ZHEJIANG UNIVERSITY

ADVANCED HONOR CLASS OF ENGINEERING EDUCATION

MATHEMATICAL MODELING

安全观演

FINAL THESIS

Autors: **查青乔，王伟杰，章皓然，胡子豪，刘心源**

Teacher Advisor：谈之奕

ACEE, 2022

Saturs

Apzmjumu saraksts3**1 背景** **3**

2 情形一：选择位置要求满足（c1），（c2），（c4）。 **3**

2.1 改进无引导情况下，d_n 的上界（目前的上界是 $d_n \leq \sqrt{(n-1)r^2+L^2}$） . 3

2.2 给出有引导情况下，d_n 的上界及相应的每个观众的位置。对给定的 n，求 d_n 的最小值； 6

2.3 改进 d_n 的下界 (目前上界为 $d_n \geq (\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{1}{2})r$） 7

3 情形二：选择位置要求满足（c1），（c2），（c3），（c4）。 **8**

3.1 给出观众寻找符合要求位置的具体做法，分析其复杂度 8

3.2 改进存在可行位置的观众人数 N 的上界（目前上界为 $n \leq (\frac{\pi r}{p})^2+\frac{2\pi L}{p}$） . 9

3.3 给出有引导情况下，存在可行位置观众人数 N 的下界及相应每个观众的位置，对给定的 n，求 d_n 的最小值； 10

3.4 给出无引导情况下，存在可行位置的观众人数 N 的上界。对给定的 n，给出 d_n 的上下界估计。 11

* 正文

1　背景

广场某处正在进行一场露天表演，若干人先后到达附近并选择一个地点观看表演。

观众选择的位置要满足以下要求：

（c1）观众距舞台中心距离至少为 L；

（c2）观众与先到观众距离不小于 r；

（c3）观众不会被先到观众所阻挡，即任一先到观众到该观众与舞台连线的距离不小于 p；

（c4）观众选择符合要求的距舞台最近的位置。

观众选择位置方式：

有引导：指定每个观众的符合要求的位置；

无引导：观众自行选择符合要求的位置。

观众 A_i 位置为 P_i，与舞台中心 O 的距离为观演距离 i ，观众总人数为 n 。

2　情形一：选择位置要求满足（c1），（c2），（c4）。

考虑到实际应用情形，我们可以认为观众间的距离 r 相对于舞台中心距离 L 应该是一个比较小的值（r 相对于 L 较小），至少应该会有 r<L。以下部分结论基于此推出，否则需要分类讨论。

2.1　改进无引导情况下，d_n 的上界（目前的上界是 $d_n \le \sqrt{(n-1)r^2+L^2}$）

原本的上界是 $d_n \le \sqrt{(n-1)r^2+L^2}$，是用了在以 d_n 为半径的圆内不存在其他任何空间，否则不满足新到来的观众选择最近位置的原则。

但是这种做法的缺陷在于忽略了圆 r 的面积重叠，导致推出上界较大（要改进上界当然要求越小越好）

假设：每个观众是一个以 r 为半径的小圆，其位置选择要求是观众（即小圆 r 的圆心）不能在其他任何小圆 r、大圆 L 已经覆盖的位置当中，但是小圆 r 之间、小圆 r 与大圆 L 之间可以相交。

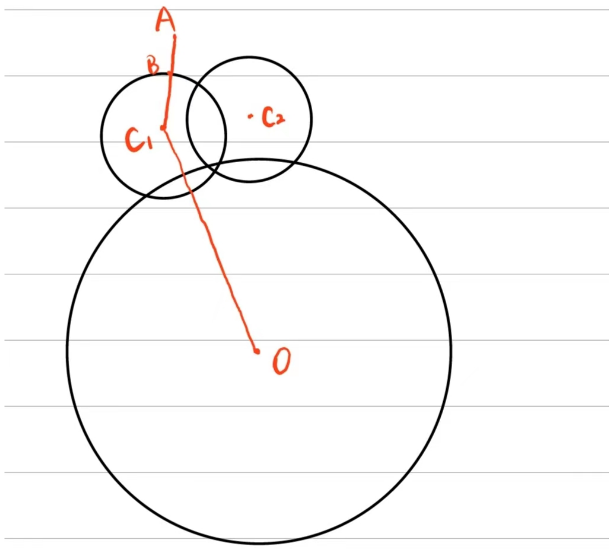
即使是无引导，根据距离最近原则，每个到来的观众一定遵循以下位置选择方式：

1. 若能选择距舞台 L 的位置，则一定选，即圆心在大圆 L 的圆周上；

2. 若无方式 1 中的位置，则**在所有两小圆 r 的交点中选择距离舞台最近的**（很容

易证明距舞台最近的位置一定存在于某两小圆 r 的交点上，证明如下）。

证明：如图，对于一个不在圆 C 1 上的点 A，连结 AC 1 交圆 C 1 于点 B，有：

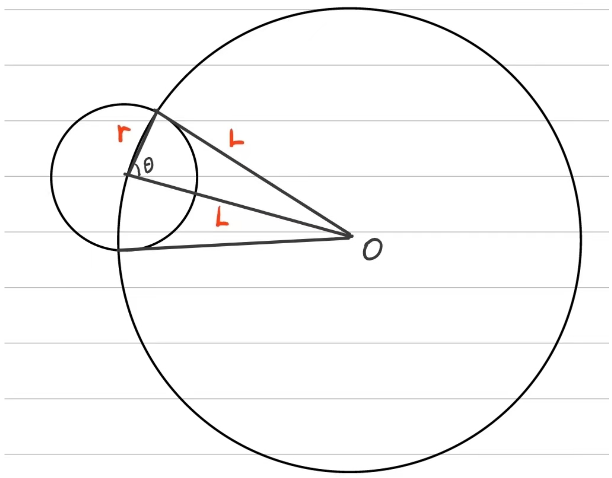


Att. 1: 图 1

$$|OB|^2 = |BC_1|^2+|OC_1|^2-2|BC_1||OC_1|cos\theta > |AC_1|^2+|OC_1|^2-2|AC_1||OC_1|cos\theta = |OA|^2$$

因此在小圆上的 B 点一定比圆外的 A 点更接近舞台中心。对小圆 C 2 同理。因此距舞台最近的位置一定存在于某两小圆 r 的交点上，证毕。

因此，我们考虑新圆 r 和之前所有的小圆 r、大圆 L 之间**重叠的面积**，在两种方式下分别为：

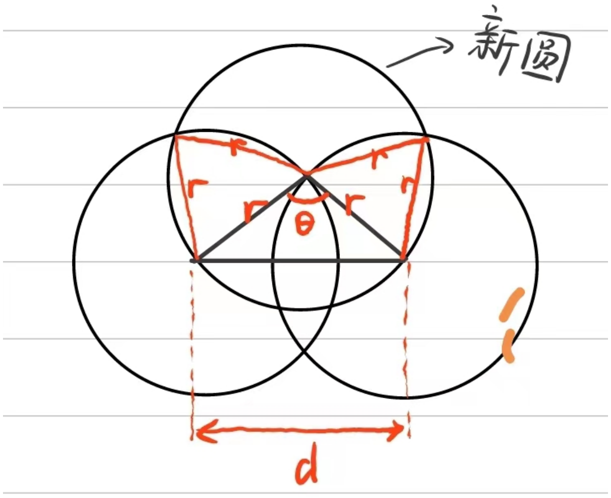


Att. 2: 图 2

$$\theta = arccos(\frac{r}{2L})$$

$$S > \frac{1}{2}r \cdot 2\theta r \text{（忽略了那段很小的圆弧）}$$

$$> \frac{1}{3}\pi r^2 \text{（由于} r < L, \theta > \frac{\pi}{3}\text{）}$$



Att. 3: 图 3

$$S = 2 \times (2 \times \frac{1}{2}r \cdot \frac{\pi}{3}r - \frac{\sqrt{3}}{4}r^2) + \frac{1}{2}r \cdot \theta r$$

由于 $d \ge r$，因此 $\theta \ge \frac{\pi}{3}$，因此：

$$S \ge \frac{2}{3}\pi r^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 + \frac{1}{2}\theta r^2 \ge (\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$$

要进行估计，则两者取小，选择方式 1 中计算得出的重叠面积 $S \ge \frac{1}{2}r \cdot 2\theta r$，这是一定满足的。

因此我们对上界估计的原有算法进行改进，每新加入一个小圆 r，就多减去这么多的重叠面积，故：

$$\pi d_n^2 \le (n-1)\pi r^2 - (n-1) \cdot \frac{1}{2}r \cdot 2\theta r + \pi L^2 \le (n-1)\pi r^2 - (n-1) \cdot arccos(\frac{r}{2L})r^2 + \pi L^2$$

$$\Rightarrow d_n \le \sqrt{(n-1)(1 - \frac{1}{\pi}arccos(\frac{r}{2L}))r^2 + L^2}$$

2.2 给出有引导情况下，d_n 的上界及相应的每个观众的位置。对给定的 n ，求 d_n 的最小值；

上面我们已经得出了无引导情况的上界，有引导的上界小于等于无引导的上界。他们之间的差别主要在于第一圈（最开始的几个人）是否紧凑。

有引导情况下的站位策略（每个人的位置）：

1. 第一个人任意站在距舞台 L 的某位置

2. 第 n 个人站在第 n-1 个人的小圆 r 和大圆 L 的圆周的交界点

3. 直到已经找不到距离舞台 L 的位置，在所有某两小圆 r 的交点中选择距离舞台最近的

因此，有引导情况下能比无引导情况下重叠更多，经计算，可取第二小问中重叠方式 2 的面积 $S \geq (\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2$，故：

$$\pi d_n^2 \leq (n-1)\pi r^2 - (n-1) \cdot (\frac{5}{6}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2})r^2 + \pi L^2$$

$$\Rightarrow d_n \leq \sqrt{(n-1)(\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2 + L^2}$$

下面求给定 n 后 d_n 的最小值：

d_n 最小值，指在特定的 L 和 r 下，对于确定的 n，d_n 能取到的最小值。此时站在距离舞台 L 位置的人能恰好把大圆 L 分完而不留一点空隙，即最后一个距舞台位置为 L 的人恰好也处在第 1 个人的小圆圆周上。如图（接下页）：

这种情况需要满足 $2\theta = 2arcsin(\frac{\frac{r}{2}}{L}) = 2arcsin(\frac{r}{2L})$ 能够被 2π 整除，一圈恰好能容纳 $k = \frac{2\pi}{2arcsin(\frac{r}{2L})}$ 个人。判断第 i 个人的距离 d_n 时可以只考虑他处于第几圈。

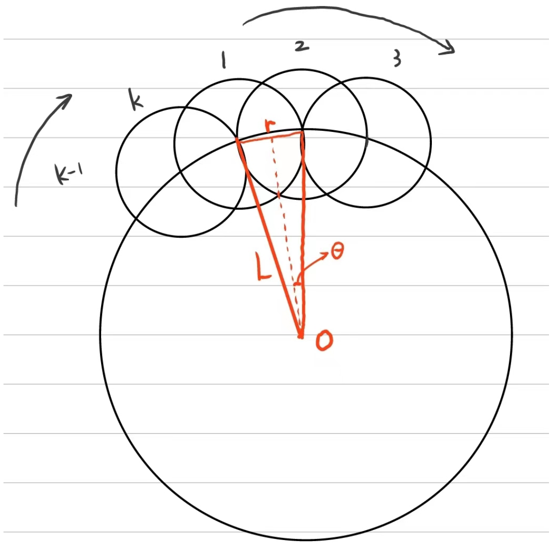
设第 i 圈的人的观演距离均为 R_i，则：

1. $R_1 = L$

2. $R_i = R_{i-1}cos\theta + \sqrt{r^2 - (R_{i-1}sin\theta)^2}$

得到第 n 个人的观演距离

$$d_n = R_i = R_{[\frac{n}{k}]} = R_{[\frac{n \cdot arcsin(\frac{r}{2L})}{\pi}]}$$



Att. 4: 图 4

2.3 改进 d_n 的下界 (目前上界为 $d_n \geq (\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2})r$)

（注：有引导的上界不大于无引导的上界。由于有引导的位置选择是一种特殊的无引导位置选择，只需考虑无引导情形下的下界。有引导的下界需针对特定的算法。）

原本的下界是 $d_n \geq (\frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2})r$，是由 $d_n > d_{n-1}$ 推出的，即 $\pi(d_n + \frac{r}{2})^2 \geq n\pi(\frac{r}{2})^2$。

但是这样解忽略了观众距离舞台至少为 L 这一条件，导致在这种解法中观众可以很靠近舞台，因此下界偏小（改进下界当然要求越大越好）

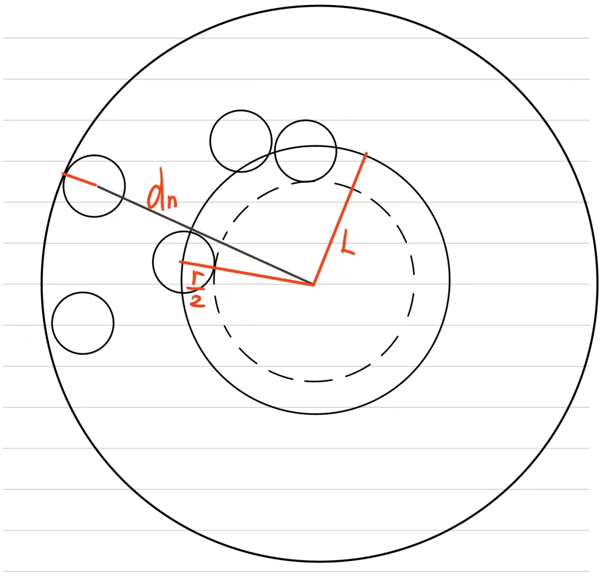
假设：每个观众是一个以 $\frac{r}{2}$ 为半径的小圆，其位置选择要求是不能与其他任何小圆、大圆 L 相交，只能相切（由于距舞台最近原则，不能相离，只能相切）

如图（接下页）：

$$\pi(d_n + \frac{r}{2})^2 - \pi(L - \frac{r}{2})^2 \geq n\pi(\frac{r}{2})^2$$

$$\Rightarrow d_n \geq \sqrt{\frac{nr^2}{4} + (L - \frac{r}{2})^2} - \frac{r}{2}$$

得到新的下界（比原来的下界要大）。



Att. 5: 图 5

3 情形二：选择位置要求满足（c1），（c2），（c3），（c4）。

3.1 给出观众寻找符合要求位置的具体做法，分析其复杂度

可以使用二分查找对每个观众寻找符合要求的位置，用 low 和 high 分别代表我们计算出的下界和上界，判断 mid 位置是否满足条件。

设第 i 个观众到舞台中心的距离为 d[i]，那么在二分过程中需要比较的点为 $di = (low + high)/2$，需要判断它是否满足以下要求：

（c1）$di >= L$；

（c2）对于每个已选择位置的观众 j，$|di - d[j]| >= r$；

（c3）对于每个已选择位置的观众 j，$di * dj/(|di| * |dj|) = cos(i, j), di * sin(i, j) >=$ 。

如果 di 满足以上条件，则表示最近的可能的位置可能在 low 到 di 之间，high 更新为 di；否则表示最近的可能的位置在 di 到 high 之间，low 更新为 di。

因此，一次二分查找的复杂度为 O(logn)，总的复杂度为 O(nlogn)，即对于每个观众都进行了一次二分查找。

注：判断 (c2) 和 (c3) 的时间复杂度为 O(n)，但可以用数据结构优化，比如平面树或 K-D Tree，复杂度为 O(log2n)。

3.2 改进存在可行位置的观众人数 N 的上界（目前上界为 $n \leq (\frac{\pi r}{p})^2 + \frac{2\pi L}{p}$）

$$d_n \leq \sqrt{(n-1)(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2 + L^2}$$

d_{min} 为 d_i 与 d_{i+1} 中较小的那一个，而在实际中 d_i 肯定存在复用的问题。所以最坏情况是每个 d_i d_{i+1}，但这是不可能的。故 $sin\angle P_iOP_{i+1} \geq \ \rho\frac{1}{d_{min}}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} sin\angle P_iOP_j \geq \rho(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_n}-\frac{1}{d_1})$$

其中 $d_n \leq \sqrt{(n-1)(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2 + L^2}$ $d_1 = L$

$$2\pi \geq \rho\ \sum_{i=1}^{n} d_i + \ \frac{1}{\sqrt{(n-1)(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2 + L^2}} - \frac{1}{L}\ \rho$$

将 $\rho\ \sum_{i=1}^{n} d_i$ 化为 $\rho\ \sum_{i=1}^{n-1} d_i$+$d_n$，方便后面计算

$$2\pi = \rho\sum_{i=1}^{\infty} d_i + \ \frac{2}{\sqrt{(n-1)(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2 + L^2}} - \frac{1}{L}\ \rho$$

令 A=$(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2$，用积分的形式放缩，上式可化成：

$$2\pi \geq \frac{2\rho}{A}(\sqrt{(n-1)A+L^2}-L) + \rho\ \frac{2}{\sqrt{(n-1)A+L^2)}} - \frac{1}{L}\ \rho$$

考虑边界情况设 $\sqrt{(n-1)A+L^2} = x$，则有

$$2\pi + \frac{2\rho L}{A} + \frac{\rho}{L} = \frac{2\rho}{A}x + \frac{2\rho}{x}$$

令 $C = 2\pi + \frac{2\rho L}{A} + \frac{\rho}{L} = \frac{2\rho}{A}x + \frac{2\rho}{x}$ 则可得

$$\frac{2\rho}{A}x^2 - Cx + 2A = 0$$

$$\Delta = 4\pi^2 + \frac{4\rho^2L^2}{A^2} + \frac{\rho^2}{L^2} + \frac{8\rho\pi L}{A} + \frac{4\pi\rho}{L} + \frac{4\rho^2}{A} - \frac{16\rho^2}{A}$$

由于 $\angle P_iOP_j$ 为锐角，故 $\rho < L$，故有 $\frac{8\rho\pi L}{A}+\frac{4\rho^2}{A}>\frac{16\rho^2}{A}$，$\Delta>0$

$$\Rightarrow x=\frac{-4C\pm\sqrt{C^2-\frac{16\rho^2}{A}}}{\frac{4\rho}{A}}$$

且由于 C>0，x 有一根为负根，故 $x=\frac{-4C+\sqrt{C^2-\frac{16\rho^2}{A}}}{\frac{4\rho}{A}}$

将 x、C、A 代入最终可得

$$n=\frac{r^2(\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi})(\sqrt{(2\pi+\frac{2\rho L}{A}+\frac{\rho}{L})^2-\frac{16\rho^2}{(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2}}-4(2\pi+\frac{2\rho L}{A}+\frac{\rho}{L}))^2}{32\rho^2}-\frac{L^2}{(\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2\pi})r^2}+1$$

3.3 给出有引导情况下，存在可行位置观众人数 N 的下界及相应每个观众的位置，对给定的 n，求 d_n 的最小值；

有引导，满足（c1）（c2）（c3）（c4）时，可行人数下界的求解：n 名观众位于圆 O（半径为 L）的内接正 n 边形顶点，有：

$$|P_iP_{i+1}|=2Lsin\frac{\theta}{2}=2Lsin\frac{\pi}{n}\geq r$$

$$Lsin\theta=Lsin\frac{2\pi}{n}\geq\rho$$

解得下界为：

$$max\left\{\frac{\pi}{\pi-arcsin\frac{r}{2L}},\frac{2\pi}{\pi-arcsin\frac{\rho}{L}}\right\}$$

对给定的 n，求 d_n 的最小值（有引导）1、$\pi(d_n+\frac{r}{2})^2\geq n\pi(\frac{r}{2})^2$

$$\Rightarrow d_n\geq(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{1}{2})r$$

2、$d_nsin\frac{2\pi}{n}\geq\rho$ ，$d_nsin\geq\frac{\rho}{sin\frac{2\pi}{n}}$

$$\Rightarrow (d_n)_{min}=max\left\{(\frac{\sqrt{n}}{2}-\frac{1}{2})r,\frac{\rho}{sin\frac{2\pi}{n}}\right\}$$

3.4 给出无引导情况下，存在可行位置的观众人数 N 的上界。对给定的 n ，给出 d_n 的上下界估计。

$$d_i sin\angle P_iOP_j \leq \rho \ \ (d_i \leq d_j)$$

$$sin\angle P_iOP_j \leq \frac{\rho}{d_i}$$

所以利用放缩 $sin\angle P_iOP_j \leq \frac{\rho}{2}(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_j}) \leq \frac{\rho}{d_j}$ 以上是发生遮挡的充分条件，又有：

$$2\pi = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \sum_{i=1}^{n} sin\angle P_iOP_{i+1} \geq \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_{i+1}}) = \rho\sum_{i=1}^{n}(\frac{1}{d_i})$$

由于 $d_n \leq \sqrt{(n-1)(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})r^2 + L^2}$

$$2\pi \geq \rho\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{d_i} \geq \rho\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(n-1)(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})r^2 + L^2}}$$

$$\geq \rho\sum_{i=1}^{n}\int_{i}^{i+1}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})r^2 + L^2}}dx$$

$$= \rho\int_{1}^{n+1}\frac{1}{\sqrt{(x-1)(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})r^2 + L^2}}dx$$

$$= \frac{2\rho}{(\pi - arcsin\frac{r}{2L})r^2}(\sqrt{(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})nr^2 + L^2} - L)$$

解得：

$$n \leq \frac{2\rho}{(\pi - arcsin\frac{r}{2L})r^2}(\sqrt{(\frac{\pi}{\pi - arcsin\frac{r}{2L}})nr^2 + L^2} - L)$$