一. 浮点数表示与方程求解 Ch0.1

1. | S (1) | Exponent (8) | Fraction (23) |
|---|---|---|

符号 $exp-127$ 去掉开头的1剩下的部分

例：1 10000000 10010…0 负数 $exp-127=1$

$11.001=3.125$

2. 截断误差：Truncation Error 舍入误差：Roundoff Error (four-digit rounding arithmetic 四位舍入)

绝对误差：$|P-P^*|$ 相对误差：$|P-P^*|/|P|$ (P为精确值)

绝对误差限 $=\frac{1}{2}\times10^{n-m}$ $0.a_1a_2\cdots a_n\times10^n$ 为原数 m为有效数字位

3. 收敛速度：$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于0，(通常 $\beta_n=\frac{1}{n^p}$)，$\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ 收敛于 α，若 $|\alpha_n-\alpha|\le K|\beta_n|$，则收敛速度为 $O(\beta_n)$

例：$\lim\limits_{h\to0}\frac{\sin h}{h}=1$. $\left|\frac{\sin h}{h}-1\right|=\left|\frac{h-\frac{h^3}{6}-h+O(h^5)}{h}\right|=\left|-\frac{h^2}{6}+O(h^4)\right|\le O(h^2)$

例：$x^*=1.333$，前三位为有效数字 绝对误差限 $\varepsilon=\frac{1}{2}\times0.01=\frac{1}{2}\times10^{-2}$

例：真值 $x^*=3.141592$，$x=3.141$，有效数字位数：$|x^*-x|<0.005=0.5\times10^{1-3}$ ∴n.3为m. $\therefore m=3$

二. 一元方程求解 Ch2

1. 二分法 误差：$|P_n-P|\le\frac{b-a}{2^n}$

例：误差不超过 10^{-5}，区间 (2,4)，二分次数最少为多少。 $\frac{1}{2^{k+1}}(b-a)\le10^{-5}$ ∴ $k=\lceil16.6\rceil=17$

2. 不动点法(简单迭代法)

$x=\varphi(x)$ 不动点方法 $x^*=\varphi(x^*)$ 不动点

$\left.\begin{array}{l}\varphi(x)\in[a,b]\\ 且\ \varphi'(x)\le L<1\end{array}\right\}$ 不动点唯一且收敛. 误差：$\begin{cases}\frac{L}{1-L}|x_k-x_{k+1}| & 事后\\ \frac{L^k}{1-L}|x_1-x_0| & 事先\end{cases}$

不动点收敛速度排序：首先保证 $\varphi'(x)<1$. 将真值分别代入原式、1阶导…，求出收敛阶.

高阶收敛：$\varphi(x_k)=0$. $\varphi'(x_k)=0\cdots\varphi^{(m)}(x_k)\ne0$，则为m阶收敛.

3. 牛顿迭代法(切线法)

$$\boxed{x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$$

若 $f(x)$ 有2阶导则至少平方收敛. $\forall x_0$，$f(x_0)\cdot f''(x_0)>0$，则收敛.

割线法(弦截法)：将 $f'(x_k)$ 换为 $\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$

牛顿下山法：$\begin{cases}\hat{x}_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\\ x_{k+1}=\lambda\hat{x}_{k+1}+(1-\lambda)x_k\end{cases}$ λ：下山因子 使 $|f(x_{k+1})|<|f(x_k)|$ 下山成功

例：求 $\sqrt[3]{6}$ 的迭代公式.
令 $x=\sqrt[3]{6}$ 则 $f(x)=x^3-6=0$. $x\in[1,2]$
$f'(x)=3x^2>0$，在 [1,2] 有解.
$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k^3-6}{3x_k^2}$
取 $x_0=2$，$f(x_0)f''(x_0)=2\cdot12>0$ ∴收敛

~~收敛速度排序~~

4. 秦九韶算法(Horner算法)

$\begin{cases}T_n=a_n\\ T_k=xT_{k+1}+a_k\\ P(x)=T_0\end{cases}$

eg. $P_4(x)=3x^4+4x^3-2x^2+3x+1$.

$T_4=3$
$T_3=2\cdot T_4+4=10$
$T_2=2\cdot T_3-2=18$
$T_1=2\cdot T_2+3=39$
$T_0=2\cdot T_1+1=79$

5. 迭代法的误差分析.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|P_{n+1}-P|}{|P_n-P|^\alpha}=\lambda$ α为收敛阶数.

6. 快速迭代

$\Delta P_n=P_{n+1}-P_n\Rightarrow\Delta^kP_n=\Delta(\Delta^{k-1}P_n)$, $k\ge2$.

三. 矩阵求解初步 Ch6

1. 高斯消去法：正常代消元得到上三角矩阵

主元绝对值尽可能大. 即：

$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{matrix}$ a_{11}最大，$\begin{matrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&a_{32}&a_{33}\end{matrix}$ a_{22}最大(在这一列中)

2. 矩阵LU分解.

$\begin{cases}\text{Doolittle 分解：L 斜对角线均为1.}\\ \text{Crout 分解：U 斜对角线均为1.}\end{cases}$

Doolittle： U第一行为：$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots$

L第一列为：$1, a_{21}/a_{11}, a_{31}/a_{11} \cdots$

先U后L.

$U_{22}=a_{22}-L_{21}U_{12}$ [原值减去上方乘左方]

$L_{32}=\dfrac{a_{32}-L_{31}U_{12}}{U_{22}}$ [原值减去(L同行前面求过的值乘对应U阵同列前面求过的值)，最后除以U阵主元]

$U_{33}=a_{33}-l_{31}U_{13}-l_{32}U_{23}$ $\quad L_{43}=\dfrac{a_{43}-L_{41}U_{13}-L_{42}U_{23}}{U_{33}}$

即：$u_{1j}=a_{1j}$ $\quad l_{i1}=a_{i1}/u_{11}$

对 $k=2,\cdots,n$ $\quad u_{kj}=a_{kj}-\sum_{s=1}^{k-1} l_{ks}\cdot u_{sj}\ (j=k,\cdots,n)$

$l_{ik}=(a_{ik}-\sum_{s=1}^{k-1} l_{is}\cdot u_{sk})/u_{kk}\ (i=k+1,\cdots,n,\ k\neq n)$

求 $Ax=b$ 时，先对A进行分解：$A=LU$，然后 $Ly=b$，$Ux=y$，解出x.

带主元的三角分解：每次算新的L和U时候，先预计算一次L列的值，哪个大就把它放在第一行.

同时可以得到置换矩阵P. 若第k次计算用到原第t行，那么P的(k,t)就为1.

四. 特殊性质的系数矩阵分解：对称正定阵和对角占优的三对角矩阵 Ch 6.

1. Cholesky分解、平方根法.

对称正定矩阵：对称：$A^T=A$、

正定：对任意非零向量x，$x^TAx>0$.

存在下三角矩阵L使得 $A=LL^T$

$$\begin{cases} l_{jj}=(a_{jj}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{jk}^2)^{\frac{1}{2}} \\ l_{ij}=(a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}l_{jk})/l_{jj}\ (i=j+1,\cdots,n) \end{cases}$$

改进(不开方)：$A=LDL^T$

↓

斜对角都为1.

$$\begin{cases} t_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} t_{ik}l_{jk}, & j=1,2,\cdots,i-1 \\ l_{ij}=\dfrac{t_{ij}}{d_j}, & j=1,2,\cdots,i-1 \\ d_i=a_{ii}-\sum_{k=1}^{i-1} t_{ik}l_{ik} \end{cases}$$

2. 严格对角占优.

$|a_{ii}|>\sum_{j=1, j\neq i}^{n}|a_{ij}|$ 对 $i=1,2,\cdots,n$ 都成立时，A严格对角占优.

可以进行高斯消元而不需要行交换.

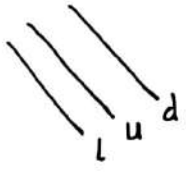
三对角矩阵可以用追赶法求解：

$$A=\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ & & & & a_n & b_n \end{bmatrix} \quad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad b=\begin{bmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$$

满足：$\begin{cases} a_i\neq 0,\ c_i\neq 0. \\ |b_1|>|c_1|,\ |b_i|\geq|a_i|+|c_i|,\ |b_n|>|a_n| \end{cases}$

分解后：L、U.

$$\begin{cases} d_i=c_i \\ u_1=b_1 \\ l_i=a_i/u_{i-1} \\ u_i=b_i-l_ic_{i-1} \end{cases}$$



五.矩阵迭代解法 Ch7

1. 向量和矩阵范数.(以向量为自变量,非负实数为函数值的函数)

向量: $\|X\|_1=\sum_{i=1}^{n}|X_i|$ $\|X\|_2=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}x_i^2}$ $\|X\|_\infty=\max_{1\le i\le n}|X_i|$

矩阵: $\|A\|_1=\max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}|$ $\|A\|_\infty=\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$ $\|A\|_2=\sqrt{\max\lambda(A^TA)}$ $\|A\|_F=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}$

列范数:每列之和的最大值 行范数 谱范数: A^TA的最大特征值 F范数.(Euclidean范数)

范数的条件: (i) $\|A\|\ge 0$ (ii) $\|A\|=0$ 当且仅当 A 为零矩阵. (iii) $\|kA\|=|k|\|A\|$

(iv) $\|A+B\|\le\|A\|+\|B\|$ (v) $\|AB\|\le\|A\|\|B\|$

2. 特征值与特征向量: $(A-\lambda E)x=0$

3. Jacobi 迭代法:

$x^{(k+1)}=Bx^{(k)}+d$

$B=-D^{-1}(L+U)$ $d=D^{-1}b$

收敛性判断: 原系数矩阵严格对角占优 或 B的任意一种矩阵范数小于等于1 (充分条件)

B的谱半径小于1 (充要条件)

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}$$

L U D

(各个位置除以本行的对角元素)

4. Gauss-Seidel 迭代法. [上个式子的结果代入下一个]

$x^{(k+1)}=Gx^{(k)}+d$.

等效自变迭代法.

$\boxed{G=-(D+L)^{-1}U \quad d=(D+L)^{-1}\cdot b}$

$x^{(k+1)}=B_1x^{(k+1)}+B_2x^{(k)}+g$

Jacobi中式子为: $x_1^{(k+1)}=0x_1^{(k)}+(-\frac{a_{12}}{a_{11}})x_2^{(k)}-\frac{a_{13}}{a_{11}}x_3^{(k)}-\cdots\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\frac{b_1}{a_{11}}$

$\vdots$

$x_n^{(k+1)}=-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k)}-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k)}-\cdots-0x_n^{(k)}+\frac{b_n}{a_{nn}}$

Gauss-Seidel 为: $x_1^{(k+1)}=0x_1^{(k)}-\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(k)}-\cdots-\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n^{(k)}+\frac{b_1}{a_{11}}$

[将已经算过的值代进去]

$x_2^{(k+1)}=-\frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(k+1)}-0x_2^{(k)}-\cdots-\frac{a_{2n}}{a_{22}}x_n^{(k)}+\frac{b_2}{a_{22}}$

$\vdots$

$x_n^{(k+1)}=-\frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1^{(k+1)}-\frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2^{(k+1)}-\cdots-\cancel{a_{nn}}\,0x_n^{(k)}+\frac{b_n}{a_{nn}}$

收敛性判断: 原系数矩阵严格对角占优或对称正定或B的任一范数小于等于1.(充分)

B的谱半径小于1(充要).

注:若无法直接通过原系数矩阵判断收敛性,就要求迭代矩阵,否则可直接计算.

例: 取 $x_0=(1,0,0)^T$, 用 GS迭代求解 $\begin{cases}9x_1-2x_2+x_3=6\\-x_1+8x_2-x_3=8\\-x_1+x_2+8x_3=-8\end{cases}$, 要求 $\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty\le10^{-3}$.

解: A严格对角占优. 则GS迭代法收敛.

迭代格式: $\begin{cases}x_1^{(k+1)}=\frac{2}{9}x_2^{(k)}-\frac{1}{9}x_3^{(k)}+\frac{2}{3}\\x_2^{(k+1)}=\frac{1}{8}x_1^{(k+1)}+\frac{1}{8}x_3^{(k)}+1\\x_3^{(k+1)}=\frac{1}{8}x_1^{(k+1)}-\frac{1}{8}x_2^{(k+1)}-1\end{cases}$

列表:

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|x^{(k+1)}-x^{(k)}\|_\infty$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

$x^{(k+1)}=Hx^{(k)}+g$ $\|H\|$越小,收敛越快.

误差估计式: $\|x^{(k)}-x^*\|\le\frac{\|H\|}{1-\|H\|}\|x^{(k)}-x^{(k-1)}\|$.

$\|x^{(k)}-x^*\|\le\frac{\|H\|^k}{1-\|H\|}\|x^{(1)}-x^{(0)}\|$

$\because \rho(H)\le\|H\|$ $\therefore \rho(H)<1$ 为收敛的充要条件.

5. SOR 迭代.

收敛必要条件: $0<w<2$.

$\begin{cases}T=(D-wL)^{-1}[(1-w)D+wU]\\d=w(D-wL)^{-1}b\end{cases}$

$x_1^{(k+1)}=(1-w)x_1^{(k)}+w(\text{Jacobi迭代})$

例: $\begin{bmatrix}1&2&1\\2&5&3\\-2&-2&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\7\\-1\end{bmatrix}$

Jacobi: $\hat{x}_1^{(k+1)}=4-2x_2^{(k)}-x_3^{(k)}$

$\hat{x}_2^{(k+1)}=\frac{1}{5}[7-2x_1^{(k)}-3x_3^{(k)}]$

$\hat{x}_3^{(k+1)}=\frac{1}{3}[-1+2x_1^{(k)}+2x_2^{(k)}]$

SOR: $x_1^{(k+1)}=(1-w)x_1^{(k)}+w\hat{x}_1^{(k+1)}$

$x_2^{(k+1)}=(1-w)x_2^{(k)}+w\hat{x}_2^{(k+1)}$

$x_3^{(k+1)}=(1-w)x_3^{(k)}+w\hat{x}_3^{(k+1)}$

六、条件数与特征向量 Ch7 Ch9

1. 对于 $Ax=b$. 若 A、b 有微小变化使 X 的解发生巨大变化, 则为病态方程组.

① 若 b 有扰动误差 δb, A 无扰动

则 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$ 引起的相对误差 ≤ b 的相对误差的 $\|A^{-1}\|\cdot\|A\|$ 倍.

② 若 A 有扰动 δA, b 无扰动.

则 $\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \le \|A^{-1}\|\|A\|\frac{\|\delta A\|}{\|A\|}$ 引起的相对误差 ≤ A 的相对误差的 $\|A^{-1}\|\|A\|$ 倍.

2. 条件数 $cond(A)=\|A\|\cdot\|A^{-1}\|$ 表述解对原始数据的敏感度.

$cond(A)_\infty = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty$

$cond(A)_2 = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2 = \sqrt{\frac{\lambda_{max}(A^TA)}{\lambda_{min}(A^TA)}}$

性质: ① 对任何非奇异矩阵 A, 都有 $cond(A) \ge 1$

$cond(A)=\|A\|\|A^{-1}\| \ge \|A\cdot A^{-1}\| = 1$.

② $cond(\alpha A) = cond(A)$.

③ 若 A 正交矩阵. $cond(A)_2 = 1$

若 A 非奇异, R 正交. $cond(RA)_2 = cond(AR)_2 = cond(A)_2$

若 $cond(A)>>1$ 则为病态.

一般判断矩阵病态的方法:

① A 在三角约化时出现小主元

② A 的行列式绝对值很小

③ 元素之间数量级相差很大, 无规则.

2. 幂法求最大特征值和特征向量.

$A=\begin{bmatrix}2&-1&0\\0&2&-1\\0&-1&2\end{bmatrix}$ $v_0^{(0)}=(0,-0.5,1)^T$, 误差不超过 10^{-3}.

[随机取, 一般 $(1,0,0)$]

解: $v=A\cdot u$ $m=\max(v)$ $u=\frac{v}{m}$.

$m^{(0)}=1$ $u_0^{(0)}=(0,-0.5,1)^T$ $v^{(1)}=A\cdot u^{(0)}$

…… 一直迭代直到 m 上下误差 $\le 10^{-3}$ 则为特征值, 此时 m 对应的 $u=\frac{v}{m}$ 为特征向量

七、插值 Ch3

1. Lagrange 插值

给出 $n+1$ 组数据, 使用唯一确定的不超过 n 次的多项式来近似 — 多项式插值.

令 $g(x)=y_0l_0(x)+y_1l_1(x)+\cdots+y_nl_n(x)$, 其中 $l_i(x)$ 是关于 x 的多项式. [存在且唯一]

$l_i(x_j)=\begin{cases}1, & j=i\\0, & j\ne i\end{cases}$ $\therefore$ $l_i(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$

插值余项: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$, $\omega_{n+1}(x)=(x-x_0)\cdots(x-x_n)$

2. Newton 插值.

$p(x)=c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)(x-x_1)+\cdots+c_n(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$

差商:

x	$f(x)$	一阶差商	二阶差商
x_0	$f(x_0)$		
x_1	$f(x_1)$	$f[x_0,x_1]$	
x_2	$f(x_2)$	$f[x_1,x_2]$	$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$

$P(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)+\cdots+f[x_0,\cdots,x_n](x-x_0)\cdots(x-x_{n-1})$

① 节点顺序不影响大小, $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=f[x_n,x_0,\cdots,x_{n-1}]$

② $f[x_0,x_1,\cdots,x_n]=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$

例: $f(0)=1$, $f(1)=3$, $f(2)=11$, $f'(1)=4$ 求 $P_3(x)$, $R_n(x)$

法1: $P_2(x)=3x^2-x+1$.

则 $P_3(x)-P_2(x)=kx(x-1)(x-2)$

$P_3'(1)=4$ $\therefore k=1$ $P_3(x)=x^3+x+1$.

$R_n(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}x(x-1)^2(x-2)$

法2: 带重节点的差商表:

x	$f(x)$	一阶	二阶	三阶
0	1			
1	3	2		
1	3	4	2	
2	11	8	4	1

3. Hermit 插值. 一拉格朗日的推广

对于 x_0 x_1 形式的: $H_3(x)=f(x_0)\alpha_0(x)+f(x_1)\alpha_1(x)+f'(x_0)\beta_0(x)+f'(x_1)\beta_1(x)$

$f(x)$

$f'(x)$

其中 $\alpha_0(x)=\left(1+2\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$ $\alpha_1(x)=\left(1+2\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$

$\beta_0(x)=(x-x_0)\left(\frac{x-x_1}{x_0-x_1}\right)^2$ $\beta_1(x)=(x-x_1)\left(\frac{x-x_0}{x_1-x_0}\right)^2$ 余项 $R_3(x)=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-x_0)^2(x-x_1)^2$

重节点,差商表解决:

已知 n个点, n位的函数值,……, m阶导数值, 写差商表时就把一个x重复写m+1遍.

一阶导:

x	$f(x)$	
x_0	$f(x_0)$	~~$f(x_0)$~~
x_0	$f(x_0)$	$f'(x_0)$
x_1	$f(x_1)$	
x_1	$f(x_1)$	$f'(x_1)$
x_2	$f(x_2)$	
x_2	$f(x_2)$	$f'(x_2)$

最后构造牛顿插值多项式

4. 三次样条插值.

思想: $[a,b]$内划分n个区间, 每个区间做三次样条插值拟合.

边界条件: ① $S''(x_0)=y_0''$ $S''(x_n)=y_n''$ 当 $y_0''=y_n''=0$ 为自然样条.

② $S'(x_0)=y_0'$ $S'(x_n)=y_n'$

③ $S'(x_0^+)=S'(x_n^-)$ $S''(x_0^+)=S''(x_n^-)$ 适用于周期函数.

*B样条为基底的三次样条插值函数:

$S(x)=\sum_{j=0}^{n+2}c_j\Omega_3\left(\frac{x-x_{j-1}}{h}\right)$, $a\le x\le b$, $h=\frac{b-a}{n}$ 其中 $\Omega_3(x)=\begin{cases}0, & |x|\ge 2\\ \frac{1}{2}|x|^3-x^2+\frac{2}{3}, & |x|\le 1\\ -\frac{1}{6}|x|^3+x^2-2|x|+\frac{4}{3}, & 1<|x|<2\end{cases}$

① 第一种边界条件:

$$\begin{bmatrix}4&1&&\\1&4&1&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&1&4&1\\&&&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6y_1-y_0+\frac{h^2}{6}y_0''\\6y_2\\6y_3\\ \vdots\\6y_{n-2}\\6y_{n-1}-y_n+\frac{h^2}{6}y_n''\end{bmatrix}$$

$C_0=2C_1-C_2+h^2y_0''$

$C_1=y_0-\frac{h^2}{6}y_0''$

$C_{n+1}=y_n-\frac{h^2}{6}y_n''$

$C_{n+2}=2C_{n+1}-C_n+h^2y_n''$

② 第二种边界条件:

$$\begin{bmatrix}4&2&&\\1&4&1&\\&\ddots&\ddots&\ddots\\&&1&4&1\\&&&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6y_0+2hy_0'\\6y_1\\ \vdots\\6y_{n-1}\\6y_n-2hy_n'\end{bmatrix}$$

$C_0=C_2-2hy_0'$

$C_{n+2}=C_n+2hy_n'$

③ 第三种边界条件:

$$\begin{bmatrix}4&1&&&1\\1&4&1&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&1&4&1\\1&&&1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}C_2\\ \vdots\\ C_{n+1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6y_1\\6y_2\\ \vdots\\6y_{n-1}\\6y_0\end{bmatrix}$$

$C_{n+2}=C_2$

$C_1=C_{n+1}$

$C_0=C_n$

三弯矩法:

$S(x)=\frac{M_{i-1}}{6h_i}(x_i-x)^3+\frac{M_i}{6h_i}(x-x_{i-1})^3+\left(\frac{y_{i-1}}{h_i}-\frac{M_{i-1}}{6}h_i\right)(x_i-x)+\left(\frac{y_i}{h_i}-\frac{M_i}{6}h_i\right)(x-x_{i-1})$ $x_{i-1}\le x\le x_i$

$\gamma_iM_{i-1}+2M_i+\alpha_iM_{i+1}=\beta_i$ (三弯矩方程) $\Rightarrow$ $\alpha=\frac{h_{i+1}}{h_i+h_{i+1}}$ $\gamma_i=1-\alpha_i$ $\beta_i=\frac{6}{h_i+h_{i+1}}\left(\frac{y_{i+1}-y_i}{h_{i+1}}-\frac{y_i-y_{i-1}}{h_i}\right)$

① 第一种边界条件: $\alpha_0=0$ $\beta_0=2y_0''$ $\gamma_n=0$ $\beta_n=2y_n''$

$$\begin{bmatrix}2&\alpha_0&&\\\gamma_1&2&\alpha_1&\\&&\ddots&\\&\gamma_{n-1}&2&\alpha_{n-1}\\&&\gamma_n&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_0\\ \vdots\\ M_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_0\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

② 第二种边界条件: $\alpha_0=1$ $\gamma_n=1$ $\beta_0=\frac{6}{h_1}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-y_0'\right)$

$\beta_n=\frac{6}{h_n}\left(y_n'-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)$ 代入①中方程求解.

③ 第三种边界条件: $M_0=M_n$ $\alpha_n=\frac{h_1}{h_1+h_n}$ $\gamma_n=1-\alpha_n$ $\beta_n=\frac{6}{h_1+h_n}\left(\frac{y_1-y_0}{h_1}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_n}\right)$

$$\begin{bmatrix}2&\alpha_1&&&\gamma_1\\\gamma_2&2&\alpha_2&&\\&&\ddots&&\\&&\gamma_{n-1}&2&\alpha_{n-1}\\\alpha_n&&&\gamma_n&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}M_1\\ \vdots\\ M_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}$$

八、函数逼近与曲线拟合

$\begin{cases} \text{逼近：连续函数逼近连续函数} \\ \text{拟合：连续函数拟合离散数据} \end{cases}$

Ch 8

1. 最小二乘法拟合

权函数：每个点加入权重，$w(x)$

$$\sum_{k=0}^{n} w_k (f(x_k) - \varphi(x_k))^2 = \min$$

例：拟合五个数据点，变成二次函数：

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_5 + a_2 x_5^2 = y_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \\ 1 & x_4 & x_4^2 \\ 1 & x_5 & x_5^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_5 \end{bmatrix}$$

无解，$A \cdot x = b$。

但 $(A^TA)x = A^Tb$ 可以近似拟合上述解，求出 A^TA、A^Tb 即可解方程组。

$\mathrm{span}\{1, x, x^2\}$ $\quad (\varphi_0, \varphi_0) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_0 \times \varphi_0 = n$

$(\varphi_0, \varphi_1) = \sum_{i=1}^{n} x_i$

法方程：

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ \vdots & & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (f,\varphi_0) \\ (f,\varphi_1) \\ (f,\varphi_2) \end{bmatrix}$$

例：

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.8	0.7	0.6	0.4	0.1	-0.2

$\varphi_0 = 1 \quad \varphi_1 = x \quad \varphi_2 = x^2$

$(\varphi_0, \varphi_0) = 6 \quad (\varphi_0, \varphi_1) = \sum x_i = 9 \cdots$

$(f, \varphi_0) = \sum f(x) \cdots$

2. 最佳平方逼近

逼近：$f(x) = x^4$ 在 $[-1, 1]$ 上关于权函数 $\rho(x) = 1$ 的二次最佳平方逼近。

$\varphi(x) = a + bx + cx^2$ 则 $\varphi_0(x) = 1 \quad \varphi_1(x) = x, \quad \varphi_2(x) = x^2$ — 基函数

$M = \mathrm{span}\{1, x, x^2\}$，法方程组：

$$\begin{bmatrix} (\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & (\varphi_0,\varphi_2) \\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) \\ (\varphi_2,\varphi_0) & (\varphi_2,\varphi_1) & (\varphi_2,\varphi_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\varphi_0,f) \\ (\varphi_1,f) \\ (\varphi_2,f) \end{bmatrix}$$

定义区间

用内积公式 $(h, g) = \int_{-1}^{1} h(x) g(x) dx$

得

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} \\ 0 \\ \frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

解得 $\begin{cases} a = -\frac{3}{35} \\ b = 0 \\ c = \frac{6}{7} \end{cases}$

3. 正交多项式

$$(\varphi_i(x), \varphi_k(x)) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ A_k, & i = k \end{cases}$$

$A_k = 1$ 称为标准正交函数族

有勒让德多项式和切比雪夫多项式。

4. 勒让德多项式逼近 Legendre

适用条件 $[-1, 1]$ $\quad \rho(x) = 1$

(P_i, P_j) 代替 (φ_i, φ_j) $\quad (P_i, P_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ \frac{2}{2j+1}, & i = j \end{cases}$

$$\begin{cases} P_0 = 1 \\ P_1 = x \\ P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1) \\ P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) \end{cases}$$

$$P_{n+1}(x) = \frac{2n+1}{n+1} x P_n(x) - \frac{n}{n+1} P_{n-1}(x)$$

例：$f(x) = x^4$，$[-1, 1]$，二次逼近。

$$\begin{bmatrix} 2 & & \\ & \frac{2}{3} & \\ & & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_0, f) \\ (P_1, f) \\ (P_2, f) \end{bmatrix}$$

$(P_0, f) = \int_{-1}^{1} P_0 \cdot f(x) dx$ 解得 a, b, c。

$S(t) = aP_0 + bP_1 + cP_2$

对于 $f(x)$，$x \in [a, b]$，可以将 $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} t$ 用 t 代替，$t \in [-1, 1]$。$f(t) = \cdots$ (如 $(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t)^4$)

最后再换回来。

5. 切比雪夫多项式逼近 Chebyshev

$\rho(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 适用条件 $[-1, 1]$

$(T_0, T_0) = \pi$

$(T_1, T_1) = \frac{\pi}{2}$

$(T_2, T_2) = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{cases} T_0 = 1 \\ T_1 = x \\ T_2 = 2x^2 - 1 \\ T_3 = 4x^3 - 3x \end{cases}$$

$(f, T_0) = \int_{-1}^{1} f(x) \cdot T_0 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$

$T_{n+1}(x) = 2x T_n(x) - T_{n-1}(x)$

6. 最佳一致逼近。

7. 最小二乘法拟合 — 正交多项式版本。

$P_{n+1}(x) = (x - a_n) P_n(x) - b_n P_{n-1}(x)$

$a_n = \frac{(xP_n, P_n)}{(P_n, P_n)} \quad b_n = \frac{(P_n, P_n)}{(P_{n-1}, P_{n-1})} \quad \begin{cases} P_0(x) = 1 \\ P_{-1}(x) = 0 \end{cases}$

例：

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-0.1	0.1	0.4	0.9	1.6

二次

$\varphi_0 = 1 \quad (\varphi_0, \varphi_0) = 5$

$(x\varphi_0, \varphi_0) = \sum x = 0$

$\therefore a_1 = \frac{(x\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = 0$

$\varphi_1(x) = x$

$(\varphi_1, \varphi_1) = 10 \quad a_2 = 0$

$(x\varphi_1, \varphi_1) = 0. \quad b_1 = 2$

$(y, \varphi_0) = \sum y$

$(y, \varphi_1) = \sum xy$

$(y, \varphi_2) = \sum (x^2 - 2) y$

$\begin{cases} a_0^* = \frac{(y, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = 0.58 \\ \cdots \end{cases}$

九、数值微分与积分、 Ch4

1. 数值微分：近似求导数.

一阶两点公式：$f'(x_0) \approx f'(x_1) \approx \dfrac{f(x_1)-f(x_0)}{h}$

一阶三点公式：$f'(x_0) \approx \dfrac{-3f(x_0)+4f(x_1)-f(x_2)}{2h}$ $f'(x_1) \approx \dfrac{-f(x_0)+f(x_2)}{2h}$ $f'(x_2) = \dfrac{f(x_0)-4f(x_1)+3f(x_2)}{2h}$

拉格朗日插值公式可推导！

五点：$f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}[f(x_0-2h) - 8f(x_0-h) + 8f(x_0+h) - f(x_0+2h)] + \dfrac{h^4}{30}f^{(5)}(\xi)$

$f'(x_0) = \dfrac{1}{12h}[-25f(x_0) + 48f(x_0+h) - 36f(x_0+2h) + 16f(x_0+3h) - 3f(x_0+4h)] + \dfrac{h^4}{5}f^{(5)}(\xi)$

2. 数值积分基础 — Newton-Cotes公式

梯形法则：$\int_a^b f(x)\,dx = \dfrac{h}{2}[f(x_0)+f(x_1)] - \dfrac{h^3}{12}f''(\xi)$

Cotes公式：$C = \dfrac{b-a}{90}[7, 32, 12, 32, 7]$

Simpson 法则：$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx = \dfrac{h}{3}[f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)] - \dfrac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi)$

代数精度：对不超过m的次数的多项式都成立，(m+1)不成立.

① 拥有奇数 n+1个节点 的求积公式，代数精度至少为n+1

② 具有n+1个节点的求积公式 精度最高为2n+1

例：构造下列公式使精确度最高：

$\int_0^1 f(x)\,dx \approx A_0 f(0) + A_1 f(\frac{2}{3})$.

至少有一次精度，将 $f(x)=1$，$f(x)=x$ 代入

$\begin{cases} \int_0^1 1\,dx = A_0 + A_1 \\ \int_0^1 x\,dx = 0A_0 + \frac{2}{3}A_1 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} A_0 = \frac{1}{4} \\ A_1 = \frac{3}{4} \end{cases}$

验证 $f(x)=x^2$ 成立

$f(x)=x^3$ 不成立

$\therefore$ 精确度为 2.

$h=\dfrac{b-a}{n}$，$x_k = a+kh$，$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)\sum_{k=0}^{n} C_k^{(n)} f_k$ 为 N-K公式.

n=8开始 C_k 会出现负数 ⇒ 不稳定

3. 复化求积公式.

<u>分段插值</u>.

复化中点：$M_n(f) = h\,f(x_{i+\frac{1}{2}}) + \dfrac{h^2(b-a)}{24}f''(\xi)$

复化梯形：$T_n(f) = \dfrac{h}{2}[f(a) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(b)] - \dfrac{(b-a)h^2}{12}f''(\xi)$

复化Simpson：$S_n(f) = \dfrac{h}{3}[f(a) + 2\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}-1} f(x_{2j}) + 4\sum_{j=1}^{\frac{n}{2}} f(x_{2j-1}) + f(b)] - \dfrac{b-a}{180}h^4 f^{(4)}(\xi)$

4. Romberg 算法.

$T_0^{(k)} = \frac{1}{2}T_0^{(k-1)} + \dfrac{b-a}{2^k}$(新点求和)

~~$\begin{cases} T_1 = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] \\ T_{2^k} = \frac{1}{2}T_{2^{k-1}} + \frac{b-a}{2^k}\sum_{i=1}^{2^{k-1}} f[a+(2i-1)\frac{b-a}{2^k}] \end{cases}$~~

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$

① 用递推的梯形公式迭代. $T_0^{(k)}$ 上标为第n次迭代，下标为精度

② 首次迭代完用Romberg公式修正：$T_m^{(k)} = \dfrac{4^m}{4^m-1}T_{m-1}^{(k+1)} - \dfrac{1}{4^m-1}T_{m-1}^{(k)}$

③ 完成修正得到 $T_k^{(0)}$，误差为 $|T_k^{(0)} - T_{k-1}^{(0)}|$.

例：$f(x) = x^{\frac{3}{2}}$ 在 [0,1] 积分.

x	f(x)
0	0
1	1
0.5	0.3535

$T_0^{(0)} = \frac{1}{2}(1-0)$

$T_0^{(1)} = \frac{1}{2}T_0^{(0)} + \frac{1}{2}f(0.5) = 0.4267$

$T_1^{(0)} = \frac{4}{3}T_0^{(1)} - \frac{1}{3}T_0^{(0)} = 0.402$

$|T_1^{(0)} - T_0^{(0)}| = 0.09763$

$T_0^{(0)} \to T_1^{(0)}$, $T_0^{(1)} \to T_1^{(0)}$

Richardson 外推加速：$T_m(h) = I + \delta_1 h^{2(m+1)} + \delta_2 h^{2(m+2)} + \cdots$

5. 自适应求积、adaptive method.

$S(a, \frac{a+b}{2}) = \frac{h}{6}[f(a) + 4f(a+\frac{h}{2}) + f(a+h)]$

$S(a+\frac{h}{2}, b) = \frac{h}{6}[f(a+h) + 4f(a+\frac{3}{2}h) + f(b)]$.

将Simpson重写为 $S(a, \frac{a+b}{2}) + S(\frac{a+b}{2}, b) - \frac{1}{16}(\frac{h^5}{90})f^{(4)}(\xi)$

一个节点：0

2个：$\pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

3个：0, $\pm\sqrt{0.6}$

6. 高斯求积 — 非等距节点 $\int_{-1}^{1} R(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} C_i R(x_i)$

代数精度为2n+1. 转换为[-1,1]区间，用勒让德、求零点. 根的位置即为取值位置

例：n=2，求 $\int_1^{1.5} x^2 \ln x\,dx$

a=1, b=1.5 $\therefore x = \frac{t}{4} + \frac{5}{4}$. 查得 n=2时 $t = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

原式 $= \frac{1}{4}\int_{-1}^{1}(\frac{t}{4}+\frac{5}{4})^2 \ln(\frac{t}{4}+\frac{5}{4})\,dt$.

$= \frac{1}{4}(1.105^2 \ln 1.105 + 1.39^2 \ln 1.39)$

$= 0.192$

十[illegible]. 微分方程数值解法：显示法与隐式法. Runge-Kutta. 稳定性. Ch 5

1. 常微分方程：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x,y) & \text{--方程} \\ y(x_0) = y_0 & \text{--初值} \end{cases}$$

2. 欧拉法：$y_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n)$. —显式Euler公式.

(h为步长). $y_{n+1} = y_n + h f(x_{n+1}, y_{n+1})$ — 隐式 Euler公式.

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})]$ — 梯形Euler公式.

具体解法：
$$\begin{cases} \hat{y}_{n+1} = y_n + h f(x_n, y_n) & \text{预估算式} \\ y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, \hat{y}_{n+1})] & \text{校正算式} \end{cases}$$

3. 精度的阶数：

局部截断误差：$T_{n+1} = \underbrace{y(x_{n+1})}_{\text{泰勒展开}} - \underbrace{y_{n+1}}_{\text{Euler公式}} = \frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3) \Rightarrow T_{n+1} = O(h^2)$ 显式Euler误差.

同理 $T_{n+1} = O(h^2)$ 隐式Euler误差. $= -\frac{h^2}{2} y''(x_n) + O(h^3)$

若 $T_{n+1} = O(h^{p+1})$ 则该算法有p阶精度.

- Euler 显式.隐式 — 一阶
- 梯形Euler. — 二阶.
- Taylor(展开到k次) — k阶.

4. 龙格-库塔法(Runge-Kutta)

通式：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(b_1 k_1 + b_2 k_2 + \cdots + b_s k_s) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + c_2 h, y_n + h a_{21} k_1) \\ k_3 = f(x_n + c_3 h, y_n + h(a_{31} k_1 + a_{32} k_2)) \\ \cdots\cdots \end{cases}$$

一阶：欧拉法 ($b_1 = 1$)

二阶：Euler改：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_{n+1}, y_n + h k_1) \end{cases}$$

中点法：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h k_2 \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_1) \end{cases}$$

Heun方法：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_2) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{2}{3}h, y_n + \frac{2}{3} h k_1) \end{cases}$$

四阶龙格库塔：
$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4) \\ k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} h k_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2} h k_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + h k_3) \end{cases}$$

五阶：Runge-Kutta-Fehlberg 方法. 书(中文)252页.

5. ~~变步长的龙格-库塔~~多步法 P261.

显Euler两步法：$y_{n+1}=y_{n-1}+2hf(x_n,y_n)$

Adams-Bashforth 两步显式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}(3f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1}))$

A — B 三步显：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(23f(x_n,y_n)-16f(x_{n-1},y_{n-1})+5f(x_{n-2},y_{n-2}))$

A — B 两步隐式：$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{12}(5f(x_{n+1},y_{n+1})+8f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1}))$

6. 变步长的龙格-库塔：$\Delta=\frac{1}{15}|y_{n+1}^{\frac{h}{2}}-y_{n+1}^{h}|$ 直至 $\Delta<\varepsilon$（人为设定）

变步长的多步法：P268. 线性多步公式：$y_{n+1}=\alpha_0 y_n+\alpha_1 y_{n-1}+\cdots\alpha_k y_{n-k}+h(\beta_{n-1}f_{n+1}+\cdots+\beta_k f_{n-k})$

Taloy展开并正确系数.

7. 收敛性和稳定性.

所有算法均收敛：$x_n=x_0+nh$，$h\to0$时 $y_n\to y(x_n)$，$y(x_n)$为准确解，则收敛

稳定性：在y_n上有δ的扰动，以后各节点 y_m产生的偏差均不超过δ.

对 $\begin{cases}y'=\lambda y\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$ Euler 在 $|1+\lambda h|\le1$ 时稳定 稳定区间 $-2<\lambda h<0$

~~梯形~~ 隐式Euler 对任何~~Euler~~ h均稳定.

梯形Euler $|1+\lambda h+\frac{1}{2}(\lambda h)^2|\le1$时稳定 稳定区间 $-2<\lambda h<0$.

RK-4（龙格库塔4阶）$|1+h\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{2!}+\frac{(h\lambda)^3}{3!}+\frac{(h\lambda)^4}{4!}|\le1$ 时稳定. 区间 $-2.78<\lambda h<0$.

（其他RK方法均类推.）

解题：列表法. 以Euler梯形举例.

$\begin{cases}y'=x+y \ (0\le x\le0.4)\\ y(0)=1\end{cases}$ 代入，则 $\begin{cases}\hat{y}_{n+1}=0.1x_n+1.1y_n\\ y_{n+1}=0.05x_n+0.05x_{n+1}+1.05y_n+0.05\hat{y}_{n+1}\end{cases}$

n	x_n	y_n	$\hat{y}_{n+1}$	y_{n+1}
0	0	1	1.1	1.11
1	0.1	1.11	1.22	1.24205
2	0.2	1.24205		
3	0.3			
4	0.4			