Linear Algebra Done Right 7D

1. 设$\dim V \geqslant 2$,$S \in \mathcal{L}(V,W)$.试证明:S是等距映射,当且仅当对于任意V中一长度为2的规范正交组e_1,e_2都有Se_1,Se_2是W中的规范正交组.

Proof.

$\Rightarrow$:考虑$U=\operatorname{span}(e_1,e_2)$,于是$S|_U$是等距映射.

根据**7.49(d)**可知这等价于Se_1,Se_2是range $(S|_U)$中的规范正交组,即W中的规范正交组.

$\Leftarrow$:考虑V的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.对任意$j,k\in\{1,\cdots,n\}$且$j<k$有Se_j,Se_k是W中的规范正交组,即

$$||Se_j||=||Se_k||=1,\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

于是$Se_1,\cdots,Se_n$是W中的规范正交组.根据**7.49(d)**可知S是等距映射.

2. 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$,试证明:T是等距映射的标量倍,当且仅当T保持正交性.

注:所谓T保持正交性,即$\langle Tu,Tv\rangle=0$对所有满足$\langle u,v\rangle=0$的$u,v\in V$都成立.

Proof.

$\Rightarrow$:设T满足$T=\lambda S$,其中$S\in\mathcal{L}(V,W)$是等距映射.$\lambda\in\mathbb{F}$.

于是根据**7.49(c)**可知$\langle Su,Sv\rangle=\langle u,v\rangle$对所有$u,v\in V$都成立.于是

$$\langle Tu,Tv\rangle=\langle\lambda Su,\lambda Sv\rangle=|\lambda|^2\langle Su,Sv\rangle=|\lambda|^2\langle u,v\rangle=0$$

于是T保持正交性.

$\Leftarrow$:假定T保持正交性.设$e_1,\cdots,e_n$为V的规范正交基,于是对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$\langle e_1+e_k,e_1-e_k\rangle=||e_1||-||e_k||=0\Rightarrow\langle Te_1+Te_k,Te_1-Te_k\rangle=||Te_1||-||Te_k||=0$$

于是令$\lambda=||Te_1||$,则有$\lambda=||Te_k||$对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$都成立.

若$\lambda=0$,则$T=0I$是等距映射的标量倍.若$\lambda\neq0$,那么令$S=\dfrac{T}{\lambda}$,则有

$$\langle e_j,e_k\rangle=0\Rightarrow\langle Te_j,Te_k\rangle=0\Rightarrow\langle\lambda Se_j,\lambda Se_k\rangle=0\Rightarrow\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

对所有$j,k\in\{1,\cdots,n\},j\neq k$成立.又因为$||Se_k||=\left|\left|\dfrac{Te_k}{\lambda}\right|\right|=\left|\dfrac{\lambda}{\lambda}\right|=1$,于是$Se_1,\cdots,Se_n$是$W$中的规范正交组.

根据**7.49(d)**可知S是等距映射,于是T是等距映射的标量倍.

3. 证明下列命题.

(1) V上的两酉算子之积是酉算子.

(2) V上的酉算子之逆是酉算子.

Proof.

(1) 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$是酉算子,$e_1,\cdots,e_n$是V的规范正交基.
根据**7.53(d)**可知$Se_1,\cdots,Se_n$是V的规范正交基,于是$T(Se_1),\cdots,T(Se_n)$是V的规范正交基.
于是TS是V上的酉算子.

(2) 设$S\in\mathcal{L}(V)$是酉算子,由**7.53(c)**可知$S^{-1}=S^*$,由**7.53(f)**可知S^*是酉算子,于是命题得证.

4. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$,且$A,B\in\mathcal{L}(V)$自伴.试证明:$A+\mathrm{i}B$是酉算子,当且仅当$AB=BA$且$A^2+B^2=I$.

Proof.
我们有

$$\begin{aligned}A+\mathrm{i}B\text{是酉算子}&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A+\mathrm{i}B)^*=I\\&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A^*-\mathrm{i}B^*)=I\\&\Leftrightarrow(A+\mathrm{i}B)(A-\mathrm{i}B)=I\\&\Leftrightarrow A^2+B^2+\mathrm{i}(BA-AB)=I\\&\Leftrightarrow A^2+B^2=I,AB=BA\end{aligned}$$

5. 设$S\in\mathcal{L}(V)$.试证明下列命题等价.

(a) S是自伴的酉算子.

(b) $S=2P-I$,其中P是V上的某个正交投影.

(c) 存在V的子空间U使得$Su=u$对任意$u\in U$成立而$Sw=-w$对所有$w\in U^\perp$成立.

Proof.
(a)⇒(b):设$S\in\mathcal{L}(V)$是自伴的酉算子,那么令$P=\dfrac{S+I}{2}$.
根据**7.53**可知$S^2=SS^*=I$,于是

$$P^2=\frac{S^2+2S+I}{4}=\frac{S+I}{2}=P$$

根据**7A.20(c)**可知存在V的子空间U使得$P = P_U$,于是P是V上的某个正交投影,此时有$S = 2P - I$.

(b)⇒(c):对任意$u \in U$有$Su = 2Pu - u = u$,对任意$w \in U^\perp$有$Sw = 2P_U w - w = \mathbf{0} - w = -w$.

(c)⇒(a):对任意$v_1 := u_1 + w_1, v_2 := u_2 + w_2 \in V$,其中$u_1, u_2 \in U, w_1, w_2 \in U^\perp$有

$$\langle Sv_1, v_2\rangle = \langle u_1 - w_1, u_2 + w_2\rangle = \langle u_1, u_2\rangle - \langle w_1, w_2\rangle = \langle u_1 + w_1, u_2 - w_2\rangle = \langle v_1, Sv_2\rangle$$

于是S自伴.另外我们有

$$S^2 v = S^2(u + w) = S(u - w) = u + w = v$$

于是$S^2 = I$,即$SS^* = S^* = I$,因而S是酉算子.

6. 设T_1, T_2都是$\mathbb{F}^3$上以$2, 5, 7$为特征值的正规算子.试证明:存在酉算子$S \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$使得$T_1 = S^* T_2 S$.

Proof.

令$\lambda_1, \cdots, \lambda_3$为$T_1, T_2$共有的特征值.设$T_1$对应的特征向量为$e_1, \cdots, e_3$,$T_2$对应的特征向量为$f_1, \cdots, f_3$.

于是$e_1, \cdots, e_3$和$f_1, \cdots, f_3$均为V的基.现在,令$Se_k = f_k$对$k = 1, 2, 3$成立,于是

$$Te_k = S^* T_2 S e_k = S^{-1} T_2 S e_k = S^{-1} T_2 f_k = S^{-1} \lambda_k f_k = \lambda_k e_k$$

对$k = 1, 2, 3$成立,从而$T = S^* T_2 S$.

7. 给出两个自伴算子$T_1, T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得其特征值均为$2, 5, 7$但不存在一酉算子$S \in \mathcal{L}(V)$使得$T_1 = S^* T_2 S$.

Proof.

令T_1, T_2关于$\mathbb{F}^4$的标准基$e_1, \cdots, e_4$的矩阵为

$$\mathcal{M}(T_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{M}(T_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

假定存在酉算子$S \in \mathcal{L}(V)$使得$T_1 = S^* T_2 S$.由于$SS^* = S^* S = I$,于是

$$T_1 - 2I = S^* T_2 S - 2S^* S = S^*(T_2 S - 2S) = S^*(T_2 - 2I)S$$

从而根据**3D.8**可知$\dim \operatorname{null}\,(T_1 - 2I) = \dim \operatorname{null}\,(T_2 - 2I)$.

然而根据两者的矩阵可以看出

$$\dim \operatorname{null}\,(T_1 - 2I) = 2 \neq 1 = \dim \operatorname{null}\,(T_2 - 2I)$$

于是命题不成立.

8. 证明或给出一反例:如果$S \in \mathcal{L}(V)$且存在V的一规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得任意e_k都有$||Se_k|| = 1$,那么S是酉算子.

Proof.

考虑这样的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$,令$Se_k = e_1$对任意e_k成立.显然S不可逆,于是S不是酉算子.

9. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$.设T的每个特征值的绝对值都是1且$||Tv|| \leqslant ||v||$对任意$v \in V$都成立.试证明:T是酉算子.

Proof.

根据Schur定理可知T关于V的某组规范正交基$e_1, \cdots, e_n$有上三角矩阵A.

由于T的每个特征值的绝对值都是1,于是$|A_{1,1}| = \cdots = |A_{n,n}|$.对于任意$k \in \{2, \cdots, n\}$有

$$||Te_k||^2 = \sum_{j=1}^{k} |A_{k,j}|^2 = 1 + \sum_{j=1}^{k-1} |A_{k,j}|^2 \leqslant ||e_k||^2 = 1$$

于是

$$\sum_{j=1}^{k-1} |A_{k,j}|^2 = 0$$

这表明A是上三角矩阵,从而$e_1, \cdots, e_n$均为T的特征向量.根据**7.53**可知T为酉算子.

10. 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$是使得$||Tv|| \leqslant ||v||$对所有$v \in V$成立的自伴算子.证明下列命题.

(1) $I - T^2$是正算子.

(2) $T + \mathrm{i}\sqrt{I - T^2}$是酉算子.

Proof.

(1) 由于T自伴,于是$I - T^2 = (I - T)(I + T) = (I - T)^*(I + T)$.对于任意$v \in V$有

$$\left\langle (I - T^2)v, v \right\rangle = \langle (I - T)^*(I + T)v, v \rangle = \langle (I + T)v, (I - T)v \rangle = ||v||^2 - ||Tv||^2 \geqslant 0$$

于是$I - T^2$是正算子.

(2) 令$A = T, B = \sqrt{I - T^2}$.于是$A^2 + B^2 = I$.

由于$T(I - T^2) = T - T^3 = (I - T^2)T$,于是$A$与$B^2$可交换.

又因为存在多项式p使得$B = p(B^2)$,于是A与B可交换.

根据**7D.4**可知$A + \mathrm{i}B$是酉算子.

11. 设$S \in \mathcal{L}(V)$.试证明:S是酉算子,当且仅当

$$\{Sv : v \in V, ||v|| \leqslant 1\} = \{v \in V : ||v|| \leqslant 1\}$$

Proof.

设$X = \{Sv : v \in V, ||v|| \leqslant 1\}, Y = \{v \in V : ||v|| \leqslant 1\}$.

$\Rightarrow$:假设S是酉算子.对于任意$Sv \in X$都有$||Sv|| = ||v|| \leqslant 1$,从而$Sv \in Y$,即$X \subseteq Y$.

考虑到S^{-1}也是酉算子,于是上面的包含关系反过来也成立,从而$X = Y$.

$\Leftarrow$:假定S不是酉算子.

若S不可逆,那么考虑$(\text{range } T)^{\perp}$中的非零向量$w$使得$||w|| = 1$,则有$w \in Y$.

由于$w \in (\text{range } T)^{\perp}$,于是不存在$v \in V$使得$Sv = w$,从而$w \notin X$,从而$X \neq Y$.

若S可逆,那么存在$v \in V$使得$||Sv|| \neq ||v||$.不失一般性地,假定$||v|| = 1$.

若$||Sv|| > 1$,那么$Sv \in X$且$Sv \notin Y$.于是$X \neq Y$.

若$0 < ||Sv|| < 1$,那么令$u = \dfrac{Sv}{||Sv||}$,则有$u \in Y$.现在假定$u \in X$,于是存在$w \in V$使得$Sw = u$,那么我们有

$$Sw = \frac{Sv}{||Sv||} \Rightarrow v = ||Sv||w \Rightarrow ||v|| < 1$$

这和我们的假设不符,于是$u \notin X$,从而$X \neq Y$.

于是我们知道当$X = Y$是必然有S是酉算子.

12. 证明或给出一反例:如果$S \in \mathcal{L}(V)$可逆且$||S^{-1}v|| = ||Sv||$对任意$v \in V$都成立,那么S是酉算子.

Proof.

设$S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$关于$\mathbb{C}^2$的标准基的矩阵为$\begin{pmatrix} \mathrm{i} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$.

我们有$S^2 = I$,于是$S^{-1} = S$.而

$$||S(1,0)|| = ||(\mathrm{i}, \sqrt{2})|| = \sqrt{3} \neq 1 = ||(0,1)||$$

于是S不是酉算子.

13. 试证明:复数构成的方阵的列构成$\mathbb{C}^n$中的规范正交组,当且仅当其行可构成$\mathbb{C}^n$中的规范正交组.

Proof.

我们设这方阵为A,是$S \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$关于其标准正交基的矩阵.于是

$$A\text{的列构成}\mathbb{C}^n\text{中的规范正交组} \Leftrightarrow S\text{是酉算子}A\text{的行构成}\mathbb{C}^n\text{中的规范正交组}$$

14. 设$v \in V$且$||v|| = 1$,$b \in \mathbb{F}$.又设$\dim V \geqslant 2$.试证明:存在酉算子$S \in \mathcal{L}(V)$使得$\langle Sv, v\rangle = b$当且仅当$|b| \leqslant 1$.

Proof.

$\Rightarrow$:根据Cauchy-Schwarz不等式可知

$$|b| = |\langle Sv, v\rangle| \leqslant ||Sv||||v|| = ||v||^2 = 1$$

于是$|b| \leqslant 1$.

$\Leftarrow$:令$e_1 = v$,将其扩展为V的一组规范正交基为$e_1, \cdots, e_n$.现在,定义$S \in \mathcal{L}(V)$如下

$$Se_1 = be_1 + \sqrt{1-b^2}e_2, Se_2 = be_2 - \sqrt{1-b^2}e_1, Se_k = e_k (k \geqslant 3)$$

我们有

$$\langle Sv, v\rangle = \left\langle be_1 + \sqrt{1-b^2}e_2, e_1\right\rangle = \langle be_1, e_1\rangle = b$$

$$\langle Se_1, Se_2\rangle = \left\langle be_1 + \sqrt{1-b^2}e_2, be_2 - \sqrt{1-b^2}e_1\right\rangle = b\sqrt{1-b^2} - b\sqrt{1-b^2} = 0$$

于是不难验证$Se_1, \cdots, Se_n$是V的规范正交基,且有$\langle Sv, v\rangle = b$.这样的S自然是酉算子.

15. 设T是V上的酉算子,$T - I$可逆.证明下列命题.

(1) $(T+I)(T-I)^{-1}$是斜算子.

(2) 若$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,那么$\mathrm{i}(T+I)(T-I)^{-1}$是自伴算子.

Proof.

(1) 令$R = (T-I)^{-1}$.

于是$(T-I)(T+I)^* = TT^* + T - T^* - I = T - T^*$,即$(T+I)^* = R(T-T^*)$.于是

$$\left[(T+I)(T-I)^{-1}\right]^* = R^*R(T-T^*)$$

又$(T+I)(T^*-I) = T^* - T$,于是$T + I = -(T-T^*)(T^*-I)^{-1} = -(T-T^*)R^*$,于是

$$-(T+I)(T-I)^{-1} = (T-T^*)R^*R$$

另外,注意到

$$(R^*R)^{-1}T=(T-I)(T^*-I)T=(2I-T-T^*)T=T(2I-T-T^*)=T(R^*R)^{-1}$$

对上式两端取逆可得$T^*(R^*R)=(R^*R)T^*$.同样可知R^*R与T可交换,于是R^*R与$T-T^*$可交换.

因此$[(T+I)(T-I)^{-1}]^*=-(T+I)(T-I)^{-1}$,即$(T+I)(T-I)^*$是斜算子.

(2) 我们有

$$\left[\mathrm{i}(T+I)(T-I)^{-1}\right]^*=-\mathrm{i}\left[(T+I)(T-I)^{-1}\right]^*=-\mathrm{i}\left(-(T+I)(T-I)^{-1}\right)=\mathrm{i}(T+I)(T-I)^{-1}$$

于是$\mathrm{i}(T+I)(T-I)^{-1}$是自伴算子.

16. 设$\mathbb{F}=\mathbb{C}$且$T\in\mathcal{L}(V)$是自伴的.试证明:$(T+\mathrm{i}I)(T-\mathrm{i}I)^{-1}$是酉算子且1不是其特征值.

Proof.

令$Q=(T+\mathrm{i}I)(T-\mathrm{i}I)^{-1}$.复谱定理表明存在$T$的特征向量$e_1,\cdots,e_n$构成的$V$的规范正交基.

由于T是自伴的,于是上述特征向量对应的特征值$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$均为实数.现在,对于任意$j\in\{1,\cdots,n\}$有

$$(T-\mathrm{i}I)e_k=Te_k-\mathrm{i}Ie_k=\lambda_ke_k-\mathrm{i}e_k=(\lambda_k-\mathrm{i})e_k$$

于是

$$Qe_k=(T+\mathrm{i}I)(T-\mathrm{i}I)^{-1}e_k=(T+\mathrm{i}I)\frac{e_k}{\lambda_k-\mathrm{i}}=\frac{\lambda_k+\mathrm{i}}{\lambda_k-i}e_k$$

而

$$||Qe_k||=\left|\frac{\lambda_k+\mathrm{i}}{\lambda_k-i}\right|||e_k||=\left|\frac{\lambda_k^2-1+2\lambda_k\mathrm{i}}{\lambda_k^2+1}\right|=\sqrt{\left(\frac{\lambda_k^2-1}{\lambda_k^2+1}\right)^2+\left(\frac{2\lambda_k}{\lambda_k^2+1}\right)^2}=1$$

于是$Qe_1,\cdots,Qe_n$是V的规范正交基,因而Q是酉算子.

另外,Q的特征值总是满足$\dfrac{\lambda_k+\mathrm{i}}{\lambda_k-\mathrm{i}}$的形式,其中$\lambda_k\in\mathbb{R}$,于是它总是虚数,不可能为1.

17. 解释**7.57**中给出的酉矩阵的结论为何成立.

Proof.

我们考虑$\mathbb{F}^n$的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.于是每个方阵都对应于$\mathbb{F}^n$上的算子,其结论就与酉算子的性质等价.

18. 方阵A被称为是**对称的**,如果$A=A^{\mathrm{t}}$.证明:如果A是实对称矩阵,那么存在实的酉矩阵Q使得Q^*AQ是对角矩阵.

Proof.

设$\mathbb{F}=\mathbb{R}$,考虑$\mathbb{R}^n$的某规范正交基$e_1,\cdots,e_n$,设A是$T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$关于这组基的矩阵,那么$T=T^{-1}=T^*$.

根据实谱定理,存在$\mathbb{R}^n$的规范正交基$f_1,\cdots,f_n$使得$D:=\mathcal{M}(T,(f_1,\cdots,f_n))$是对角矩阵.

现在,令$Q=\mathcal{M}(I,(f_1,\cdots,f_n),(e_1,\cdots,e_n))$.根据换基公式有

$$D=Q^{-1}AQ$$

由于Q对应的算子为酉算子,于是Q为酉矩阵,因而$Q^*=Q^{-1}$.因此有

$$D=Q^*AQ$$

19. 设$n\in\mathbb{N}^*$.我们采取如下记号:将$\mathbb{C}^n$的元素记为$z=(z_0,\cdots,z_{n-1})$.定义C^n上的线性泛函$\omega_0,\cdots,\omega_{n-1}$为

$$\omega_j(z_0,\cdots,z_{n-1})=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{m=0}^{n-1}z_m\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}jm}{n}}$$

离散傅里叶变换即定义为$\mathcal{F}z=(\omega_0(z),\cdots,\omega_{n-1}(z))$的算子$\mathbb{F}\in\mathcal{L}(\mathbb{C}^n)$.证明下列命题.

(1) $\mathcal{F}$是$\mathbb{C}^n$上的酉算子.

(2) 如果$(z_0,\cdots,z_{n-1})\in\mathbb{C}^n$,规定$z_n=z_0$,那么

$$\mathcal{F}^{-1}(z_0,\cdots,z_{n-1})=\mathcal{F}(z_n,\cdots,z_1)$$

(3) $\mathcal{F}^4=I$.

Proof.

(1) 考虑$\mathbb{C}^n$的标准正交基$e_0,\cdots,e_{n-1}$.对于任意$j,k\in\{0,\cdots,n-1\}$有

$$\omega_je_k=\frac{\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}jk}{n}}}{\sqrt{n}}=\frac{\alpha^{jk}}{\sqrt{n}},\alpha=\mathrm{e}^{-\frac{2\pi\mathrm{i}}{n}}$$

于是$\mathcal{F}$关于该基的矩阵为

$$\mathcal{M}(\mathcal{F})=\frac{1}{\sqrt{n}}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & \alpha & \alpha^2 & \cdots & \alpha^{n-1}\\ 1 & \alpha^2 & \alpha^4 & \cdots & \alpha^{2(n-1)}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & \alpha^{n-1} & \alpha^{2(n-1)} & \cdots & \alpha^{(n-1)^2}\end{pmatrix}$$

记$\mathcal{M}(\mathcal{F})=A$.现在考虑$j,k\in\{0,\cdots,n-1\}$.$A$的第$j$列和第$k$列的内积为

$$\langle A_{\cdot,j},A_{\cdot,k}\rangle=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\left(\alpha^j\overline{\alpha^k}\right)^m$$

注意到

$$\overline{\mathrm{e}^{t\mathrm{i}}}=\overline{\cos t+\mathrm{i}\sin t}=\cos(-t)+\mathrm{i}\sin(-t)=\mathrm{e}^{-t\mathrm{i}}$$

于是

$$\langle A_{\cdot,j},A_{\cdot,k}\rangle=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}(k-j)m}{n}}$$

当$j=k$时有

$$||A_{\cdot,j}||=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}1=1$$

当$j\neq k$时有

$$\langle A_{\cdot,j},A_{\cdot,k}\rangle=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}(k-j)m}{n}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(k-j)}}{1-\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}(k-j)}{n}}}=0$$

于是A的各列构成$\mathbb{C}^n$的规范正交基,因而$\mathbb{F}$是酉算子.

(2) 考虑线性映射$\mathcal{G}$使得$\mathcal{G}(z_0,\cdots,z_{n-1})=\mathcal{F}(z_n,\cdots,z_1)$.于是

$$\mathcal{G}e_k=\begin{cases}\mathcal{F}e_0,k=0\\\mathcal{F}e_{n-k},1\leqslant k<n\end{cases}$$

令$A=\mathcal{M}(\mathcal{F}),B=\mathcal{M}(\mathcal{G})$,于是

$$B_{j,k}=\begin{cases}A_{j,k},k=0\\A_{j,n-k},1\leqslant k<n\end{cases}$$

注意到$k>0$时

$$B_{j,k}=A_{j,n-k}=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}(n-k)j}{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}-\frac{2\pi\mathrm{i}kj}{n}}=\overline{\frac{1}{\sqrt{n}}\mathrm{e}^{\frac{2\pi\mathrm{i}kj}{n}}}=\overline{A_{k,j}}=A^*_{j,k}$$

又$B_{1,k}=1=A^*j,k$.于是$B=A^*$,从而$\mathcal{G}=\mathcal{F}^*$.

由于$\mathcal{F}$是酉算子,于是$\mathcal{F}^*=\mathcal{F}^{-1}$,即$\mathcal{G}=\mathcal{F}^{-1}$.

(3) 注意到

$$\mathcal{F}^2(z_0,\cdots,z_{n-1})=(z_n,\cdots,z_1)$$

又

$$\mathcal{F}^2(z_n,\cdots,z_{n-1})=(z_0,\cdots,z_{n-1})$$

于是$\mathcal{F}^4=I$.

20. 设A是各列线性无关的方阵,试证明:存在唯一的矩阵R,Q使得$A=RQ$,其中R是对角线上仅有正数的下三角矩阵,而Q是酉矩阵.

Proof.

由于A的各列线性无关,因而其各行也线性无关,于是A^*的各列线性无关.

根据QR分解,存在唯一的矩阵P,U使得$A^*=PU$,其中P是酉矩阵,而U是对角线上仅有正数的上三角矩阵.

对上式两边取复共轭可得$A=U^*P^*$,令$R=U^*,Q=P^*$即可证得该命题.