

Экзаменационные вопросы по курсу Методы численного решения стационарных задач науки и техники

1. Понятие эллиптического ДУ в частных производных на решении в точке и в области. Критерий эллиптичности линейного ДУ в частных производных второго порядка. Эллиптичность бигармонического уравнения. Основные краевые задачи для эллиптического уравнения. Понятие эллиптической системы ДУ в частных производных. Эллиптичность системы уравнения теории упругости.
2. Связь между классическими решениями краевой задачи на отрезке для эллиптического уравнения второго порядка и точками экстремума функционала Больца.
3. Принцип Дирихле. Связь между классическими решениями краевой задачи в многомерной области для эллиптического уравнения второго порядка и точками экстремума некоторого функционала. Уравнения Эйлера для многомерной вариационной задачи. Условия трансверсальности.
4. Сведение краевых задач для эллиптических уравнений к операторам в гильбертовом пространстве. Симметричные, положительные и положительно определённые операторы. Энергетическая норма. Энергетическое пространство симметричного положительно определённого оператора. Конструкция пополнения. Отождествление с функциональным пространством.
5. Обобщённые решения. Существование и единственность обобщённого решения для симметричного положительно определённого оператора. Теорема Рисса. Связь обобщённых и классических решений.
6. Обобщённые решения и неравенство Фридрихса. Критерий сепарабельности энергетического пространства.
7. Метод Ритца нахождения обобщённого решения. Координатные векторы. Теорема о сходимости метода Ритца. Вычисление погрешности метода Ритца через наилучшие приближения. Требования к выбору координатных векторов. Примеры.
8. Метод Ритца и вариационно-разностные схемы. Решения модифицированным методом Ритца краевой задачи на отрезке. Получение расчётных формул и граничных условий.
9. Решение эллиптических задач методом установления. Сходимость метода установления для задачи Дирихле. Оценка погрешности. Теорема о дискретном спектре.
10. Численная реализация метода установления на примере решения задачи Дирихле в прямоугольнике. Выбор оптимального параметра установления. Оценка скорости сходимости.
11. Увеличение скорости сходимости метода установления. Метод переменных направлений. Выбор оптимального параметра установления. Оценка скорости сходимости.
12. Метод наименьших квадратов. Связь с методом Ритца. Обобщённый метод наименьших квадратов.
13. Уравнение Гельмгольца в ограниченной области в случае сферической и цилиндрической симметрии. Нахождение собственных чисел и собственных функций. Неединственность решения. Связь с альтернативой Фредгольма.
14. Численное решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца методом установления и методом стрельбы.

Список литературы

1. А.В. Бицадзе Уравнения математической физики. М.: Наука, 1976
2. С.Г. Михлин Курс математической физики. М.: Наука, 1968
3. С.Г. Михлин Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966

Дополнительная литература

1. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближённые методы высшего анализа. Гостехиздат, 1949.
2. Самарский А.А., Андреев В.Б. Разностные методы для эллиптических уравнений. М.: Наука, 1976.
3. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К. Машинные методы математических вычислений. М.: Мир, 1980, 280с.
4. Марчук Г.И., Агошков В.И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука, 1981.