Linear Algebra Done Right 7C

1. 设$T \in \mathcal{L}(V)$.试证明:如果T和$-T$都是正算子,那么$T = \mathbf{0}$.

Proof.

由题意可知对任意$v \in V$有

$$\langle Tv, v \rangle \geqslant 0$$

且

$$\langle -Tv, v \rangle = -\langle Tv, v \rangle \geqslant$$

于是$\langle Tv, v \rangle = 0$,因而$T = \mathbf{0}$(在实内积空间上需要$T$自伴,这由正算子的定义可得).

2. 设$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$关于其标准基的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

试证明:T是可逆正算子.

Proof.

$\mathbb{F}^4$的标准基也是$\mathbb{F}^4$的规范正交基.观察这矩阵,可知$(\mathcal{M}(T))^* = \mathcal{M}(T)$,于是$T^* = T$,即$T$自伴.

一些计算表明T的特征值为

$$\frac{3\pi\sqrt{5}}{2}, \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$$

于是T的特征值均非零且非负,因而它是可逆正算子.

3. 设$n \in \mathbb{N}^*$,算子$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^n)$关于其标准基的矩阵中的元素均为1.试证明:$T$是正算子.

Proof.

对于任意$v := (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{F}^n$有

$$\begin{aligned} \langle Tv, v \rangle &= \langle T(x_1, \cdots, x_n), (x_1, \cdots, x_n) \rangle \\ &= (x_1 + \cdots + x_n)^2 \\ &\geqslant 0 \end{aligned}$$

于是T是正算子.

4. 设$n \in \mathbb{N}^*$且$n > 1$,试证明:存在$n \times n$矩阵A,其所有元素都是正数且$A = A^*$,但$\mathbb{F}^n$上关于其标准基的矩阵为A的算子不是正算子.

Proof.

考虑矩阵

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \end{pmatrix}$$

令A为$T \in \mathcal{L}(\mathbb{F}^2)$对应于$\mathbb{F}^2$的标准基的矩阵.于是

$$\langle T(x,y),(x,y)\rangle = \langle (x+2y, 2x+y),(x,y)\rangle = (x+y)^2 + 2xy$$

令$(x,y) = (1,-1)$,则有$\langle T(x,y),(x,y)\rangle < 0$,于是$T$不是正算子.