1 Математическая постановка задачи

Для решения общей задачи по нахождению деформаций и напряжений в деформируемом теле, занимающем область G с границей ∂G, необходимо использовать следующие соотношения:

кинематические граничные условия

$$u(x) = u_0,\ x \in \partial G_D, \tag{1}$$

силовые граничные условия

$$\sigma(u) \cdot n = p(x),\ x \in \partial G_N, \tag{2}$$

соотношения Коши для тензора полных деформаций

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T, \tag{3}$$

тензор напряжений

$$\sigma(u) = ??? \tag{4}$$

Здесь $u(x)$ - компоненты вектора перемещения, ∂G_D - участок границы, на котором действуют кинематические условия Дирихле, ∂G_N - участок границы, на котором действуют силовые граничные условия Неймана, $p(x)$ - вектор внешней нагрузки.

Решить данную задачу можно с помощью метода декомпозиции Шварца.

1.1 Методы Шварца

Рассмотрим классическую задачу метода Шварца для двух подобластей: имеется сложная область Ω, состоящая из объединения двух простых областей (круга Ω_1 и прямоугольника Ω_2). Рассмотрим уравнение Пуассона, цель которого найти перемещения $u : \Omega \to \mathbb{R}$ при условии, что

$$\begin{aligned} -\triangle(u) &= f, \quad u \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega \end{aligned}$$

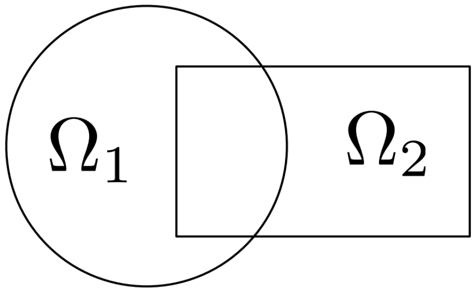

Рис. 1: Сложная область, получившаяся из объединения двух простых областей

Классический метод Шварца это итерационный метод, основанный на решении задач меньшего масштаба в подобластях Ω_1 и Ω_2. Один шаг итерационного процесса обновления результатов $u^n \to u^{n+1}$:

$$\begin{aligned} -\triangle(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_1 \\ u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2 \end{aligned} \quad \text{после чего} \quad \begin{aligned} -\triangle(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_2 \\ u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1 \end{aligned}$$

Теперь же рассмотрим случай для произвольной области и произвольного числа подобластей. Вернёмся к нашей первоначальной задаче (ссылка здесь), представим область G в виде объединения конечного числа подобластей $G = \bigcup_{i=1}^{M} G_i$ с конечным числом границ $\partial G_1, \ldots, \partial G_M$, где M - число подобластей. Данные подобласти пересекаются, что требует ввода дополнительных обозначений для границ, возникающих после декомпозиции областей: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i$.

Выберем начальное приближение для перемещений, удовлетворяющее граничным условиям (ссылка здесь). Алгоритм из классического метода Шварца можно оптимизировать для большего числа подобластей:

$$\begin{aligned} -\triangle(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\ \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) = u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), &\quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i)) \end{aligned}$$

Данный алгоритм Шварца называют мультипликативным, он последовательный и решение на каждой подобласти зависит от решения на предыдущей подобласти (или от решения на предыдущей итерации, если речь идёт о первой подобласти для итерации).

Существует также другой вариант метода Шварца, основанный на решении локальных задач для каждой подобласти без зависимости от соседних подобластей:

$$\begin{aligned} -\triangle(u^{n+\frac{i}{M}}) = f(x), &\quad x \in G_i \\ \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n = p(x), &\quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) = 0, &\quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\ u^{n+1}(x) = u^n(x), &\quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i)) \end{aligned}$$

Этот метод называется аддитивный метод Шварца. В конце каждой итерации решение вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^{M} (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент α - некоторый параметр, от которого зависит скорость сходимости итерационного процесса.