正算子

迄今为止,我们讨论的多项式都是整数次幂的.算子是否有开平方这一操作呢?为此,我们将研究正算子.

1.正算子和平方根

1.1 定义:正算子

算子$T \in \mathcal{L}(V)$是**正的**,如果T是自伴的且对任意$v \in V$有$\langle Tv, v\rangle \geqslant 0$.

如果V是复向量空间,那么以上定义中"T是自伴的"这一条件可以去掉.因为$\langle Tv, v\rangle \geqslant 0$蕴含$\langle Tv, v\rangle \in \mathbb{R}$,这在复内积空间上意味着$T$是自伴算子.

1.2 定义:平方根

算子$R \in \mathcal{L}(V)$称为算子$T \in \mathcal{L}(V)$的**平方根**,如果$R^2 = T$.

于是我们将在下面的叙述中看到,正算子和$\mathbb{C}$中非负数具有许多的相似性.

2.正算子的性质

2.1 正算子的性质I

设$T \in \mathcal{L}(V)$,那么下列命题等价.

(a) T是正算子.

(b) T自伴且所有特征值非负.

(c) T关于V的某个规范正交基有对角矩阵且对角线上元素均非负.

(d) T有正平方根.

(e) T有自伴平方根.

(f) 存在$R \in \mathcal{L}(V)$使得$T = R^*R$.

Proof.

我们将对上述命题逐一推理.

(a)$\Rightarrow$**(b)**:T是正算子蕴含T是自伴算子.对于T的任意特征值λ,不妨设对应的特征向量为$v \in V$,于是

$$0 \leqslant \langle Tv, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \lambda||v||^2$$

于是$\lambda \geqslant 0$,因而**(b)**成立.

(b)$\Rightarrow$**(c)**:由谱定理可知T关于V的某个规范正交基有对角矩阵.

又因为T的特征值非负,于是这矩阵的对角线元素非负.

(c)$\Rightarrow$**(d)**:我们假定T关于V的一组规范正交基$e_1,\cdots,e_n$具有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & \cdots & 0\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}$$

令$R\in\mathcal{L}(V)$关于$e_1,\cdots,e_n$的矩阵为

$$\mathcal{M}(R)=\begin{pmatrix}\sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & \sqrt{\lambda_n}\end{pmatrix}$$

于是$\mathcal{M}(T)=\left(\mathcal{M}(R)\right)^2$,即$T=R^2$.对于任意$v:=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$有

$$\begin{aligned}\langle Rv,v\rangle&=\left\langle\sqrt{\lambda_1}a_1e_1+\cdots+\sqrt{\lambda_n}a_ne_n,a_1e_1+\cdots+a_ne_n\right\rangle\\&=\sqrt{\lambda_1}a_1^2+\cdots+\sqrt{\lambda_n}a_n^2\\&\geqslant 0\end{aligned}$$

因而R是正算子,于是T有正平方根,**(d)**成立.

(d)$\Rightarrow$**(e)**:根据定义,正算子都是自伴的,于是**(d)**蕴含**(e)**.

(e)$\Rightarrow$**(f)**:不妨令$R\in\mathcal{L}(V)$使得$T=R^2$,因为R是自伴的,于是$R=R^*$,因而$T=R^*R$.

(f)$\Rightarrow$**(a)**:我们有

$$T^*=\left(R^*R\right)^*=R^*\left(R^*\right)^*=R^*R=T$$

于是T是自伴算子.对于任意$v\in V$又有

$$\langle Tv,v\rangle=\langle R^*Rv,v\rangle=\langle Rv,Rv\rangle=||Rv||^2\geqslant 0$$

于是T是正算子.

于是我们知道正算子有平方根.那么其正平方根是否和一般的非负实数一样是唯一的呢?接下来的命题表明这是肯定的.

2.2 正算子具有唯一正平方根

V上的每个正算子都具有唯一的正平方根.

Proof.

设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子,$v\in V$是T的特征向量,对应的特征值为$\lambda\geqslant 0$.

令R是T的正平方根.我们将证明$Rv=\sqrt{\lambda}v$,从而唯一确定这样的R.
谱定理指出,V上存在由R的特征向量组成的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.因为R是正算子,于是其所有特征值非负,因而存在非负的$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$使得$Re_k=\sqrt{\lambda_k}e_k$对任意$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.
现在,不妨令$v=a_1e_1+\cdots+a_ne_n$,于是$Rv=\sqrt{\lambda_1}a_1e_1+\cdots+\sqrt{\lambda_n}a_ne_n$.于是

$$\lambda v=Tv=R^2v=a_1\lambda_1e_1+\cdots+a_n\lambda_ne_n$$

上式表明

$$a_1\lambda e_1+\cdots+a_n\lambda e_n=a_1\lambda_1e_1+\cdots+a_n\lambda_ne_n$$

于是$a_k\left(\lambda-\lambda_k\right)=0$对任意$k\in\{1,\cdots,n\}$成立.于是

$$v=\sum_{\{k:\lambda_k=\lambda\}}a_ke_k$$

因而

$$Rv=\sum_{\{k:\lambda_k=\lambda\}}a_k\sqrt{\lambda}e_k=\lambda v$$

于是命题得证.

需要注意的是,算子的平方根可以有无穷多个,但是算子的正平方根只能有一个.
基于上面的论述,我们可以做如下定义.

2.3 定义:$\sqrt{T}$

对于正算子$T\in\mathcal{L}(V)$,$\sqrt{T}$表示其唯一的正平方根.

利用平方根,我们也可以简洁的说明一些问题.

2.4 正算子的性质II

设$T\in\mathcal{L}(V)$是正算子且$v\in V$使得$\langle Tv,v\rangle=0$,那么$Tv=\mathbf{0}$.

Proof.

我们有

$$0=\langle Tv,v\rangle=\left\langle\sqrt{T}\sqrt{T}v,v\right\rangle=\left\langle\sqrt{T}v,\sqrt{T}v\right\rangle=\left|\left|\sqrt{T}v\right|\right|^2$$

于是$\sqrt{T}v=\mathbf{0}$.于是$Tv=\sqrt{T}\left(\sqrt{T}v\right)=\sqrt{T}\mathbf{0}=\mathbf{0}$.