一. 解:

(1). 由题, 设伪币质量为 W_0 且指令集中有 n 个元素 $\{a_1, \cdots, a_n\}$.

$$\begin{cases} \dfrac{W\cdot N - M_1}{W - W_0} = n \\ \dfrac{W\left(\sum_{i=1}^{N} p^i\right) - M_2}{W - W_0} = \sum_{i=1}^{n} a_i \end{cases}$$

即: $\dfrac{W\left(\sum_{i=1}^{N} p^i\right) - M_2}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \dfrac{W\cdot N - M_1}{n}$.

(2). $\sum_{i=1}^{N} p^i = \dfrac{p(1-p^N)}{1-p} \quad (p \neq 1)$

即 $W\cdot p\cdot\dfrac{(1-p^N)}{1-p} - M_2 = \dfrac{(WN - M_1)\cdot\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \quad (p \neq 1)$

假设伪币比真币轻.

则左右两边均小于 0.

$\therefore$ ~~$W\cdot p$~~ $W\cdot p - W\cdot p^{N+1} - M_2(1-p) > 0$

$f(1) = 0 \quad f'(p) = W - W\cdot(N+1)\cdot p^N + M_2$

$f'(1) = -WN + M_2 > 0 \quad \therefore \quad M_1 < WN < M_2$.

$\therefore$ P 在 1 右侧有一零点, 记为 P_0. $P \in [1, P_0]$ 时方程有解.

$\therefore$ $P_0 < 2$ 时, 取 2 方程也无解.

二. 解:

(1). 每次第一次将 $2^N - 1$ 枚分为 $2^{N-1}-1$, $2^{N-1}-1$, 1 三堆硬币, 将前两堆放在电子秤上称, 若相同则第三堆为伪币; 若不同, 哪边轻则伪币在哪边.

重复第一次的操作, 最多 N 次得到结果

(2). 假设 $\vec{x}$ 为 2^N-1 的列向量，其中 $x_i=1$ 代表第 i 枚为伪币，$x_i=0$ 代表真币。$\vec{b}$ 为全 1 的列向量，ϕ 为 $N\times 2^N-1$ 矩阵，第 i 行代表在第 i 次称量时的情况，第 i 行第 j 列代表第 j 枚硬币在第 i 次称量时是否在较轻的那一边，称量得到结果后的行向量全为 1，x_i 的值只能为 0 或 1。

例，7 枚硬币，第一枚为伪币。

$$\begin{pmatrix} 1&1&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0&0 \\ \vdots \\ 1&1&1&1&1&1&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(3). ϕ 为 $m\times n$ 矩阵，若方程组在 Σ_k 有解，则 x 至少 $n-k$ 个分量为 0

令 $n-k$ 分量为 0，则得到 $m\times k$ 的线性方程组。

即证明 $m\times k$ 的方程组无解。

∵ 列向量线性无关

∴ $m>k$ 时，$r(A)=k<m$ ∴ 无解。

$m=k$ 时，解唯一。任取 $n-k$ 个向量对应唯一非零解。