

# 1 Метод декомпозиции Шварца. Одномерный случай.

Рассмотрим в заданной расчётной области  $\Omega = [r_1, r_2]$  дифференциальное уравнение равновесия для трубы, записанное в матричном виде:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}. \quad (1)$$

Разобьем область  $\Omega$ , для примера, на две пересекающиеся подобласти:  $\Omega = \cup_{i=1}^2 \Omega_i$ , где  $\Omega_1 = [r_1, r_3]$  и  $\Omega_2 = [r_4, r_2]$  ( $r_1$  и  $r_2$  - внешние границы,  $r_4$  и  $r_3$  - внутренние границы). Обозначим начальное линейное приближение как  $u^0$ .

(Здесь будет рисунок разбиения)

Для начала, решаем задачу, записанную в матричной форме, в области  $\Omega_1$ :

$$K_{\Omega_1} u^{n+\frac{1}{k}} = f^{n+\frac{1}{k}} \quad (2)$$

с кинематическим граничным условием на границе  $r_1$

$$u(r_1) = u^0$$

и силовым граничным условием на границе  $r_1$

$$\sigma_{r_1} = p_{r_1}, \quad (3)$$

где  $k$  - количество подобластей (в нашем случае  $k=2$ ).

Следующим шагом решим задачу, записанную в матричной форме, в области  $\Omega_2$ :

$$K_{\Omega_2} u^{n+\frac{2}{k}} = f^{n+\frac{2}{k}} \quad (4)$$

с кинематическим граничным условием на границе  $r_4$

$$u(r_4) = u^{\frac{1}{2}} \Omega_1$$

и силовым граничным условием на границе  $r_2$

$$\sigma_{r_2} = p_{r_2}, \quad (5)$$

где  $k$  - количество подобластей (в нашем случае  $k=2$ ). Дальнейший итераци-

онный процесс решения дифференциального уравнения

$$K_{\Omega_i} u^{n+\frac{i}{k}} = f^{n+\frac{i}{k}}, \quad i = 1, \dots, k \quad (6)$$

где  $k$  - количество подобластей, продолжается до тех пор, пока выполняется условие

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(u^{n+1} - u^n)^2}{(u^{n+1})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \quad (7)$$

где  $u^{n+1}$  - численное решение, полученное по прошествию одного расчёта итерационного процесса,  $u^{me}$  - численное решение, полученное на прошлой итерации,  $s_i$  - полусумма двух шагов  $\frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ,  $\sum s_i$  - сумма всех шагов на всём отрезке.

## 2 Результаты решения задачи для упругой трубы. Одномерный случай.

Рассмотрим случай, когда внутреннее давление  $p_a = 20$  МПа, внешнее давление  $p_b = 0$  МПа. Тогда аналитическое радиальное перемещение считается по формуле :

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a}{b^2 - a^2}. \quad (8)$$

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (9)$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (10)$$

Для решения поставленной задачи примем, что материал цилиндра имеет следующие параметры: модуль Юнга  $E = 70000$  МПа и коэффициент Пуассона  $\nu = 0.34$ . Внутренний радиус цилиндра  $a = 10$  мм, внешний радиус цилиндра  $b = 20$  мм.

Расчёт относительной погрешности произведён по формуле для нормы, являющейся конечномерным аналогом следующих пространства  $L_2$ :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(u_i^{an} - u_i^{me})^2}{(u_i^{an})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \quad (11)$$

где  $u^{an}$  - аналитическое решение,  $u^{me}$  - численное решение,  $s_i$  - полусумма двух шагов  $\frac{h_i + h_{i+1}}{2}$ ,  $\sum s_i$  - сумма всех шагов на всём отрезке.

Коэффициент относительного захлёста (Overlapping coefficient) - 0.24. Критерий останова -  $10^{-4}$ .

Кол-во подобластей	Критерий останова $\varepsilon$				
		$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-5}$	$10^{-6}$
2		59	92	124	157
4		205	387	576	765
10		609	1691	3062	4473

Проведена серия расчётов на сетке N=100. Результаты расчётов представлены ниже.

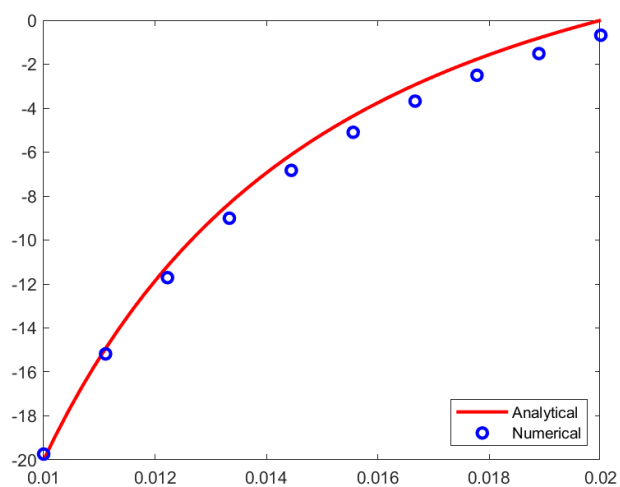


Рис. 1: Зависимость радиальных напряжений от радиуса

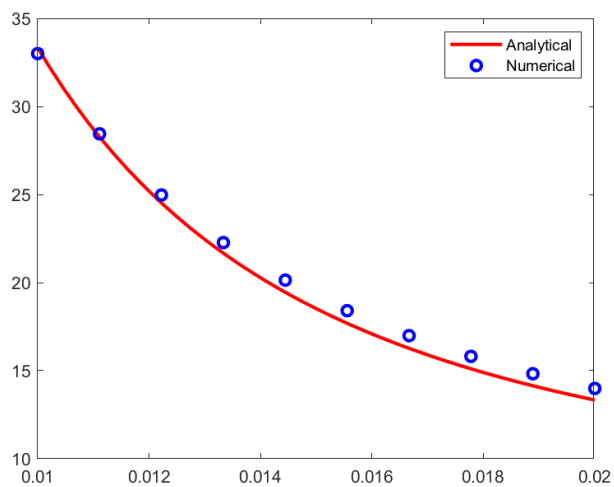


Рис. 2: Зависимость окружных напряжений от радиуса

Таблица 1: Относительная радиальная погрешность , пространство  $L_2$ 

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	$2.72 \times 10^{-2}$	$1.36 \times 10^{-2}$	$6.78 \times 10^{-3}$
2	$2.65 \times 10^{-2}$	$1.33 \times 10^{-2}$	$6.61 \times 10^{-3}$
4	$2.53 \times 10^{-2}$	$1.21 \times 10^{-2}$	$5.57 \times 10^{-3}$
10	$1.62 \times 10^{-2}$	$1.05 \times 10^{-2}$	$9.53 \times 10^{-3}$

Таблица 2: Относительная окружная погрешность , пространство  $L_2$ 

Сетка Кол-во подобластей	50	100	200
1	$1.14 \times 10^{-2}$	$5.69 \times 10^{-3}$	$2.82 \times 10^{-3}$
2	$1.31 \times 10^{-2}$	$7.38 \times 10^{-3}$	$4.57 \times 10^{-3}$
4	$2.22 \times 10^{-2}$	$1.67 \times 10^{-2}$	$1.39 \times 10^{-2}$
10	$1.04 \times 10^{-1}$	$1.01 \times 10^{-1}$	$8.01 \times 10^{-2}$

Расчёты относительных погрешностей были произведены по формуле 11. Можно заметить, что ошибки численного решения по сравнению с аналитическим для случаев, когда нет и разбиений и когда подобластей 2, 4 и 10, для радиального напряжения остаются приблизительно такими же (кроме случая 10 ("десяти") подобластей для сетки N=100). Для случая окружных напряжений значения разнятся вплоть до изменения порядка.

(Мои предположения - различие значений коэффициента захлёста. Кое-где пришлось брать его  $\approx 0.20$ )