Linear Algebra Done Right 7C

1. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:如果T和$-T$都是正算子,那么$T = \mathbf{0}$.

Proof.

由题意可知对任意$v \in V$有

$$\langle Tv, v \rangle \geqslant 0$$

且

$$\langle -Tv, v \rangle = -\langle Tv, v \rangle \geqslant 0$$

于是$\langle Tv, v \rangle = 0$,因而$T = \mathbf{0}$(在实内积空间上需要$T$自伴,这由正算子的定义可得).

2. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$关于其标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

试证明:T是可逆正算子.

Proof.

$\mathbb{F}^4$的标准基也是$\mathbb{F}^4$的规范正交基.观察这矩阵,可知$(\mathcal{M}(T))^* = \mathcal{M}(T)$,于是$T^* = T$,即$T$自伴.

一些计算表明T的特征值为

$$\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

于是T的特征值均非零且非负,因而它是可逆正算子.

3. 设$n \in \mathbb{N}^*$,算子$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$关于其标准基的矩阵中的元素均为1.试证明:$T$是正算子.

Proof.

对于任意$v := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle T(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \rangle \\ &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

于是T是正算子.

4. 设$n \in \mathbb{N}^*$且$n > 1$,试证明:存在$n \times n$矩阵A,其所有元素都是正数且$A = A^*$,但$\mathbb{F}^n$上关于其标准基的矩阵为A的算子不是正算子.

Proof.

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

令A为$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$对应于$\mathbb{F}^2$的标准基的矩阵.于是

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (x+2y,2x+y),(x,y)\rangle = (x+y)^2 + 2xy$$

令$(x,y) = (1,-1)$,则有$\langle T(x,y),(x,y)\rangle < 0$,于是$T$不是正算子.

5. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的.试证明:T是正算子当且仅当对于V的任意规范正交基$e_1,\cdots,e_n$都有T关于其的矩阵的对角线元素全为非负数.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$和任意$k \in \{1,\cdots,n\}$,由于T是正算子,于是

$$\langle Te_k, e_k\rangle \geqslant 0$$

又因为$Te_k = \langle Te_k, e_1\rangle e_1 + \cdots + \langle Te_k, e_n\rangle e_n$,于是

$$\mathcal{M}(T,(e_1,\cdots,e_n))_{k,k} = \langle Te_k, e_k\rangle \geqslant 0$$

于是此矩阵的对角线上均为非负数.

$\Leftarrow$:由于T是自伴的,于是存在V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得T关于其有对角矩阵A.

根据题意,$A_{1,1},\cdots,A_{n,n} \geqslant 0$,从而对于任意$v := a_1e_1 + \cdots + a_ne_n \in V$有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v\rangle &= \langle A_{1,1}a_1e_1, a_1e_1\rangle + \cdots + \langle A_{n,n}a_ne_n, a_ne_n\rangle \\ &= A_{1,1}a_1^2 + \cdots + A_{n,n}a_n^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

从而T为正算子.

6. 试证明:V上两正算子之和为正算子.

Proof.
对于任意正的$S,T\in\mathcal{L}(V)$和任意$v\in V$有

$$\langle (S+T)v,v\rangle=\langle Sv+Tv,v\rangle=\langle Sv,v\rangle+\langle Tv,v\rangle\geqslant 0$$

于是$S+T$是正的.

7. 设$S\in\mathcal{L}(V)$是可逆正算子,$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:$S+T$可逆.

Lemma.L.11 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,那么T可逆当且仅当$\langle Tv,v\rangle>0$对所有非零的$v\in V$成立.

Proof.
$\Rightarrow$:由于T可逆,于是对于任意非零的$v\in V$有$Tv\neq\mathbf{0}$.于是$\langle Tv,v\rangle>0$.
$\Leftarrow$:如果T不可逆,那么存在非零的$v\in V$使得$Tv=\mathbf{0}$,从而$\langle Tv,v\rangle=0$,这与条件矛盾.于是T可逆.

Proof.
根据**Lemma.L.11**可知$\langle Sv,v\rangle>0$对所有非零的$v\in V$成立.于是对于任意非零的$v\in V$有

$$\langle (S+T)v,v\rangle=\langle Sv,v\rangle+\langle Tv,v\rangle>0$$

从而$S+T$是可逆的.

8. 设$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T是正算子,当且仅当$T^\dagger$是正算子.

Proof.
由于T是正算子,于是令V有一规范正交基$e_1,\cdots,e_n$是分别对应于T的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$的特征向量.
于是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$.根据**7B.25**有

$$T^\dagger e_k=\begin{cases}\frac{1}{\lambda_k}e_k,\lambda_k\neq 0\\ \mathbf{0},\lambda_k=0\end{cases}$$

对所有$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.于是$T^\dagger$关于$e_1,\cdots,e_n$的矩阵是对角线上均为非负数的对角矩阵,从而$T^\dagger$是正算子.
交换T和$T^\dagger$即可证得另一方向.于是命题得证.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,$S \in \mathcal{L}(W, V)$.试证明:S^*TS是W上的正算子.

Proof.

对于任意$w \in W$有

$$\langle S^*TSw, w\rangle = \langle T(Sw), Sw\rangle \geqslant 0$$

于是S^*TS是W上的正算子.

10. 设T是V上的正算子,设$v, w \in V$满足$Tv = w$且$Tw = v$.试证明:$v = w$.

Proof.

我们有

$$\langle T(v-w), v-w\rangle = \langle w-v, v-w\rangle = -||v-w||^2 \geqslant 0$$

于是$||v-w|| = 0$,即$v = w$.

11. 设T是V上的正算子,U是V在T下不变的子空间,试证明:$T|_U \in \mathcal{L}(U)$是U上的正算子.

Proof.

对于任意$u \in U$都有$Tu \in U \subseteq V$,又因为T是正的,于是

$$\langle T|_U u, u\rangle = \langle Tu, u\rangle \geqslant 0$$

于是$T|_U$是U上的正算子.

12. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:对于任意$k \in \mathbb{N}^*$,T^k都是正算子.

Proof.

由于T是正算子,于是T关于V的某组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

且$\lambda_1, \cdots, \lambda_n \geqslant 0$.

于是T^k关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T^k)=(\mathcal{M}(T))^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n^k\end{pmatrix}$$

这是对角线均为非负数的对角矩阵,从而T^k也是正算子.

13. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的,设$\alpha\in\mathbb{R}$.回答下列问题.

(1) 试证明:$T-\alpha I$是正算子,当且仅当α不大于T的任意特征值.

(2) 试证明:$\alpha I-T$是正算子,当且仅当α不小于T的任意特征值.

Proof.

(1) 由于T是自伴算子,于是考虑V的某个规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得T关于其有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n\end{pmatrix}$$

则$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$T$的特征值.

于是$T-\alpha I$关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T-\alpha I)=\begin{pmatrix}\lambda_1-\alpha & \cdots & 0\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & \cdots & \lambda_n-\alpha\end{pmatrix}$$

因为$\alpha\leqslant\min\limits_{k\in\{1,\cdots,n\}}\{\lambda_k\}$,于是$\lambda_1-\alpha,\cdots,\lambda_n-\alpha\geqslant 0$.

于是$T-\alpha I$关于这基有对角线元素非负的对角矩阵,于是$T-\alpha I$是正算子.

(2) 与**(1)**类似,不再赘述.

14. 设T是V上的正算子,$v_1,\cdots,v_m\in V$.试证明

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle Tv_k,v_j\rangle\geqslant 0$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle Tv_k, v_j\rangle &= \sum_{j=1}^{m}\langle Tv_1+\cdots+Tv_m, v_j\rangle \\ &= \sum_{j=1}^{m}\langle T(v_1+\cdots+v_m), v_j\rangle \\ &= \langle T(v_1+\cdots+v_m), v_1+\cdots+v_m\rangle \\ &\geqslant 0\end{aligned}$$

15. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的,试证明:存在正算子$A,B\in\mathcal{L}(V)$使得

$$T=A-B\ \text{ 且 }\ \sqrt{TT^*}=A+B\ \text{ 且 }\ AB=BA=\mathbf{0}$$

Proof.

由于T是自伴的,于是存在由T的特征向量$e_1,\cdots,e_n,f_1,\cdots,f_m$构成的$V$的规范正交基.

不妨设它们对应的特征值为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\mu_1,\cdots,\mu_m$,其中$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0,\mu_1,\cdots,\mu_m<0$.

令$A,B\in\mathcal{L}(V)$满足对所有$k\in\{1,\cdots,n\}$和$j\in\{1,\cdots,m\}$有

$$\begin{cases}Ae_k=\lambda_k e_k\\ Af_j=\mathbf{0}\end{cases}\qquad\begin{cases}Be_k=\mathbf{0}\\ Bf_j=-\mu_j f_j\end{cases}$$

考虑它们的矩阵,不难验证题设的条件成立.于是命题得证.

16. 设T是V上的正算子.试证明:null $\sqrt{T}=$ null T且range $\sqrt{T}=$ range T.

Proof.

注意到$\sqrt{T}$是正算子,于是$\sqrt{T}$是正规的.根据**7A.27**可知

$$\operatorname{null} T=\operatorname{null}(\sqrt{T})^2=\operatorname{null}\sqrt{T},\operatorname{range} T=\operatorname{range}(\sqrt{T})^2=\operatorname{range}\sqrt{T}$$

17. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:存在实系数多项式p使得$\sqrt{T}=p(T)$.

Proof.

考虑T的特征向量$e_1,\cdots,e_n$构成的V的规范正交基和对应的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.

由于T是正算子,于是$\lambda_k\geqslant 0$.令$p\in\mathcal{P}(\mathbb{R})$满足

$$p(\lambda_k)=\sqrt{\lambda_k},\forall k\in\{1,\cdots,n\}$$

于是对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$\sqrt{T}e_k=\sqrt{\lambda_k}e_k=p(\lambda_k)e_k=p(T)e_k$$

于是$\sqrt{T}=p(T)$.

18. 设S和T是V上的正算子.试证明:ST是正算子,当且仅当S和T可交换.

Proof.

根据**7A.9**,如果S和T不可交换,那么ST不是自伴算子,也就不是正算子.

现在假设S,T可交换,于是根据**7B.16/17**可知存在V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得S,T关于其有对角矩阵.

不妨设

$$\mathcal{M}(S)=\begin{pmatrix}\mu_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\mu_n\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\lambda_n\end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{M}(TS)=\begin{pmatrix}\mu_1\lambda_1&\cdots&0\\\vdots&\ddots&\vdots\\0&\cdots&\mu_n\lambda_n\end{pmatrix}$$

其中$\mu_1\lambda_1,\cdots,\mu_n\lambda_n\geqslant 0$.于是$ST$是正算子.

19. 试证明:$\mathbb{F}^2$上的恒等算子具有无穷多个自伴的平方根.

Proof.

对于任意$t\in(0,1)$,令$T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$关于其标准基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\sqrt{1-t^2}&t\\t&-\sqrt{1-t^2}\end{pmatrix}$$

不难验证$\mathcal{M}(T^2)=(\mathcal{M}(T))^2=I$,且$T$是自伴的.于是存在无穷多个$T$使得$T^2=I$.

20. 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$e_1, \cdots, e_n$是V的规范正交基.试证明:T是正算子,当且仅当存在$v_1, \cdots, v_n \in V$使得

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle$$

对所有$j, k = 1, \cdots, n$成立.

Proof.

$\Rightarrow$:设T是正算子,那么$\sqrt{T}$自伴.于是

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \left\langle \sqrt{T}\sqrt{T}e_k, e_j \right\rangle = \left\langle \sqrt{T}e_k, \sqrt{T}e_j \right\rangle$$

对于任意$j, k \in \{1, \cdots, n\}$都成立.于是令$v_k = \sqrt{T}e_k$即可.

$\Leftarrow$:设$R \in \mathcal{L}(V)$使得$Re_k = v_k$.于是

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle = \langle Re_k, Re_j \rangle = \langle R^*Re_k, e_j \rangle$$

于是$\mathcal{M}(T, (e_1, \cdots, e_n)) = \mathcal{M}(R^*R, (e_1, \cdots, e_n))$,即$T = R^*R$.根据正算子的性质可知$T$是正算子.

21. 设$n \in \mathbb{N}^*$.$n \times n$的**希尔伯特矩阵**是第j行第k列元素为$\dfrac{1}{j+k-1}$的$n \times n$矩阵.设算子$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的某个规范正交基的矩阵为$n \times n$阶希尔伯特矩阵,试证明:T是可逆正算子.

Proof.

设这组规范正交基为$e_1, \cdots, e_n$.考虑$v := x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in V$,我们有

$$\begin{aligned}
\langle Tv, v \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_kTe_k, \sum_{j=1}^n x_je_j \right\rangle = \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j}x_k \langle Te_k, e_j \rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^n \frac{\overline{x_j}x_k}{j+k-1} = \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j}x_k \int_0^1 t^{j+k-2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j}x_kt^{j+k-2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \overline{x_j}t^{j-1}\right)\left(\sum_{k=1}^n x_kt^{k-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \overline{\left(\sum_{j=1}^n x_jt^{j-1}\right)}\left(\sum_{k=1}^n x_kt^{k-1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n x_kt^{k-1}\right|^2 \mathrm{d}t \geqslant 0
\end{aligned}$$

于是T是正算子.当$\langle Tv,v\rangle=0$时,要求

$$\sum_{k=1}^{n}x_kt^{k-1}=0$$

对任意$t\in[0,1]$成立.于是$x_1=\cdots=x_n=0$,即$v=\mathbf{0}$,从而$\text{null }T=\{\mathbf{0}\}$,于是$T$可逆.

因此T是可逆正算子.

22. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,$u\in V$满足$||u||=1$且$||Tu||\geqslant||Tv||$对所有满足$||v||=1$的$v\in V$成立.试证明:u是T的特征向量,对应于T的最大的特征值.

Proof.

考虑T的所有特征值$0\leqslant\lambda_1<\cdots<\lambda_n$.于是

$$V=E(\lambda_1,T)\oplus E(\lambda_n,T)$$

考虑$u=v_1+\cdots+v_n$,其中$v_k\in E(\lambda_k,T)$.于是$1=||u||^2=||v_1||^2+\cdots+||v_n||^2$.于是

$$||Tu||^2=\lambda_1^2||v_1||^2+\cdots+\lambda_n^2||v_n||^2\leqslant\lambda_n^2\left(||v_1||^2+\cdots+||v_n||^2\right)=\lambda_n^2$$

现在考虑$w\in E(\lambda_n,T)$且$||w||=1$.根据题意,我们有

$$||Tw||^2=\lambda_n^2\leqslant||Tu||^2$$

于是$||Tu||=\lambda_n$.考虑第一个不等式的取等条件,当且仅当$\lambda_1=\cdots=\lambda_{n-1}=0$时成立,于是$u=v_n\in E(\lambda_n,T)$.

于是u是T的特征向量,对应于T最大的特征值.

23. 对于$T\in\mathcal{L}(V)$和$u,v\in V$,定义$\langle u,v\rangle_T$为$\langle u,v\rangle_T=\langle Tu,v\rangle$.回答下列问题.

(1) 设$T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$是$V$上的内积,当且仅当$T$是关于原内积的可逆正算子.

(2) 试证明:V上的任意内积都具有$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$的形式,其中$T$是某个$V$上的可逆正算子.

Proof.

(1) $\Leftarrow$:我们依次证明$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$具有内积的性质.

(a) **正性**:由于T是正算子,于是对于任意$v\in V$有

$$\langle v,v\rangle_T=\langle Tv,v\rangle\geqslant 0$$

(b) **定性**:由于$\langle Tv,v\rangle=0$当且仅当$v=\mathbf{0}$,于是$\langle v,v\rangle_T=0$当且仅当$v=\mathbf{0}$.

(c) **可加性**:对于任意$u,v,w\in V$有

$$\langle u+v,w\rangle_T=\langle T(u+v),w\rangle=\langle Tu+Tv,w\rangle=\langle Tu,w\rangle+\langle Tv,w\rangle=\langle u,w\rangle_T+\langle v,w\rangle_T$$

(d) **齐次性**:对于任意$\lambda\in\mathbb{F}$和任意$u,v\in V$有

$$\langle \lambda u,v\rangle_T=\langle T(\lambda u),v\rangle=\langle \lambda Tu,v\rangle=\lambda\langle Tu,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle_T$$

(e) **共轭对称性**:由于T是正算子,于是T自伴,于是对于任意$u,v\in V$有

$$\langle u,v\rangle_T=\langle Tu,v\rangle=\overline{\langle v,Tu\rangle}=\overline{\langle Tv,u\rangle}=\overline{\langle v,u\rangle_T}$$

综上可以得出$\langle\cdot,\cdot\rangle_T$是$V$上的内积.

$\Rightarrow$:对于任意$u,v\in V$有

$$\langle Tu,v\rangle=\langle u,v\rangle_T=\overline{\langle v,u\rangle_T}=\overline{\langle Tv,u\rangle}=\langle u,Tv\rangle$$

从而T是自伴的.对于任意$v\in V$,我们有

$$\langle Tv,v\rangle=\langle v,v\rangle_T\geqslant 0$$

当且仅当$v=\mathbf{0}$时等式成立.于是根据**Lamma.L.11**可知T是可逆正算子.

(2) 考虑V原有的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$和任意的内积$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$.

考虑V关于$\langle\cdot,\cdot\rangle_1$的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$和关于$\langle\cdot,\cdot\rangle_2$的规范正交基$f_1,\cdots,f_n$.

定义$R\in\mathcal{L}(V)$使得$Rf_k=e_k$对任意$k\in\{1,\cdots,n\}$都成立.由于R是基到基的映射,因此R可逆.

现在令$T=R^*R$,由于R可逆,那么T也可逆.根据正算子的性质可知T是正算子.

现在,对于任意$u:=a_1f_1+\cdots+a_nf_n$和$v:=b_1f_1+\cdots+b_nf_n$,我们有

$$\langle u,v\rangle_2=a_1\overline{b_1}+\cdots+a_n\overline{b_n}=\langle Ru,Rv\rangle_1=\langle R^*Ru,v\rangle_1=\langle Tu,v\rangle_1$$

从而存在可逆正算子$T\in\mathcal{L}(V)$使得$\langle\cdot,\cdot\rangle_2=\langle\cdot,\cdot\rangle_T$.

24. 设S,T是V上的正算子.试证明:$\text{null }(S+T)=\text{null }S\cap\text{null }T$.

根据**7C.6**可知$S+T$也是正算子.于是对于$v\in V$有

$$\begin{aligned}v\in\text{null }(S+T)&\Leftrightarrow\langle (S+T)v,v\rangle=0\Leftrightarrow\langle Sv,v\rangle+\langle Tv,v\rangle=0\\&\Leftrightarrow\langle Sv,v\rangle=\langle Tv,v\rangle=0\Leftrightarrow Sv=Tv=\mathbf{0}\\&\Leftrightarrow v\in\text{null }S\cap\text{null }T\end{aligned}$$

于是$\text{null }(S+T)=\text{null }S\cap\text{null }T$.

> **25.** 令T是**7A.31(2)**中的二阶求导算子.试证明:$-T$是正算子.

> **Proof.**
>
> 设D是**7A.31(1)**中的一阶求导算子,于是$T = D^2$且$D^* = -D$.于是对于任意$f \in V$有
>
> $$\langle -Tf, f\rangle = \left\langle -D^2 f, f\right\rangle = \langle D^* D f, f\rangle = \langle Df, Df\rangle = ||Df||^2 \geqslant 0$$
>
> 于是$-T$是V上的正算子.