Linear Algebra Done Right 7F

1. 设$S,T \in \mathcal{L}(V,W)$.试证明:$|||S|| - ||T||| \leqslant ||S-T||$.

Proof.
由线性映射的范数的定义可知存在$v \in V$且$||v|| \leqslant 1$使得$||S-T|| = ||(S-T)v||$.于是

$$||S-T|| = ||(S-T)v|| = ||Sv - Tv|| \geqslant |||Sv|| - ||Tv||| \geqslant |||S|| - ||T|||$$

以上不等式即**反向三角不等式**.

2. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是自伴的(如果$\mathbb{F} = \mathbb{C}$则令T是正规的),试证明:$||T|| = \max\{|\lambda| : \lambda是T的特征值\}$.

Proof.
由**7.88**和**7E.7**可知

$$||T|| = T的最大奇异值 = T的绝对值最大的特征值$$

3. 设$T \in \mathcal{L}(V,W)$且$v \in V$.试证明:$||Tv|| = ||T||||v||$当且仅当$T^*Tv = ||T||^2 v$.

Proof.
$\Leftarrow$:由**7.88(c)**和**7.91**可得

$$||T||^2||v|| = ||T^*Tv|| \leqslant ||T^*||||Tv|| = ||T||||Tv|| \Rightarrow ||Tv|| \geqslant ||T||||v||$$

而$||Tv|| \leqslant ||T||||v||$,于是$||Tv|| = ||T||||v||$.
$\Rightarrow$:我们有

$$\begin{aligned}||T^*Tv - ||T||^2v||^2 &= \left\langle T^*Tv - ||T||^2v, T^*Tv - ||T||^2v \right\rangle \\ &= ||T^*Tv||^2 + ||T||^4||v||^2 - 2\mathrm{Re}\left\langle T^*Tv, ||T||^2v \right\rangle \\ &\leqslant ||T^*||^2||Tv||^2 + ||T||^4||v||^2 - 2||T||^2||Tv||^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

于是$T^*Tv = ||T||^2v$.

4. 设$T \in \mathcal{L}(V,W), v \in V$且$||Tv|| = ||T||||v||$.试证明:如果$u \in V$且$\langle u, v\rangle = 0$,那么$\langle Tu, Tv\rangle = 0$.

Proof.

根据**7F.3**有

$$\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, T^*Tv\rangle = \left\langle u, ||T||^2 v\right\rangle = ||T||^2 \langle u, v\rangle = 0$$

5. 设U是有限维内积空间,$T \in \mathcal{L}(V,U)$且$S \in \mathcal{L}(U,W)$.试证明:$||ST|| \leqslant ||S||||T||$.

Proof.

由线性映射的范数的定义可知存在$v \in V$且$||v|| \leqslant 1$使得$||ST|| = ||STv||$.于是

$$||ST|| = ||STv|| = ||Tv|| \left|\left| S\left(\frac{Tv}{||Tv||}\right)\right|\right| \leqslant ||Tv||||S|| \leqslant ||S||||T||$$

6. 证明或给出一反例:如果$S, T \in \mathcal{L}(V)$,那么$||ST|| = ||TS||$.

Solution.

令$V = \mathbb{F}^2$,$S(x,y) = (x,0), T(x,y) = (y,0)$.于是$ST = \mathbf{0} \neq TS$.根据**7.87(b)**,即$||ST|| = 0 \neq ||TS||$.

8. 回答下列问题.

(1) 试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||I-T|| < 1$,那么T可逆.

(2) 设$S \in \mathcal{L}(V)$可逆.试证明:如果$T \in \mathcal{L}(V)$且$||S-T|| < \dfrac{1}{||S^{-1}||}$,那么$T$是可逆的.

Proof.

(1) 如果T不可逆,那么存在$v \in V$使得$Tv = \mathbf{0}$.令$u = \dfrac{v}{||v||}$,于是$||u|| = 1$.于是

$$||I-T|| \geqslant ||(I-T)u|| = ||u - \mathbf{0}|| = ||u|| = 1$$

这与$||I-T|| < 1$矛盾,于是T可逆.

(2) 取与**(1)**同样的v, u,我们有$||S-T|| \geqslant ||(S-T)u||| = ||Su||$.
而$1 = ||u|| = ||S^{-1}Su|| \leqslant ||S^{-1}||||Su||$,即$||Su|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.即$||S-T|| \geqslant \dfrac{1}{||S^{-1}||}$.
这与题设不符,于是T可逆.

9. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可逆的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T-S|| < \varepsilon$.

Proof.
取$\delta \in (0, \varepsilon)$且$\delta$不是$T$的特征值,于是$T - \delta I$可逆.令$S = T - \delta I$,则有

$$||T-S|| = ||\delta I|| = |\delta| \in (0, \varepsilon)$$

于是命题得证.

10. 设$\dim V > 1$,$T \in \mathcal{L}(V)$不可逆.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T-S|| < \varepsilon$且$S$不可逆.

Proof.
由于T不可逆,于是存在$e_1 \in V$且$||e_1|| = 1$使得$Te_1 = \mathbf{0}$.将e_1扩展为V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$.
令$Se_1 = \mathbf{0}, Se_k = Te_k - \dfrac{\varepsilon}{2} e_k (k = 2, \cdots, n)$,于是$S$不可逆.对于任意$v \in V$且$v \notin \operatorname{span}(e_1)$有

$$0 < ||(T-S)v||^2 = \left|\left|\frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=2}^{n} \langle v, e_k \rangle e_k\right|\right|^2 \leqslant \frac{\varepsilon^2}{4}$$

于是$0 < ||T-S|| \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

11. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:对于任意$\varepsilon > 0$,都存在可对角化的$S \in \mathcal{L}(V)$使得$0 < ||T-S|| < \varepsilon$.

Proof.
根据Schur定理,存在V的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得T关于其有上三角矩阵A,其对角线元素为$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.
考虑$D \in \mathcal{L}(V)$满足$De_k = ke_k$,显然$||D|| = n$.
由于$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$的数目是有限的,于是存在$\delta \in \left(0, \dfrac{\varepsilon}{n}\right)$使得$\lambda_k + k\delta$互异.
令$S = T + \delta D$,于是

$$0 < ||T-S|| = ||\delta D|| = \delta ||D|| < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$$

于是命题得证.

12. 设$T \in \mathcal{L}(V)$是正算子,试证明:$\left|\left|\sqrt{T}\right|\right| = \sqrt{||T||}$.

Proof.

不妨设T的最大特征值为λ,于是$\sqrt{T}$的最大特征值为$\sqrt{\lambda}$.

根据**7E.7**可知T和$\sqrt{T}$的最大奇异值分别为λ和$\sqrt{\lambda}$.于是命题得证.

13. 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$是正算子.试证明$||S-T|| \leqslant \max\{||S||, ||T||\} \leqslant ||S+T||$.

Lemma.L.13 如果$A \in \mathcal{L}(V)$是自伴的,那么$||A||I - A$是正算子.

Proof.

考虑到A, I均为自伴算子,于是$||A||I - A$也是自伴的.

考虑$||A||I - A$的特征值λ,则存在非零的$v \in V$使得$||A||v - Av = \lambda v$,从而$||A|| - \lambda$是A的特征值.

根据**7F.2**可得$|||A|| - \lambda| \leqslant ||A||$,从而$\lambda \geqslant 0$,即$||A||I - A$是正算子.

Lemma.L.14 如果$A, B \in \mathcal{L}(V)$且$A, B - A$均为正算子,那么$||A|| \leqslant ||B||$.

Proof.

根据**7C.6**可知$B = A + (B - A)$是正算子,于是根据**Lemma.L.13**可知$||B||I - B$是正算子.于是

$$||B||I - A = (||B||I - B) + (B - A)$$

是正算子.考虑A的任意特征值$\lambda \geqslant 0$和对应的特征向量v,我们有

$$(||B||I - A)\, v = (||B|| - \lambda)\, v$$

由于$B - A$是正算子,于是$||B|| - \lambda \geqslant 0$,从而$||B|| \geqslant \lambda$.

于是$||A|| = \max\{\lambda : \lambda\text{为}A\text{的特征值}\} \leqslant ||B||$,命题得证.

Proof.

回到我们的命题.设λ为自伴算子$S - T$的特征值,其特征向量为v.于是

$$(||S||I - (S - T))\, v = (||S|| - \lambda)\, v$$

根据**Lemma.L.13**和**7C.6**可知$||S||I - (S - T)$是正算子,于是$||S|| - \lambda \geqslant 0$.

同理可知$||T|| + \lambda \geqslant 0$.由于上述两条等式对于所有$S - T$的特征值$\lambda$都成立,于是$||S - T|| \leqslant \max\{||S||, ||T||\}$.

根据**Lemma.L.14**,令$A = S, B = S + T$可知$||S|| \leqslant ||S + T||$,同理有$||T|| \leqslant ||S + T||$.

于是$\max\{||S||, ||T||\} \leqslant ||S + T||$.

14. 设U,W是V的子空间且$||P_U - P_W|| < 1$.试证明$\dim U = \dim W$.

Proof.

注意到$P_U = I - P_{U^\perp}, P_W = I - P_{W^\perp}$.根据**7F.8(1)**可知$P_U + P_{W^\perp}$和$P_W + P_{U^\perp}$都是可逆的.于是

$$U \cap W^\perp = (\text{null } P_{U^\perp}) \cap (\text{null } P_W) \subseteq \text{null } (P_{U^\perp} + P_W) = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow U \cap W^\perp = \{\mathbf{0}\}$$

$$V = \text{range } (P_U + P_{W^\perp}) \supseteq (\text{range } P_U) + (\text{range } P_{W^\perp}) = U + W^\perp \Rightarrow U + W^\perp = V$$

于是

$$\dim V = \dim(U + W^\perp) = \dim U + \dim W^\perp - \dim(U \cap W^\perp) = \dim U + \dim V - \dim W$$

于是$\dim U = \dim W$.

15. 定义$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$为$T(z_1, z_2, z_3) = (z_3, 2z_1, 3z_2)$.求使得$T = S\sqrt{T^*T}$的$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$的表达式.

Solution.

考虑T关于$\mathbb{F}^3$的标准基的矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{M}(T^*T) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

于是$\sqrt{T^*T}e_1 = 2e_1, \sqrt{T^*T}e_2 = 3e_2, \sqrt{T^*T}e_3 = e_3$.于是$S$应满足

$$Te_1 = S\sqrt{T^*T}e_1 = 2Se_1 = 2e_2 \Rightarrow Se_1 = e_2$$

$$Te_2 = S\sqrt{T^*T}e_2 = 3Se_2 = 3e_3 \Rightarrow Se_2 = e_3$$

$$Te_3 = S\sqrt{T^*T}e_3 = Se_3 = e_1 \Rightarrow Se_3 = e_1$$

于是

$$S(z_1, z_2, z_3) = (z_3, z_1, z_2)$$

16. 设$S \in \mathcal{L}(V)$是可逆正算子.试证明:存在$\delta > 0$使得任意满足$||S-T|| < \delta$的自伴算子T都是正算子.

Proof.

设μ是S的最小奇异值.由于S可逆,于是$\mu > 0$.

根据**7E.12(2)**可知$\sqrt{\mu}$是$\sqrt{T}$的最小奇异值,于是由**7E.14**可得

$$\langle Sv, v\rangle = \left\langle \sqrt{S}v, \sqrt{S}v \right\rangle = \left|\left|\sqrt{S}v\right|\right|^2 \geqslant \mu||v||^2$$

设自伴算子$T \in \mathcal{L}(V)$满足$||S-T|| < \mu$.由Cauchy不等式可得

$$\langle (S-T)v, v\rangle \leqslant ||(S-T)v||||v|| \leqslant ||S-T||||v||^2 \leqslant \mu||v||^2 \leqslant \langle Sv, v\rangle$$

于是$\langle Tv, v\rangle \geqslant 0$对任意$v \in V$都成立,因而$T$是正算子.

17. 试证明:如果$u \in V$而φ_u是V上定义为$\varphi_u(v) = \langle v, u\rangle$的线性泛函,那么$||\varphi_u|| = ||u||$.

Proof.

对于任意$v \in V$,由Cauchy不等式可得

$$|\varphi_u(v)| = |\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

当且仅当$v = \lambda u$时等号成立.对于所有满足$||v|| = 1$的$v \in V$则有

$$|\varphi_u(v)| \leqslant ||u||$$

根据线性映射的范数的定义可知$||\varphi_u|| = ||u||$.

18. 设$e_1, \cdots, e_n$是V的规范正交基,$T \in \mathcal{L}(V, W)$.试证明下列命题.

(1) $\max\limits_{1 \leqslant k \leqslant n}\{||Te_k||\} \leqslant ||T|| \leqslant \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} ||Te_k||^2}$.

(2) $||T|| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} ||Te_k||^2}$当且仅当$\dim \operatorname{range} T \leqslant 1$.

Proof.

(1) 根据$||T||$的定义,对任意$v \in V$且$||v|| = 1$都有$||T|| \geqslant ||Tv||$,于是

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n}\{||Te_k||\} \leqslant ||T||$$

令$s_1,\cdots,s_n$为T的(按降序排列的)奇异值,根据**7E.11(1)**有

$$\sum_{k=1}^{n}||Te_k||^2=\sum_{k=1}^{n}s_k^2$$

由**7.88(a)**可知$||T||=s_1$,于是

$$||T||=s_1=\sqrt{s_1^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{n}s_k^2}=\sqrt{\sum_{k=1}^{n}||Te_k||^2}$$

于是命题得证.

(2) 这要求T除了其最大奇异值外其余所有奇异值为0.于是$\dim\operatorname{range}T\leqslant 1$.

19. 试证明:如果$T\in\mathcal{L}(V,W)$,那么$||T^*T||=||T||^2$.

Proof.

考虑$||T||$的最大奇异值s_1,根据**7.88(a)**有$||T||=s_1$.

而T^*T是正算子,其关于V的某规范正交基$e_1,\cdots,e_n$由对角矩阵.不妨设对角线元素为$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$.于是

$$||T^*Tv||^2=\left|\left|\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\langle v,e_k\rangle e_k\right|\right|=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2\left|\langle v,e_k\rangle\right|^2\leqslant\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k\}\right)^2\sum_{k=1}^{n}|\langle v,e_k\rangle|\leqslant\left(\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k\}\right)^2||v||^2$$

于是$||T^*Tv||\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k\}||v||$,取$v=e_j$使得$\lambda_k$最大即可取等.

因而$||T^*T||=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\lambda_k\}=s_1^2=||T||^2$.

Proof.

对于任意$v\in V$有

$$\left|\left|\sqrt{T^*T}v\right|\right|^2=\langle T^*Tv,v\rangle=\langle Tv,Tv\rangle=||Tv||^2\leqslant||T||^2||v||^2$$

于是$\left|\left|\sqrt{T^*T}\right|\right|\leqslant||T||$.考虑$T$的极分解$T=S\sqrt{T^*T}$,由于$S$是酉算子,于是$||S||=1$.于是根据**7F.5**有

$$||T||=\left|\left|S\sqrt{T^*T}\right|\right|\leqslant||S||\left|\left|\sqrt{T^*T}\right|\right|=\left|\left|\sqrt{T^*T}\right|\right|$$

于是$\left|\left|\sqrt{T^*T}\right|\right|=||T||$.根据**7F.12**有$||T^*T||=||T||^2$.

20. 设$T\in\mathcal{L}(V)$是正规的,试证明:对于任意$k\in\mathbb{N}^*$都有$||T||^k=||T^k||$.

> **Proof.**
> 设$s_1,\cdots,s_n$为T的奇异值,那么$||T||=s_1$.
> 根据**7E.12(2)**,考虑V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$使得$T^*Te_j=s_j^2e_j(j=1,\cdots,n)$.于是根据$T$的正规性可得
>
> $$\left(T^k\right)^*T^ke_j=(T^*T)^ke_j=s_j^{2k}e_j$$
>
> 从而T^k的奇异值为$s_1^k,\cdots,s_n^k$,于是$||T^k||=s_1^k=||T||^k$.

> **21.** 设$\dim V>1$且$\dim W>1$.试证明:$\mathcal{L}(V,W)$上的范数并不来自内积.换言之,试证明:不存在$\mathcal{L}(V,W)$上的内积使得
>
> $$\max\{||Tv||:v\in V\text{且}||v||=1\}=\sqrt{\langle T,T\rangle}$$
>
> 对所有$T\in\mathcal{L}(V,W)$都成立.

> **Proof.**
> 考虑V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$和W的规范正交基$f_1,\cdots,f_m$,其中$m,n\geqslant 2$.
> 令$T,S\in\mathcal{L}(V,W)$为
>
> $$Se_1=f_1,Se_2=f_2,Se_k=\mathbf{0}(k>2)$$
>
> $$Te_1=-f_1,Te_2=f_2,Te_k=\mathbf{0}(k>2)$$
>
> 于是$||S+T||=||S-T||=2$且$||S||=||T||=1$,则有
>
> $$||S+T||^2+||S-T||^2=8\neq 4=2\left(||S||^2+||T||^2\right)$$
>
> 这不符合平行四边形等式,于是不存在这样的内积.

> **22.** 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$.令$n=\dim V$,$s_1,\cdots,s_n$为T的按降序排列的奇异值.试证明:如果$1\leqslant k\leqslant n$,那么$\min\{||T|_U||:U\text{是}V\text{的子空间且}\dim U=k\}=s_{n-k+1}$.

当你做到这里的时候,是否感到了绝望?

> **Proof.**
> 对于给定的$k\in\{1,\cdots,n\}$,令$E_k=\min\{||T|_U||:U\text{是}V\text{的子空间且}\dim U=k\}$.
> 如果T没有正奇异值,也即$T=\mathbf{0}$,我们有$T|_U=\mathbf{0}$,于是$E_k=0=s_{n-k+1}$.
> 当$k=n$时,唯一可取的子空间为V,于是$E_n=||T||=s_1$.
> 现在,假定$1\leqslant k<n$,并假设$s_1,\cdots,s_m$为T的正奇异值.

考虑T的奇异值分解

$$Tv=\sum_{j=1}^{m}s_j\langle v,e_j\rangle f_j$$

将$e_1,\cdots,e_m$扩展为V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$,于是

$$Te_j=\begin{cases}s_jf_j,1\leqslant j\leqslant m\\ \mathbf{0},m<j\leqslant n\end{cases}$$

令$X=\operatorname{span}(e_{n-k+1},\cdots,e_k)$,那么$\dim X=k$.考虑以下两种情况.

如果$1\leqslant k\leqslant n-m$,那么$s_{n-k+1}=0$.另外,$T|_X=\mathbf{0}$,从而$E_k=||\mathbf{0}||=0=s_{n-k+1}$.

如果$n-m<k<n$,那么$1\leqslant n-k<m$.考虑V的任意一个k维子空间U.

对于任意$v\in V$且$||v||\leqslant 1$都有$P_Uv\in U$且$||P_Uv||\leqslant||v||\leqslant 1$.

于是根据$||T_U||$的定义可知$||TP_Uv||\leqslant||T|_U||$,即$||TP_U||\leqslant||T|_U||$. 现在,注意到

$$\dim\operatorname{range}\ (TP_{U^\perp})\leqslant\dim\operatorname{range}\ P_{U^\perp}=\dim U^\perp=n-k$$

根据**7.92**可知$||T-TP_{U^\perp}||\geqslant s_{n-k+1}$.另一方面,有$P_U=I-P_{U^\perp}$,于是$||TP_U||\geqslant s_{n-k+1}$.

于是$||T|_U||\geqslant||TP_U||\geqslant s_{n-k+1}$,我们得到了$||T|_U||$的下界.

现在,对任意$x\in X$有

$$||T|_Xx||^2=\sum_{j=n-k+1}^{m}s_j^2\left|\langle x,e_j\rangle\right|^2\leqslant s_{n-k+1}^2||x||^2$$

从而$||T|_X||\leqslant s_{n-k+1}$.结合$T|_X$的下界可知$||T|_X||=s_{n-k+1}$,于是$E_k=s_{n-k+1}$.

综上可知命题得证.

24. 设$T\in\mathcal{L}(V)$可逆.试证明:$||T^{-1}||=\dfrac{1}{||T||}$当且仅当$\dfrac{T}{||T||}$是酉算子.

Proof.

设T的奇异值为$s_1,\cdots,s_n$.由于T可逆,于是$s_1,\cdots,s_n>0$.

根据伪逆的奇异值分解和伪逆的性质可知T^{-1}的奇异值(按降序排列)为$\dfrac{1}{s_n},\cdots,\dfrac{1}{s_1}$.

于是$||T^{-1}||=\dfrac{1}{s_n}$.于是

$$||T^{-1}||=\frac{1}{||T||}\Leftrightarrow\frac{1}{s_n}=\frac{1}{s_1}\Leftrightarrow s_1=\cdots=s_n\Leftrightarrow\frac{T}{||T||}\text{的所有奇异值均为}1\Leftrightarrow\frac{T}{||T||}\text{是酉算子}$$