{I - T^2}$是酉算子.

Proof.

(1) 由于T自伴,于是$I - T^2 = (I - T)(I + T) = (I - T)^*(I + T)$.对于任意$v \in V$有

$$\big\langle (I - T^2)v, v \big\rangle = \langle (I - T)^*(I + T)v, v \rangle = \langle (I + T)v, (I - T)v \rangle = ||v||^2 - ||Tv||^2 \geqslant 0$$

于是$I - T^2$是正算子.

(2) 令$A = T, B = \sqrt{I - T^2}$.于是$A^2 + B^2 = I$.

由于$T(I - T^2) = T - T^3 = (I - T^2)T$,于是$A$与$B^2$可交换.

又因为存在多项式p使得$B = p(B^2)$,于是A与B可交换.

根据**7D.4**可知$A + \mathrm{i}B$是酉算子.

11. 设$S \in \mathcal{L}(V)$.试证明:S是酉算子,当且仅当

$$\{Sv : v \in V, ||v|| \leqslant 1\} = \{v \in V : ||v|| \leqslant 1\}$$

Proof.

设$X = \{Sv : v \in V, ||v|| \leqslant 1\}, Y = \{v \in V : ||v|| \leqslant 1\}$.

$\Rightarrow$:假设S是酉算子.对于任意$Sv \in X$都有$||Sv|| = ||v|| \leqslant 1$,从而$Sv \in Y$,即$X \subseteq Y$.

考虑到S^{-1}也是酉算子,于是上面的包含关系反过来也成立,从而$X = Y$.

$\Leftarrow$:假定S不是酉算子.

若S不可逆,那么考虑$(\text{range } T)^{\perp}$中的非零向量$w$使得$||w|| = 1$,则有$w \in Y$.

由于$w \in (\text{range } T)^{\perp}$,于是不存在$v \in V$使得$Sv = w$,从而$w \notin X$,从而$X \neq Y$.

若S可逆,那么存在$v \in V$使得$||Sv|| \neq ||v||$.不失一般性地,假定$||v|| = 1$.

若$||Sv|| > 1$,那么$Sv \in X$且$Sv \notin Y$.于是$X \neq Y$.

若$0 < ||Sv|| < 1$,那么令$u = \dfrac{Sv}{||Sv||}$,则有$u \in Y$.现在假定$u \in X$,于是存在$w \in V$使得$Sw = u$,那么我们有

$$Sw = \frac{Sv}{||Sv||} \Rightarrow v = ||Sv||w \Rightarrow ||v|| < 1$$

这和我们的假设不符,于是$u \notin X$,从而$X \neq Y$.

于是我们知道当$X = Y$是必然有S是酉算子.

12. 证明或给出一反例:如果$S \in \mathcal{L}(V)$可逆且$||S^{-1}v|| = ||Sv||$对任意$v \in V$都成立,那么S是酉算子.

Proof.

设$S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$关于$\mathbb{C}^2$的标准基的矩阵为$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

我们有$S^2 = I$,于是$S^{-1} = S$.而

$$||S(1,0)|| = ||(\mathrm{i}, \sqrt{2})|| = \sqrt{3} \neq 1 = ||(0,1)||$$

于是S不是酉算子.

13. 试证明:复数构成的方阵的列构成$\mathbb{C}^n$中的规范正交组,当且仅当其行可构成$\mathbb{C}^n$中的规范正交组.

Proof.

我们设这方阵为A,是$S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$关于其标准正交基的矩阵.于是

$$A\text{的列构成}\mathbb{C}^n\text{中的规范正交组} \Leftrightarrow S\text{是酉算子}A\text{的行构成}\mathbb{C}^n\text{中的规范正交组}$$

14. 设$v \in V$且$||v|| = 1$,$b \in \mathbb{F}$.又设$\dim V \geqslant 2$.试证明:存在酉算子$S \in \mathcal{L}(V)$使得$\langle Sv, v\rangle = b$当且仅当$|b| \leqslant 1$.

Proof.

$\Rightarrow$:根据Cauchy-Schwarz不等式可知

$$|b| = |\langle Sv, v\rangle| \leqslant ||Sv||||v|| = ||v||^2 = 1$$

于是$|b| \leqslant 1$.

$\Leftarrow$: