# Linear Algebra Done Right 7D

**1.** 设$\dim V \geqslant 2$,$S \in \mathcal{L}(V,W)$.试证明:$S$是等距映射,当且仅当对于任意$V$中一长度为2的规范正交组$e_1,e_2$都有$Se_1,Se_2$是$W$中的规范正交组.

**Proof.**

$\Rightarrow$:考虑$U=\operatorname{span}(e_1,e_2)$,于是$S|_U$是等距映射.

根据**7.49(d)**可知这等价于$Se_1,Se_2$是range $(S|_U)$中的规范正交组,即$W$中的规范正交组.

$\Leftarrow$:考虑$V$的规范正交基$e_1,\cdots,e_n$.对任意$j,k\in\{1,\cdots,n\}$且$j<k$有$Se_j,Se_k$是$W$中的规范正交组,即

$$||Se_j||=||Se_k||=1,\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

于是$Se_1,\cdots,Se_n$是$W$中的规范正交组.根据**7.49(d)**可知$S$是等距映射.

**2.** 设$T\in\mathcal{L}(V,W)$,试证明:$T$是等距映射的标量倍,当且仅当$T$保持正交性.

**注**:所谓$T$保持正交性,即$\langle Tu,Tv\rangle=0$对所有满足$\langle u,v\rangle=0$的$u,v\in V$都成立.

**Proof.**

$\Rightarrow$:设$T$满足$T=\lambda S$,其中$S\in\mathcal{L}(V,W)$是等距映射.$\lambda\in\mathbb{F}$.

于是根据**7.49(c)**可知$\langle Su,Sv\rangle=\langle u,v\rangle$对所有$u,v\in V$都成立.于是

$$\langle Tu,Tv\rangle=\langle\lambda Su,\lambda Sv\rangle=|\lambda|^2\langle Su,Sv\rangle=|\lambda|^2\langle u,v\rangle=0$$

于是$T$保持正交性.

$\Leftarrow$:假定$T$保持正交性.设$e_1,\cdots,e_n$为$V$的规范正交基,于是对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$有

$$\langle e_1+e_k,e_1-e_k\rangle=||e_1||-||e_k||=0\Rightarrow\langle Te_1+Te_k,Te_1-Te_k\rangle=||Te_1||-||Te_k||=0$$

于是令$\lambda=||Te_1||$,则有$\lambda=||Te_k||$对于任意$k\in\{1,\cdots,n\}$都成立.

若$\lambda=0$,则$T=0I$是等距映射的标量倍.若$\lambda\neq0$,那么令$S=\dfrac{T}{\lambda}$,则有

$$\langle e_j,e_k\rangle=0\Rightarrow\langle Te_j,Te_k\rangle=0\Rightarrow\langle\lambda Se_j,\lambda Se_k\rangle=0\Rightarrow\langle Se_j,Se_k\rangle=0$$

对所有$j,k\in\{1,\cdots,n\},j\neq k$成立.又因为$||Se_k||=\left|\left|\dfrac{Te_k}{\lambda}\right|\right|=\left|\dfrac{\lambda}{\lambda}\right|=1$,于是$Se_1,\cdots,Se_n$是$W$中的规范正交组.

根据**7.49(d)**可知$S$是等距映射,于是$T$是等距映射的标量倍.

**3.** 证明下列命题.

**(1)** $V$上的两酉算子之积是酉算子.

**(2)** $V$上的酉算子之逆是酉算子.

**Proof.**

**(1)** 设$S, T \in \mathcal{L}(V)$是酉算子,$e_1, \cdots, e_n$是$V$的规范正交基.
根据**7.53(d)**可知$Se_1, \cdots, Se_n$是$V$的规范正交基,于是$T(Se_1), \cdots, T(Se_n)$是$V$的规范正交基.
于是$TS$是$V$上的酉算子.

**(2)** 设$S \in \mathcal{L}(V)$是酉算子,由**7.53(c)**可知$S^{-1} = S^*$,由**7.53(f)**可知$S^*$是酉算子,于是命题得证.

**4.** 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$,且$A, B \in \mathcal{L}(V)$自伴.试证明:$A + \mathrm{i}B$是酉算子,当且仅当$AB = BA$且$A^2 + B^2 = I$.

**Proof.**

我们有

$$\begin{aligned}
A + \mathrm{i}B\text{是酉算子} &\Leftrightarrow (A + \mathrm{i}B)(A + \mathrm{i}B)^* = I \\
&\Leftrightarrow (A + \mathrm{i}B)(A^* - \mathrm{i}B^*) = I \\
&\Leftrightarrow (A + \mathrm{i}B)(A - \mathrm{i}B) = I \\
&\Leftrightarrow A^2 + B^2 + \mathrm{i}(BA - AB) = I \\
&\Leftrightarrow A^2 + B^2 = I, AB = BA
\end{aligned}$$

**5.** 设$S \in \mathcal{L}(V)$.试证明下列命题等价.

(a) $S$是自伴的酉算子.

(b) $S = 2P - I$,其中$P$是$V$上的某个正交投影.

(c) 存在$V$的子空间$U$使得$Su = u$对任意$u \in U$成立而$Sw = -w$对所有$w \in U^\perp$成立.

**Proof.**

**(a)⇒(b)**:设$S \in \mathcal{L}(V)$是自伴的酉算子,那么令$P = \dfrac{S + I}{2}$.
根据**7.53**可知$S^2 = SS^* = I$,于是

$$P^2 = \frac{S^2 + 2S + I}{4} = \frac{S + I}{2} = P$$

根据**7A.20(c)**可知存在$V$的子空间$U$使得$P=P_U$,于是$P$是$V$上的某个正交投影,此时有$S=2P-I$.
**(b)⇒(c)**:对任意$u\in U$有$Su=2Pu-u=u$,对任意$w\in U^\perp$有$Sw=2P_Uw-w=\mathbf{0}-w=-w$.
**(c)⇒(a)**:对任意$v_1:=u_1+w_1,v_2:=u_2+w_2\in V$,其中$u_1,u_2\in U,w_1,w_2\in U^\perp$有

$$\langle Sv_1,v_2\rangle=\langle u_1-w_1,u_2+w_2\rangle=\langle u_1,u_2\rangle-\langle w_1,w_2\rangle=\langle u_1+w_1,u_2-w_2\rangle=\langle v_1,Sv_2\rangle$$

于是$S$自伴.另外我们有

$$S^2v=S^2(u+w)=S(u-w)=u+w=v$$

于是$S^2=I$,即$SS^*=S^*=I$,因而$S$是酉算子.

**6.** 设$T_1,T_2$都是$\mathbb{F}^3$上以$2,5,7$为特征值的正规算子.试证明:存在酉算子$S\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^3)$使得$T_1=S^*T_2S$.

**Proof.**
令$\lambda_1,\cdots,\lambda_3$为$T_1,T_2$共有的特征值.设$T_1$对应的特征向量为$e_1,\cdots,e_3$,$T_2$对应的特征向量为$f_1,\cdots,f_3$.
于是$e_1,\cdots,e_3$和$f_1,\cdots,f_3$均为$V$的基.现在,令$Se_k=f_k$对$k=1,2,3$成立,于是

$$Te_k=S^*T_2Se_k=S^{-1}T_2Se_k=S^{-1}T_2f_k=S^{-1}\lambda_kf_k=\lambda_ke_k$$

对$k=1,2,3$成立,从而$T=S^*T_2S$.

**7.** 给出两个自伴算子$T_1,T_2\in\mathcal{L}(\mathbb{F}^4)$使得其特征值均为$2,5,7$但不存在一酉算子$S\in\mathcal{L}(V)$使得$T_1=S^*T_2S$.

**Proof.**
令$T_1,T_2$关于$\mathbb{F}^4$的标准基$e_1,\cdots,e_4$的矩阵为

$$\mathcal{M}(T_1)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}\qquad\mathcal{M}(T_2)=\begin{pmatrix}2&0&0&0\\0&5&0&0\\0&0&5&0\\0&0&0&7\end{pmatrix}$$

假定存在酉算子$S\in\mathcal{L}(V)$使得$T_1=S^*T_2S$.由于$SS^*=S^*S=I$,于是

$$T_1-2I=S^*T_2S-2S^*S=S^*(T_2S-2S)=S^*(T_2-2I)S$$

从而根据**3D.8**可知$\dim\operatorname{null}(T_1-2I)=\dim\operatorname{null}(T_2-2I)$.
然而根据两者的矩阵可以看出

$$\dim\operatorname{null}(T_1-2I)=2\neq1=\dim\operatorname{null}(T_2-2I)$$

于是命题不成立.

**8.** 证明或给出一反例:如果$S \in \mathcal{L}(V)$且存在$V$的一规范正交基$e_1, \cdots, e_n$使得任意$e_k$都有$||Se_k|| = 1$,那么$S$是酉算子.

**Proof.**

考虑这样的规范正交基$e_1, \cdots, e_n$,令$Se_k = e_1$对任意$e_k$成立.显然$S$不可逆,于是$S$不是酉算子.

**9.** 设$\mathbb{F} = \mathbb{C}$且$T \in \mathcal{L}(V)$.设$T$的每个特征值的绝对值都是1且$||Tv|| \leqslant ||v||$对任意$v \in V$都成立.试证明:$T$是酉算子.