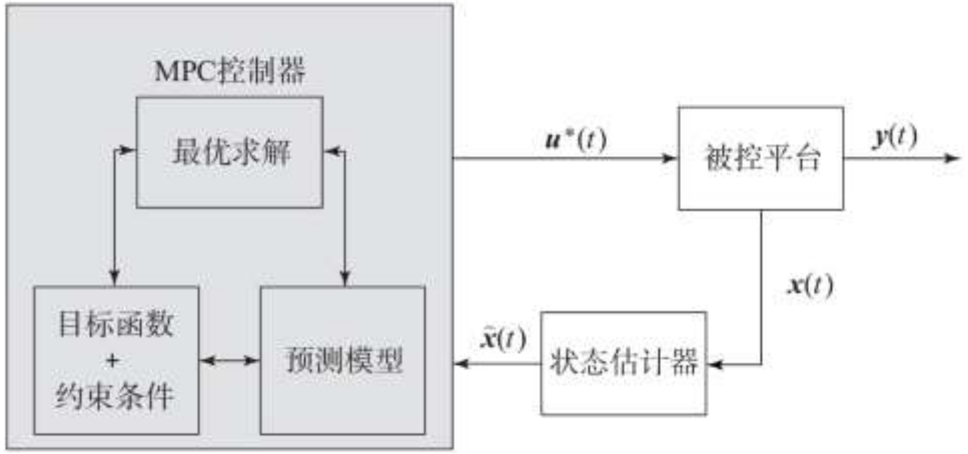
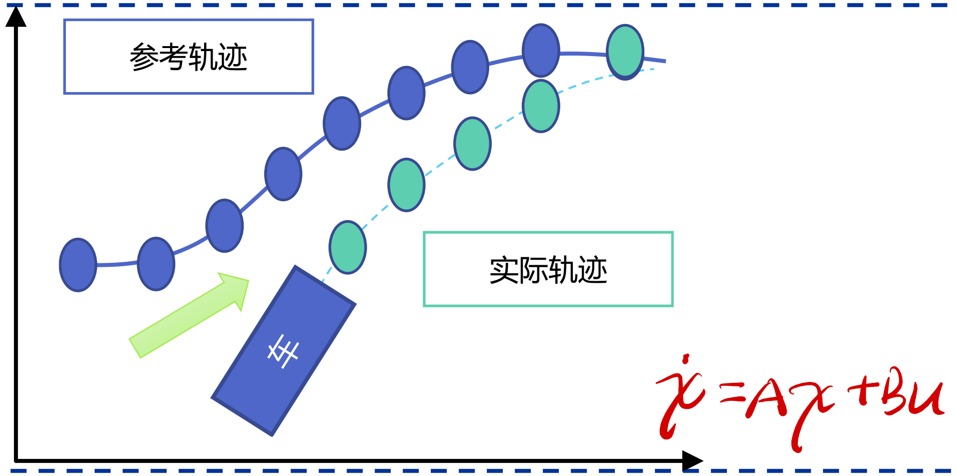
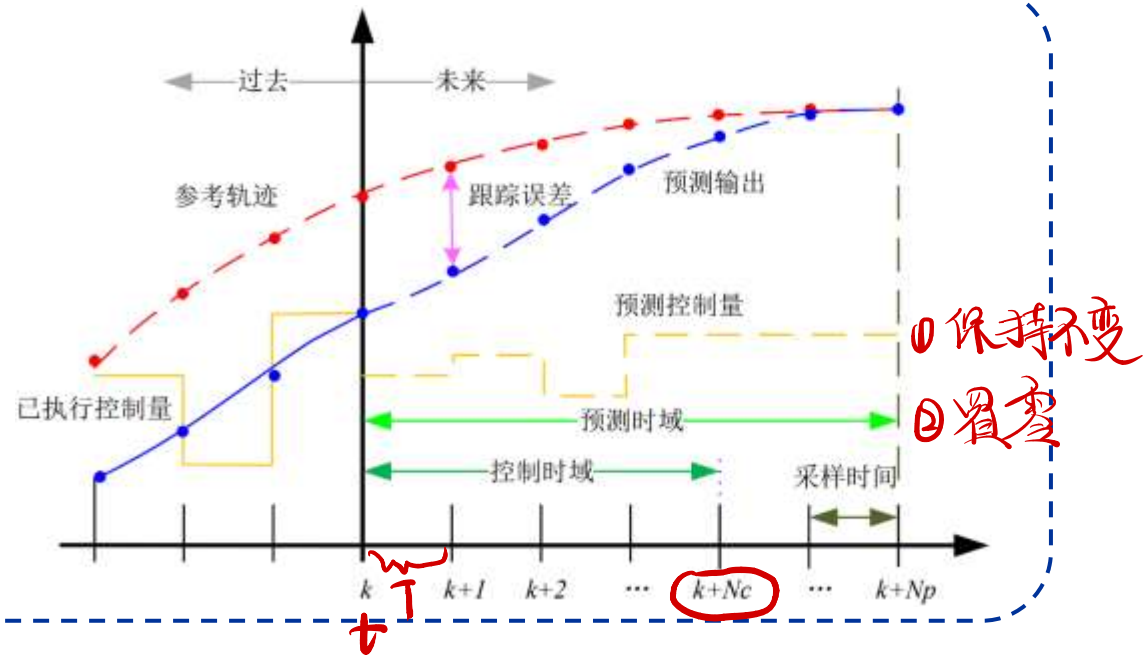
# 基于MPC的路径跟踪---理论篇
# （车辆运动学）

# 基于MPC的路径跟踪控制器设计---理论篇




## MPC控制器设计：

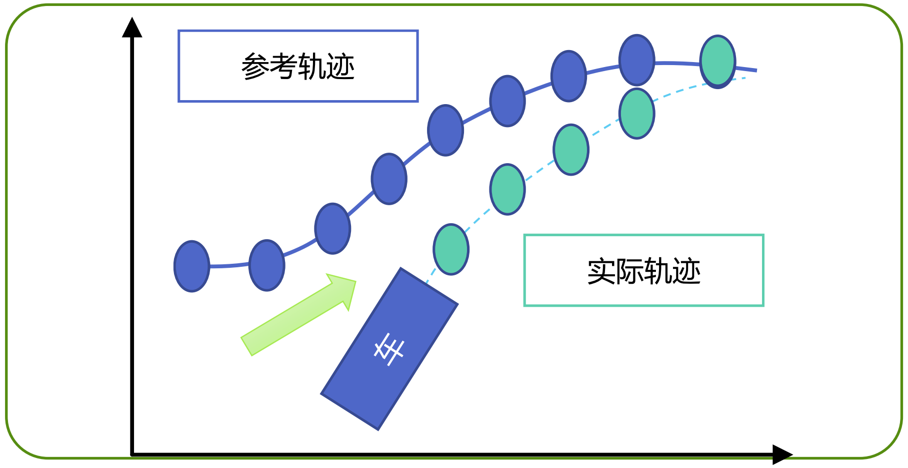
1. 离散化
2. 预测模型推导
3. 目标函数设计
4. 约束设计
5. 优化求解

# MPC控制器设计：离散化-预测模型-目标函数设计-约束设计-优化求解

## 0. 误差模型

$$\begin{bmatrix}\dot{x}-\dot{x}_r\\ \dot{y}-\dot{y}_r\\ \dot{\varphi}-\dot{\varphi}_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & -v_r\sin\varphi_r\\ 0 & 0 & v_r\cos\varphi_r\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x-x_r\\ y-y_r\\ \varphi-\varphi_r\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\cos\varphi_r & 0\\ \sin\varphi_r & 0\\ \frac{\tan\delta_r}{l} & \frac{v_r}{l\cos^2\delta_r}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v-v_r\\ \delta-\delta_r\end{bmatrix}$$

$$\dot{\tilde{\chi}}=A_1^{(3,3)}\tilde{\chi}+B_1^{(3,2)}\tilde{u}$$




## 1. 离散化

**前向欧拉离散化:**

$$\int_t^{t+T}\dot{\tilde{\chi}}\,dt=\int_t^{t+T}(A_1\tilde{\chi}+B_1\tilde{u})\,dt$$

$$\tilde{\chi}(t+T)-\tilde{\chi}(t)=A_1\tilde{\chi}(\xi)T+B_1\tilde{u}(\xi)T,\ \xi\in[t,t+T]$$

$$\tilde{\chi}(t+T)-\tilde{\chi}(t)=A_1\tilde{\chi}(t)T+B_1\tilde{u}(t)T$$

$$\tilde{\chi}(t+T)=(E+A_1T)\tilde{\chi}(t)+B_1T\tilde{u}(t)$$

T采样周期

$$\tilde{\chi}(k+1)=(E+A_1T)\tilde{\chi}(k)+B_1T\tilde{u}(k)$$

$$\tilde{\chi}(k+1)=A_2\tilde{\chi}(k)+B_2\tilde{u}(k)$$

**积分第一中值定理**

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则在积分区间 $[a,b]$ 上至少存在一个点 $\varepsilon$，使下式成立

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(\varepsilon)(b-a)$$

$$\dot{X}=AX$$

$$\int_t^{t+T}\dot{X}\,dt=\int_t^{t+T}AX\,dt$$

$$X(t+T)-X(t)=AX(\xi)T,\ \xi\in[t,t+T]$$

① $X(\xi)=X(t)$ 向前

② $X(\xi)=X(t+T)$ 向后

③ $X(\xi)=\frac{X(t)+X(t+T)}{2}$ 中点

Apollo: $A=(E-\frac{aT}{2})^{-1}(E+\frac{aT}{2})$ , $B=T*b$

$$X(t+T)-X(t)\approx AX(t)T$$

## 2. 预测模型

$\xi(k)=\begin{bmatrix}\tilde{\chi}(k)\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}$

➢ **构建新的状态量：** $\xi(k)=\left[\tilde{\chi}(k)\quad \tilde{u}(k-1)\right]^T$

$$\xi(k+1)=\begin{bmatrix}\tilde{\chi}(k+1)\\ \tilde{u}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_2^{(3,3)}\tilde{\chi}(k)+B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k)\\ \tilde{u}(k)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_2^{(3,3)}\tilde{\chi}(k)+B_2^{(2,2)}\tilde{u}(k-1)+B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k)-B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k-1)\\ \tilde{u}(k-1)+\tilde{u}(k)-\tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}A_2^{(3,3)}\tilde{\chi}(k)+B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k-1)\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k)-B_2^{(3,2)}\tilde{u}(k-1)\\ \tilde{u}(k)-\tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ O & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\tilde{\chi}(k)\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_2\\ I\end{bmatrix}\left[\tilde{u}(k)-\tilde{u}(k-1)\right]$$

$$=\begin{bmatrix}A_2 & B_2\\ O & E\end{bmatrix}\xi(k)+\begin{bmatrix}B_2\\ E\end{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)=\boxed{A_3^{(5,5)}\xi(k)+B_3^{(5,2)}\Delta\tilde{u}(k)}$$

回忆…
②由控制量→控制增量

①预测：仅能预测Np

➢ **新的状态空间方程：**

$$\begin{cases}\xi(k+1)=A_3^{(5,5)}\xi(k)+B_3^{(5,2)}\Delta\tilde{u}(k)\\ y(k)=\left[E\quad O\right]\begin{bmatrix}\tilde{\chi}(k)\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}=C^{(3,5)}\xi(k)\end{cases}$$

➢ **系统预测模型：** 全控制时域Nc，预测时域Np.（Np≥Nc）

$y(k+1)=C\xi(k+1)$，$y(k+2)=C\xi(k+2)$，…，$y(k+N_p)=C\xi(k+N_p)$

$$y(k+1)=CA_3\xi(k)+CB_3\Delta\tilde{u}(k)$$

$$y(k+2)=CA_3^{\,2}\xi(k)+CA_3B_3\Delta\tilde{u}(k)+CB_3\Delta\tilde{u}(k+1)$$

$$y(k+3)=CA_3^{\,3}\xi(k)+CA_3^{\,2}B_3\Delta\tilde{u}(k)+CA_3B_3\Delta\tilde{u}(k+1)+CB_3\Delta\tilde{u}(k+2)$$

$$\cdots$$

$$y(k+N_C)=CA_3^{\,N_C}\xi(k)+CA_3^{\,N_{C-1}}B_3\Delta\tilde{u}(k)+CA_3^{\,N_{C-2}}B_3\Delta\tilde{u}(k+1)+\cdots+CA_3^{\,0}B_3\Delta\tilde{u}(k+N_C-1)$$

$$\cdots$$

$$y(k+N_P)=CA_3^{\,N_P}\xi(k)+CA_3^{\,N_{P-1}}B_3\Delta\tilde{u}(k)+CA_3^{\,N_{P-2}}B_3\Delta\tilde{u}(k+1)+\cdots+CA_3^{\,N_P-N_C}B_3\Delta\tilde{u}(k+N_C-1)$$

$$Y=W\boxed{\xi(k)}+Z\boxed{\Delta U}$$

系统当前状态，施加未来一段时间Nc控制量得到系统的未来表现，Np

$$Y=\begin{bmatrix}y(k+1)\\ y(k+2)\\ \cdots\\ y(k+N_C)\\ \cdots\\ y(k+N_P)\end{bmatrix},\quad W=\begin{bmatrix}CA_3\\ CA_3^{\,2}\\ \cdots\\ CA_3^{\,N_c}\\ \cdots\\ CA_3^{\,N_p}\end{bmatrix},\quad \Delta U=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)\\ \Delta\tilde{u}(k+1)\\ \Delta\tilde{u}(k+2)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}$$

$$Z=\begin{bmatrix}CB_3 & O & O & \cdots & O\\ CA_3B_3 & CB_3 & O & \cdots & O\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots\\ CA_3^{\,N_C-1}B_3 & CA_3^{\,N_C-2}B_3 & CA_3^{\,N_C-3}B_3 & \cdots & CA_3^{\,0}B_3\\ \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \vdots\\ CA_3^{\,N_P-1}B_3 & CA_3^{\,N_P-2}B_3 & CA_3^{\,N_P-3}B_3 & \cdots & CA_3^{\,N_P-N_C}B_3\end{bmatrix}$$

# MPC控制器设计：离散化-预测模型-目标函数设计-约束设计-优化求解

$$\xi(k+1)=A_\xi\,\xi(k)+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)$$

$$\xi(k+2)=A_\xi\,\xi(k+1)+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)$$

$$=A_\xi\left[A_\xi\,\xi(k)+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)\right]+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)$$

$$=A_\xi^{2}\,\xi(k)+A_\xi B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)$$

$$\xi(k+3)=A_\xi^{3}\,\xi(k)+A_\xi^{2}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)+A_\xi B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+2)$$

$$\vdots$$

$$\xi(k+N_c)=A_\xi^{N_c}\,\xi(k)+A_\xi^{N_c-1}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)+A_\xi^{N_c-2}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)+\cdots+B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+N_c-1)$$

$$\vdots$$

$$\xi(k+N_p)=A_\xi^{N_p}\,\xi(k)+A_\xi^{N_p-1}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k)+A_\xi^{N_p-2}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+1)+\cdots+A_\xi^{N_p-N_c}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+N_c-1)+\cancel{A_\xi^{N_p-N_c-1}B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+N_c)}+\cancel{\cdots}+\cancel{B_\xi\,\Delta\hat{u}(k+N_p-1)}$$

0 0

控制：$N_c$

超出$N_c$以后，

控制量：0

# MPC控制器设计：离散化-预测模型-目标函数设计-约束设计-优化求解

## 3.目标函数设计

$$J = \cdots + \sum_{i=0}^{N_c-1} \|\tilde{u}(k+i|k)\|_R^2 + \cdots$$

➢ **目标：路径跟踪误差**

$$\min J = \sum_{i=1}^{N_P-1}\|y(k+i\,|\,k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_{C-1}}\|\Delta\tilde{u}(k+i\,|\,k)\|_R^2 + \|y(k+N_P\,|\,k)\|_F^2 + \varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$y(k) = [E \quad O]\begin{bmatrix}\tilde{\chi}(k)\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x-x_r \\ y-y_r \\ \varphi-\varphi_r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\varphi\end{bmatrix}$$

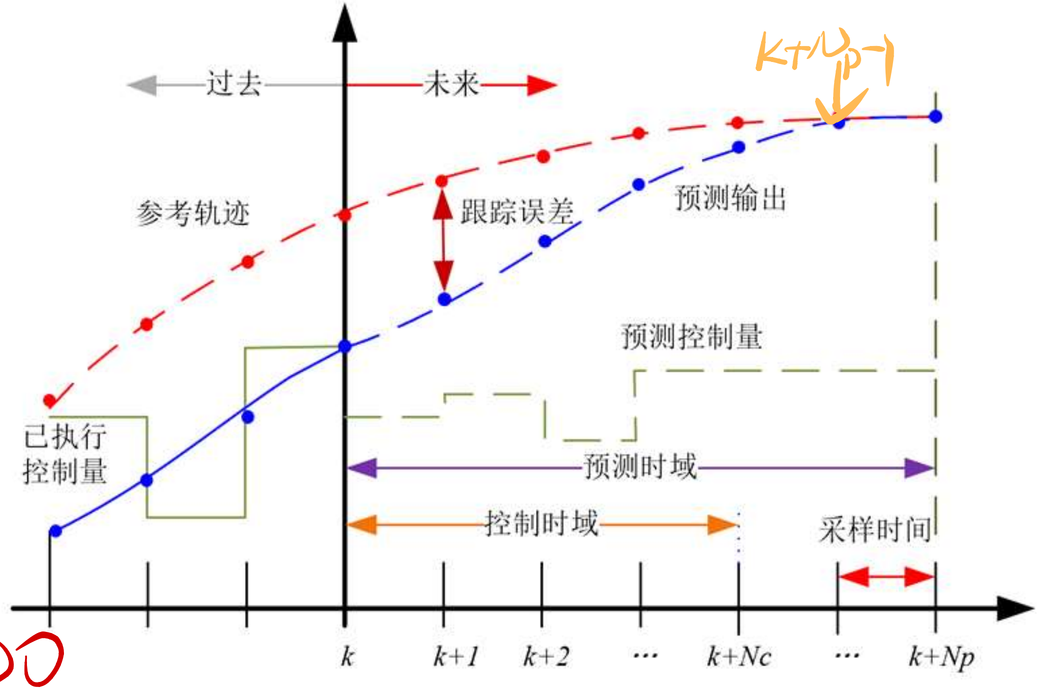
**以控制增量为代价，能有效改善控制的平滑性**

**对终端状态单独考虑**

**可行解**

**核心目标：路径跟踪**

偏差 $(\quad)^2 \to 0$




➢ **权重矩阵设计**

$$Q: \quad [e_x \; e_y \; e_\varphi]\begin{bmatrix} q_1 & & \\ & q_2 & \\ & & q_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_\varphi\end{bmatrix}$$

$$q_1 e_x^2 + q_2 e_y^2 + q_3 e_\varphi^2$$

$$R: \quad \begin{bmatrix} R_1 & \\ & R_2\end{bmatrix}$$

$$F: \quad \begin{bmatrix} f_1 & & \\ & f_2 & \\ & & f_3\end{bmatrix}$$

$$\Delta\tilde{u}(k) = \tilde{u}(k) - \tilde{u}(k-1)$$

$$\begin{bmatrix} v(k)-v_r(k) \\ \delta(k)-\delta_r(k)\end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v(k-1)-v_r(k-1) \\ \delta(k-1)-\delta_r(k-1)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v(k)-v(k-1) & -v_r(k)+v_r(k-1) \\ \delta(k)-\delta(k-1) & -\delta_r(k)+\delta_r(k-1)\end{bmatrix}$$

## 4.约束设计

➢ 硬约束：

- 控制量约束 $\tilde{u}_{\min}(k+i) \le \tilde{u}(k+i) \le \tilde{u}_{\max}(k+i)$ , $i=0,\cdots,N_c-1$
- 控制量增量约束 $\Delta\tilde{u}_{\min}(k+i) \le \Delta\tilde{u}(k+i) \le \Delta\tilde{u}_{\max}(k+i)$

T=0.05S

**1.期望真正控制量约束**

$0 \le v \le 17$

$-30^\circ \le \delta \le 30^\circ$

$\underbrace{\begin{bmatrix} 0-v_r \\ -30-\delta_r \end{bmatrix}}_{\tilde{u}_{min}} \le \tilde{u}(k) = \begin{bmatrix} v-v_r \\ \delta-\delta_r \end{bmatrix} \le \underbrace{\begin{bmatrix} 17-v_r \\ 30^\circ-\delta_r \end{bmatrix}}_{\tilde{u}_{max}}$

**2.期望真正增量控制量约束**

$-0.714 \le \Delta v \le 0.714$

$-0.75 \le \Delta\delta \le 0.75$

100 km/h — 7s　1s — 14.28　0.05s — 0.718

30° — 2s　1s → 15°　0.05s — 0.75

$\Delta\tilde{u}(k) = \tilde{u}(k) - \tilde{u}(k-1) = \begin{bmatrix} v(k)-v_r(k) \\ \delta(k)-\delta_r(k) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v(k-1)-v_r(k-1) \\ \delta(k-1)-\delta_r(k-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{v(k)-v(k-1)}^{\Delta v}-v_r(k)+v_r(k-1) \\ \underbrace{\delta(k)-\delta(k-1)}_{\Delta\delta}-\delta_r(k)+\delta_r(k-1) \end{bmatrix}$

$\underbrace{\begin{bmatrix} -0.714-v_r(k)+v_r(k-1) \\ -0.75-\delta_r(k)+\delta_r(k-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\tilde{u}_{min}} \le \Delta\tilde{u}(k) = \begin{bmatrix} \Delta v-v_r(k)+v_r(k-1) \\ \Delta\delta-\delta_r(k)+\delta_r(k-1) \end{bmatrix} \le \underbrace{\begin{bmatrix} 0.714-v_r(k)+v_r(k-1) \\ 0.75-\delta_r(k)+\delta_r(k-1) \end{bmatrix}}_{\Delta\tilde{u}_{max}}$

➢ 软约束：

$$J = \sum_{i=1}^{N_P-1} \|y(k+i|k)\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_C-1} \|\Delta\tilde{u}(k+i|k)\|_R^2 + \|y(k+N_P|k)\|_F^2 + \rho\varepsilon^2$$

① 增加控制量、控制增量形式

② 真正期望的约束

## 5.优化求解

➢ 目标：目标函数与约束转化为标准二次型所需要形式

$$J=\sum_{i=1}^{N_P-1}\left\|y(k+i\mid k)\right\|_Q^2+\sum_{i=0}^{N_C-1}\left\|\Delta\tilde{u}(k+i\mid k)\right\|_R^2+\left\|y(k+N_P\mid k)\right\|_Q^2+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

①

$$s.t.\begin{cases}u_{\min}(k+i)\le u(k+i)\le u_{\max}(k+i) & ,k=0,1,\cdots N_C-1\\ \Delta u_{\min}(k+i)\le \Delta u(k+i)\le \Delta u_{\max}(k+i) & ,k=0,1,\cdots N_C-1\end{cases}$$

②

➢ 标准二次型：

$$\min=\frac{1}{2}X^THX+f^TX$$

$$s.t.\begin{cases}AX\le b,\\ Aeq\bullet X=beq,\\ lb\le X\le ub\end{cases}$$

➢ 目标函数转化：设

$$J=\sum_{i=1}^{N_P-1}\left\|y(k+i\mid k)\right\|_Q^2+\sum_{i=0}^{N_C-1}\left\|\Delta\tilde{u}(k+i\mid k)\right\|_R^2+\left\|y(k+N_P\mid k)\right\|_F^2+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$y(k+1)^TQy(k+1)+y(k+2)^TQy(k+2)\cdots y(k+N_P-1)^TQy(k+N_P-1)+y(k+N_P)^TFy(k+N_P)$$

$$=\begin{bmatrix}y(k+1)\\y(k+2)\\\cdots\\y(k+N_C)\\\cdots\\y(k+N_P)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}Q&&&\\&Q&&\\&&Q&\\&&&\ddots\\&&&&F\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y(k+1)\\y(k+2)\\\cdots\\y(k+N_C)\\\cdots\\y(k+N_P)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)\\\Delta\tilde{u}(k+1)\\\Delta\tilde{u}(k+2)\\\cdots\\\Delta\tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}R&&&\\&R&&\\&&R&\\&&&\ddots\\&&&&R\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)\\\Delta\tilde{u}(k+1)\\\Delta\tilde{u}(k+2)\\\cdots\\\Delta\tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$=Y^TQ_BY+\Delta U^TR_B\Delta U+\varepsilon^T\rho\varepsilon \qquad Y=W\xi(k)+Z\Delta U$$

$$=(W\xi(k)+Z\Delta U)^TQ_B(W\xi(k)+Z\Delta U)+\Delta U^TR_B\Delta U+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$=(G+Z\Delta U)^TQ_B(G+Z\Delta U)+\Delta U^TR_B\Delta U+\varepsilon^T\rho\varepsilon \qquad ,G=W\xi(k)$$

$$=G^TQ_BG+G^TQ_BZ\Delta U+(Z\Delta U)^TQ_BG+(Z\Delta U)^TQ_BZ\Delta U+\Delta U^TR_B\Delta U+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$[(Z\Delta U)^TQ_BG]^T=G^TQ_BZ\Delta U$

$$=G^TQ_BG+2G^TQ_BZ\Delta U+\Delta U^TZ^TQ_BZ\Delta U+\Delta U^TR_B\Delta U+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$=\Delta U^T(Z^TQ_BZ+R_B)\Delta U+2G^TQ_BZ\Delta U+G^TQ_BG+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\Delta U\\\varepsilon\end{bmatrix}^T\begin{bmatrix}2(Z^TQ_BZ+R_B)&0\\0&2\rho\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta U\\\varepsilon\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2G^TQ_BZ&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta U\\\varepsilon\end{bmatrix}+G^TQ_BG$$

## 5.优化求解

### 目标：目标函数与约束转化为标准二次型所需要形式

$$J=\sum_{i=1}^{N_P-1}\left\|y(k+i\mid k)\right\|_Q^2+\sum_{i=0}^{N_C-1}\left\|\Delta\tilde{u}(k+i\mid k)\right\|_R^2+\left\|y(k+N_P\mid k)\right\|_F^2+\varepsilon^T\rho\varepsilon$$

$$s.t.\begin{cases}\tilde{u}_{\min}(k+i)\le\tilde{u}(k+i)\le\tilde{u}_{\max}(k+i) & ,k=0,1,\cdots N_C-1\\ \Delta\tilde{u}_{\min}(k+i)\le\Delta\tilde{u}(k+i)\le\Delta\tilde{u}_{\max}(k+i) & ,k=0,1,\cdots N_C-1\end{cases}$$

$$X=\begin{bmatrix}\Delta U\\ \varepsilon\end{bmatrix}$$

### 标准二次型：

$$\min=\frac{1}{2}X^THX+f^TX$$

$$s.t.\begin{cases}AX\le b,\\ Aeq\bullet X=beq,\\ lb\le X\le ub\end{cases}$$

### 约束转化：

$$\tilde{u}_{\min}(k+i)\le\tilde{u}(k+i)\le\tilde{u}_{\max}(k+i)\quad ,k=0,1,\cdots N_C-1$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{u}_{\min}(k)\\ \tilde{u}_{\min}(k+1)\\ \tilde{u}_{\min}(k+2)\\ \cdots\\ \tilde{u}_{\min}(k+N_c-1)\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\tilde{u}(k)\\ \tilde{u}(k+1)\\ \tilde{u}(k+2)\\ \cdots\\ \tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\tilde{u}_{\max}(k)\\ \tilde{u}_{\max}(k+1)\\ \tilde{u}_{\max}(k+2)\\ \cdots\\ \tilde{u}_{\max}(k+N_c-1)\end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}(k)=\tilde{u}(k-1)+\Delta\tilde{u}(k)$$

$$\tilde{u}(k+1)=\tilde{u}(k-1)+\tilde{\Delta}u(k)+\tilde{\Delta}u(k+1)$$

$$\tilde{u}(k+1)=\tilde{u}(k)+\Delta\tilde{u}(k+1)$$

$$\cdots$$

$$\tilde{u}(k+N_C-1)=\tilde{u}(k-1)+\tilde{\Delta}u(k)+\tilde{\Delta}u(k+1)+\cdots+\tilde{\Delta}u(k+N_C-1)$$

$$\begin{bmatrix}\tilde{u}(k)\\ \tilde{u}(k+1)\\ \tilde{u}(k+2)\\ \cdots\\ \tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\tilde{u}(k-1)\\ \tilde{u}(k-1)\\ \tilde{u}(k-1)\\ \cdots\\ \tilde{u}(k-1)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}E & O & \cdots & O\\ E & E & \cdots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ E & E & \cdots & E\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)\\ \Delta\tilde{u}(k+1)\\ \Delta\tilde{u}(k+2)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}$$

$$U_{MIN}\le U_{k-1}+A_E\Delta U\le U_{MAX}$$

$$\begin{cases}A_E\Delta U\le U_{MAX}-U_{k-1}\\ -A_E\Delta U\le -U_{MIN}+U_{k-1}\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}A_E & 0\\ -A_E & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta U\\ \varepsilon\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}U_{MAX}-U_{k-1}\\ -U_{MIN}+U_{k-1}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}_{\min}(k)\\ \Delta\tilde{u}_{\min}(k+1)\\ \Delta\tilde{u}_{\min}(k+2)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}_{\min}(k+N_c-1)\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}(k)\\ \Delta\tilde{u}(k+1)\\ \Delta\tilde{u}(k+2)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}(k+N_c-1)\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}_{\max}(k)\\ \Delta\tilde{u}_{\max}(k+1)\\ \Delta\tilde{u}_{\max}(k+2)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}_{\max}(k+N_c-1)\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta U_{MIN}\\ 0\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\Delta U\\ \varepsilon\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\Delta U_{MAX}\\ \varepsilon_{MAX}\end{bmatrix}$$

### 求解结果

$$X^*=\begin{bmatrix}\Delta U\\ \varepsilon\end{bmatrix}^*\qquad \Delta U^*=\begin{bmatrix}\Delta\tilde{u}^*(k)\\ \Delta\tilde{u}^*(k+1)\\ \cdots\\ \Delta\tilde{u}^*(k+N_C-1)\end{bmatrix}$$

### 作用于系统的控制量

$$\Delta\tilde{u}(k)^*=\tilde{u}(k)-\tilde{u}(k-1)\quad ①$$

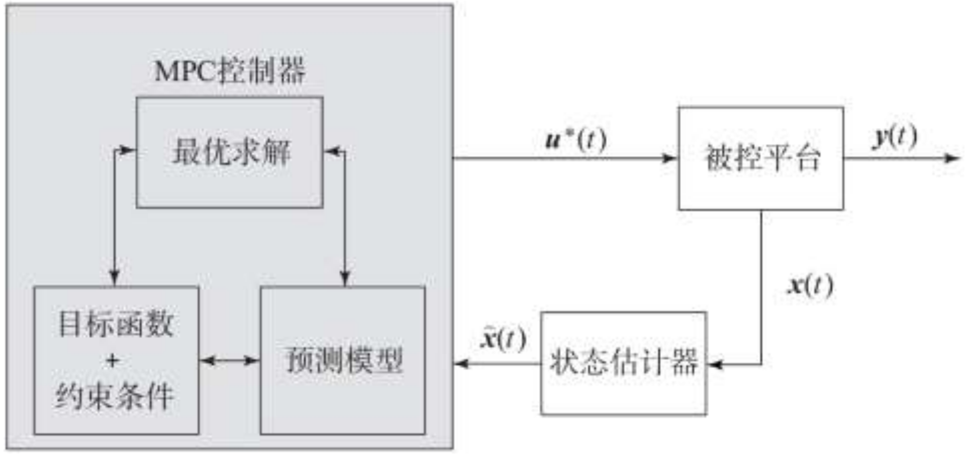
$$\tilde{u}(k)=\tilde{u}(k-1)+\Delta\tilde{u}(k)^*\quad ②$$

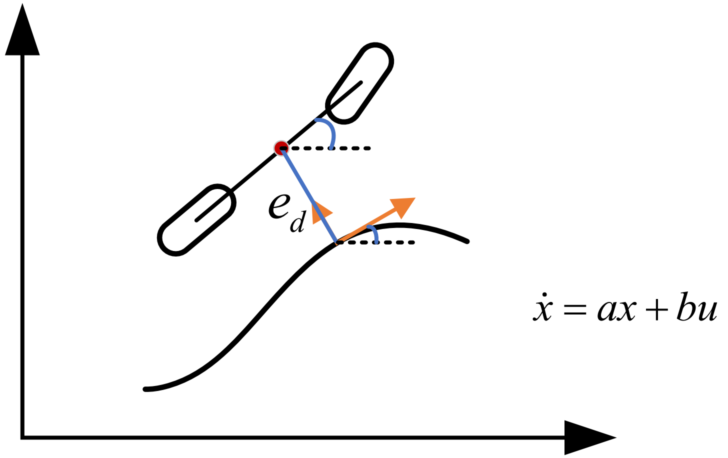
$$\tilde{u}(k)^*=\begin{bmatrix}v-v_r\\ \delta-\delta_r\end{bmatrix}$$

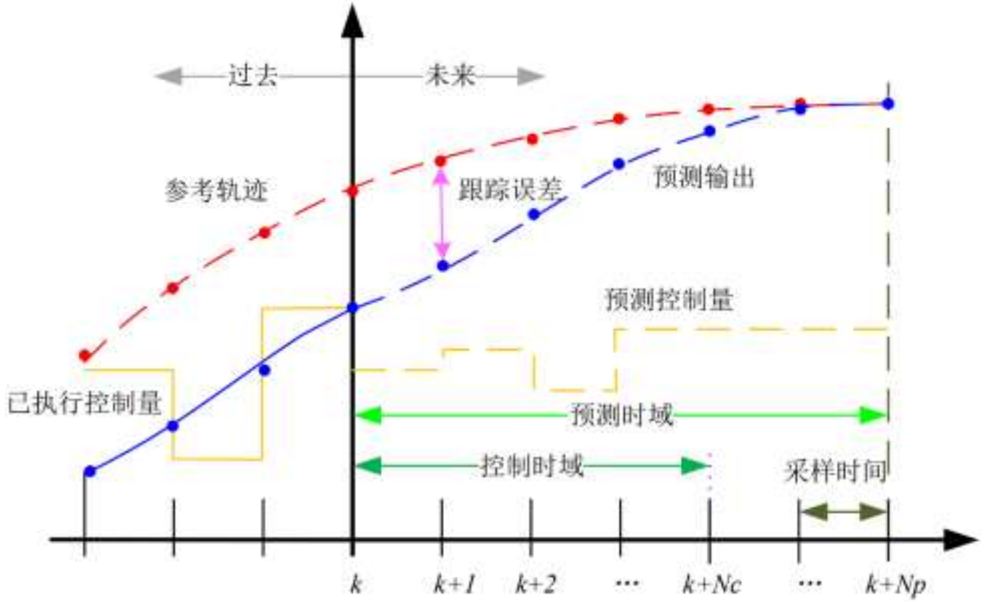
$$v=\tilde{u}(k)_1^*+v_r$$

$$\delta=\tilde{u}(k)_2^*+\delta_r\quad ③$$

# 基于MPC的路径跟踪控制器设计---理论篇---小结




## MPC控制器设计：

1. **离散化**

**前向欧拉离散化**

构建新的状态控制方程：控制量—控制增量

2. **预测模型推导**

3. **目标函数设计**

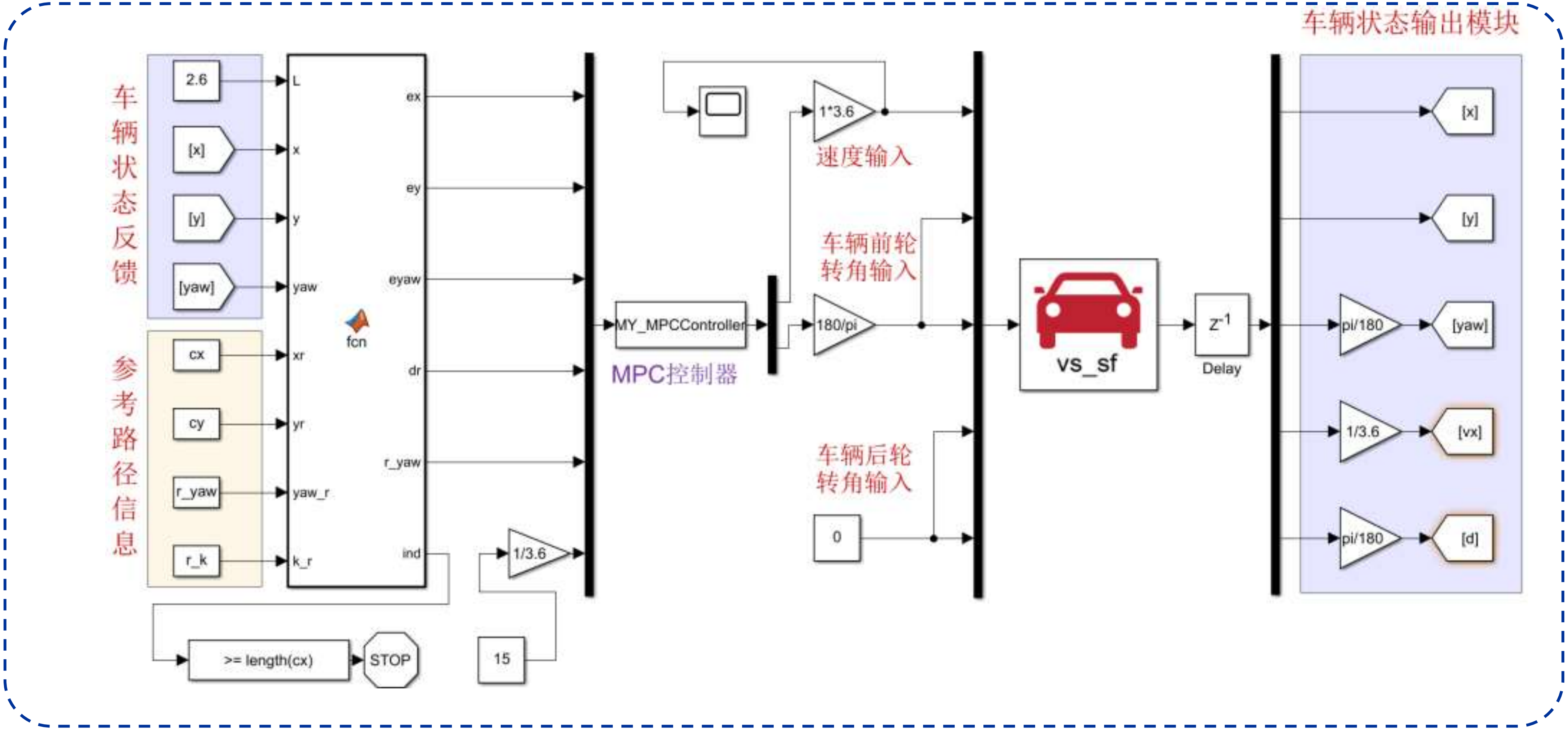
$$J = \sum_{i=1}^{N_p-1}\left\|y(k+i\,|\,k)\right\|_Q^2 + \sum_{i=0}^{N_C-1}\left\|\Delta u(k+i\,|\,k)\right\|_R^2 + \left\|y(k+N_p\,|\,k)\right\|_F^2 + \varepsilon^T\rho\varepsilon$$

4. **约束设计**

5. **优化求解**

$$\min = \frac{1}{2}X^T HX + f^T X \qquad s.t.\begin{cases} AX \le b, \\ Aeq \bullet X = beq, \\ lb \le X \le ub \end{cases}$$

## 基于运动学的MPC路径跟踪控制



# 实践：知识补给—S-function

$\tan\delta = \frac{L}{R} \Rightarrow \delta_r = \arctan\frac{L}{R}$

### 7.2.3 S-function 仿真流程

S-function 包括主函数和 6 个功能子函数，包括 mdlInitializeSizes（初始化）、mdlDerivatives（连续状态微分）、mdlUpdate（离散状态更新）、mdlOutputs（模块输出）、mdlGetTimeOfNextVarHit（计算下次采样时刻）和 mdlTerminate（仿真结束）。

在 S-function 仿真过程中，利用 switch-case 语句，根据不同阶段对应的 flag 值（仿真流程标志向量）来调用 S-function 的不同子函数，以完成对 S-function 模块仿真流程的控制。S-function 仿真流程如图 7-9 所示。

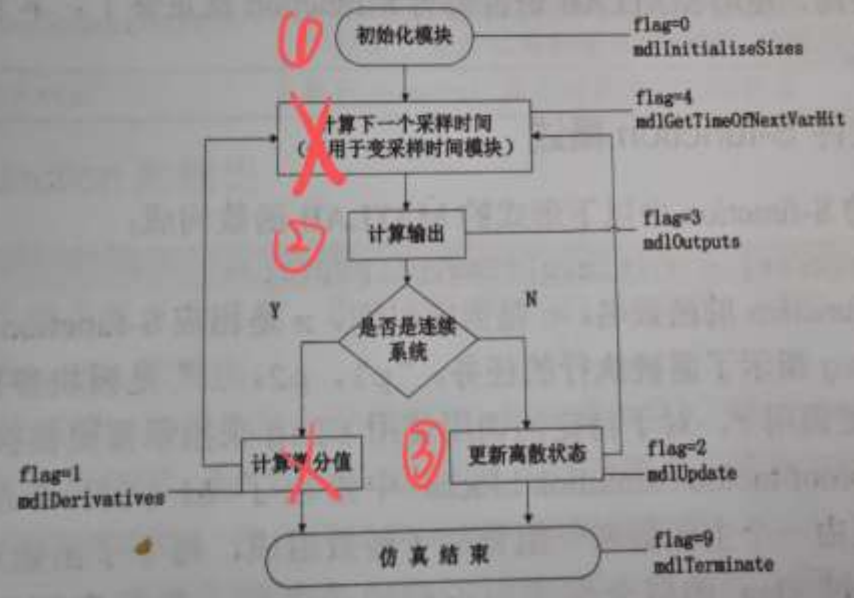



图 7-9 S-function 仿真流程

$\boxed{\text{主函数flag}}$

$\boxed{\delta\ 1}$

$\boxed{\delta\ 2}$

⋮

$\boxed{\delta\ 6}$

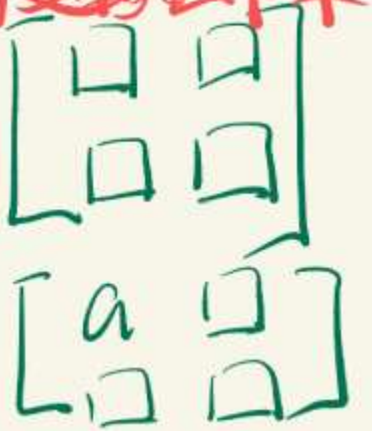
# 实践：知识补给

2、元胞数组：由块矩阵构建矩阵

A_cell = cell(2,2);

A_cell{1,1} = a;

A = cell2mat(A_cell)




3、克罗内克积：

$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 4 & 6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}$

$$A\otimes B=\begin{bmatrix}1\cdot B & 2\cdot B\\ 4\cdot B & 6\cdot B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 6 & 10 & 12\\ 7 & 8 & 14 & 16\\ 20 & 24 & 30 & 36\\ 28 & 32 & 42 & 48\end{bmatrix}$$

**1 Kronecker积的定义**

一般而言，给定任意矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{Y}\in\mathbb{R}^{p\times q}$ ，则矩阵 $\boldsymbol{X}$ 和矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 的Kronecker积为

$$\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}=\begin{pmatrix}x_{11}\boldsymbol{Y} & x_{12}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{1n}\boldsymbol{Y}\\ x_{21}\boldsymbol{Y} & x_{22}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{2n}\boldsymbol{Y}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{m1}\boldsymbol{Y} & x_{m2}\boldsymbol{Y} & \cdots & x_{mn}\boldsymbol{Y}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{(mp)\times(nq)}$$

其中，符号 $\otimes$ 表示Kronecker积。显然，矩阵 $\boldsymbol{X}\otimes\boldsymbol{Y}$ 的大小为 $(mp)\times(nq)$ ，即行数为 $mp$ 、列数为 $nq$ 。当然，这种写法就是我们在线性代数中所学的块状矩阵(block matrix)，在定义中，矩阵 $\boldsymbol{X}$ 的每个元素分别与矩阵 $\boldsymbol{Y}$ 相乘，最终组合成一个大小为 $(mp)\times(nq)$ 的矩阵。

## 实践：知识补给

4、blkdiag(　) 用法

$$\begin{bmatrix} \square & \\ & \square \end{bmatrix}$$

5、eye(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6、zeros(2, 3)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

7、ones(2、3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$