1 Метод декомпозиции Шварца. Одномерный случай.

Расмотрим в заданной расчётной области $\Omega = [r_1, r_2]$ дифференциальное уравнение равновесия для трубы, записанное в матричном виде:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}. \tag{1}$$

Разобъем область Ω, для примера, на две пересекающиеся подобласти: $\Omega = \cup_{i=1}^{2} \Omega_i$, где $\Omega_1 = [r_1, r_3]$ и $\Omega_2 = [r_4, r_2]$ (r_1 и r_2 - внешние границы, r_4 и r_3 - внутренние границы). Обозначим начальное линейное приближение как u^0.

(Здесь будет рисунок разбиения)

Для начала, решаем задачу, записанную в матричной форме, в области Ω_1:

$$K_{\Omega_1} u^{n+\frac{1}{k}} = f^{n+\frac{1}{k}} \tag{2}$$

с кинематическим граничным условием на границе r_1

$$u(r_1) = u^0$$

и силовым граничным условием на границе r_1

$$\sigma_{r_1} = p_{r_1}, \tag{3}$$

где k - количество подобластей (в нашем случае k=2).

Следующим шагом решим задачу, записанную в матричной форме, в области Ω_2:

$$K_{\Omega_2} u^{n+\frac{2}{k}} = f^{n+\frac{2}{k}} \tag{4}$$

с кинематическим граничным условием на границе r_4

$$u(r_4) = u^{\frac{1}{2}} \Omega_1$$

и силовым граничным условием на границе r_2

$$\sigma_{r_2} = p_{r_2}, \tag{5}$$

где k - количество подобластей (в нашем случае k=2). Дальнейший итерационный процесс решения дифференциального уравнения

$$K_{\Omega_i} u^{n+\frac{i}{k}} = f^{n+\frac{i}{k}},\ i = 1, \dots, k \qquad (6)$$

где k -количество подобластей, продолжается до тех пор, пока выполняется условие

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{n+1} - u^n)^2}{(u^{n+1})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \qquad (7)$$

где u^{n+1} - численное решение, полученное по прошествию одного расчёта итерационного процесса, u^{me} - численное решение, полученное на прошлой итерации, s_i - полусумма двух шагов $\dfrac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $\sum s_i$ - сумма всех шагов на всём отрезке.

2 Результаты решения задачи для упругой трубы. Одномерный случай.

Рассмотрим случай, когда внутреннее давление $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа. Тогда аналитическое радиальное перемещение считается по формуле :

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\frac{p_a a^2}{b^2-a^2}r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a}{b^2-a^2}. \tag{8}$$

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2-a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a}{b^2-a^2} \tag{9}$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2-a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a}{b^2-a^2} \tag{10}$$

Для решения поставленной задачи примем, что материал цилиндра имеет следующие параметры: модуль Юнга $E - 70000$ МПА и коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$. Внутренний радиус цилиндра $a - 10$ мм, внешний радиус цилиндра $b - 20$ мм.

Расчёт относительной погрешности произведён по формуле для нормы, являющейся конечномерным аналогам следующих пространства L_2:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\frac{(u_i^{an}-u_i^{me})^2}{(u_i^{an})^2}\frac{s_i}{\sum s_i}} \tag{11}$$

где u^{an} - аналитическое решение, u^{me} - численное решение, s_i - полусумма двух шагов $\dfrac{h_i+h_{i+1}}{2}$, $\sum s_i$ - сумма всех шагов на всём отрезке.
Коэффициент относительного захлёста (Overlapping coefficient) - 0.24. Критерий останова - 10^{-4}.

Критерий останова ε / Кол-во подобластей	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
2	59	92	124	157
4	205	387	576	765
10	609	1691	3062	4473

Проведена серия расчётов на сетке N=100. Результаты расчётов представлены ниже.

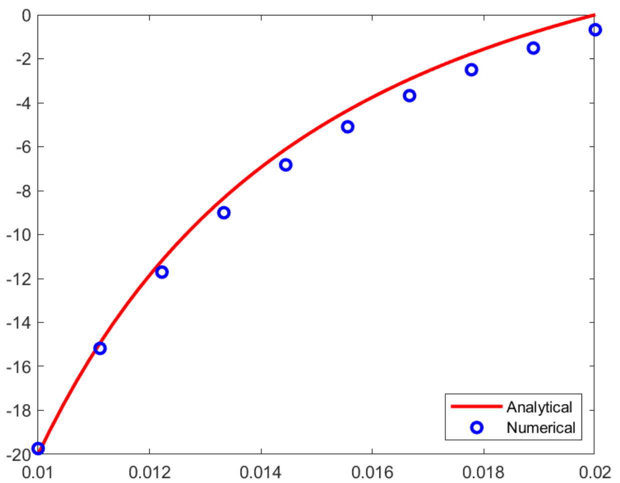

Рис. 1: Зависимость радиальных напряжений от радиуса

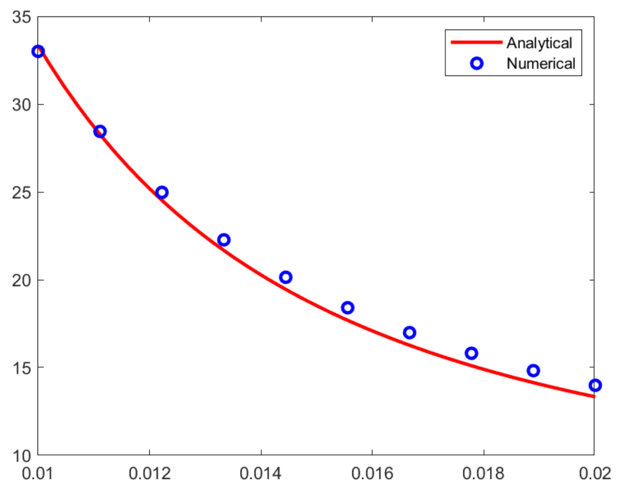

Рис. 2: Зависимость окружных напряжений от радиуса

Таблица 1: Относительная погрешность для разных сеток, пространство L_2

Кол-во подобластей \ Сетка	50	100	200
1	$2.72{\times}10^{-2}$	$1.36{\times}10^{-2}$	$6.78{\times}10^{-3}$
2	$2.65{\times}10^{-2}$	$1.33{\times}10^{-2}$	$6.61{\times}10^{-3}$
4	$2.53{\times}10^{-2}$	$1.21{\times}10^{-2}$	$5.57{\times}10^{-3}$
10	$1.62{\times}10^{-2}$	$1.05{\times}10^{-2}$	ERROR

Расчёт относительной погрешности для следующей таблицы был произведён по формуле :

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(u_i^{an} - u_i^{me})^2}{(u_i^{an})^2}} \tag{12}$$

где u^{an} - аналитическое решение, u^{me} - численное решение. Не было использовано выражение $\frac{s_i}{\sum s_i}$, в следующем расчёте будет добавлен данный множитель. Для сетки N=200 при количестве подобластей $Coef_Overlapping = 10$ расчёт не получился по непонятным причинам. Буду разбираться с этой проблемой.