

Linear Algebra Done Right 6C

1. 设 $v_1, \dots, v_m \in V$. 试证明

$$\{v_1, \dots, v_m\}^\perp = (\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp$$

Proof.

由于 $\{v_1, \dots, v_m\} \subseteq \text{span}(v_1, \dots, v_m)$, 于是根据正交补的性质有 $(\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp \subseteq \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$.

对于任意 $u \in \{v_1, \dots, v_m\}^\perp$, 都满足 $\langle u, v_k \rangle = 0$ 对任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 成立.

于是对于任意 $v := a_1 v_1 + \dots + a_m v_m \in \text{span}(v_1, \dots, v_m)$ 有

$$\langle u, v \rangle = \left\langle u, \sum_{k=1}^m a_k v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^m a_k \langle u, v_k \rangle = 0$$

从而 $u \in (\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp$, 因而 $\{v_1, \dots, v_m\}^\perp \subseteq (\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp$.

综上所述 $\{v_1, \dots, v_m\}^\perp = (\text{span}(v_1, \dots, v_m))^\perp$.

2. 设 U 是 V 的子空间, 且有一组基 u_1, \dots, u_m . 向量组 $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ 是 V 的一组基. 对上述 V 的基运用 Gram-Schmidt 过程得到 V 的规范正交基 $e_1, \dots, e_m, f_1, \dots, f_n$. 试证明: e_1, \dots, e_m 是 U 的规范正交基, f_1, \dots, f_n 是 U^\perp 的规范正交基.

Proof.

对 u_1, \dots, u_m 应用 Gram-Schmidt 过程得到的 e_1, \dots, e_m 自然是 U 的规范正交基.

对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 和任意 $j \in \{1, \dots, m\}$, 都有 $\langle f_k, e_j \rangle = 0$, 于是 $f_k \in U^\perp$.

于是 f_1, \dots, f_n 是 U^\perp 中的规范正交组.

又因为 $\dim U^\perp = \dim V - \dim U = n$, 因而 f_1, \dots, f_n 是 U^\perp 的规范正交基.

3. 设 U 是 \mathbb{R}^4 的子空间, 其定义为

$$U = \text{span}((1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2))$$

求 U 的一规范正交基和 U^\perp 的一规范正交基.

Proof.

将 $(1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2)$ 扩展为 V 的一组基

$$(1, 2, 3, -4), (-5, 4, 3, 2), (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0)$$

对这组基运用Gram-Schmidt过程,得到

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{30}}(1, 2, 3, -4), e_2 = \frac{1}{\sqrt{12030}}(-77, 56, 39, 38)$$
$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{76190}}(190, 117, 60, 151), e_4 = \frac{1}{\sqrt{190}}(0, 9, -10, 3)$$

根据6C.2可知 e_1, e_2 是 U 的基, e_3, e_4 是 U^\perp 的基.

4. 设 e_1, \dots, e_n 是 V 中的一组向量,满足

(a) 对任意 $k \in \{1, \dots, n\}$,都有 $\|e_k\| = 1$.

(b) 对任意 $v \in V$,都有 $\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_n \rangle|^2$.

试证明: e_1, \dots, e_n 是 V 的规范正交基.

Proof.

根据题设条件,对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$\|e_k\|^2 = |\langle e_k, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle e_k, e_n \rangle|^2 = 1$$

又因为 $|\langle e_k, e_k \rangle| = \|e_k\| = 1$,于是

$$\sum_{j=1, j \neq k}^n |\langle e_k, e_j \rangle|^2 = 0$$

这表明对任意 $j, k \in \{1, \dots, n\}$ 且 $j \neq k$ 都有 $\langle e_k, e_j \rangle = 0$.

于是 e_1, \dots, e_n 是 V 中的规范正交组.

考虑任意的 $v \in V$,根据Bessel不等式可知

$$\sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

当且仅当 $v = \sum_{k=1}^n |\langle v, e_k \rangle| e_k$ 时等号成立.

于是 $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_n)$,即 $V = \text{span}(e_1, \dots, e_n)$,从而 e_1, \dots, e_n 为 V 的规范正交基.

5. 设 V 是有限维的,且 U 为 V 的子空间,试证明: $P_{U^\perp} = I - P_U$,其中 I 是 V 上的恒等算子.

Proof.

由于 $V = U \oplus U^\perp$,于是对于任意 $v \in V$,其都可以被唯一分解为 $v = u + w$,其中 $u \in U, w \in U^\perp$.

根据正交投影的定义,我们有 $P_U v = u, P_{U^\perp} v = w$,于是

$$v = P_U v + P_{U^\perp} v$$

从而

$$I = P_U + P_{U^\perp}$$

移项即可得欲证等式.

6. 设 V 是有限维的,且 $T \in \mathcal{L}(V, W)$.试证明

$$T = TP_{(\text{null } T)^\perp} = P_{\text{range } T}T$$

Proof.

根据6C.5有 $P_{(\text{null } T)^\perp} = I - P_{\text{null } T}$.对任意 $v \in V$,都有 $P_{\text{null } T} v \in \text{null } T$,于是

$$TP_{(\text{null } T)^\perp} v = T(I - P_{\text{null } T})v = Tv - \mathbf{0} = Tv$$

于是 $TP_{(\text{null } T)^\perp} = T$.

对于任意 $w \in \text{range } T$,都有 $P_{\text{range } T} w = w$.于是 $T = P_{\text{range } T}T$.

综上,命题得证.

7. 设 X 和 Y 为 V 的有限维子空间.试证明: $P_X P_Y = \mathbf{0}$ 当且仅当 $\langle x, y \rangle = 0$ 对所有 $x \in X$ 和所有 $y \in Y$ 都成立.

Proof.

\Rightarrow : $P_X P_Y = \mathbf{0}$ 即对任意 $v \in V$ 有 $P_X P_Y v = \mathbf{0}$.又 $\text{range } P_Y = Y$,于是对于任意 $y \in Y$ 有 $P_X y = \mathbf{0}$.

由于 $V = X \oplus X^\perp$,于是存在唯一的分解 $y = x + x'$ 使得 $x \in X, x' \in X^\perp$.

又因为 $P_X y = \mathbf{0}$,即上述分解中 $x = \mathbf{0}$,于是 $y = x' \in X^\perp$.即对于任意 $x \in X$ 有 $\langle x, y \rangle = 0$.

\Leftarrow : 考虑 X 的规范正交基 e_1, \dots, e_n .对于任意 $v \in V$,有 $P_Y v \in Y$,于是

$$P_X (P_Y v) = \sum_{k=1}^n \langle P_Y v, e_k \rangle e_k = \mathbf{0}$$

于是 $P_X P_Y = \mathbf{0}$.

8. 设 U 是 V 的有限维子空间,且 $v \in V$.定义 U 上的线性泛函 $\phi: U \rightarrow \mathbb{F}$ 为 $\phi(u) = \langle u, v \rangle$ 对所有 $u \in U$ 成立.根据Riesz表示定理,存在唯一 $w \in U$ 使得 $\phi(u) = \langle u, w \rangle$ 对所有 $u \in U$ 成立.试证明: $w = P_U v$.

Proof.

因为 $v - P_U v \in U^\perp$,于是 $\langle u, v - P_U v \rangle = 0$.于是

$$\langle u, v \rangle = \langle u, v - P_U v \rangle + \langle u, P_U v \rangle = \langle u, P_U v \rangle$$

因此 $\phi(u) = \langle u, v \rangle = \langle u, P_U v \rangle$.而 $P_U v \in U$.根据Riesz表示定理,这样的向量是唯一存在的,于是 $w = P_U v$.