Linear Algebra Done Right 5E

1. 给出一例$S,T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$且$S,T$可交换,且$\mathbb{F}^4$中存在在$S$下不变但不在$T$下不变的子空间,也存在在$T$下不变但不在$S$下不变的子空间.

Solution.

令$S(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2,x_1,0,0),T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,x_4,x_3)$.

于是$ST(x_1,x_2,x_3,x_4)=TS(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)=\mathbf{0}$,因此$S$和$T$可交换.

注意到$U_1=\{(0,0,x,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$S$下不变,但不在$T$下不变.

$U_2=\{(x,0,0,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$T$下不变,但不在$S$下不变.

2. 设$\mathcal{E}$是$\mathcal{L}(V)$的子集,且$\mathcal{E}$中的每个元素均可对角化.证明:存在V的一个基使得$\mathcal{E}$的每个元素关于这组基都有对角矩阵,当且仅当$\mathcal{E}$中的每对元素可交换.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意$S,T\in\mathcal{E}$,假定存在V的一组基$v_1,\cdots$使得它们关于这组基有对角矩阵,于是

$$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}(TS)$$

于是S,T可交换.

$\Leftarrow$: