

Linear Algebra Done Right 7C

1. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 试证明: 如果 T 和 $-T$ 都是正算子, 那么 $T = 0$.

Proof.

由题意可知对任意 $v \in V$ 有

$$\langle Tv, v \rangle \geq 0$$

且

$$\langle -Tv, v \rangle = -\langle Tv, v \rangle \geq 0$$

于是 $\langle Tv, v \rangle = 0$, 因而 $T = 0$ (在实内积空间上需要 T 自伴, 这由正算子的定义可得).

2. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$ 关于其标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

试证明: T 是可逆正算子.

Proof.

\mathbb{F}^4 的标准基也是 \mathbb{F}^4 的规范正交基. 观察这矩阵, 可知 $(\mathcal{M}(T))^* = \mathcal{M}(T)$, 于是 $T^* = T$, 即 T 自伴.

一些计算表明 T 的特征值为

$$\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

于是 T 的特征值均非零且非负, 因而它是可逆正算子.

3. 设 $n \in \mathbb{N}^*$, 算子 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$ 关于其标准基的矩阵中的元素均为 1. 试证明: T 是正算子.

Proof.

对于任意 $v := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$ 有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle T(x_1, \dots, x_n), (x_1, \dots, x_n) \rangle \\ &= (x_1 + \dots + x_n)^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

于是 T 是正算子.

4. 设 $n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n > 1$,试证明:存在 $n \times n$ 矩阵 A ,其所有元素都是正数且 $A = A^*$,但 \mathbb{F}^n 上关于其标准基的矩阵为 A 的算子不是正算子.

Proof.

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{pmatrix}$$

令 A 为 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$ 对应于 \mathbb{F}^2 的标准基的矩阵.于是

$$\langle T(x, y), (x, y) \rangle = \langle (x + 2y, 2x + y), (x, y) \rangle = (x + y)^2 + 2xy$$

令 $(x, y) = (1, -1)$,则有 $\langle T(x, y), (x, y) \rangle < 0$,于是 T 不是正算子.

5. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的.试证明: T 是正算子当且仅当对于 V 的任意规范正交基 e_1, \dots, e_n 都有 T 关于其的矩阵的对角线元素全为非负数.

Proof.

\Rightarrow :对于任意 V 的规范正交基 e_1, \dots, e_n 和任意 $k \in \{1, \dots, n\}$,由于 T 是正算子,于是

$$\langle Te_k, e_k \rangle \geq 0$$

又因为 $Te_k = \langle Te_k, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle Te_k, e_n \rangle e_n$,于是

$$\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n))_{k,k} = \langle Te_k, e_k \rangle \geq 0$$

于是此矩阵的对角线上均为非负数.

\Leftarrow :由于 T 是自伴的,于是存在 V 的规范正交基 e_1, \dots, e_n 使得 T 关于其有对角矩阵 A .

根据题意, $A_{1,1}, \dots, A_{n,n} \geq 0$,从而对于任意 $v := a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n \in V$ 有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle A_{1,1} a_1 e_1, a_1 e_1 \rangle + \cdots + \langle A_{n,n} a_n e_n, a_n e_n \rangle \\ &= A_{1,1} a_1^2 + \cdots + A_{n,n} a_n^2 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

从而 T 为正算子.

6. 试证明: V 上两正算子之和为正算子.

Proof.

对于任意正的 $S, T \in \mathcal{L}(V)$ 和任意 $v \in V$ 有

$$\langle (S + T)v, v \rangle = \langle Sv + Tv, v \rangle = \langle Sv, v \rangle + \langle Tv, v \rangle \geq 0$$

于是 $S + T$ 是正的.

7. 设 $S \in \mathcal{L}(V)$ 是可逆正算子, $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子, 试证明: $S + T$ 可逆.

Lemma.L.11 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子, 那么 T 可逆当且仅当 $\langle Tv, v \rangle > 0$ 对所有非零的 $v \in V$ 成立.

Proof.

\Rightarrow : 由于 T 可逆, 于是对于任意非零的 $v \in V$ 有 $Tv \neq \mathbf{0}$. 于是 $\langle Tv, v \rangle > 0$.

\Leftarrow : 如果 T 不可逆, 那么存在非零的 $v \in V$ 使得 $Tv = \mathbf{0}$, 从而 $\langle Tv, v \rangle = 0$, 这与条件矛盾. 于是 T 可逆.

Proof.

根据 **Lemma.L.11** 可知 $\langle Sv, v \rangle > 0$ 对所有非零的 $v \in V$ 成立. 于是对于任意非零的 $v \in V$ 有

$$\langle (S + T)v, v \rangle = \langle Sv, v \rangle + \langle Tv, v \rangle > 0$$

从而 $S + T$ 是可逆的.

8. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$. 试证明: T 是正算子, 当且仅当 T^\dagger 是正算子.

Proof.

由于 T 是正算子, 于是令 V 有一规范正交基 e_1, \dots, e_n 是分别对应于 T 的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 的特征向量.

于是 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. 根据 **7B.25** 有

$$T^\dagger e_k = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_k} e_k, & \lambda_k \neq 0 \\ \mathbf{0}, & \lambda_k = 0 \end{cases}$$

对所有 $k \in \{1, \dots, n\}$ 成立. 于是 T^\dagger 关于 e_1, \dots, e_n 的矩阵是对角线上均为非负数的对角矩阵, 从而 T^\dagger 是正算子.

交换 T 和 T^\dagger 即可证得另一方向. 于是命题得证.

9. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子, $S \in \mathcal{L}(W, V)$.试证明: S^*TS 是 W 上的正算子.

Proof.

对于任意 $w \in W$ 有

$$\langle S^*TSw, w \rangle = \langle T(Sw), Sw \rangle \geq 0$$

于是 S^*TS 是 W 上的正算子.

10. 设 T 是 V 上的正算子,设 $v, w \in V$ 满足 $Tv = w$ 且 $Tw = v$.试证明: $v = w$.

Proof.

我们有

$$\langle T(v - w), v - w \rangle = \langle w - v, v - w \rangle = -\|v - w\|^2 \geq 0$$

于是 $\|v - w\| = 0$,即 $v = w$.

11. 设 T 是 V 上的正算子, U 是 V 在 T 下不变的子空间,试证明: $T|_U \in \mathcal{L}(U)$ 是 U 上的正算子.

Proof.

对于任意 $u \in U$ 都有 $Tu \in U \subseteq V$,又因为 T 是正的,于是

$$\langle T|_U u, u \rangle = \langle Tu, u \rangle \geq 0$$

于是 $T|_U$ 是 U 上的正算子.

12. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子,试证明:对于任意 $k \in \mathbb{N}^*$, T^k 都是正算子.

Proof.

由于 T 是正算子,于是 T 关于 V 的某组规范正交基 e_1, \dots, e_n 有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

且 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$.

于是 T^k 关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T^k) = (\mathcal{M}(T))^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

这是对角线均为非负数的对角矩阵,从而 T^k 也是正算子.

13. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的,设 $\alpha \in \mathbb{R}$.回答下列问题.

(1) 试证明: $T - \alpha I$ 是正算子,当且仅当 α 不大于 T 的任意特征值.

(2) 试证明: $\alpha I - T$ 是正算子,当且仅当 α 不小于 T 的任意特征值.

Proof.

(1) 由于 T 是自伴算子,于是考虑 V 的某个规范正交基 e_1, \dots, e_n 使得 T 关于其有对角矩阵

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

则 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ 为 T 的特征值.

于是 $T - \alpha I$ 关于这基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T - \alpha I) = \begin{pmatrix} \lambda_1 - \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n - \alpha \end{pmatrix}$$

因为 $\alpha \leq \min_{k \in \{1, \dots, n\}} \{\lambda_k\}$, 于是 $\lambda_1 - \alpha, \dots, \lambda_n - \alpha \geq 0$.

于是 $T - \alpha I$ 关于这基有对角线元素非负的对角矩阵,于是 $T - \alpha I$ 是正算子.

(2) 与(1)类似,不再赘述.

14. 设 T 是 V 上的正算子, $v_1, \dots, v_m \in V$.试证明

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle T v_k, v_j \rangle \geq 0$$

Proof.

我们有

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \langle T v_k, v_j \rangle &= \sum_{j=1}^m \langle T v_1 + \cdots + T v_m, v_j \rangle \\ &= \sum_{j=1}^m \langle T(v_1 + \cdots + v_m), v_j \rangle \\ &= \langle T(v_1 + \cdots + v_m), v_1 + \cdots + v_m \rangle \\ &\geq 0\end{aligned}$$

15. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是自伴的, 试证明: 存在正算子 $A, B \in \mathcal{L}(V)$ 使得

$$T = A - B \quad \text{且} \quad \sqrt{TT^*} = A + B \quad \text{且} \quad AB = BA = 0$$

Proof.

由于 T 是自伴的, 于是存在由 T 的特征向量 $e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_m$ 构成的 V 的规范正交基.

不妨设它们对应的特征值为 $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_m$, 其中 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0, \mu_1, \dots, \mu_m < 0$.

令 $A, B \in \mathcal{L}(V)$ 满足对所有 $k \in \{1, \dots, n\}$ 和 $j \in \{1, \dots, m\}$ 有

$$\begin{cases} Ae_k = \lambda_k e_k \\ Af_j = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} Be_k = 0 \\ Bf_j = -\mu_j f_j \end{cases}$$

考虑它们的矩阵, 不难验证题设的条件成立. 于是命题得证.

16. 设 T 是 V 上的正算子. 试证明: $\text{null } \sqrt{T} = \text{null } T$ 且 $\text{range } \sqrt{T} = \text{range } T$.

Proof.

注意到 \sqrt{T} 是正算子, 于是 \sqrt{T} 是正规的. 根据 7A.27 可知

$$\text{null } T = \text{null } (\sqrt{T})^2 = \text{null } \sqrt{T}, \quad \text{range } T = \text{range } (\sqrt{T})^2 = \text{range } \sqrt{T}$$

17. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子, 试证明: 存在实系数多项式 p 使得 $\sqrt{T} = p(T)$.

Proof.

考虑 T 的特征向量 e_1, \dots, e_n 构成的 V 的规范正交基和对应的特征值 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

由于 T 是正算子,于是 $\lambda_k \geq 0$.令 $p \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ 满足

$$p(\lambda_k) = \sqrt{\lambda_k}, \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

于是对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$\sqrt{T}e_k = \sqrt{\lambda_k}e_k = p(\lambda_k)e_k = p(T)e_k$$

于是 $\sqrt{T} = p(T)$.

18. 设 S 和 T 是 V 上的正算子.试证明: ST 是正算子,当且仅当 S 和 T 可交换.

Proof.

根据**7A.9**,如果 S 和 T 不可交换,那么 ST 不是自伴算子,也就不是正算子.

现在假设 S, T 可交换,于是根据**7B.16/17**可知存在 V 的规范正交基 e_1, \dots, e_n 使得 S, T 关于其有对角矩阵.

不妨设

$$\mathcal{M}(S) = \begin{pmatrix} \mu_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

于是

$$\mathcal{M}(TS) = \begin{pmatrix} \mu_1\lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \mu_n\lambda_n \end{pmatrix}$$

其中 $\mu_1\lambda_1, \dots, \mu_n\lambda_n \geq 0$.于是 ST 是正算子.

19. 试证明: \mathbb{R}^2 上的恒等算子具有无穷多个自伴的平方根.

Proof.

对于任意 $t \in (0, 1)$,令 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ 关于其标准基的矩阵为

$$\mathcal{M}(T) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} & t \\ t & -\sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$$

不难验证 $\mathcal{M}(T^2) = (\mathcal{M}(T))^2 = I$,且 T 是自伴的.于是存在无穷多个 T 使得 $T^2 = I$.

20. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$, e_1, \dots, e_n 是 V 的规范正交基. 试证明: T 是正算子, 当且仅当存在 $v_1, \dots, v_n \in V$ 使得

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle$$

对所有 $j, k = 1, \dots, n$ 成立.

Proof.

\Rightarrow : 设 T 是正算子, 那么 \sqrt{T} 自伴. 于是

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle \sqrt{T}\sqrt{T}e_k, e_j \rangle = \langle \sqrt{T}e_k, \sqrt{T}e_j \rangle$$

对于任意 $j, k \in \{1, \dots, n\}$ 都成立. 于是令 $v_k = \sqrt{T}e_k$ 即可.

\Leftarrow : 设 $R \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $Re_k = v_k$. 于是

$$\langle Te_k, e_j \rangle = \langle v_k, v_j \rangle = \langle Re_k, Re_j \rangle = \langle R^*Re_k, e_j \rangle$$

于是 $\mathcal{M}(T, (e_1, \dots, e_n)) = \mathcal{M}(R^*R, (e_1, \dots, e_n))$, 即 $T = R^*R$. 根据正算子的性质可知 T 是正算子.

21. 设 $n \in \mathbb{N}^*$. $n \times n$ 的希尔伯特矩阵是第 j 行第 k 列元素为 $\frac{1}{j+k-1}$ 的 $n \times n$ 矩阵. 设算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 关于 V 的某个规范正交基的矩阵为 $n \times n$ 阶希尔伯特矩阵, 试证明: T 是可逆正算子.

Proof.

设这组规范正交基为 e_1, \dots, e_n . 考虑 $v := x_1e_1 + \dots + x_ne_n \in V$, 我们有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \left\langle \sum_{k=1}^n x_k Te_k, \sum_{j=1}^n x_j e_j \right\rangle = \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j} x_k \langle Te_k, e_j \rangle \\ &= \sum_{j,k=1}^n \frac{\overline{x_j} x_k}{j+k-1} = \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j} x_k \int_0^1 t^{j+k-2} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{j,k=1}^n \overline{x_j} x_k t^{j+k-2} dt \\ &= \int_0^1 \left(\sum_{j=1}^n \overline{x_j} t^{j-1} \right) \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \overline{\left(\sum_{j=1}^n x_j t^{j-1} \right)} \left(\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right) dt \\ &= \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} \right|^2 dt \geq 0 \end{aligned}$$

于是 T 是正算子.当 $\langle Tv, v \rangle = 0$ 时,要求

$$\sum_{k=1}^n x_k t^{k-1} = 0$$

对任意 $t \in [0, 1]$ 成立.于是 $x_1 = \cdots = x_n = 0$,即 $v = \mathbf{0}$,从而 $\text{null } T = \{\mathbf{0}\}$,于是 T 可逆.

因此 T 是可逆正算子.

22. 设 $T \in \mathcal{L}(V)$ 是正算子, $u \in V$ 满足 $\|u\| = 1$ 且 $\|Tu\| \geq \|Tv\|$ 对所有满足 $\|v\| = 1$ 的 $v \in V$ 成立.试证明: u 是 T 的特征向量,对应于 T 的最大的特征值.

Proof.

考虑 T 的所有特征值 $0 \leq \lambda_1 < \cdots < \lambda_n$.于是

$$V = E(\lambda_1, T) \oplus E(\lambda_n, T)$$

考虑 $u = v_1 + \cdots + v_n$,其中 $v_k \in E(\lambda_k, T)$.于是 $1 = \|u\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2$.于是

$$\|Tu\|^2 = \lambda_1^2 \|v_1\|^2 + \cdots + \lambda_n^2 \|v_n\|^2 \leq \lambda_n^2 (\|v_1\|^2 + \cdots + \|v_n\|^2) = \lambda_n^2$$

现在考虑 $w \in E(\lambda_n, T)$ 且 $\|w\| = 1$.根据题意,我们有

$$\|Tw\|^2 = \lambda_n^2 \leq \|Tu\|^2$$

于是 $\|Tu\| = \lambda_n$.考虑第一个不等式的取等条件,当且仅当 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0$ 时成立,于是 $u = v_n \in E(\lambda_n, T)$.

于是 u 是 T 的特征向量,对应于 T 最大的特征值.

23. 对于 $T \in \mathcal{L}(V)$ 和 $u, v \in V$,定义 $\langle u, v \rangle_T$ 为 $\langle u, v \rangle_T = \langle Tu, v \rangle$.回答下列问题.

(1) 设 $T \in \mathcal{L}(V)$.试证明: $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ 是 V 上的内积,当且仅当 T 是关于原内积的可逆正算子.

(2) 试证明: V 上的任意内积都具有 $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ 的形式,其中 T 是某个 V 上的可逆正算子.

Proof.

(1) \Leftarrow :我们依次证明 $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ 具有内积的性质.

(a) **正性**:由于 T 是正算子,于是对于任意 $v \in V$ 有

$$\langle v, v \rangle_T = \langle Tv, v \rangle \geq 0$$

(b) **定性**:由于 $\langle Tv, v \rangle = 0$ 当且仅当 $v = \mathbf{0}$,于是 $\langle v, v \rangle_T = 0$ 当且仅当 $v = \mathbf{0}$.

(c) 可加性:对于任意 $u, v, w \in V$ 有

$$\langle u + v, w \rangle_T = \langle T(u + v), w \rangle = \langle Tu + Tv, w \rangle = \langle Tu, w \rangle + \langle Tv, w \rangle = \langle u, w \rangle_T + \langle v, w \rangle_T$$

(d) 齐次性:对于任意 $\lambda \in \mathbb{F}$ 和任意 $u, v \in V$ 有

$$\langle \lambda u, v \rangle_T = \langle T(\lambda u), v \rangle = \langle \lambda Tu, v \rangle = \lambda \langle Tu, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle_T$$

(e) 共轭对称性:由于 T 是正算子,于是 T 自伴,于是对于任意 $u, v \in V$ 有

$$\langle u, v \rangle_T = \langle Tu, v \rangle = \overline{\langle v, Tu \rangle} = \overline{\langle Tv, u \rangle} = \overline{\langle v, u \rangle_T}$$

综上可以得出 $\langle \cdot, \cdot \rangle_T$ 是 V 上的内积.

\Rightarrow :对于任意 $u, v \in V$ 有

$$\langle Tu, v \rangle = \langle u, v \rangle_T = \overline{\langle v, u \rangle_T} = \overline{\langle Tv, u \rangle} = \langle u, Tv \rangle$$

从而 T 是自伴的.对于任意 $v \in V$,我们有

$$\langle Tv, v \rangle = \langle v, v \rangle_T \geq 0$$

当且仅当 $v = \mathbf{0}$ 时等式成立.于是根据**Lamma.L.11**可知 T 是可逆正算子.

(2) 考虑 V 原有的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 和任意的内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$.

考虑 V 关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_1$ 的规范正交基 e_1, \dots, e_n 和关于 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2$ 的规范正交基 f_1, \dots, f_n .

定义 $R \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $Rf_k = e_k$ 对任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 都成立.由于 R 是基到基的映射,因此 R 可逆.

现在令 $T = R^*R$,由于 R 可逆,那么 T 也可逆.根据正算子的性质可知 T 是正算子.

现在,对于任意 $u := a_1f_1 + \dots + a_nf_n$ 和 $v := b_1f_1 + \dots + b_nf_n$,我们有

$$\langle u, v \rangle_2 = a_1\overline{b_1} + \dots + a_n\overline{b_n} = \langle Ru, Rv \rangle_1 = \langle R^*Ru, v \rangle_1 = \langle Tu, v \rangle_1$$

从而存在可逆正算子 $T \in \mathcal{L}(V)$ 使得 $\langle \cdot, \cdot \rangle_2 = \langle \cdot, \cdot \rangle_T$.

24. 设 S, T 是 V 上的正算子.试证明: $\text{null}(S + T) = \text{null } S \cap \text{null } T$.

根据**7C.6**可知 $S + T$ 也是正算子.于是对于 $v \in V$ 有

$$v \in \text{null}(S + T) \Leftrightarrow \langle (S + T)v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow \langle Sv, v \rangle + \langle Tv, v \rangle = 0$$

$$\Leftrightarrow \langle Sv, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = 0 \Leftrightarrow Sv = Tv = \mathbf{0}$$

$$\Leftrightarrow v \in \text{null } S \cap \text{null } T$$

于是 $\text{null}(S + T) = \text{null } S \cap \text{null } T$.

25. 令 T 是7A.31(2)中的二阶求导算子.试证明: $-T$ 是正算子.

Proof.

设 D 是7A.31(1)中的一阶求导算子,于是 $T = D^2$ 且 $D^* = -D$.于是对于任意 $f \in V$ 有

$$\langle -Tf, f \rangle = \langle -D^2f, f \rangle = \langle D^*Df, f \rangle = \langle Df, Df \rangle = \|Df\|^2 \geq 0$$

于是 $-T$ 是 V 上的正算子.