Linear Algebra Done Right 5D

1. 设V是有限维复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$.

(1) 证明:如果$T^4 = I$,那么T可对角化.

(2) 证明:如果$T^4 = T$,那么T可对角化.

(3) 给出一例$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,使得$T^4 = T^2$且$T$不可对角化.

Proof.

(1) 因为$T^4 = I$,于是存在$p(z) = z^4 - 1 = (z+1)(z-1)(z+\mathrm{i})(z-\mathrm{i})$使得$p(T) = \mathbf{0}$.
于是p是T的最小多项式q的多项式倍,因而q也具有$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$的形式,其中各$\lambda$互异.
因而T是可对角化的.

(2) 因为$T^4 = T$,于是存在$p(z) = z^4 - z = z(z-1)\left(z - \dfrac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)$使得$p(T) = \mathbf{0}$.
于是p是T的最小多项式q的多项式倍,因而q也具有$(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$的形式,其中各$\lambda$互异.
因而T是可对角化的.

(3) 令$T(x,y) = (y,0)$,于是T的最小多项式为$p(z) = z^2$,满足$T^4 - T^2 = \mathbf{0}$,且不可对角化($p(z)$有重根).

2. 设$T \in \mathcal{L}(V)$关于V的一个基有对角矩阵A.试证明:若$\lambda \in \mathbb{F}$,那么λ在A的对角线上恰好出现$\dim E(\lambda, T)$次.

Proof.

如果λ不是T的特征值,则λ不会出现在A的对角线上.而$E(\lambda,T) = \operatorname{null}\,(T-\lambda I) = \{\mathbf{0}\}$,于是命题成立.
如果λ是T的特征值,考虑A对应的一组基$v_1,\cdots,v_n$(其中$n = \dim V$)和对角线上的元素$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.我们有

$$Tv_k = \lambda v_k, \forall k \in \{1,\cdots,n\}$$

当且仅当$\lambda_k = \lambda$时有$(T-\lambda I)v_k = \mathbf{0}$.这样的$v_{k_1},\cdots,v_{k_i}$构成了$E(\lambda,T)$的基,恰好对应$i$个$\lambda_k$.即$\lambda$恰好在$A$的对角线上出现$\dim E(\lambda,T)$次.于是命题成立.

3. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:如果T可对角化,那么$V = \operatorname{null}\,T \oplus \operatorname{range}\,T$.

Proof.

令$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$表示$T$的非零互异特征值.于是有

$$V = E(0,T) \oplus E(\lambda_1,T) \oplus \cdots \oplus E(\lambda_m,T)$$

其中$E(0,T)=\operatorname{null} T$.如果$E(0,T)=\{\mathbf{0}\}$,那么$\operatorname{range} T=V$.

如果T没有非零特征值,那么$\operatorname{null} T=E(0,T)=V$.

否则,令$W=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$,则有$T=\operatorname{null} T\oplus W$.我们只需证明$W=\operatorname{range} T$.

对于任意$v\in V$,令$v=u+w_1+\cdots+w_m\in\operatorname{null} T\oplus W$,其中$u\in\operatorname{null} T, w_k\in E(\lambda_k,T)$.于是

$$Tv=Tu+Tw_1+\cdots+Tw_m=\lambda_1 w_1+\cdots+\lambda_m w_m\in W$$

于是$\operatorname{range} T\subseteq W$.又对于任意$w:=w_1+\cdots+w_m\in W$有

$$w_1+\cdots+w_m=T\left(\frac{w_1}{\lambda_1}+\cdots+\frac{w_m}{\lambda_m}\right)\in\operatorname{range} T$$

于是$W\subseteq\operatorname{range} T$.综上可知$W=\operatorname{range} T$,即$V=\operatorname{null} T\oplus\operatorname{range} T$.

4. 设V是有限维的,且$T\in\mathcal{L}(V)$.证明下列三个命题相互等价.

(a) $V=\operatorname{null} T\oplus\operatorname{range} T$.

(b) $V=\operatorname{null} T+\operatorname{range} T$.

(c) $\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T=\{\mathbf{0}\}$.

Proof.

(a)⇒(b):显然.

(b)⇒(c):我们有

$$\dim(\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T)=\dim\operatorname{null} T+\dim\operatorname{range} T-\dim(\operatorname{null} T+\operatorname{range} T)$$

根据线性映射基本定理,我们有

$$\dim\operatorname{null} T+\dim\operatorname{range} T=\dim V$$

根据假设又有

$$\dim(\operatorname{null} T+\operatorname{range} T)=\dim V$$

于是$\dim(\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T)=0$,即$\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T=\{\mathbf{0}\}$,于是**(c)**成立.

(c)⇒(a):我们有

$$\dim(\operatorname{null} T+\operatorname{range} T)=\dim\operatorname{null} T+\dim\operatorname{range} T-\dim(\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T)=\dim V$$

又因为$\operatorname{null} T$与$\operatorname{range} T$是T的子空间,于是$V=\operatorname{null} T+\operatorname{range} T$.

又因为$\operatorname{null} T\cap\operatorname{range} T=\{\mathbf{0}\}$,于是$\operatorname{null} T+\operatorname{range} T$是直和.于是$V=\operatorname{null} T\oplus\operatorname{range} T$.

5. 设T是有限维复向量空间,且$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:T可以对角化,当且仅当

$$V = \text{null }(T - \lambda I) \oplus \text{range }(T - \lambda I)$$

对任意$\lambda \in \mathbb{C}$均成立.

Proof.

$\Rightarrow$:若T可以对角化,不妨设T关于V的某组基的对角矩阵上的元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

于是$T - \lambda I$也是对角矩阵,其对角线上的元素为$\lambda_1 - \lambda, \cdots, \lambda_n - \lambda$.

因此,对于任意$\lambda \in \mathbb{C}$,$T - \lambda I$都是可对角化算子.

于是根据**5D.3**,$V = \text{null }(T - \lambda I) \oplus \text{range }(T - \lambda I)$对任意$\lambda \in \mathbb{C}$都成立.

$\Leftarrow$:假设T不可以对角化,那么T的最小多项式p应当具有重根.不妨设$p = (z - \lambda)q$,其中$q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$且$q(\lambda) = 0$.

对于任意$v \in V$,有

$$p(T)v = \mathbf{0} \Leftrightarrow (T - \lambda I)q(T)v = \mathbf{0} \Leftrightarrow q(T)v \in \text{null }(T - \lambda I)$$

$$q(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \exists r \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \text{s.t.} q(z) = (z - \lambda)r(z) \Leftrightarrow q(T)v = (T - \lambda I)(r(T)v) \Rightarrow q(T)v \in \text{range }(T - \lambda I)$$

于是$q(T)v \in \text{null }(T - \lambda I) \cap \text{range }(T - \lambda I)$.

由于p是T的最小多项式,且$\deg q < \deg p$,因而$q(T) \neq \mathbf{0}$.于是存在$v \in V$使得$q(T)v \neq \mathbf{0}$.

即$\text{null }(T - \lambda I) \cap \text{range }(T - \lambda I) \neq \{\mathbf{0}\}$,因而根据**5D.4**可知两者不是直和,与条件矛盾.于是T可以对角化.

6. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^5)$且$\dim E(8, T) = 4$.试证明$T - 2I$或$T - 6I$可逆.

Proof.

假定$T - 2I$和$T - 6I$均不可逆,那么2和6均为T的特征值.于是

$$\dim E(2, T) \geqslant 1, \dim E(6, T) \geqslant 1$$

又因为$\dim E(8, T) > 0$,于是8也为T的特征值. 于是

$$\dim V \geqslant \dim E(2, T) + \dim E(6, T) + \dim E(8, T) \geqslant 1 + 1 + 4 = 6$$

而$\dim V = 5$,于是推出矛盾.因而$T - 2I$和$T - 6I$至少有一个可逆.

7. 设$T \in \mathcal{L}(V)$可逆,试证明

$$E(\lambda, T) = E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$$

对任意$\lambda \in \mathbb{F}(\lambda \neq 0)$都成立.

Proof.

对于任意$v \in V$都有

$$v \in E(\lambda, T) \Leftrightarrow Tv = \lambda v \Leftrightarrow v = \lambda T^{-1} v \Leftrightarrow T^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v \Leftrightarrow v \in E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$$

于是$E(\lambda, T) = E\left(\frac{1}{\lambda}, T^{-1}\right)$.

8. 设V是有限维的,且$T \in \mathcal{L}(V)$.令$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$表示$T$的非零互异特征值,试证明:

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim \operatorname{range} T$$

Proof.

我们有

$$\dim E(0, T) + \dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim V$$

而$E(0, T) = \text{null } T$,于是

$$\dim E(\lambda_1, T) + \cdots + \dim E(\lambda_m, T) \leqslant \dim V - \dim E(0, T) = \dim V - \dim \operatorname{null} T = \dim \operatorname{range} T$$

于是命题成立.

9. 设$R, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$,都有特征值$2, 6, 7$.证明:存在一可逆算子$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$使得$R = S^{-1} T S$.

Proof.

设R关于$2, 6, 7$的特征向量为u_1, u_2, u_3,T关于$2, 6, 7$的特征向量为v_1, v_2, v_3.

于是u_1, u_2, u_3和v_1, v_2, v_3是$\mathbb{F}^3$的基.令$S u_k = v_k$,则对于任意$v := a_1 u_1 + a_2 u_2 + a_3 u_3 \in \mathbb{F}^3$有

$$S^{-1} S v = S^{-1} T (a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3) = S^{-1} (2 a_1 v_1 + 6 a_2 v_2 + 7 a_3 v_3) = 2 a_1 u_1 + 6 a_2 u_2 + 7 a_3 u_3 = R v$$

于是$R = S^{-1} T S$.

10. 给出一例$R, T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$都有且仅有特征值$2, 6, 7$,同时不存在可逆算子$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得$R = S^{-1} T S$.

Solution.

设R,T对应$\mathbb{F}^4$的标准基$e_1,\cdots,e_4$的矩阵为

$$\mathcal{M}(R)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&6&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&6&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

假定存在$S\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得$R=S^{-1}TS$.设$v_1=S^{-1}e_1,v_2=S^{-1}e_2$,于是

$$S^{-1}TSv_1=S^{-1}Te_1=2S^{-1}e_1=2v_1$$

同理有

$$S^{-1}TSv_2=2v_2$$

若v_1,v_2线性相关,则存在$\lambda\in\mathbb{F}$使得$v_2=\lambda v_1$.又因为S可逆,于是$\operatorname{null} S^{-1}=\{\mathbf{0}\}$,于是

$$v_2=\lambda v_1\Leftrightarrow S^{-1}e_2=\lambda S^{-1}e_1\Leftrightarrow S^{-1}\left(e_2-\lambda e_1\right)=\mathbf{0}\Leftrightarrow e_2-\lambda e_1=\mathbf{0}$$

于是e_1,e_2线性相关,这与$e_1,\cdots,e_4$是$\mathbb{F}^4$的标准基不符.于是$\dim\operatorname{span}(v_1,v_2)=2$.
即$\dim E(2,S^{-1}TS)=\operatorname{span}(v_1,v_2)=2$.而$\dim E(2,R)=1$,于是一定有$R\neq S^{-1}TS$.
于是不存在可逆的$S\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得$R=S^{-1}TS$.

11. 给出一例$T\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$使得6和7是$T$的特征值,且$T$不可对角化.

Solution.

设T关于$\mathbb{C}^3$的标准基$e_1,\cdots,e_3$的矩阵为

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}6&0&7\\0&7&0\\0&0&6\end{pmatrix}$$

这是一个上三角矩阵,因而6和7是T的特征值.然而

$$\mathcal{M}(T-6I)=\begin{pmatrix}0&0&7\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(T-7I)=\begin{pmatrix}-1&0&7\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

于是$\dim E(6,T)+\dim E(7,T)=1+1<\dim\mathbb{C}^3$,于是$T$不可对角化.

12. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$使得6和7是$T$的特征值,且$T$不可对角化.试证明:存在$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$使得

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6 + 8z_1, 7 + 8z_2, 13 + 8z_3)$$

Proof.

由于8不是T的特征值,于是$T - 8I$可逆,于是存在$(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3$使得

$$(T - 8I)(z_1, z_2, z_3) = (6, 7, 13)$$

即

$$T(z_1, z_2, z_3) = (6 + 8z_1, 7 + 8z_2, 13 + 8z_3)$$

于是命题得证.

13. 设A是对角线上元素互异的对角矩阵,B是与A大小相同的方阵.试证明:$AB = BA$当且仅当B是对角矩阵.

Proof.

$\Rightarrow$:设A的对角线上元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_m$.若$B$不是对角矩阵,那么不妨假定存在$B_{i,j} \neq 0$,其中$i \neq j$.于是

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} A_{i,k} B_{k,j} = A_{i,i} B_{i,j} = \lambda_i B_{i,j}$$

$$(BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} B_{i,k} A_{k,j} = B_{i,j} A_{j,j} = \lambda_j B_{i,j}$$

因为$\lambda_i \neq \lambda_j$,于是$(AB)_{i,j} \neq (BA)_{i,j}$,即$AB \neq BA$.这与题设不符,于是$B$是对角矩阵.

$\Leftarrow$:设B的对角线元素为$\mu_1, \cdots, \mu_m$.于是

$$(AB)_{i,j} = 0 = (BA)_{i,j}$$

$$(AB)_{i,i} = \lambda_i \mu_i = (BA)_{i,i}$$

即$AB = BA$.

14. 回答下列问题.

(1) 给出一例有限维复向量空间V和$T \in \mathcal{L}(V)$使得T^2可对角化但T不可对角化.

(2) 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,$k \in \mathbb{N}^*$,且$T \in \mathcal{L}(V)$可逆.试证明:T可对角化当且仅当T^k可对角化.

Solution.

(1) 设$V=\mathbb{C}^2, T(x,y)=(y,0)$.$T$关于$\mathbb{C}^2$的标准基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$$

于是T有且仅有特征值0.而$\dim E(0,T)=1<\dim\mathbb{C}^2$,于是$T$不可对角化.

然而$T^2=\mathbf{0}$,于是T^2可对角化,其关于任意$\mathbb{C}^2$的基的矩阵都是元素均为0的对角矩阵.

(2) $\Rightarrow$:设T关于V的某组基具有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}$$

那么有

$$\mathcal{M}(T^k)=(\mathcal{M}(T))^k=\begin{pmatrix}\lambda_1^k&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n^k\end{pmatrix}$$

因而T^k关于V的这组基也具有对角矩阵,从而T^k可对角化.

$\Leftarrow$:设T^k的最小多项式为$p(z)=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m)$,则$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$互异且非零(否则$T^k$不可逆).

根据代数基本定理,$z^k-\lambda_j=0$有k重根,不妨记为$\mu_{j,1},\cdots,\mu_{j,k}$,这$k$个根各不相同.

对于任意$a,b\in\{1,\cdots,m\},c,d\in\{1,\cdots,k\}$有

$$\mu_{a,c}=\mu_{b,d}\Rightarrow\mu_{a,c}^k=\mu_{b,d}^k\Rightarrow\lambda_a=\lambda_b$$

于是$\mu_{a,c}=\mu_{b,d}$当且仅当$a=b,c=d$.这表明$\mu_{1,1},\cdots,\mu_{m,k}$互异.令$q(z)=p\left(z^k\right)\in\mathcal{P}(\mathbb{C})$,则

$$q(z)=p\left(z^k\right)=\prod_{j=1}^{m}\left(z^k-\lambda_j\right)=\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=1}^{k}\left(z-\mu_{j,i}\right)$$

而$q(T)=p(T^k)=\mathbf{0}$,于是q是T的最小多项式r的多项式倍.于是

$$r(z)=(z-\xi_1)\cdots(z-\xi_n)$$

其中各ξ均为$\mu_{1,1},\cdots,\mu_{m,k}$中的某个且互异.于是$T$是可对角化的.

15. 设V是有限维复向量空间,$T\in\mathcal{L}(V)$,且p是T的最小多项式.证明下列命题相互等价.

(a) T可对角化.

(b) 不存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得p是$(z-\lambda)^2$的多项式倍.

(c) p和其导函数p'没有公共零点.

(d) p和其导函数p'的最大公因式是常数多项式1.

Proof.

(a)$\Leftrightarrow$**(b)**:我们有

$$T\text{可对角化} \Leftrightarrow p=(z-\lambda_1)\cdots(z-\lambda_m),\text{其中各}\lambda_k\text{不相同} \Leftrightarrow \text{不存在}\lambda \in \mathbb{C}\text{使}p\text{是}(z-\lambda)^2\text{的多项式倍}$$

(b)$\Rightarrow$**(c)**:若存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得$p(\lambda)=p'(\lambda)=0$,不妨令$p(z)=(z-\lambda)^k q(z)$,其中$k \geqslant 1, q(\lambda) \neq 0$.于是

$$p'(z)=(z-\lambda)^k q'(z)+k(z-\lambda)^{k-1}q(z)=(z-\lambda)^{k-1}\left((z-\lambda)q'(z)+kq(z)\right)$$

当$k=1$时,$p'(\lambda)=q(\lambda)\neq 0$.
当$k \geqslant 2$时,$p'(\lambda)=0^{k-1}kq(\lambda)=0$.
于是$k \geqslant 2$.因而p是$(z-\lambda)^2$的$(z-\lambda)^{k-2}q$倍,与条件矛盾.因而p与p'没有公共零点.
(c)$\Rightarrow$**(b)**:若存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得$p=(z-\lambda)^2 q$,其中$q \in \mathcal{P}(\mathbb{C})$,那么

$$p'(z)=2(z-\lambda)q(z)+(z-\lambda)^2 q'(z)$$

于是$p(\lambda)=p'(\lambda)=0$,与条件矛盾,因而不存在$\lambda \in \mathbb{C}$使得p是$(z-\lambda)^2$的多项式倍.
(c)和**(d)**的等价性是显然的.

16. 设$T \in \mathcal{L}(V)$可对角化,令$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$表示$T$的互异特征值.证明:$V$的子空间$U$在$T$下不变,当且仅当存在$V$的子空间$U_1,\cdots,U_m$使得$U_k \subseteq E(\lambda_k,T)$对每个$k$成立且$U=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$.

Proof.

$\Leftarrow$:假定存在这样的子空间$U_1,\cdots,U_m$.对于任意$u \in U$,设$u=u_1+\cdots+u_m$,其中$u_k \in U_k$对每个k都成立.
那么我们有

$$Tu=T(u_1+\cdots+u_m)=Tu_1+\cdots+Tu_m=\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_m u_m \in U_1\oplus\cdots\oplus U_m$$

于是$U=U_1\oplus\cdots\oplus U_m$在$T$下不变.
$\Rightarrow$:令$U_k=U\cap E(\lambda_k,T)$对每个k成立,则$U_k \subseteq E(\lambda_k,T)$.
由于$V=E(\lambda_1,T)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_m,T)$,于是$U_1+\cdots+U_m$是直和.
对于任意$u_1,\cdots,u_m$满足$u_k \in U_k$,由于$u_k \in U$对所有k成立,于是$u_1+\cdots+u_m \in U$,即$U_1\oplus\cdots\oplus U_m \subseteq U$.

> 另一方面,对于任意$u \in U$,都有
>
> $$u = v_1 + \cdots + v_m, v_k \in E(\lambda_k, T)$$