Linear Algebra Done Right 7E

1. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$.试证明:$T = \mathbf{0}$,当且仅当T的所有奇异值均为0.

Proof.

根据**7A.2**可知

$$T = \mathbf{0} \Leftrightarrow T^*T = \mathbf{0} \Leftrightarrow T\text{的所有特征值均为}0$$

2. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,$s > 0$.试证明:s是T的奇异值,当且仅当存在非零的$v \in V$和非零的$w \in W$使得$Tv = sw$且$T^*w = sv$.

Proof.

$\Rightarrow$:假定s是T的奇异值,那么设存在非零的$u \in V$使得$T^*Tu = s^2u$.

令$w = Tu$,$v = su$,那么$Tv = T(su) = sTu = sw$,$T^*w = T^*Tu = s^2u = sv$.

$\Leftarrow$:假定存在这样的v, w.令$u = \dfrac{v}{s}$,那么$u \neq \mathbf{0}$,于是

$$T^*Tu = T^*\frac{Tv}{s} = T^*w = sv = s^2u$$

于是s是T^*T的特征值的非负平方根,即T的奇异值.

3. 给出一例$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$,0是$T$的唯一特征值,而$T$的奇异值却是0和5.

Solution.

令T关于$\mathbb{C}^2$的标准基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这是一个上三角矩阵,于是T的特征值仅有0.而

$$\mathcal{M}(T^*T) = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$$

于是T的特征值为$0, 5$.

4. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$,s_1是T的最大奇异值,s_n是T的最小奇异值.试证明:$\{||Tv|| : v \in V, ||v|| = 1\} = [s_n, s_1]$.

Proof.

令$X = \{||Tv|| : v \in V, ||v|| = 1\}$我们分情况讨论.

Case 1.$s_1 = 0$.这表明T的所有奇异值均为0,从而根据**7E.1**可知$T = \mathbf{0}$.于是$||Tv|| = 0$对所有$v \in V$成立.

Case 2.$s_1 = s_n > 0$.这表明$\dfrac{T}{s_1}$是等距映射,从而$||Tv|| = s_1$对所有$v \in V$且$||v|| = 1$成立.

Case 3.$s_1 > s_n > 0$.考虑T的奇异值分解

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

于是对于满足$||v|| = 1$的$v \in V$有

$$||Tv||^2 = s_1^2 \left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \cdots + s_n^2 \left|\langle v, e_n \rangle\right|^2$$

由于$||v||^2 = \left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \cdots + \left|\langle v, e_n \rangle\right|^2 = 1$,于是

$$s_n^2 \leqslant ||Tv||^2 \leqslant s_1^2 \Rightarrow ||Tv|| \in [s_n, s_1]$$

因此$X \subseteq [s_n, s_1]$.现在对于任意$p \in [s_n, s_1]$,令$v = \sqrt{\dfrac{p^2 - s_n^2}{s_1^2 - s_n^2}} e_1 + \sqrt{\dfrac{s_1^2 - p^2}{s_1^2 - s_n^2}} e_n$.于是

$$||v|| = 1, ||Tv|| = \sqrt{s_1^2 \cdot \frac{p^2 - s_n^2}{s_1^2 - s_n^2} + s_n^2 \cdot \frac{s_1^2 - p^2}{s_1^2 - s_n^2}} = \sqrt{p^2} = p$$

于是$[s_n, s_1] \subseteq X$,即$X = [s_n, s_1]$.

综上可知命题得证.

5. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$定义为$T(x,y) = (-4y, x)$,求$T$的奇异值.

Solution.

考虑T关于$\mathbb{C}^2$的标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{M}(T^*T) = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是T的奇异值为1和4.

6. 求定义为$Dp = p'$的微分算子$D \in \mathcal{L}(\mathcal{P}_2(\mathbb{R}))$的奇异值,其中$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的内积如**6.34**所示.

Solution.

根据**6.34**可知$\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$的一组规范正交基为$\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}}\left(x^2 - \frac{1}{3}\right)$.$D$关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(D) = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{M}(D^*D) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}$$

于是D的奇异值为$0, \sqrt{3}$和$\sqrt{15}$.

7. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的(当$\mathbb{F} = \mathbb{C}$是可令T是正规的),令$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$为$T$的特征值,每个特征值出现的次数等于其对应特征空间的维数.试证明:T的奇异值是按降序排列后的$|\lambda_1|, \cdots, |\lambda_n|$.

Proof.

不妨假定$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$已经按照绝对值大小降序排列好.

根据谱定理,存在T的特征向量$e_1, \cdots, e_n$构成的V的规范正交基.设它们分别对应于$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.于是

$$T^*Te_k = T^*\lambda_k e_k = \lambda_k T^* e_k = \lambda_k \overline{\lambda_k} e_k = |\lambda_k|^2 e_k$$

根据奇异值的定义,$|\lambda_k|$即为T的奇异值,且按照大小降序排列好.

8. 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.设$s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_n > 0$,$e_1, \cdots, e_n$和$f_1, \cdots, f_n$分别是$V$和$W$中的规范正交组,使得

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

对所有$v \in V$成立.证明下列命题.

(1) $f_1, \cdots, f_n$是range T的规范正交基.

(2) $e_1, \cdots, e_n$是$(\text{null } T)^\perp$的规范正交基.

(3) $s_1, \cdots, s_n$是T的正奇异值.

(4) 如果$k \in \{1, \cdots, n\}$,那么e_k是T^*T的特征向量,对应特征值为s_k^2.

(5) $TT^*w = s_1^2 \langle w, f_1 \rangle f_1 + \cdots + s_m^2 \langle w, f_n \rangle f_n$对任意$w \in W$都成立.

Proof.

(1) 由题意range $T=\operatorname{span}(f_1,\cdots,f_n)$.又因为$f_1,\cdots,f_n$线性无关,故其为$V$的规范正交基.

(2) 对任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$Te_k=s_1\langle e_k,e_1\rangle f_1+\cdots+s_n\langle e_k,e_n\rangle f_n=s_kf_k\neq\mathbf{0}$$

于是$e_k\notin \operatorname{null} T$,即$e\in(\operatorname{null} T)^{\perp}$.

于是$(\operatorname{null} T)^{\perp}=\operatorname{span}(e_1,\cdots,e_n)$,又因为$e_1,\cdots,e_n$线性无关,故其为$(\operatorname{null} T)^{\perp}$的基.

(3) 将$e_1,\cdots,e_n$扩展为V的规范正交基$e_1,\cdots,e_{\dim V}$.将$f_1,\cdots,f_n$扩展为W的规范正交基$f_1,\cdots,f_{\dim W}$.

于是不难有

$$Te_k=\begin{cases}s_kf_k,1\leqslant k\leqslant n\\ \mathbf{0},k>n\end{cases}$$

对于任意$j\in\{1,\cdots,\dim W\}$有

$$T^*f_j=\sum_{k=1}^{\dim V}\langle T^*f_j,v_k\rangle v_k=\sum_{k=1}^{\dim V}\langle f_j,Te_k\rangle e_k=\begin{cases}s_je_j,1\leqslant k\leqslant n\\ \mathbf{0},j>n\end{cases}$$

于是

$$T^*Te_k=\begin{cases}s_k^2e_k,1\leqslant k\leqslant n\\ \mathbf{0},k>n\end{cases}$$

于是$s_1,\cdots,s_n$为T的正奇异值.

(4) 我们在**(3)**中已经证明.

(5) 在**(3)**中我们已经知道了T^*f_j的表达式.于是对任意$w\in W$有

$$TT^*w=TT^*\left(\sum_{j=1}^{\dim W}\langle w,f_j\rangle f_j\right)=T\left(\sum_{j=1}^{n}s_j\langle w,f_j\rangle e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}s_j^2\langle w,f_j\rangle f_j$$

9. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$.试证明:T和T^*的正奇异值相同.

Proof.

根据**7.75**,考虑T的奇异值分解

$$Tv=s_1\langle v,e_1\rangle f_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle f_n$$

和T^*的奇异值分解

$$T^*w=s_1\langle w,f_1\rangle e_1+\cdots+s_1\langle w,f_n\rangle e_n$$

观察两式可得T和T^*具有相同的特征值.

10. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$的奇异值是$s_1,\cdots,s_n$.试证明:如果T是可逆线性映射,那么T^{-1}的奇异值为$\dfrac{1}{s_1},\cdots,\dfrac{1}{s_n}$.

Proof.

如果存在$k\in\{1,\cdots,n\}$使得$s_k=0$,那么设非零的$v\in V$使得$T^*Tv=0v=\mathbf{0}$.

于是null $T=$ null $T^*T\supseteq\operatorname{span}(v)$,从而null $T\neq\{\mathbf{0}\}$,即T不可逆.

于是T的特征值均为正数.考虑T的伪逆$T^\dagger$的奇异值分解

$$T^\dagger w=\frac{\langle w,f_1\rangle}{s_1}e_1+\cdots+\frac{\langle w,f_m\rangle}{s_m}e_m$$

当T可逆时,$T^{-1}=T^\dagger$,于是根据**7E.8**可知T^{-1}的奇异值为$\dfrac{1}{s_1},\cdots,\dfrac{1}{s_n}$.

11. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$,$v_1,\cdots,v_n$为V的规范正交基.令$s_1,\cdots,s_n$表示T的奇异值.证明下列命题.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^n||Tv_k||^2=\sum_{k=1}^n s_k^2$.

(2) 如果$W=V$且T是正算子,那么

$$\sum_{k=1}^n\langle Tv_k,v_k\rangle=\sum_{k=1}^n s_k$$

Proof.

(1) 考虑V的奇异值分解

$$Tv=\sum_{k=1}^m s_k\langle v,e_k\rangle f_k$$

并令其余$s_j=0(m<j\leqslant n)$.其中$e_1,\cdots,e_m$和$f_1,\cdots,f_m$分别为V和W上的规范正交组.

将$e_1,\cdots,e_m$扩展为V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.不难知道

$$Te_k=\begin{cases}s_kf_k,1\leqslant k\leqslant m\\ \mathbf{0},k>m\end{cases}$$

根据**7A.5**可知

$$\sum_{k=1}^n||Tv_k||^2=\sum_{k=1}^n||Te_k||^2=\sum_{k=1}^m||s_kf_k||^2=\sum_{k=1}^n s_k^2$$

(2) 令$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$为$T$的特征值,由于$T$是正算子,于是$\lambda_1,\cdots,\lambda_n\geqslant 0$.

于是根据**7E.7**可知$s_k=\lambda_k$对所有$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.

由于$\sqrt{T}$的特征值为$\sqrt{\lambda_1},\cdots,\sqrt{\lambda_n}$,即为其奇异值,于是

$$\sum_{k=1}^{n}\langle Tv_k,v_k\rangle=\sum_{k=1}^{n}||\sqrt{T}v_k||^2=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{\lambda_k}\right)^2=\sum_{k=1}^{n}s_k$$

12. 回答下列问题.

(1) 给出一例:有限维向量空间V上的算子T使得T^2的奇异值不等于T的奇异值的平方.

(2) 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正规的,试证明:T^2的奇异值等于T的奇异值的平方.

Proof.

(1) 令$T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$为$T(x,y)=(y,0)$.于是$T$的奇异值为$0,1$而$T^2$的奇异值为$0,0$.

(2) 设$s_1,\cdots,s_n$为T的奇异值,于是存在V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得$T^*Te_k=s_k^2e_k$.由于T正规,于是

$$(T^2)^*T^2e_k=(T^*T^*TT)e_k=(T^*T)^2e_k=s^4e_k$$

于是s_k^2为T^2的特征值.

13. 设$T_1,T_2\in\mathcal{L}(V)$.试证明:T_1和T_2的奇异值相同,当且仅当存在酉算子$S_1,S_2\in\mathcal{L}(V)$使得$T_1=S_1T_2S_2$.

Proof.

$\Leftarrow$:假定存在这样的S_1,S_2,于是

$$\begin{aligned}T_1=S_1T_2S_2&\Rightarrow T_1^*=S_2^*T_2^*S_1^*=S_2^{-1}T_2^*S_1^{-1}\\&\Rightarrow T_1^*T_1=S_2^{-1}T_2^*S^*-1S_1T_2S_2\\&\Rightarrow T_1^*T_1=S_2^{-1}T_2^*T_2S_2\\&\Rightarrow T_1^*T_1-\lambda I=S_2^{-1}(T_2^*T_2-\lambda I)S_2,\forall\lambda\in\mathbb{F}\\&\Rightarrow\dim E(\lambda,T_1^*T_1)=\dim E(\lambda,T_2^*T_2),\forall\lambda\in\mathbb{F}\end{aligned}$$

于是T_1,T_2拥有相同的奇异值.

$\Rightarrow$:由于T_1,T_2的奇异值相同,于是考虑T_1的奇异值分解

$$T_1v=s_1\langle v,e_1\rangle f_1+\cdots+s_n\langle v,e_n\rangle f_n$$

和T_2的奇异值分解

$$T_1v=s_1\langle v,g_1\rangle h_1+\cdots+s_n\langle v,g_n\rangle h_n$$

其中各向量均为V上的规范正交组.将它们扩展为V的规范正交基.不难得到

$$T_1 e_k = \begin{cases} s_k f_k, 1 \leqslant k \leqslant n \\ \mathbf{0}, n < k \leqslant \dim V \end{cases} \qquad T_2 g_k = \begin{cases} s_k h_k, 1 \leqslant k \leqslant n \\ \mathbf{0}, n < k \leqslant \dim V \end{cases}$$

令$S_1 h_k = f_k, S_2 e_k = g_k$,显然两者是酉算子.对于任意$k \in \{1, \cdots, n\}$有

$$S_1 T_2 S_2 e_k = S_1 T_2 g_k = S_1(s_k h_k) = s_1 S_1 h_k = s_1 f_k$$

于是存在这样的酉算子S_1, S_2使得$T_1 = S_1 T_2 S_2$.

14. 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$,令s_n表示T的最小奇异值.试证明:$s_n||v|| \leqslant ||Tv||$对任意$v \in V$都成立.

Proof.

若$s_n = 0$,那么$||Tv|| \geqslant 0 = s_n||v||$显然成立.

若$s_n > 0$,那么考虑T的奇异值分解

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

于是

$$||Tv||^2 = s_1^2 \left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \cdots + s_n^2 \left|\langle v, e_n \rangle\right|^2 \geqslant s_n^2 \left(\left|\langle v, e_1 \rangle\right|^2 + \cdots + \left|\langle v, e_n \rangle\right|^2 \right) = s_n^2 ||v||^2$$

从而$||Tv|| \geqslant s_n||v||$.

15. 设$T \in \mathcal{L}(V)$,$s_1 \geqslant \cdots \geqslant s_n$是$V$的奇异值.试证明:如果$\lambda$是$T$的特征值,那么$s_1 \geqslant |\lambda| \geqslant s_n$.

Proof.

设λ为T的特征值,对应的特征向量为v.不妨令$||v|| = 1$,于是根据**7E.4**可知$|\lambda| \in [s_n, s_1]$,即$s_1 \geqslant |\lambda| \geqslant s_n$.

16. 设$T \in \mathcal{L}(V, W)$.试证明:$(T^*)^\dagger = \left(T^\dagger\right)^*$.

Proof.

考虑T的奇异值分解

$$Tv = s_1 \langle v, e_1 \rangle f_1 + \cdots + s_n \langle v, e_n \rangle f_n$$

对于任意$w \in W$有

$$T^* w = s_1 \langle w, f_1 \rangle e_1 + \cdots + s_m \langle w, f_m \rangle e_m$$

以及

$$T^{\dagger}w = \frac{\langle w, f_1 \rangle}{s_1} e_1 + \cdots + \frac{\langle w, f_m \rangle}{s_m} e_m$$

于是

$$(T^*)^{\dagger}v = \frac{\langle v, e_1 \rangle}{s_1} f_1 + \cdots + \frac{\langle v, e_m \rangle}{s_m} f_m = \left(T^{\dagger}\right)^*$$

对所有$v \in V$成立,于是命题得证.

17. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:T自伴当且仅当$T^{\dagger}$自伴.

Proof.

我们有

$$T\text{自伴} \Leftrightarrow T = T^* \Leftrightarrow T^{\dagger} = (T^*)^{\dagger} \Leftrightarrow T^{\dagger} = \left(T^{\dagger}\right)^* \Leftrightarrow T^*\text{自伴}$$

于是命题得证.