谱定理

在内积空间上性质最好的算子就是关于V中的某个规范正交基有对角矩阵的算子.正是这些算子的特征向量可以构成V的规范正交基.而谱定理则告诉我们这些算子应当满足的条件.它指出,当$\mathbb{F} = \mathbb{R}$时这些算子即自伴算子,当$\mathbb{F} = \mathbb{C}$时这些算子即正规算子.

1.实谱定理

为了证明实谱定理,我们需要两个引理.

1.1 可逆二次表达式

设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的,且$b, c \in \mathbb{R}$使得$b^2 < 4c$,那么$T^2 + bT + cI$是可逆算子.

Proof.

设$v \in V$且$v \neq \mathbf{0}$,那么

$$\begin{aligned}
\left\langle \left(T^2 + bT + cI\right) v, v \right\rangle &= \left\langle T^2 v, v \right\rangle + b \left\langle Tv, v \right\rangle + c \left\langle v, v \right\rangle \\
&= \left\langle Tv, Tv \right\rangle + b \left\langle Tv, v \right\rangle + c \left\langle v, v \right\rangle \\
&\geqslant ||Tv||^2 - |b| ||Tv|| ||v|| + c ||v||^2 \\
&= \left(||Tv|| - \frac{|b| ||v||}{2} \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4} \right) ||v||^2 \\
&> 0
\end{aligned}$$

于是意味着$\left(T^2 + bT + cI\right) v \neq 0$,从而$T^2 + bT + cI$是单射,因而它可逆.

接下来这个定理是我们证明实谱定理的关键.

1.2 自伴算子的最小多项式

设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的,那么T的最小多项式具有$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_n)$的形式,其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Proof.

当$\mathbb{F} = \mathbb{C}$时,T的最小多项式的零点即T的特征值.我们已经知道,自伴算子的特征值都是实的,于是T的最小多项式自然具有题设的形式.

当$\mathbb{F} = \mathbb{R}$时,由$\mathbb{R}$上的多项式分解可知T的最小多项式应当具有

$$(z - \lambda_1) \cdots (z - \lambda_m) \left(z^2 + b_1 z + c_1\right) \cdots \left(z^2 + b_N z + c_N\right)$$

的形式,其中$\lambda_1, \cdots, \lambda_m, b_1, \cdots, b_N, c_1, \cdots, c_N \in \mathbb{R}$且对任意$k \in \{1, \cdots, N\}$有$b_k^2 < 4c_k$.于是

$$(T - \lambda_1 I) \cdots (T - \lambda_m I) \left(T^2 + b_1 T + c_1 I\right) \cdots \left(T^2 + b_N T + c_N I\right) = \mathbf{0}$$

如果$N>0$,那么在等式两端同乘$(T^2+b_NT+c_NI)^{-1}$可得

$$(T-\lambda_1 I)\cdots(T-\lambda_m I)\left(T^2+b_1T+c_1I\right)\cdots\left(T^2+b_{N-1}T+c_{N-1}I\right)=\mathbf{0}$$

这样就得到了次数比原来低2的最小多项式,这与假设矛盾,因而$N=0$.于是T的最小多项式自然也具有题设的形式.

以上的结果连同之前对于最小多项式的讨论,可知每个自伴算子都有特征值.事实上,自伴算子有足够的特征向量形成一个基.接下来的结果是线性代数中的主要定理之一,它全面地描述了实内积空间上的自伴算子.

1.3 实谱定理

设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$且$T\in\mathcal{L}(V)$,那么下列命题等价.

(a) T是自伴的.

(b) T关于V的某个规范正交基有对角矩阵.

(c) V有T的特征向量构成的规范正交基.

Proof.

(a)⇒(b):由于T是自伴的,根据**1.2**和上三角矩阵的知识可知T关于V的某个规范正交基有上三角矩阵.
又因为$T=T^*$,于是$\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}\left(T^*\right)=(\mathcal{M}(T))^*$,这要求$\mathcal{M}(T)$既是上三角矩阵又是下三角矩阵.
于是$\mathcal{M}(T)$是对角矩阵.
(b)⇒(a):由于对角矩阵的共轭转置不变,于是$\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}\left(T^*\right)$,于是$T=T^*$.
(b)和**(c)**的等价关系是显然的.

2.复谱定理

接下来的定理全面描述了复内积空间上的正规算子.

2.1 复谱定理

设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$,那么下列命题等价.

(a) T是正规的.

(b) T关于V的某个规范正交基有对角矩阵.

(c) V有T的特征向量构成的规范正交基.

Proof.

(a)⇒**(b)**:由Schur定理,T关于V的某个规范正交基有上三角矩阵.不妨设这基为$e_1,\cdots,e_n$,于是

$$\mathcal{M}\left(T,(e_1,\cdots,e_n)\right)=\begin{pmatrix} A_{1,1} & \cdots & A_{n,1} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & A_{n,n} \end{pmatrix}$$

我们从上面的矩阵可以得到

$$||Te_1||^2=||A_{1,1}e_1||^2$$

$$||T^*e_1||^2=||A_{1,1}e_1||^2+\cdots+||A_{n,1}e_n||^2$$

而$||Te_1||=||T^*e_1||$,于是这意味着$A_{1,2}=\cdots=A_{1,n}=0$.

于是有$||Te_2||^2=||A_{2,2}e_2||^2$.重复上面的操作,可知$A_{2,3}=\cdots=A_{2,n}=0$.

重复上面的推理,可知$\mathcal{M}\left(T,(e_1,\cdots,e_n)\right)$是对角矩阵.

(b)⇒**(a)**:由T关于V的某个规范正交基有对角矩阵可知T^*关于这基也有对角矩阵.

由于对角矩阵都是可交换的,于是$TT^*=T^*T$,从而T是正规算子.

(b)和**(c)**的等价关系是显然的.