Linear Algebra Done Right 5E

1. 给出一例$S,T\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$且$S,T$可交换,且$\mathbb{F}^4$中存在在$S$下不变但不在$T$下不变的子空间,也存在在$T$下不变但不在$S$下不变的子空间.

Solution.

令$S(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2,x_1,0,0),T(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,x_4,x_3)$.

于是$ST(x_1,x_2,x_3,x_4)=TS(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,0,0,0)=\mathbf{0}$,因此$S$和$T$可交换.

注意到$U_1=\{(0,0,x,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$S$下不变,但不在$T$下不变.

$U_2=\{(x,0,0,0)\in\mathbb{F}^4:x\in\mathbb{F}\}$在$T$下不变,但不在$S$下不变.

2. 设$\mathcal{E}$是$\mathcal{L}(V)$的子集,且$\mathcal{E}$中的每个元素均可对角化.证明:存在V的一个基使得$\mathcal{E}$的每个元素关于这组基都有对角矩阵,当且仅当$\mathcal{E}$中的每对元素可交换.

Proof.

$\Rightarrow$:对于任意$S,T\in\mathcal{E}$,存在V的一组基$v_1,\cdots$使得它们关于这组基有对角矩阵,于是

$$\mathcal{M}(ST)=\mathcal{M}(S)\mathcal{M}(T)=\mathcal{M}(T)\mathcal{M}(S)=\mathcal{M}(TS)$$

于是S,T可交换.

$\Leftarrow$:设$\dim V=n$,则$\dim\mathcal{L}(V)=n^2$.

由于$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{L}(V)$,于是存在$\mathcal{L}(V)$中的线性无关组$T_1,\cdots,T_m$使得$\mathcal{E}\subseteq\operatorname{span}(T_1,\cdots,T_m)$,其中$m\leqslant n^2$.

根据**5D.17**,可以使这样的$T_1,\cdots,T_m$均为可对角化算子.于是

$$V=\bigoplus_{\lambda_1\in\mathbb{F}}E(\lambda_1,T_1)$$

因为V是有限维的,于是这样的λ_1是有限个的,它们对应于T_1的所有特征值.取定$\lambda_1\in\mathbb{F}$.

由于特征空间在可交换算子下不变,又因为T_2是可对角化的,于是$T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}$是$E(\lambda_1,T_1)$上的可对角化算子.

于是对$E(\lambda_1)$作直和分解有

$$E(\lambda_1,T_1)=\bigoplus_{\lambda_2\in\mathbb{F}}E\left(\lambda_2,T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}\right)$$

出于相似的原因,这样的直和分解是有限的.而

$$v\in E\left(\lambda_2,T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}\right)\Leftrightarrow v\in E(\lambda_1,T_1),(T_2-\lambda_2)v=\mathbf{0}\Leftrightarrow v\in E(\lambda_1,T_1)\cap E(\lambda_2,T_2)$$

于是$E\left(\lambda_2,T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}\right)=E(\lambda_1,T_1)\cap E(\lambda_2,T_2)$.

取定$\lambda_2\in\mathbb{F}$,有

$$V=\bigoplus_{\lambda_1\in\mathbb{F}}E(\lambda_1,T_1)=\bigoplus_{\lambda_1\in\mathbb{F}}\bigoplus_{\lambda_2\in\mathbb{F}}E\left(\lambda_2,T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}\right)=\bigoplus_{\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}}\left(E(\lambda_1,T_1)\cap E(\lambda_2,T_2)\right)$$

递推可知

$$V=\bigoplus_{\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}}\left(\bigcap_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T_k)\right)$$

这个直和是有限的,因为各T_k最多有n个特征值.为所有非零的$\bigcap\limits_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T_k)$选定一组基,并将它们组合,就得到了$V$的一组基.每个$T_k$关于这组基有对角矩阵,因而它们的线性组合也关于这组基有对角矩阵.因而$\mathcal{E}$中的任意元素关于这组基有对角矩阵.于是命题得证.

3. 设$S,T\in\mathcal{L}(V)$使得$ST=TS$.设$p\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$.

(1) 试证明:null $p(S)$在T下不变.

(2) 试证明:range $p(S)$在T下不变.

Proof.

首先,对于任意$n\in N^*$有

$$S^nT=S^{n-1}ST=S^{n-1}TS=\cdots=TS^n$$

又

$$TI=IT=T$$

于是对于任意$p:=\sum\limits_{i=0}^{m}a_iz^i\in\mathcal{P}(\mathbb{F})$有

$$p(S)T=\sum_{i=0}^{m}a_iS^iT=\sum_{i=0}^{m}a_iTS^i=Tp(S)$$

于是$p(S)$和T可交换.

(1) 对于任意$v\in\text{null }p(S)$有

$$p(S)(Tv)=Tp(S)v=T\mathbf{0}=\mathbf{0}$$

于是$Tv\in\text{null }p(S)$,即null $p(S)$在T下不变.

(2) 对于任意$v\in\text{range }p(S)$,设$u\in V$使得$p(S)u=v$.则有

$$Tv=T(p(S)u)=p(S)(Tu)$$

因为$p(S)(Tu)\in\text{range }p(S)$,于是range $p(S)$在T下不变.

4. 证明或给出一反例:若A是对角矩阵,B是与A大小相同的上三角矩阵,那么A和B可交换.

Solution.

考虑矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&2\\0&1\end{pmatrix}$$

那么A是对角矩阵,B是上三角矩阵.而

$$AB=\begin{pmatrix}1&2\\0&2\end{pmatrix}\qquad BA=\begin{pmatrix}1&4\\0&2\end{pmatrix}$$

于是$AB\neq BA$,因而A,B不可交换.

5. 设V是有限维向量空间,$S,T\in\mathcal{L}(V)$.试证明:S,T可交换,当且仅当S',T'可交换.

Proof.

取V的一组基$v_1,\cdots,v_n$和其对偶基$\phi_1,\cdots,\phi_n$.令

$$A=\mathcal{M}(S,(v_1,\cdots,v_n))\qquad B=\mathcal{M}(T,(v_1,\cdots,v_n))$$

于是

$$A^{\mathrm{t}}=\mathcal{M}(S',(\phi_1,\cdots,\phi_n))\qquad B^{\mathrm{t}}=\mathcal{M}(T',(\phi_1,\cdots,\phi_n))$$

于是

$$S,T\text{可交换}\Leftrightarrow AB=BA\Leftrightarrow(AB)^{\mathrm{t}}=(BA)^{\mathrm{t}}\Leftrightarrow B^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}=A^{\mathrm{t}}B^{\mathrm{t}}\Leftrightarrow S',T'\text{可交换}$$

6. 设V是有限维复向量空间,且$S,T\in\mathcal{L}(V)$可交换.试证明:存在$\alpha,\beta\in\mathbb{C}$使得

$$\text{range }(S-\alpha I)+\text{range }(T-\beta I)\neq V$$

Proof.

由于S,T可交换,于是它们有上三角矩阵$\mathcal{M}(S),\mathcal{M}(T)$.

令α,β分别为$\mathcal{M}(S),\mathcal{M}(T)$右下角的元素,那么$\mathcal{M}(S-\alpha I),\mathcal{M}(T-\beta I)$的最后一行均为0.

因而range $(S-\alpha I)+\text{range }(T-\beta I)\neq V$.

7. 设V是有限维复向量空间,$S \in \mathcal{L}(V)$可对角化,且$T \in \mathcal{L}(V)$和S可交换.试证明:存在V的一个基使得S有对角矩阵而T有上三角矩阵.

Proof.

令$n = \dim V$.我们对n用归纳法.

欲证结论对$n = 1$是成立的,因为所有的1×1矩阵都是对角矩阵和上三角矩阵.

现在假设$n > 1$,且欲证结论对所有小于n维的复向量空间成立.

对于任意$\lambda \in \mathbb{C}$,根据**5D.5**可知

$$V = \text{null } (S - \lambda I) \oplus \text{range } (S - \lambda I)$$

令$U = \text{null } (S - \lambda I), W = \text{range } (S - \lambda I)$.

若$S = \lambda I$,那么S关于V的任意一组基的矩阵都是对角矩阵.而V是复向量空间,于是T关于V的某组基有上三角矩阵,因此命题成立.

若$S \neq \lambda I$,则$1 \leqslant \dim U, \dim W < n$.**5E.3**表明$U, W$在$S, T$下不变.限制在$U, W$上的$S, T$也是可交换的.

分别对U, W使用归纳假设,可知存在U的一组基$u_1, \cdots, u_m$使得$S|_U$和$T|_U$分别有对角矩阵和上三角矩阵.

同理存在W的一组基$w_1, \cdots, w_{n-m}$使得$S|_W$和$T|_W$分别有对角矩阵和上三角矩阵.

于是我们有

$$Tu_k \in \text{span}(u_1, \cdots, u_k), \forall k \in \{1, \cdots, m\}$$

$$Tw_k \in \text{span}(w_1, \cdots, w_k) \subseteq \text{span}(u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_k), \forall k \in \{1, \cdots, n - m\}$$

于是存在V的一组基$u_1, \cdots, u_m, w_1, \cdots, w_{n-m}$使得$S$关于其有对角矩阵,$T$关于其有上三角矩阵.

归纳可知命题成立.

8. 设D_x, D_y是$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}^2)$上可交换的偏微分算子.求$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}^2)$的一个基使得$D_x, D_y$有上三角矩阵.

Proof.

考虑$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}^2)$中的向量组$\mathcal{B}: 1, x, y, x^2, xy, y^2, x^3, x^2y, xy^2, y^3$.

不难证明$\mathcal{B}$张成$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}^2)$.我们只需证明$\mathcal{B}$中的向量线性无关.为此,令

$$a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{0,1}y + a_{2,0}x^2 + a_{1,1}xy + a_{0,2}y^2 + a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2y + a_{1,2}xy^2 + a_{0,3}y^3 = 0$$

令$y = 0$可知$a_{0,0} + a_{1,0}x + a_{2,0}x^2 + a3, 0x^3 = 0$,于是$a_{0,0} = a_{1,0} = a_{2,0} = a_{3,0} = 0$

令$x = 0$,同理可知$a_{0,0} = a_{0,1} = a_{0,2} = a_{0,3} = 0$.

分别令$(x, y) = (1, 1), (1, 2)$和$(2, 1)$,可知$a_{1,1} = a_{2,1} = a_{1,2} = 0$.

于是$\mathcal{B}$中各向量线性无关,因而$\mathcal{B}$是$\mathcal{P}_3(\mathbb{R}^2)$的一组基.

D_x关于$\mathcal{B}$的矩阵为

$$\mathcal{M}(D_x)=\begin{pmatrix}0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&2&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&3&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&2&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

D_y关于$\mathcal{B}$的矩阵为

$$\mathcal{M}(D_y)=\begin{pmatrix}0&0&1&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&2&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&2&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&3\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}$$

这两个矩阵都是上三角矩阵.

9. 设V是有限维非零复向量空间.设$\mathcal{E}\subseteq\mathcal{L}(V)$,使得对于任意$S,T\in\mathcal{E}$都有$S$和$T$可交换.

(1) 试证明:存在$v\in V$使得对于任意$T\in\mathcal{E}$都有v是T的特征向量.

(2) 试证明:存在V的一个基使得$\mathcal{E}$中的每个元素关于这基有上三角矩阵.

Proof.

设$\dim V=n$,令$\mathcal{E}\subseteq\operatorname{span}(T_1,\cdots,T_m)$,其中各$T_k$可交换.

(1) 考虑T_1的特征值λ_1,则$E(\lambda_1,T_1)\neq\{\mathbf{0}\}$.由于$T_1,T_2$可交换,于是$E(\lambda_1,T_1)$在$T_2$下不变.
于是$T_2|_{E(\lambda_1,T_1)}$存在特征值λ_2和对应的特征向量,于是$E(\lambda_1,T_1)\cap E(\lambda_2,T_2)\neq\{\mathbf{0}\}$.

重复此操作可知存在$\lambda_1,\cdots,\lambda_m\in\mathbb{F}$使得$\bigcap\limits_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T_k)$非空.取$v\in\bigcap\limits_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T_k)$,则有

$$v\in\bigcap_{k=1}^{m}E(\lambda_k,T_k)\Rightarrow v\in E(\lambda_k,T_k)\Rightarrow T_kv=\lambda_k$$

因而v是$T_1,\cdots,T_m$的特征向量.

由于$\mathcal{E}$中的元素都可以视为$T_1,\cdots,T_m$的线性组合,令$T:=a_1T_1+\cdots+a_mT_m\in\mathcal{E}$,则有

$$Tv=a_1T_1v+\cdots+a_mT_mv=(a_1\lambda_1+\cdots+a_m\lambda_m)\,v$$

于是v是T的特征向量,命题得证.

(2) 采用归纳法.令$\dim V=n$.当$n=1$时,所有1×1矩阵都是上三角矩阵,命题成立.

现在假设$n>1$,且欲证结论对所有小于n的正整数都成立.由**(1)**,存在$v_1\in V$使得v_1是$T_1,\cdots,T_m$的共同特征向量.令V的子空间W满足

$$V=\operatorname{span}(v_1)\oplus W$$

定义线性映射$P:V\to W$使得$P(av_1+w)=w$对任意$a\in\mathbb{C}$和任意$w\in W$成立.

定义$\hat{T}_1,\cdots,\hat{T}_m\in\mathcal{L}(W)$使得$\hat{T}_kw=P(T_kw)$对任意$w\in W$和$k\in\{1,\cdots,m\}$成立.

首先,我们需要说明$\hat{T}_1,\cdots,\hat{T}_m\in\mathcal{L}(W)$两两可交换.

对于任意$i,j\in\{1,\cdots,m\}$且$i\neq j$和任意$w\in W$,存在$a\in\mathbb{C}$使得

$$(\hat{T}_i\hat{T}_j)w=\hat{T}_i(P(T_jw))=\hat{T}_i(T_jw-av_1)=P(T_i(T_jw-av_1))=P(T_iT_jw)$$

最后一个等号成立是因为v_1是T_i的特征向量且$Pv_1=\mathbf{0}$.同理有$\hat{T}_j\hat{T}_iw=P(T_jT_i)w$.

因为T_i和T_j可交换,于是

$$(\hat{T}_i\hat{T}_j)w=P(T_iT_jw)=P(T_jT_i)w=(\hat{T}_j\hat{T}_i)w$$

对任意$w\in W$成立,于是$\hat{T}_i,\hat{T}_j$可交换.

因此,应用归纳假设可知存在W的一组基$v_2,\cdots,v_n$使得$\hat{T}_1,\cdots,\hat{T}_m$有上三角矩阵.

于是对于任意$j\in\{1,\cdots,m\}$和任意$k\in\{2,\cdots,n\}$有$\hat{T}v_k\in\operatorname{span}(v_2,\cdots,v_k)$.

又根据$\hat{T}_j$的定义,存在$\lambda_{j,k}\in\mathbb{C}$使得

$$T_jv_k=\lambda_{j,k}v_1+\hat{T}_jv_k\in\operatorname{span}(v_1,\cdots,v_k)$$

另外有$Tv_1\in\operatorname{span}(v_1)$.于是$T_j$关于$v_1,\cdots,v_n$有上三角矩阵.

又上三角矩阵的线性组合仍是上三角矩阵,归纳可知命题得证.

> **10.** 给出一例在有限维实向量空间上的两个可交换算子S,T,使得$S+T$有特征值不等于S,T的特征值之和,ST有特征值不等于S,T的特征值之积.

> **Solution.**
> 令$S,T\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$满足$S(x,y)=(-y,x)$,$T(x,y)=(y,-x)$.于是
>
> $$ST(x,y)=TS(x,y)=(x,y)$$
>
> 于是S,T可交换.由于$S+T=\mathbf{0}$, $ST=I$,于是两者分别有特征值$0,1$.然而S,T都没有特征值,于是我们找到了符合题意的S,T.