

Linear Algebra Done Right 6B

1. 设 e_1, \dots, e_n 是 V 中的向量组,使得

$$\|a_1 e_1 + \dots + a_n e_n\|^2 = |a_1|^2 + \dots + |a_n|^2$$

对任意 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 都成立.试证明: e_1, \dots, e_n 是规范正交组.

Proof.

对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$,令

$$a_j = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

可得 $\|e_k\|^2 = 1$,即 $\langle e_k, e_k \rangle = 1$.

对于任意 $k, j \in \{1, \dots, n\}$ 且 $j \neq k$,令

$$a_i = \begin{cases} 0, & i \neq j \text{ 或 } i \neq k \\ 1, & i = j \\ t, & i = k \end{cases}$$

可得 $\|e_j + te_k\|^2 = 1 + |t|^2 \geq \|e_j\|^2$.根据**6A.6**可知 $\langle e_j, e_k \rangle = 0$.

综上可知 e_1, \dots, e_n 是规范正交组.

2. 证明下列命题.

(1) 设 $\theta \in \mathbb{R}$,试证明: $(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)$ 和 $(\cos \theta, \sin \theta), (\sin \theta, -\cos \theta)$ 都是 \mathbb{R}^2 的规范正交基.

(2) 试证明: \mathbb{R}^2 中的每个规范正交基都具有(1)中两个形式之一.

Proof.

(1) 对于任意 $a, b \in \mathbb{R}$,都有

$$\begin{aligned} \|a(\cos \theta, \sin \theta), b(-\sin \theta, \cos \theta)\|^2 &= \|a \cos \theta - b \sin \theta, a \sin \theta + b \cos \theta\|^2 \\ &= (a \cos \theta - b \sin \theta)^2 + (a \sin \theta + b \cos \theta)^2 \\ &= a^2 + b^2 \end{aligned}$$

根据**6B.1**可知 $(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)$ 是 \mathbb{R}^2 中的规范正交组.

又因为 $\dim \mathbb{R}^2 = 2$,于是 $(\cos \theta, \sin \theta), (-\sin \theta, \cos \theta)$ 是 \mathbb{R}^2 中的规范正交基.

另一组向量的证明过程相似,在此不再赘述.

(2) 考虑 \mathbb{R}^2 中所有满足 $\|u\| = 1$ 的向量 u ,都应当具有 $(\cos \alpha, \sin \alpha)$ 的形式.

考虑向量 $u = (\cos \alpha, \sin \alpha), v = (\cos \beta, \sin \beta)$.令 $\langle u, v \rangle = 0$,则有

$$\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = 0$$

即

$$\cos(\alpha - \beta) = 0$$

当且仅当 $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ 时成立.

若 k 是偶数,则 $v = (-\sin \alpha, \cos \alpha)$.

若 k 是奇数,则 $v = (\sin \alpha, -\cos \alpha)$.

于是命题得证.

3. 设 e_1, \dots, e_m 是 V 中的一规范正交组,且 $v \in V$.试证明:

$$\|v\|^2 = |\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2 \Leftrightarrow v \in \text{span}(e_1, \dots, e_m)$$

Proof.

根据Bessel不等式, $|\langle v, e_1 \rangle|^2 + \dots + |\langle v, e_m \rangle|^2 \leq \|v\|^2$,当且仅当

$$v - \langle v, e_1 \rangle e_1 - \dots - \langle v, e_m \rangle e_m = 0$$

时等式成立.这等价于 $v \in \text{span}(e_1, \dots, e_m)$.

4. 设 $n \in \mathbb{N}^*$,试证明:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

是 $C[-\pi, \pi]$ 中的一规范正交组.

$C[\pi, \pi]$ 是定义在 $[-\pi, \pi]$ 上的连续实值函数构成的向量空间,其内积定义为 $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} fg$.

Proof.

首先有

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} dx = 1$$

又对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有

$$\left\langle \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos^2 kx}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 + \cos 2kx}{2\pi} dx = \left(\frac{x}{2\pi} + \frac{\sin 2kx}{4k\pi} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

$$\left\langle \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 kx}{\pi} dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - \cos 2kx}{2\pi} dx = \left(\frac{x}{2\pi} - \frac{\sin 2kx}{4k\pi} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 1$$

于是这向量组中各向量的范数均为1.又因为

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx dx = \frac{\sin kx}{2k\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\left\langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx dx = 0$$

对于任意 $j, k \in \{1, \dots, n\}$ 且 $j \neq k$ 有

$$\left\langle \frac{\cos jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j-k)x + \cos(j+k)x}{2} dx = \left(\frac{\sin(j-k)x}{2(j-k)} + \frac{\sin(j+k)x}{2(j+k)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\left\langle \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(j-k)x - \cos(j+k)x}{2} dx = \left(\frac{\sin(j-k)x}{2(j-k)} - \frac{\sin(j+k)x}{2(j+k)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\left\langle \frac{\sin jx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(j-k)x + \sin(j+k)x}{2} dx = \left(\frac{\cos(j-k)x}{2(k-j)} - \frac{\cos(j+k)x}{2(j+k)} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

于是这向量组满足规范正交组的定义,命题得证.

5. 设 $f: [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ 是连续的. 对于任意 $k \in \mathbb{N}$, 定义

$$a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx \quad \text{和} \quad b_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx$$

试证明:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

Proof.

设 $V = C[-\pi, \pi]$, 于是 $f \in C[-\pi, \pi]$. 沿用6B.4中 V 上内积的定义, 我们有

$$\frac{a_0^2}{2} = \left| \frac{a_0}{\sqrt{2}} \right|^2 = \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) dx \right|^2 = \left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \right|^2$$

$$a_k^2 = |a_k|^2 = \left| \left\langle f, \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2$$

$$b_k^2 = |b_k|^2 = \left| \left\langle f, \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2$$

对于任意 $n \in \mathbb{N}$, 根据6B.4可知

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}$$

是 $C[-\pi, \pi]$ 上的规范正交组.根据Bessel不等式有

$$\left| \left\langle f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 + \cdots + \left| \left\langle f, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 + \left| \left\langle f, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 + \cdots + \left| \left\langle f, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\rangle \right|^2 \leq \|f\|^2$$

即

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

因为上式对所有正整数 n 都成立,于是两边对 n 取极限有

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx$$

6. 设 e_1, \dots, e_n 是 V 中的规范正交基.

(1) 试证明:如果 v_1, \dots, v_n 是 V 中的向量组,满足

$$\|e_k - v_k\| < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 成立,那么 v_1, \dots, v_n 是 V 的基.

(2) 试证明:存在 V 中的向量组 v_1, \dots, v_n ,满足

$$\|e_k - v_k\| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 成立,且 v_1, \dots, v_n 不是线性无关组.

Proof.

(1) 设 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ 使得

$$a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = \mathbf{0}$$

则有

$$\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n a_k e_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=1}^n a_k (e_k - v_k) \right\|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \|e_k - v_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \cdot \sum_{k=1}^n \|e_k - v_k\|^2$$

又

$$\sum_{k=1}^n \|e_k - v_k\|^2 < n \cdot \frac{1}{n} = 1$$

于是 $\sum_{k=1}^n |a_k|^2 = 0$,即 $a_1 = \cdots = a_n = 0$.

于是 v_1, \dots, v_n 线性无关.因而 v_1, \dots, v_n 是 V 的基.

(2) 令 $v_k = e_k - \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n}$. 注意到

$$v_1 + \cdots + v_n = e_1 + \cdots + e_n - n \left(\frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} \right) = \mathbf{0}$$

于是 v_1, \cdots, v_n 不是线性无关组. 另一方面, 有

$$\|v_k - e_k\| = \left\| \frac{e_1 + \cdots + e_n}{n} \right\| = \frac{1}{n} \|e_1 + \cdots + e_n\| = \frac{\sqrt{n}}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

于是这样的 v_1, \cdots, v_n 满足题意.

7. 设 $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ 关于基 $(1, 0, 0), (1, 1, 1), (1, 1, 2)$ 有上三角矩阵. 求 \mathbb{R}^3 的一规范正交基, 使得 T 关于其有上三角矩阵.

Solution.

令 $v_1 = (1, 0, 0), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 1, 2)$.

对 v_1, v_2, v_3 应用 Gram-Schmidt 过程得到 \mathbb{R}^3 的一规范正交基

$$e_1 = (1, 0, 0), e_2 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), e_3 = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

且满足 $\text{span}(v_1, \cdots, v_k) = \text{span}(e_1, \cdots, e_k)$. 于是 T 在 $\text{span}(e_1, \cdots, e_k)$ 下不变, 即 T 关于 e_1, \cdots, e_3 有上三角矩阵.

8. 定义 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的内积为 $\langle p, q \rangle = \int_0^1 pq$, 使得 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 成为内积空间. 回答下列问题.

(1) 对 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的标准基应用 Gram-Schmidt 过程, 得到 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 的一组规范正交基.

(2) $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 上的微分算子 D 关于基 $1, x, x^2$ 有上三角矩阵. 求 $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ 关于 (1) 中所求规范正交基的矩阵, 并验证这矩阵是上三角矩阵.

Proof.

(1) 令 $v_1 = 1, v_2 = x, v_3 = x^2$. 我们有

$$\begin{aligned} f_1 &= v_1 = 1 \\ f_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 = x - \frac{1}{2} \\ f_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} f_1 - \frac{\langle v_3, f_2 \rangle}{\|f_2\|^2} f_2 = x^2 - \frac{1}{3} - \left(x - \frac{1}{2}\right) = x^2 - x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

于是

$$e_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = 1, e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = 2\sqrt{3} \left(x - \frac{1}{2}\right), e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = 6\sqrt{5} \left(x^2 - x + \frac{1}{6}\right)$$

即为所求的规范正交基.

(2) 不难得出,所求矩阵为

$$\mathcal{M}(D) = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{15} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

这显然是一个上三角矩阵.

9. 设 e_1, \dots, e_m 是对 V 中的线性无关组 v_1, \dots, v_m 运用Gram-Schmidt过程得到的规范正交组.试证明:对于任意 $k \in \{1, \dots, m\}$,都有 $\langle v_k, e_k \rangle > 0$.

Proof.

我们有

$$\begin{aligned} \langle v_k, e_k \rangle &= \frac{1}{\|f_k\|} \langle v_k, f_k \rangle \\ &= \frac{1}{\|f_k\|} \left\langle v_k, v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle v_k, f_j \rangle}{\|f_j\|^2} f_j \right\rangle \\ &= \frac{1}{\|f_k\|} \left(\|v_k\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{|\langle v_k, f_j \rangle|^2}{\|f_j\|^2} \right) \\ &= \frac{1}{\|f_k\|} \left(\|v_k\|^2 - \sum_{j=1}^{k-1} |\langle v_k, e_j \rangle|^2 \right) \end{aligned}$$

又因为 $v_k \notin \text{span}(e_1, \dots, e_{k-1})$,于是根据Bessel不等式有

$$\|v_k\|^2 > \sum_{j=1}^{k-1} |\langle v_k, e_j \rangle|^2$$

于是 $\langle v_k, e_k \rangle > 0$.

10. 设 v_1, \dots, v_m 是 V 中的线性无关组.试证明:通过Gram-Schmidt过程得到的规范正交组 e_1, \dots, e_m 是仅有的对任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 都有 $\langle v_k, e_k \rangle > 0$ 且 $\text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k)$ 的规范正交组.

Lemma.10 设 v_1, \dots, v_n 是 V 中的线性无关组,对其应用Gram-Schmidt过程得到 V 上的规范正交组 e_1, \dots, e_n .令 $S = \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| = 1\}$ 和 $m \in \mathbb{N}^*$,设 S^m 为所有将 $\{1, \dots, m\}$ 映射到 S 的函数的集合.那么对于 V 的规范正交组 u_1, \dots, u_m 使得对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 都有 $\text{span}(u_1, \dots, u_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$,一定存在 $f \in S^m$ 使得对于任意 $k \in \{1, \dots, n\}$ 有 $u_k = f(k)e_k$.

Proof.

对于给定的 $f \in S^m$, 可知对于任意 $j, k \in \{1, \dots, m\}$ 且 $j \neq k$ 有

$$\|f(j)e_j\| = |f(j)|\|e_j\| = 1 \quad \langle f(j)e_j, f(k)e_k \rangle = f(j)\overline{f(k)}\langle e_j, e_k \rangle = 0$$

又因为 $0 \notin S$, 于是

$$\text{span}(f(1)e_1, \dots, f(k)e_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$$

于是 $f(1)e_1, \dots, f(m)e_m$ 是满足

$$\text{span}(f(1)e_1, \dots, f(k)e_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k), \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

的规范正交组. 现在考虑题设中的规范正交组 u_1, \dots, u_m , 则有

$$\text{span}(u_1, \dots, u_k) = \text{span}(v_1, \dots, v_k) = \text{span}(e_1, \dots, e_k), \forall k \in \{1, \dots, m\}$$

于是 $\text{span}(u_1) = \text{span}(e_1)$. 令 $u_1 = \lambda_1 e_1$. 因为 $\|u_1\| = \|e_1\| = 1$, 于是 $|\lambda_1| = 1$, 即 $\lambda_1 \in S$.

由于 $\text{span}(u_1, u_2) = \text{span}(e_1, e_2)$, 于是 $u_2 \in \text{span}(e_1, e_2)$. 于是

$$u_2 = \langle u_2, e_1 \rangle e_1 + \langle u_2, e_2 \rangle e_2$$

又因为 u_1, u_2 是规范正交组, 于是

$$0 = \langle u_1, u_2 \rangle = \langle \lambda_1 e_1, u_2 \rangle = \lambda_1 \langle e_1, u_2 \rangle$$

因为 $\lambda_1 \neq 0$, 于是 $\langle e_1, u_2 \rangle = 0$, 于是

$$u_2 = \langle u_2, e_2 \rangle e_2$$

令 $\lambda_2 = \langle u_2, e_2 \rangle$, 同理可知 $|\lambda_2| = 1$, 即 $\lambda_2 \in S$.

依此过程构造 $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in S$, 令 $f \in S^m$ 满足 $f(k) = \lambda_k$ 对任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 成立.

于是 u_1, \dots, u_m 就被写成 $f(1)e_1, \dots, f(m)e_m$ 的形式, 命题得证.

Solution.

回到6B.10, 假定存在 u_1, \dots, u_k 亦满足题设条件, 则存在 $f \in S^m$ 使得 $u_k = f(k)e_k$ 对任意 $k \in \{1, \dots, m\}$ 成立.

此时有

$$\langle v_k, u_k \rangle = \langle v_k, f(k)u_k \rangle = \overline{f(k)} \langle v_k, e_k \rangle > 0$$

这要求 $\overline{f(k)} \in \mathbb{R}$ 且 $\overline{f(k)} > 0$. 又因为 $f(k) \in S$, 于是 $f(k) = 1$, 从而表明 $u_k = e_k$.

于是只有 e_1, \dots, e_m 满足题意.