Linear Algebra Done Right 6A

1. 证明:如果$v_1,\cdots,v_m\in V$,那么
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle\geqslant 0$$

Proof.

我们有
$$\begin{aligned}||v_1+\cdots+v_m||^2&=\sum_{j=1}^{m}||v_j||^2+2\sum_{j,k\in\{1,\cdots,m\},j\neq k}\langle v_j,v_k\rangle\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle\end{aligned}$$
于是
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle=||v_1+\cdots+v_m||^2\geqslant 0$$

2. 设$S\in\mathcal{L}(V)$,定义$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$为
$$\langle u,v\rangle_S=\langle Su,Sv\rangle$$
对所有$u,v\in V$成立.试证明:$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$是$V$上的内积,当且仅当$S$是单射.

Proof.

我们有

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_S\text{是内积}\Leftrightarrow\langle v,v\rangle_S=0\text{当且仅当}v=\mathbf{0}\Leftrightarrow\langle Sv,Sv\rangle=0\text{当且仅当}Sv=\mathbf{0}\Leftrightarrow\text{null }S=\{\mathbf{0}\}\Leftrightarrow S\text{是单射}$$

3. 证明下列命题.

(1) 证明:将$\mathbb{R}^2$中的有序对$((x_1,x_2),(y_1,y_2))$映射到$|x_1y_1|+|x_2y_2|$的函数不是$\mathbb{R}^2$上的内积.

(2) 证明:将$\mathbb{R}^3$中的有序对$((x_1,x_1,x_3),(y_1,y_2,y_3))$映射到$x_1y_1+x_3y_3$的函数不是$\mathbb{R}^3$上的内积.

Proof.

(1) 令$u=(1,0),v=(-1,0),w=(1,0)$,于是
$$f(u,w)=1\qquad f(v,w)=1\qquad f(u+v,w)=0$$

于是$f(u+v,w)\neq f(u,w)+f(v,w)$,因而这映射$f$不满足第一位上的可加性,不是$\mathbb{R}^2$上的内积.

(2) 令$v=(0,1,0)$,则$g(v,v)=0$,而$v\neq\mathbf{0}$,因而这映射g不满足定性,不是$\mathbb{R}^3$上的内积.

4. 设$T\in\mathcal{L}(V)$使得$||Tv||\leqslant||v||$对任意$v\in V$成立.试证明:$T-\sqrt{2}I$是单射.

Proof.

若$T-\sqrt{2}I$不是单射,则存在$v\in V$且$v\neq\mathbf{0}$使得$Tv=\sqrt{2}v$.于是

$$||Tv||=||\sqrt{2}v||=\sqrt{2}||v||>||v||$$

这与题设矛盾,从而$T-\sqrt{2}I$是单射.

5. 设V是实内积空间.证明下列命题.

(1) 证明:$\langle u+v,u-v\rangle=||u||^2-||v||^2$对任意$u,v\in V$成立.

(2) 证明:若$u,v\in V$满足$||u||=||v||$,那么$u+v$正交于$u-v$.

(3) 证明:菱形的对角线相互垂直.

Proof.

(1) 我们有

$$\begin{aligned}\langle u+v,u-v\rangle&=\langle u,u-v\rangle+\langle v,u-v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=||u||^2-||v||^2\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$||u||=||v||\Rightarrow\langle u+v,u-v\rangle=0\Rightarrow u+v\perp u-v$$

(3) 令$V=\mathbb{R}^2$,考虑菱形$ABCD$,令$u=\overrightarrow{BA},v=\overrightarrow{BC}$,则有$u+v=\overrightarrow{BD},u-v=\overrightarrow{CA}$.
由于$BA=BC$,则$||u||=||v||$,由**(2)**可知$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{CA}$正交,因而$BD\perp AC$,命题得证.

6. 设$u,v\in V$,试证明:$\langle u,v\rangle=0$当且仅当对任意$a\in\mathbb{F}$都有$||u||\leqslant||u+av||$.

Proof.