

1 Постановка дифференциальной задачи уравнения равновесия

Для решения общей задачи по определению напряжений и деформаций в деформируемом теле необходимо использовать следующие уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

с силовыми граничными условиями

$$r = r_1 \quad \sigma_{ji}n_j = -\sigma_{rr} = p_1 \quad (2)$$

$$r = r_2 \quad \sigma_{ji}n_j = \sigma_{rr} = p_2 \quad (3)$$

После дискретизации задачи с помощью МКЭ, перейдём от задачи (1) к системе линейных уравнений

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}, \quad u \in \Omega \quad (4)$$

где \mathbf{K} - матрица жёсткости, \mathbf{u} - вектор перемещений, \mathbf{f} - вектор правой части, $\Omega = [r_1, r_2]$.

1.1 Метод декомпозиции области в дифференциальной постановке

Разбиваем область Ω на N пересекающихся подобластей: $\Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i$.

Решаем задачу 4 в Ω_i . Обозначим начальное линейное приближение как u^0 .

Считаем, что u^n известно. Переход $u^n \rightarrow u^{n+1}$ можно записать засчёт следующего итерационного процесса:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= 0 & x \in \Omega_1 \\ \sigma_{rr} &= p_1 & x \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u^{n+\frac{1}{N}} &= u^n & x \in \partial\Omega_1 \cap \Omega_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= 0 & x \in \Omega_k \quad k = 2, \dots, N-1 \\
u^{n+\frac{k}{N}} &= u^{n+\frac{k-1}{N}} & x \in \partial\Omega_k \cap \Omega_{k-1} \\
u^{n+\frac{1}{N}} &= u^n & x \in \partial\Omega_k \cap \Omega_{k+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} &= 0 & x \in \Omega_N \\
u^{n+\frac{k}{N}} &= u^{n+\frac{k-1}{N}} & x \in \partial\Omega_N \cap \Omega_{N-1} \\
\sigma_{rr} &= p_N & x \in \partial\Omega_N \cap \partial\Omega
\end{aligned}$$

Для внешних подобластей Ω_1 и Ω_N решается задача, для которой с одной стороны стоит условие Неймана, с другой стороны - условие Дирихле. Для всех внутренних подобластей $\Omega_2 - \Omega_{N-1}$ с двух сторон стоят условия Дирихле.

От исходной дифференциальной постановки (1) можно перейти к слабой постановке задачи и, применяя метод Бубнова - Галёркина, получаем, что на каждой i -ой итерации в Ω_j нужно решить следующую систему линейных уравнений:

$$K_{\Omega_j} u_j^i = f_j^i \quad j = 1, \dots, N \quad (5)$$

2 Результаты решения задачи для упругой трубы. Одномерный случай.

Рассмотрим случай, когда внутреннее давление $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа. Тогда аналитическое радиальное перемещение считается по формуле :

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a}{b^2 - a^2}. \quad (6)$$

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (7)$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (8)$$

Для решения поставленной задачи примем, что материал цилиндра имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$. Внутренний радиус цилиндра $a = 10$ мм, внешний радиус цилиндра $b = 20$ мм.

Расчёт относительной погрешности произведён по формуле для нормы, являющейся конечномерным аналогом следующих пространства L_2 :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(u_i^{an} - u_i^{me})^2}{(u_i^{an})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \quad (9)$$

где u^{an} - аналитическое решение, u^{me} - численное решение, s_i - полусумма двух шагов $\frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $\sum s_i$ - сумма всех шагов на всём отрезке.

Коэффициент относительного захлёста (Overlapping coefficient) - 0.40. Критерии останова - $10^{-5}, 10^{-6}$.

Кол-во подобластей	Критерий останова ε				
		10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
2		59	92	124	157
4		205	387	576	765
10		609	1691	3062	4473

Проведена серия расчётов на сетке N=100. Результаты расчётов представлены ниже.

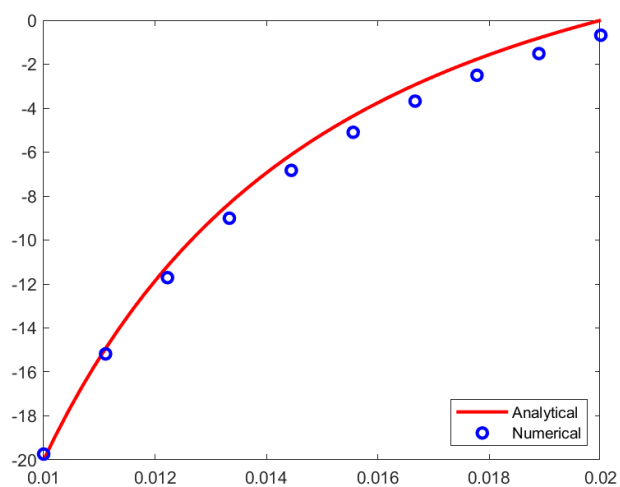


Рис. 1: Зависимость радиальных напряжений от радиуса

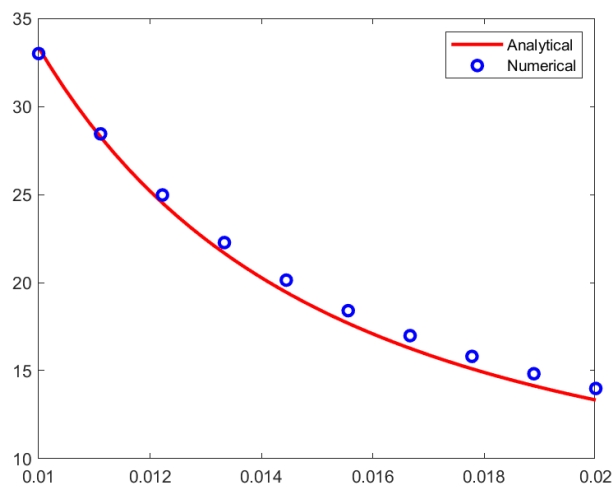


Рис. 2: Зависимость окружных напряжений от радиуса

Таблица 1: Относительная радиальная погрешность , пространство L_2 , критерий останова - $1e-5$

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.82×10^{-3}
2	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.81×10^{-3}
4	2.71×10^{-2}	1.35×10^{-2}	6.76×10^{-3}
10	2.66×10^{-2}	1.31×10^{-2}	6.19×10^{-3}

Таблица 2: Относительная окружная погрешность, пространство L_2 , критерий останова - $1e-5$

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	1.14×10^{-2}	5.69×10^{-3}	2.83×10^{-3}
2	1.15×10^{-2}	5.78×10^{-3}	2.93×10^{-3}
4	1.25×10^{-2}	6.34×10^{-3}	3.49×10^{-3}
10	1.63×10^{-2}	1.06×10^{-2}	7.89×10^{-3}

Таблица 3: Относительная радиальная погрешность, пространство L_2 , критерий останова - $1e-6$

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.82×10^{-3}
2	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.82×10^{-3}
4	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.81×10^{-3}
10	1.72×10^{-2}	1.35×10^{-2}	6.81×10^{-3}

Таблица 4: Относительная окружная погрешность, пространство L_2 , критерий останова - $1e-6$

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	1.14×10^{-2}	5.69×10^{-3}	2.83×10^{-3}
2	1.14×10^{-2}	5.71×10^{-3}	2.84×10^{-3}
4	1.15×10^{-2}	5.75×10^{-3}	2.91×10^{-3}
10	1.19×10^{-2}	6.18×10^{-3}	3.08×10^{-3}