一. 解：

(1). $d=\sum_{i=1}^{k}|\mu_1-\sigma_1^i|+\cdots+\sum_{i=1}^{k}|\mu_n-\sigma_n^i|$

考虑上述n项，若其中一项为 $d_m=\sum_{i=1}^{k}|\mu_m-\sigma_m^i|$

假设σ从小到大排列。

若k为奇数，则 $\mu_m=\sigma_m^{\frac{k+1}{2}}$

若k为偶数，则 $\mu_m=(\sigma_m^{\frac{k}{2}}+\sigma_m^{\frac{k}{2}+1})/2$.

由此得到 $\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_n)$. μ进行排序即为σ'.

无法得到 σ^*. μ的向量中可能存在相等的情况.

(2). μ相当于中位数，β相当于平均数，设 $x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le\mu\le y_1\le\cdots\le y_n$

$A=\sum_{k=1}^{n}(y_k-x_k)$ 若奇数个，则μ=t，若偶数个，$t=\frac{x_n+y_1}{2}$.

$B=\sum_{k=1}^{n}|x_k-\beta|+\sum_{k=1}^{n}|y_k-\beta|$

即证 $2A\ge B$

① 当 $\beta\le\mu$ 时，设 $x_m\le\beta\le x_{m+1}$，$x_{n+1}=\mu$.

$B=\sum_{k=1}^{m}|x_k-\beta|+\sum_{k=m+1}^{n+1}|x_k-\beta|+\sum_{k=1}^{n}|y_k-\beta|=2m\beta-2\sum_{k=1}^{m}x_k=2\sum_{k=1}^{m}(\beta-x_k)\le 2A.$

② 当 $\beta\ge\mu$ 时，同理，设 $y_0=\mu$，$y_m\le\beta\le y_{m+1}$

$B=2\sum_{k=m+1}^{n}|y_k-\beta|\le 2A.$

∴得证.

(3).

二、解：

(1) $S_1 = 5-10+57-45 = 7$

$S_2 = 10-5+10-7 = 8$

$S_3 = 7-10+3-10 = -10$

$S_4 = 45-57+10-3 = -5.$

$\therefore \vec{S} = (7, 8, -10, -5)^T.$

(2) $\cancel{S_1^{(2)} = [0+(57-45)+(5-10)] + [(5-10)+(5-10+10-7)+0] + [(57-45)+(57-45+10-3)] = 31}$

$\cancel{S_2^{(2)} = [10] [(10-5)+(10-7)] + [(10-7+3-10)+(10-7)}$

$S_1^{(2)} = \overset{AAA}{0} + \overset{AAB}{(-5)} + \overset{AAD}{12} + \overset{ABA}{0} + \overset{ABB}{(-5)} + \overset{ABC}{(-2)} + \overset{ADA}{0} + \overset{ADC}{19} + \overset{ADD}{12} = 31$

$S_2^{(2)} = 5+0+17+5+3+0+3+(-4) = 29$

$S_3^{(2)} = -37 \qquad S_4^{(2)} = -23.$

$\therefore \vec{S}^{(2)} = (31, 29, -37, -23)^T.$

(3) $\vec{S}^{(2)} = M \cdot \vec{S} + 1\vec{S}.$

M^2中的(m_{ij})代入 i队与 j队能有几场“二级比赛”，即有几个对手同时与它们进行过“一级比赛”

(4) $\vec{S}^{(r)} = M \cdot \vec{S}^{(r-1)} + 1 \cdot \vec{S}$

第r级比赛的分差为 $r-1$阶比赛时的差值$+1$次单独差值.

即 $\vec{S}^{(r)} = M[M \cdot \vec{S}^{(r-2)} + 1 \cdot \vec{S}] + 1 \cdot \vec{S}$

$= \cdots = M^{(r-1)}\vec{S} + 1 \cdot (M^0 + \cdots + M^{r-2})\vec{S}$