Linear Algebra Done Right 6A

1. 证明:如果$v_1,\cdots,v_m\in V$,那么
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle\geqslant 0$$

Proof.

我们有
$$\begin{aligned}||v_1+\cdots+v_m||^2&=\sum_{j=1}^{m}||v_j||^2+2\sum_{j,k\in\{1,\cdots,m\},j\neq k}\langle v_j,v_k\rangle\\&=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle\end{aligned}$$
于是
$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{m}\langle v_j,v_k\rangle=||v_1+\cdots+v_m||^2\geqslant 0$$

2. 设$S\in\mathcal{L}(V)$,定义$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$为
$$\langle u,v\rangle_S=\langle Su,Sv\rangle$$
对所有$u,v\in V$成立.试证明:$\langle\cdot,\cdot\rangle_S$是$V$上的内积,当且仅当$S$是单射.

Proof.

我们有
$$\langle\cdot,\cdot\rangle_S\text{是内积}\Leftrightarrow\langle v,v\rangle_S=0\text{当且仅当}v=\mathbf{0}\Leftrightarrow\langle Sv,Sv\rangle=0\text{当且仅当}Sv=\mathbf{0}\Leftrightarrow\text{null }S=\{\mathbf{0}\}\Leftrightarrow S\text{是单射}$$

3. 证明下列命题.

(1) 证明:将$\mathbb{R}^2$中的有序对$((x_1,x_2),(y_1,y_2))$映射到$|x_1y_1|+|x_2y_2|$的函数不是$\mathbb{R}^2$上的内积.

(2) 证明:将$\mathbb{R}^3$中的有序对$((x_1,x_1,x_3),(y_1,y_2,y_3))$映射到$x_1y_1+x_3y_3$的函数不是$\mathbb{R}^3$上的内积.

Proof.

(1) 令$u=(1,0),v=(-1,0),w=(1,0)$,于是
$$f(u,w)=1\qquad f(v,w)=1\qquad f(u+v,w)=0$$

于是$f(u+v,w)\neq f(u,w)+f(v,w)$,因而这映射$f$不满足第一位上的可加性,不是$\mathbb{R}^2$上的内积.

(2) 令$v=(0,1,0)$,则$g(v,v)=0$,而$v\neq\mathbf{0}$,因而这映射g不满足定性,不是$\mathbb{R}^3$上的内积.

4. 设$T\in\mathcal{L}(V)$使得$||Tv||\leqslant||v||$对任意$v\in V$成立.试证明:$T-\sqrt{2}I$是单射.

Proof.

若$T-\sqrt{2}I$不是单射,则存在$v\in V$且$v\neq\mathbf{0}$使得$Tv=\sqrt{2}v$.于是

$$||Tv||=||\sqrt{2}v||=\sqrt{2}||v||>||v||$$

这与题设矛盾,从而$T-\sqrt{2}I$是单射.

5. 设V是实内积空间.证明下列命题.

(1) 证明:$\langle u+v,u-v\rangle=||u||^2-||v||^2$对任意$u,v\in V$成立.

(2) 证明:若$u,v\in V$满足$||u||=||v||$,那么$u+v$正交于$u-v$.

(3) 证明:菱形的对角线相互垂直.

Proof.

(1) 我们有

$$\begin{aligned}\langle u+v,u-v\rangle&=\langle u,u-v\rangle+\langle v,u-v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle u,v\rangle+\langle v,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=\langle u,u\rangle-\langle v,v\rangle\\&=||u||^2-||v||^2\end{aligned}$$

(2) 我们有

$$||u||=||v||\Rightarrow\langle u+v,u-v\rangle=0\Rightarrow u+v\perp u-v$$

(3) 令$V=\mathbb{R}^2$,考虑菱形$ABCD$,令$u=\overrightarrow{BA},v=\overrightarrow{BC}$,则有$u+v=\overrightarrow{BD},u-v=\overrightarrow{CA}$.
由于$BA=BC$,则$||u||=||v||$,由**(2)**可知$\overrightarrow{BD}$和$\overrightarrow{CA}$正交,因而$BD\perp AC$,命题得证.

6. 设$u,v\in V$,试证明:$\langle u,v\rangle=0$当且仅当对任意$a\in\mathbb{F}$都有$||u||\leqslant||u+av||$.

Proof.

$\Rightarrow$:对任意$a \in \mathbb{F}$有$\langle u, av \rangle = \bar{a} \langle u, v \rangle = 0$,于是$u$和$av$正交.于是

$$||u + av||^2 = ||u||^2 + ||av||^2 \geqslant ||u||^2$$

于是$||u|| \leqslant ||u + av||$.

$\Leftarrow$:考虑u的正交分解,取$c = \dfrac{\langle u, v \rangle}{||v||^2}$.取$w = u - cv$,则$\langle w, v \rangle = 0$.于是

$$||u + cv||^2 = ||w||^2 = ||u||^2 - ||cv||^2 = ||u||^2 - c^2||v||^2 \geqslant ||u||^2$$

于是$c = 0$,因而$\langle u, v \rangle = \langle w, v \rangle = 0$.

7. 设$u, v \in V$.试证明:$||au + bv|| = ||bu + av||$对任意$a, b \in \mathbb{R}$成立,当且仅当$||u|| = ||v||$.

Proof.

$\Rightarrow$:取$a = 1, b = 0$即有$||u|| = ||v||$.

$\Leftarrow$:当$||u|| = ||v||$时,我们有

$$\begin{aligned}
||au + bv||^2 &= \langle au + bv, au + bv \rangle \\
&= a^2||u||^2 + b^2||v||^2 + 2ab \langle u, v \rangle \\
&= a^2||v||^2 + b^2||u||^2 + 2ab \langle u, v \rangle \\
&= \langle bu + av, bu + av \rangle \\
&= ||bu + av||^2
\end{aligned}$$

于是$||au + bv|| = ||bu + av||$.

8. 设$a, b, c, x, y \in \mathbb{R}$且$a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 \leqslant 1$.试证明:$a + b + c + 4x + 9y \leqslant 10$.

Proof.

我们有

$$(a + b + c + 4x + 9y)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 4^2 + 9^2) \leqslant 100$$

两边开平方即得

$$a + b + c + 4x + 9y \leqslant 10$$

9. 设$u, v \in V$,$||u|| = ||v|| = \langle u, v\rangle = 1$.试证明:$u = v$.

Proof.

据Cauchy-Schwarz不等式,$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$当且仅当$u = \lambda v, \lambda \in \mathbb{F}$时成立.

又$1 = \langle u, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda ||v||^2 = \lambda$,于是$\lambda = 1$,即$u = v$.

10. 设$u, v \in V$,$||u|| < 1$且$||v|| < 1$.试证明

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - |\langle u, v\rangle|$$

Proof.

我们有

$$(||u|| - ||v||)^2 \geqslant 0$$

于是

$$||u||^2 + ||v||^2 \geqslant 2||u||||v||$$

变形可得

$$\left(1 - ||u||^2\right)\left(1 - ||v||^2\right) \leqslant (1 - ||u||||v||)^2$$

而$||u||, ||v|| < 1$,于是

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - ||u||||v||$$

据Cauchy-Schwarz不等式有

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

于是

$$\sqrt{1 - ||u||^2}\sqrt{1 - ||v||^2} \leqslant 1 - |\langle u, v\rangle|$$

11. 求向量$u, v \in \mathbb{R}^2$使得u是$(1, 3)$的标量倍,v正交于$(1, 3)$,且$u + v = (1, 2)$.

Solution.

考虑$(1, 2)$在$(1, 3)$上的正交分解$(1, 2) = c(1, 3) + w$,其中$c = \dfrac{\langle (1, 2), (1, 3)\rangle}{||(1, 3)||^2} = \dfrac{7}{10}$.

于是令$u = \left(\dfrac{7}{10}, \dfrac{21}{10}\right), v = \left(\dfrac{3}{10}, -\dfrac{1}{10}\right)$.

12. 设$a, b, c, d \in \mathbb{R}^*$.

(1) 试证明:$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$.

(2) 求上述不等式的取等条件.

Solution.

(1) 令$u=\left(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}, \sqrt{d}\right), v=\left(\sqrt{\frac{1}{a}}, \sqrt{\frac{1}{b}}, \sqrt{\frac{1}{c}}, \sqrt{\frac{1}{d}}\right)$.据Cauchy-Schwarz不等式有

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant ||u||||v||$$

即

$$4 \leqslant \sqrt{a+b+c+d} \cdot \sqrt{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}}$$

两边平方即得

$$(a+b+c+d)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right) \geqslant 16$$

(2) 据Cauchy-Schwarz不等式的取等条件,当且仅当$u=\lambda v$时取等,即$a=b=c=d$.