一.解:

(1). 设面试到第k名学生.

$$f_k=\frac{k}{n}\left(1-\frac{k-1}{n-1}\right)=\frac{k(n-k)}{n(n-1)}$$

$$g_k=\frac{k}{n}\left(\frac{k-1}{n-1}\right)=\frac{k(k-1)}{n(n-1)}$$

(2). ~~V_k = 若录取k名之后的第一名. $P_1=\sum_{m=k+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n-m}{n}\cdot\frac{k}{m-1}=\frac{k}{n}\cdot\sum_{m=k+1}^{n}$~~

若录取k名之后综合第一名. $P_1=\sum_{m=k+1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{n-m}{n}\cdot\frac{k}{m-1}=\frac{k}{n^2}\cdot\sum_{m=k+1}^{n}\frac{n-m}{m-1}$

若…… —— 二名. $P_2=\frac{k}{n^2}\sum_{m=k+1}^{n}\frac{n-m}{m-2}$

$V_k=\max\{P_1,P_2\}$

则 $\Delta V_k=\frac{2k-2n}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\cdot\sum_{m=k}^{n-1}\frac{1}{m}$

(3) 由(2)知 k名后用策略 $\Delta V_k=\frac{2k-2n}{n^2}+\frac{n-1}{n^2}\sum_{m=k}^{n-1}\frac{1}{m}$.

令 $\Delta V_k-\Delta V_{k-1}=\frac{1}{n^2}\cdot\left(2-\frac{n-1}{k-1}\right)$ 一类二阶导

∴ $\Delta V_k-\Delta V_{k-1}$ 近似于0时 k 的值即为最优解.

∴ $k=\left[\frac{n+1}{2}\right]$ 时 ΔV_k 最小.

二.解.

(1) $$\begin{cases} m_1+m_2+\cdots+m_r=n-1 \\ m_l\geq 1 \quad (l\in[1,r]) \\ m_l\leq\left\lfloor\frac{n-\sum_{i=1}^{l-1}m_i}{2}\right\rfloor \end{cases}$$

(2) $m_1+\cdots+m_r=3$

有两种情况：$m_1+m_2+m_3=1+1+1=3$ $m_1+m_2=2+1=3$

① 队1水平为 v_1

$$P_1=\sum_{j=2}^{4}\frac{v_1}{v_1+v_j}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\left(\frac{v_1}{v_1+v_j}\right)\left(\frac{v_1}{v_1+v_k}\right)+\frac{1}{6}\frac{v_1}{v_1+v_t}$$

j与k不是同一支 ……… 淘汰急一支

② $P_2=\frac{v_1}{v_1+v_j}\cdot\frac{v_1}{v_1+v_k}$

j与k不是同支

~~假设其他队伍水平相同~~ 设其他队伍水平均值为 v.

$P_2-P_1=\frac{v_1v(v_1-v)}{6(v_1+v)^3}>0$ ~~若队1水平高则~~

$\therefore P_2$ 大于 P_1

采用第二种赛制获胜概率最大，第一种最小.

(3) $f_1=1-\frac{2kv_1}{n(v+v_1)}$

$$f_2=\left(\frac{2j}{n}\cdot\frac{v}{v_1+v}\cdot\frac{n-2j}{n}\right)\left(\frac{2(k-j)}{n-j}\cdot\frac{v}{v_1+v}+\frac{n+j-2k}{n-j}\right)$$

$$f_1-f_2=\frac{j}{n(n-j)}(k-j)\cdot\frac{2v_1}{v_1+v}\cdot\frac{v-v_1}{v_1+v} \quad \therefore f_1>f_2$$

(4) 证明：~~$n=2^s+k$~~ $n\in[2^s+1,\ 2^{s+1}-1]$. 设 $k=n-2^s$

由(3)知 胜率大，轮数一定少.

$\therefore$ 首次比赛队伍数量不超过 $[\frac{n}{2}]$

$\therefore r\geq s+1$ $P_0=\left(\frac{v}{v_1+v}\right)^s\left(1-\frac{2k}{2^s+k}\cdot\frac{v_1}{v_1+v}\right)$

~~其余~~只有某次比赛时使得队伍数恰好为 2^t 才可能在 $s+1$ 轮内结束

此时 $p=\left(\frac{v}{v_1+v}\right)^{s-t}\left(1-\frac{2k}{2^t+k}\cdot\frac{v}{v_1+v}\right)\cdot\left(\frac{v}{v_1+v}\right)^t$

$\therefore p-p_0>0$ 得证.