

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э.Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Прикладная математика»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА
*К ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ
РАБОТЕ*

НА ТЕМУ:

«Численное решение задачи нагружения трубы давлением с
использованием стандартного и смешанного методов конечных
элементов»

Студент ФН2-82Б

(Подпись, дата) М.В. Матвеев

Руководитель ВКР

(Подпись, дата) А.С. Родин

Нормоконтролер

(Подпись, дата) М.М. Лукашин

2018 г.

РЕФЕРАТ

Расчётно-пояснительная записка 63 с., 20 рис., 27 табл., 15 источников.

НАГРУЖЕНИЕ ТРУБЫ, СТАНДАРТНЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, СМЕШАННЫЙ МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ, ДАВЛЕНИЕ, ДЕФОРМАЦИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ, СЛАБОСЖИМАЕМЫЙ МАТЕРИАЛ, СХЕМА ЭЙЛЕРА

В технике при рассмотрении задач, связанных с удержанием высокого давления, часто приходится сталкиваться с толстостенными трубами. Определение напряжений в подобной трубе значительно тяжелее, чем в тонкостенных трубах. Вопросы, касающиеся эффективного решения подобных задач относительно разных факторов являются актуальными.

Цель работы - сравнение численных решений задачи нагружения трубы давлением, полученных с использованием стандартного и смешанного методов конечных элементов, в упругой постановке и в постановке с учётом деформации ползучести.

Результаты, полученные для краевой задачи упругости, показали, что для слабосжимаемого материала правильнее использовать смешанный метод конечных элементов, так как ошибки в вычислении напряжений при решении стандартным методом конечных элементов существенно возрастают, в то время как смешанный метод конечных элементов обладает стабильной точностью. Результаты, полученные для краевой задачи с учётом деформации ползучести, показали, что смешанный метод конечных элементов эффективнее стандартного метода конечных элементов, так как с течением времени аналитическое и численное решения начинают расходиться.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В технике при рассмотрении задач, связанных с удержанием высокого давления, часто приходится сталкиваться с толстостенными трубами. Определение напряжений в подобной трубе значительно тяжелее, чем в тонкостенных трубах. Вопросы, касающиеся эффективного решения подобных задач относительно разных факторов являются актуальными.

В качестве метода численного решения соответствующей задачи в одномерном приближении (всё зависит только от радиуса) можно применить стандартный метод конечных элементов с использованием линейных базисных функций, но данный способ обладает рядом недостатков при решении задачи упругости для несжимаемого или слабосжимаемого материала. Смешанный метод конечных элементов является эффективным инструментом решения данной проблемы.

При оценке долговечности и надежности конструкции необходимо учитывать деформации ползучести для корректного определения напряжений. При решении методом конечных элементов краевой задачи с учётом деформации ползучести чаще всего используют простую и экономичную явную схему Эйлера.

Целью работы является сравнение численных решений задачи нагружения трубы давлением, полученных с использованием стандартного и смешанного методов конечных элементов, в упругой постановке и в постановке с учётом деформации ползучести.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- рассмотрение модели упругого материала и модели материала, учитывающую деформации ползучести;
- исследование основных соотношений стандартного и смешанного методов конечных элементов для численного решения задачи упругости;
- реализация смешанного и стандартного методов конечных элементов в виде программы для моделей упругого материала и материала с учётом деформации ползучести;
- проведение серии расчётов для задачи нагружения упругой трубы давлением;

- сравнение численных результатов, полученных с помощью смешанного и стандартного методов конечных элементов с аналитическим решением при разных коэффициентах Пуассона для задачи упругости;
- проведение серии расчётов для задачи нагружения давлением трубы с учётом деформации ползучести;
- сравнительный анализ численных результатов, полученных с помощью смешанного и стандартного методов конечных элементов, с аналитическим решением задачи установившейся ползучести;

1 Математическая модель

1.1 Постановка задачи механики твёрдого деформируемого тела

Для решения общей задачи по определению напряжений и деформаций в деформируемом теле необходимо использовать следующие уравнения равновесия [1] (считаем, что объёмные силы на тело не действуют):

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

с кинематическим условием на части границы S_1

$$u = u_0 \quad (2)$$

и с силовым условием на части границе S_2

$$\sigma_{ji}n_j = p_i,$$

где σ_{ji} -компоненты тензора напряжений, p_i -компоненты вектора поверхностных сил, x_j -декартовы координаты.

В общем случае напряжения и деформации описываются тензорами второго ранга в трёхмерном пространстве. Закон Гука выглядит следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^e, \quad (3)$$

где C_{ijkl} -компоненты тензора упругих коэффициентов, ε_{kl}^e -компоненты тензора упругих деформаций.

Компоненты тензора полных деформаций задаются соотношениями Коши [5]:

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right), \quad (4)$$

где $u_i = u_i(\mathbf{x}, t)$ -компоненты вектора перемещений.

Для исследования труб удобнее использовать цилиндрическую систему координат. Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат за-

писываются в виде [3]

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zr}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\varphi}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

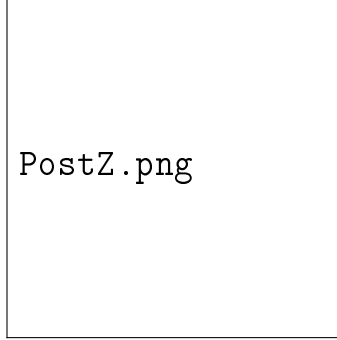


Рис. 1: Труба под внутренним и внешним давлением

Длину трубы предполагаем достаточно большой для того, чтобы можно было считать, что осевое напряжение распределено по осевому сечению равномерно, и что удерживающее влияние днщ на радиальные перемещения цилиндра пренебрежимо мало. Будем считать, что в рассматриваемом теле выполнены следующие допущения: все переменные не зависят от координат φ и z . Таким образом задача по сути сводится к одномерному случаю (всё зависит только от r) и уравнения равновесия (??) сводятся к одному уравнению

$$\frac{d}{dr}(\sigma_{rr} r) - \sigma_{\varphi\varphi} = 0 \quad (6)$$

Данное уравнение (??) можно получить не только из общего вида уравнения равновесия, но и другим способом. Рассмотрим полый цилиндр с внутренним радиусом a , и наружным b , находящийся под действием внутреннего давления p_a и наружного p_b . В следствии осевой симметрии цилиндра и нагрузок напряжения и деформации также симметричны относительно его оси. Двумя сечениями, перпендикулярными к оси цилиндра и находящимися друг от друга на расстоянии, равном единице, вырежем кольцо.

В этом кольце выделим элемент двумя плоскостями, проходящими через ось цилиндра и образующими между собой угол $d\varphi$, и двумя соосными цилин-

дическими поверхностями с радиусами r и $r + dr$. Нормальные напряжения на цилиндрической поверхности элемента, имеющей радиус r (радиальные напряжения), обозначим через σ_r ; на радиусе $r + dr$ напряжения получат приращения и будут равны $\sigma_r + d\sigma_r$. Нормальные напряжения на плоских гранях (окружные напряжения) обозначим через σ_φ .

Вследствие осевой симметрии цилиндра и нагрузок перекашиваться элемент не будет и касательных напряжений на его гранях не возникнет. Поэтому нормальные напряжения σ_r и σ_φ будут главными напряжениями.

Умножая напряжения на площади граней, получим действующие на элемент усилия (\mathbf{F}_i):

- $\sigma_r r d\varphi$ - на внутренней цилиндрической грани;
- $(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi$ - на наружной цилиндрической грани;
- $\sigma_\varphi dr$ - на боковых гранях.



Рис. 2: Действующие на элемент трубы усилия

Так как все силы лежат в одной плоскости и их можно отнести к одной точке, то для равновесия элемента суммы проекций сил на две перпендикулярные оси должны быть равны нулю. Условиями равновесия будут уравнения:

$$\sum_i F_{xi} = 0, \quad \sum_i F_{yi} = 0.$$

Благодаря симметрии элемента задачу определения напряжений и перемещений в теле вращения можно решить в функции только одного независимого переменного-радиуса r . После подстановки необходимых выражений получим

$$-\sigma_r r d\varphi + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr) d\varphi - 2(\sigma_\varphi dr \sin \frac{d\varphi}{2}) = 0$$

В силу малости угла $\frac{d\varphi}{2}$ принимаем, что $\sin \frac{d\varphi}{2} = \frac{d\varphi}{2}$. После раскрытия всех скобок, сокращения подобных слагаемых и отбрасывания члена высшего порядка малости $d\sigma_r dr d\varphi$ получим дифференциальное уравнение равновесия, совпадающее с (??).

1.2 Модели материала

1.2.1 Математическая модель упругого тела

Для упругого тела упругие деформации совпадают с полными, поэтому закон Гука можно переписать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}. \quad (7)$$

Для изотропного тела с учётом принятых допущений компоненты тензоров напряжений и деформаций принимают вид [1]:

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, \quad (8)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}, \quad (9)$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}), \quad (10)$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{du}{dr}, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{u}{r}, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{zz} = 0, \quad (13)$$

где λ , μ -параметры Ламе.

1.2.2 Математическая модель материала с учётом деформации ползучести

Предполагаем аддитивное разложение тензора полной деформации на упругую и неупругую составляющие:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^c, \quad (14)$$

где ε_{ij}^c -компоненты тензора деформации ползучести.

Тогда закон Гука можно записать следующим образом:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^c), \quad (15)$$

Для изотропного тела компоненты тензора напряжений в цилиндрической системе координат задаются формулами

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^c) + \lambda(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^c),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = (\lambda + 2\mu)(\varepsilon_{\varphi\varphi} - \varepsilon_{\varphi\varphi}^c) + \lambda(\varepsilon_{rr} - \varepsilon_{rr}^c),$$

$$\sigma_{zz} = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}).$$

Используем теорию течения, согласно которой компоненты скоростей деформации ползучести определяются формулой [9]

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \tilde{\lambda} \sigma'_{ij}, \quad (16)$$

где $\tilde{\lambda}$ -некий коэффициент пропорциональности, называемый параметром ползучести, а σ'_{ij} -компоненты девиатора тензора напряжений

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \quad (17)$$

Отметим, что по формуле (??) деформация ползучести является несжимаемой, то есть

$$\varepsilon_{ii}^c = 0. \quad (18)$$

Введём такие понятия, как интенсивность скорости деформации ползучести [10]

$$\dot{\varepsilon}_u^c = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^c \dot{\varepsilon}_{ij}^c} \quad (19)$$

и интенсивность напряжения [10]

$$\sigma_u = \sqrt{\frac{3}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}. \quad (20)$$

После ряда преобразований формулы (??) получим выражение для неизвестного ранее коэффициента пропорциональности

$$\tilde{\lambda} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_u^c}{\sigma_u}. \quad (21)$$

Будем использовать следующий закон ползучести [9]

$$\dot{\varepsilon}_u^c = B \sigma_u^3, \quad (22)$$

где B - функция времени, которая определяется выбором материала. Подставив данное выражение в формулу для коэффициента пропорциональности, получим

$$\tilde{\lambda} = \frac{3}{2} B \sigma_u^2. \quad (23)$$

1.3 Получение аналитических решений

1.3.1 Аналитическое решение для задачи упругости

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом a и внутренним радиусом b . Данный цилиндр одновременно нагружен внутренним давлением p_a и внешним давлением p_b . В постановке задачи не учитывается осевая растягивающая сила, поэтому $\sigma_{zz} = 0$.

Согласно обобщённому закону Гука, напряжения σ_{rr} и $\sigma_{\varphi\varphi}$ связаны с деформациями ε_{rr} и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ данными выражениями:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{1}{E} (\sigma_{rr} - \nu\sigma_{\varphi\varphi}); \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{E} (\sigma_{\varphi\varphi} - \nu\sigma_{rr}), \quad (24)$$

где E -модуль Юнга, ν -коэффициент Пуассона.

Выразим из уравнения окружной деформации (??) перемещение u и подставим в уравнение радиальной деформации (??):

$$\frac{d}{dr}(\varepsilon_{\varphi\varphi}r) - \varepsilon_{rr} = 0. \quad (25)$$

Подставим из (??) компоненты тензора деформации ε_{rr} и $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ в выражение (??). В таком случае, в дополнение к уравнению равновесия (??) получим соотношение следующего вида [2]:

$$\frac{d}{dr}(\sigma_{\varphi\varphi}r) - \sigma_{rr} = 0. \quad (26)$$

Складывая и вычитая поочерёдно соотношения (??) и (??), получим два новых выражения:

$$\frac{d}{dr}[(\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr})r] - (\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr}) = 0;$$

$$\frac{d}{dr}[(\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr})r] + (\sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr}) = 0;$$

Решив данную систему, определяем, что

$$\sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{rr} = 2A; \quad \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} = \frac{2B}{r^2},$$

где A и B - произвольные постоянные.

Продолжая преобразования, находим

$$\sigma_{rr} = A - \frac{B}{r^2}, \quad \sigma_{\varphi\varphi} = A + \frac{B}{r^2}. \quad (27)$$

Перемещение u найдём из соотношения для вывода окружной деформации (??), используя соотношения (??) и (??):

$$u = \frac{2}{E} \left[A(1 - \nu)r + B(1 + \nu)\frac{1}{r} \right]. \quad (28)$$

Теперь из соотношений (??) определим неизвестные произвольные постоянные A и B на основании граничных условий, то есть

$$A - \frac{B}{a^2} = -p_a, \quad A - \frac{B}{b^2} = -p_b,$$

откуда, после преобразований, получаем

$$A = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad B = \frac{a^2 b^2}{b^2 - a^2} (p_a - p_b).$$

Подставляя полученные A и B в формулы (??) и (??), получим итоговые выражения:

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}; \quad (29)$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}; \quad (30)$$

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a - p_b}{b^2 - a^2}; \quad (31)$$

1.3.2 Аналитическое решение для задачи с учётом деформации ползучести

Рассмотрим цилиндр с внутренним радиусом a и внутренним радиусом b . Данный цилиндр одновременно нагружен внутренним давлением p_a и внешним давлением p_b . Считаем, что осевая деформация ползучести трубы равна нулю: $\varepsilon_{zz}^c = 0$.

Примем материал изотропным и будем полагать, что изменения объёма в процессе ползучести не происходит и условие несжимаемости имеет вид:

$$\varepsilon_{rr}^c + \varepsilon_{\varphi\varphi}^c = 0. \quad (32)$$

В рассматриваемом случае установившейся ползучести [9] пренебрегаем упругой деформацией и считаем, что полная деформация совпадает с деформацией ползучести. Тогда окружная $\varepsilon_{\varphi\varphi}^c$ и радиальная ε_{rr}^c деформации ползучести могут быть выражены через радиальное смещение u^c :

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^c = \frac{u^c}{r}; \quad \varepsilon_{rr}^c = \frac{du^c}{dr}. \quad (33)$$

Подставим выражения (??) в условие несжимаемости (??), и в ходе преобразований получим соотношение

$$\frac{du^c}{dr} = -\frac{u^c}{r}. \quad (34)$$

Проинтегрировав данное соотношение по радиусу, можно получить уравнение изменения радиального смещения в зависимости от радиуса:

$$u^c = \frac{C}{r}, \quad (35)$$

где C -некоторая функция, зависящая от времени.

Далее, подставив полученное выражение (??) в соотношения окружной и радиальной деформаций ползучести (??), получим

$$\varepsilon_{\varphi\varphi}^c = \frac{C}{r^2}; \quad \varepsilon_{rr}^c = -\frac{C}{r^2}. \quad (36)$$

Интенсивность деформаций ползучести в поставленной задаче запишем

следующим образом:

$$\varepsilon_u^c = \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{\varphi\varphi}^c)^2 + \varepsilon_{\varphi\varphi}^c \varepsilon_{rr}^c + (\varepsilon_{rr}^c)^2}. \quad (37)$$

Подставляя в уравнение (??) выражения (??), получаем

$$\varepsilon_u^c = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2}. \quad (38)$$

Основываясь на выражении зависимости компонентов скоростей деформации ползучести от компонентов напряжений

$$\varepsilon_{ij}^c = \frac{3}{2} \frac{\varepsilon_u^c}{\sigma_u} (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0), \quad (39)$$

и также учитывая нулевую осевую деформацию, получаем

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} &= \frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u^c} (\varepsilon_{\varphi}^c - \varepsilon_r^c); \\ \sigma_{zz} - \sigma_{rr} &= -\frac{2}{3} \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u^c} \varepsilon_r^c. \end{aligned} \right\} \quad (40)$$

Если использовать закон ползучести (??), то преобразовывая выражения (??) при помощи соотношений (??) и (??), получим

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\varphi\varphi} - \sigma_{rr} &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r^{2/n}}; \\ \sigma_{zz} - \sigma_{rr} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r^{2/n}}. \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

Подставляя первое соотношение (??) в дифференциальное уравнение равновесия элемента трубы, получим

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r^{\frac{n+1}{n}}}. \quad (42)$$

Проинтегрировав выражение (??), получим новое соотношение для радиального напряжения:

$$\sigma_{rr} = C_1 - \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{r^{\frac{2}{n}}}, \quad (43)$$

где C_1 -произвольная постоянная.

Используя краевые условия, получаем

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{n}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \left(\frac{1}{r_1^{2/n}} - \frac{1}{r^{2/n}}\right), \quad (44)$$

$$p = \frac{n}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}. \quad (45)$$

Вынесем из уравнения (??) составляющую $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n}}$ и подставим её в соотношение для радиального напряжения (??):

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^{\frac{n+1}{n}} \left(\frac{C}{B}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{n} \frac{p r_2^{\frac{2}{n}} r_1^{\frac{2}{n}}}{r_2^{\frac{2}{n}} - r_1^{\frac{2}{n}}}. \quad (46)$$

Если в законе ползучести $n=3$, то получим формулу для радиального напряжения

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{b^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}\right). \quad (47)$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}}\right). \quad (48)$$

2 Численная модель

2.1 Теоретические сведения

2.1.1 Метод Галёркина

Поставим задачу о приближенном решении дифференциального уравнения

$$F(u) = 0, \quad (49)$$

где оператор $F : E \rightarrow H$ и E, H -два бесконечномерных гильбертовых пространства.

Пусть в пространствах E и H заданы системы базисных функций $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Введем последовательности конечномерных пространств E_n и H_n и обозначим через P_n и Q_n операторы проектирования на эти пространства ($E_n = P_n E$, $H_n = Q_n H$).

Метод нахождения приближенного решения состоит в замене уравнения приближенным конечномерным уравнением

$$F_n(\bar{u}) = 0, \quad (50)$$

где $\bar{u} \in E_n$, $F_n : E_n \rightarrow H_n$, $F_n = Q_n F$. Выбора разных базисов ϕ_n, ψ_n и разных проекторов приводит к разным методам.

В методе *Галёркина-Петрова* [14] решение уравнения представляется в виде такой линейной комбинации n базисных функций пространства E_n : $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$, что функция $F(\bar{u})$ ортогональна функциям базиса ψ_1, \dots, ψ_n . Поскольку вместо бесконечного набора базисных функций мы ограничиваемся только n функциями ϕ_n и ψ_n , полученное решение будет приближенным. Условия ортогональности $F(\bar{u}) \perp \psi_j$ представляют собой n уравнений относительно неизвестных $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Выражая из полученной системы числовые коэффициенты α_i , найдём представление \bar{u} .

В методе *Бубнова-Галёркина* [15] конечномерные пространства E_n и H_n совпадают, то есть $\phi_i = \psi_i$. Запишем общую схему метода Галеркина построения приближенного решения уравнения $F(u) = f - Lu = 0$:

1. Выбор базисных функций $\phi_i, i = \overline{1, n}$;

2. Приближенное решение ищется в виде $\bar{u} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \phi_i$;
3. Коэффициенты α_i определяются из решения системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), полученной из условия ортогональности $F(\bar{u}) = f - L\bar{u}$ к ϕ_1, \dots, ϕ_n

$$(f - L\bar{u}, \phi_i) = 0, \quad (L\bar{u}, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad i = \overline{1, n}$$

$$\text{СЛАУ} \quad \sum_{j=1}^n \alpha_j (L\phi_j, \phi_i) = (f, \phi_i), \quad (i = \overline{1, n})$$

Рассмотрим, как определяются линейные базисные функции для решения одномерной задачи на отрезке. В данном случае в качестве отрезка выступает одномерное сечение трубы $[a, b]$, где a -внутренний радиус, а b -наружный радиус. Разобьем этот отрезок узлами x_1, \dots, x_n на конечные элементы $e_i = [x_i, x_{i+1}]$, $i = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, n-1$, $h_i = x_{i+1} - x_i$ - шаг сетки. Каждому внутреннему узлу ставится в соответствие кусочно-линейная функция $\varphi_i(x)$, отличная от нуля только на отрезках, примыкающих к данному узлу

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases} \quad \frac{d\varphi_i(x)}{dx} = \begin{cases} \frac{1}{h_i}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ -\frac{1}{h_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}], \end{cases}$$

где $h_i = h_{i+1} = h$ в случае равномерной сетки.

Для граничных узлов x_1, x_n базисные функции имеют вид

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x_2 - x}{h_1}, & x_1 \leq x \leq x_2, \\ 0, & x \geq x_2 \end{cases}, \quad \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ 0, & x \leq x_{n-1} \end{cases}$$

Подобные базисные функции на элементе также называются функциями формы. Определим физический смысл присутствующих коэффициентов α_i . Рассмотрим, например, один конечный элемент $e = [x_i, x_{i+1}]$.

На элементе e_i ненулевыми будут две базисные функции $\varphi_i = \frac{x_j - x}{h_i}$ и $\varphi_j = \frac{x - x_i}{h_i}$, поэтому

$$\bar{u}^e = \alpha_i \varphi_i + \alpha_{i+1} \varphi_{i+1} = \alpha_i \frac{x_{i+1} - x}{h_i} + \alpha_{i+1} \frac{x - x_i}{h_i} = \frac{\alpha_i x_{i+1} - \alpha_{i+1} x_i}{h_i} + \frac{\alpha_{i+1} - \alpha_i}{h_i} x.$$

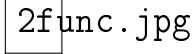


Рис. 3: Базисные функции ϕ_i, ϕ_j на элементе $[x_i, x_{i+1}]$

В узлах сетки должны быть выполнены равенства $\bar{u}^e(x_i) = u_i, \bar{u}^e(x_{i+1}) = u_{i+1}$. Если подставить x_i и x_{i+1} в выражение для \bar{u}^e , то получим $\bar{u}^e(x_i) = \alpha_i = u_i, \bar{u}^e(x_{i+1}) = \alpha_{i+1} = u_{i+1}$. То есть при данном выборе базисных функций неизвестные нам коэффициенты α_i являются значениями функции в узлах: $\alpha_i = u_i$. Таким образом, $\bar{u} = \sum_i u_i \varphi_i(x)$.

2.2 Численное решение задачи упругости при использовании метода Галёркина

Решим дифференциальное уравнение равновесия для трубы (??) методом Бубнова-Галёркина. Разбиваем отрезок $[a, b]$ на $n - 1$ элементов с числом узлов n . Число базисных функций равно n . Запишем слабую постановку задачи:

$$\int_a^b \left[\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\varphi\varphi}}{r} \right] \cdot \varphi_i r dr = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (51)$$

Перепишем интеграл от производной радиального напряжения в виде

$$\int_a^b \frac{d\sigma_{rr}}{dr} \varphi_i r dr = (\sigma_{rr} \varphi_i r)|_a^b - \int_a^b \left(\sigma_{rr} \frac{d\varphi_i}{dr} r + \sigma_{rr} \varphi_i \right) dr.$$

Значение $(\sigma_{rr} \varphi_i r)|_a^b$ известно из граничных условий, поэтому данное слагаемое можно перенести в правую часть СЛАУ. Подставим получившееся в правой части выражение в интеграл (??):

$$\int_a^b \left(\sigma_{rr} \frac{d\varphi_i}{dr} r + \sigma_{\varphi\varphi} \varphi_i \right) dr = (\sigma_{rr} \varphi_i r)|_a^b, \quad i = 1, \dots, n. \quad (52)$$

Проведём замену радиального и окружного напряжений, используя закон Гука (??):

$$\begin{aligned} & \int_a^b \left[((\lambda + 2\mu) \varepsilon_{rr} + \lambda \varepsilon_{\varphi\varphi}) \frac{d\varphi_i}{dr} r + ((\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda \varepsilon_{rr}) \varphi_i \right] = \\ & = \int_a^b \left[(\lambda + 2\mu) \frac{d\varphi_i}{dr} r + \lambda \varphi_i \right] \varepsilon_{rr} dr + \int_a^b \left[\lambda \frac{d\varphi_i}{dr} r + (\lambda + 2\mu) \varphi_i \right] \varepsilon_{\varphi\varphi} dr = \\ & = (\sigma_{rr} \varphi_i r)|_a^b \end{aligned}$$

Вынесем слева коэффициенты u_i за знак интеграла:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^N u_i \left[(\lambda + 2\mu) \frac{d\varphi_i}{dr} \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b r \, dr + \lambda \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b \varphi_i \, dr \right] + \\
& + \sum_{j=1}^N \left[\lambda \frac{d\varphi_i}{dr} \int_a^b \varphi_j \, dr + (\lambda + 2\mu) \int_a^b \frac{\varphi_i \cdot \varphi_j}{r} \, dr \right] = \\
& = (\sigma_{rr} \varphi_i r) \Big|_a^b
\end{aligned} \tag{53}$$

Уравнение (??) можно переписать в матричной форме

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}, \tag{54}$$

где

$$\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T,$$

$$\begin{aligned}
[k_{ij}] &= (\lambda + 2\mu) \frac{d\varphi_i}{dr} \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b r \, dr + \lambda \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b \varphi_i \, dr + \\
& + \lambda \frac{d\varphi_i}{dr} \int_a^b \varphi_j \, dr + (\lambda + 2\mu) \int_a^b \frac{\varphi_i \cdot \varphi_j}{r} \, dr,
\end{aligned}$$

$$f_1 = (\sigma_{rr} \varphi_1 r) \Big|_{r=a}, \quad f_n = (\sigma_{rr} \varphi_n r) \Big|_{r=b}, \quad f_i = 0, \quad i = 2, \dots, n-1$$

Входящие в аппроксимирующие уравнения (??) определенные интегралы могут быть получены простым суммированием по всем конечным элементам $e_i = (x_i, x_{i+1})$ ($i = 1, \dots, n-1$). С учётом структуры базисных функций получаем

$$\int_a^b f(\varphi_i) r \, dr = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(\varphi_i) r \, dr + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(\varphi_i) r \, dr$$

Матрицу \mathbf{K} принято называть *матрицей жесткости*. Для нашей задачи она является трёхдиагональной, то есть её можно представить в следующем виде

$$\begin{pmatrix} C_0 & B_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ A_1 & C_1 & B_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & C_2 & B_2 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{n-1} & C_{n-1} & B_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_n & C_n \end{pmatrix}$$

Вектор правой части f в данной задаче принимает вид

$$\begin{pmatrix} p_a a \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -p_b b \end{pmatrix}$$

Систему уравнений (??) можно решить методом прогонки, требующим для своей реализации примерно $8n$ арифметических операций.

Вычислим необходимые прогоночные коэффициенты по общей формуле [6]:

$$\alpha_{i+1} = \frac{-B_i}{A_i \alpha_i + C_i}$$

$$\beta_{i+1} = \frac{F_i - A_i \beta_i}{A_i \alpha_i + C_i}$$

Из первого уравнения получим

$$\alpha_2 = \frac{-B_1}{C_1}, \quad \beta_2 = \frac{F_1}{C_1}.$$

После нахождения прогоночных коэффициентов α_i и β_i получим следующие формулы для решения системы:

$$u_n = \frac{F_n - A_n \beta_n}{C_n + A_n \alpha_n}$$

$$u_i = \alpha_{i+1} u_{i+1} + \beta_{i+1}, \quad i = n-1, \dots, 1$$

2.3 Численное решение задачи упругости с использованием смешанных КЭ

Используя метод возможных перемещений [1], можно записать уравнение равновесия (??) в слабой постановке:

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i dV = 0,$$

где δu_i -возможные перемещения.

Перепишем интеграл в виде

$$\int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \delta u_i dV = \int_V \frac{\partial (\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial x_j} dV - \int_V \sigma_{ji} \delta \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) dV.$$

Первый интеграл можно переписать, используя теорему Остроградского-Гаусса [4]:

$$\int_V \frac{\partial (\sigma_{ji} \delta u_i)}{\partial x_j} dV = \int_S \sigma_{ji} n_j \delta u_i dS = \int_S p_i \delta u_i dS$$

Перепишем интеграл в матричном виде, используя замену $\delta u = [N]u$:

$$\int_S p_i \delta u_i dS = \int_S (\delta \mathbf{u})^T \mathbf{p} dS \quad (55)$$

Во втором интеграле произведём замену:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij},$$

где

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

-антисимметричный тензор малых поворотов. Подставляем

$$\int_V (\sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} + \sigma_{ji} \delta \omega_{ij}) dV = \int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV.$$

Перепишем интеграл в матричной форме:

$$\int_V \sigma_{ji} \delta \varepsilon_{ij} dV = \int_V (\delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} dV, \quad (56)$$

где тензоры деформации и напряжения заменяются векторами:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{rr} \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} \end{pmatrix} = \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N} = \begin{pmatrix} \partial/\partial r & \partial/\partial r \\ 1/r & 1/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\varphi\varphi} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \\ \nu & \nu \end{pmatrix}$$

Объединив преобразованные интегралы (??) и (??), получим уравнение равновесия в слабой постановке:

$$\int_V (\delta\boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_S \delta\mathbf{u}^T p dS = 0 \quad (57)$$

При использовании стандартного метода конечных элементов для несжимаемых или слабосжимаемых задач возникают сложности при определении давления (объемной части тензора напряжений). По этой причине рассмотрим давление как независимую переменную. Запишем давление в виде [1]

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_{rr} + \sigma_{\varphi\varphi} + \sigma_{zz}) = \frac{1}{3}\mathbf{m}^T \boldsymbol{\sigma},$$

где вектор $\mathbf{m} = [1, 1, 1]^T$. Для изотропного случая давление связано с объемной деформацией модулем объемной упругости $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi} = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_v = \frac{p}{K}. \quad (58)$$

Запишем девиаторную деформацию в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_d = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\varepsilon_v = (\mathbf{I} - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon}.$$

Девиаторная деформация связана с девиаторным напряжением через модуль $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$:

$$\boldsymbol{\sigma}_d = 2G\mathbf{I}_0\boldsymbol{\varepsilon}_d = 2G(\mathbf{I}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)\boldsymbol{\varepsilon}, \quad (59)$$

где \mathbf{I}_0 - единичная матрица. Для удобства записи введём матрицу $\mathbf{D}_d = 2G(\mathbf{I}_0 - \frac{1}{3}\mathbf{m}\mathbf{m}^T)$.

Используя (??), перепишем уравнение равновесия (??) в виде

$$\int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D}_d \boldsymbol{\varepsilon} dV + \int_V \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{m} p dV - \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{t} dS = 0. \quad (60)$$

Также запишем дополнительное условие (??), накладывающееся на деформацию:

$$\int_{\Omega} \delta p \left[\mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{p}{K} \right] d\Omega = 0. \quad (61)$$

С учётом независимой аппроксимации вектора перемещений \mathbf{u} и давления p

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N}_u \tilde{\mathbf{u}} \quad p \approx \hat{p} = \mathbf{N}_p \tilde{p}, \quad (62)$$

где N_u - линейная базисная функция для аппроксимации перемещения, а N_p - кусочно-постоянная базисная функция для аппроксимации давления, уравнение (??) можно переписать в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{p} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix}, \quad (63)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \mathbf{B} d\Omega & \mathbf{C} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} N_p d\Omega \\ \mathbf{V} &= \int_{\Omega} N_p^T \frac{1}{K} N_p d\Omega & f_1 &= \int_{\Gamma} N_u^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma & \mathbf{f}_2 &= 0 \end{aligned} \quad (64)$$

2.4 Применение явной схемы Эйлера при решении краевой задачи с учётом деформации ползучести

Учёт деформации ползучести приводит к нелинейной задаче. Для линеаризации используем метод дополнительной деформации. Тогда уравнения равновесия в каждый момент времени t_k в матричной форме для стандартного метода конечных элементов (??)

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^c, \quad (65)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_1, \dots, u_n)^T, \\ [k_{ij}] &= (\lambda + 2\mu) \frac{d\varphi_i}{dr} \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b r \, dr + \lambda \frac{d\varphi_j}{dr} \int_a^b \varphi_i \, dr + \\ &+ \lambda \frac{d\varphi_i}{dr} \int_a^b \varphi_j \, dr + (\lambda + 2\mu) \int_a^b \frac{\varphi_i \cdot \varphi_j}{r} \, dr, \\ f_i &= (\sigma_{rr} \varphi_i r)|_a^b \\ f_i^c &= (\lambda + 2\mu) \frac{d\varphi_i}{dr} \varepsilon_{rr}^c(t_k) \int_a^b r \, dr + \lambda \varepsilon_{rr}^c(t_k) \int_a^b \varphi_i \, dr + \\ &+ \lambda \frac{d\varphi_i}{dr} \varepsilon_{\varphi\varphi}^c(t_k) \int_a^b r \, dr + (\lambda + 2\mu) \varepsilon_{\varphi\varphi}^c(t_k) \int_a^b \varphi_i \, dr \end{aligned}$$

и для смешанного метода конечных элементов (??)

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{f}_2^c \end{Bmatrix} \quad (66)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \mathbf{B} \, d\Omega & \mathbf{C} &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{m} N_p \, d\Omega \\ \mathbf{V} &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_p^T \frac{1}{K} \mathbf{N}_p \, d\Omega & \mathbf{f}_1 &= \int_{\Gamma} \mathbf{N}_u^T \bar{\mathbf{t}} \, d\Gamma & \mathbf{f}_2 &= 0 \\ \mathbf{f}_1^c &= \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \varepsilon^c(t_{k-1}) \, d\Omega & \mathbf{f}_2^c &= 0 \end{aligned}$$

Примем во внимание, что деформация ползучести в начальный момент времени $t_0 = 0$ равна нулю: $\{\varepsilon^{c(e)}(t_0)\} = 0$. Следовательно, для уравнений равновесия в матричной форме (??) и (??) в начальный момент времени

$$\mathbf{f}_c = 0, \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ \mathbf{f}_2^c \end{Bmatrix} = 0$$

В соответствии с выбранным методом конечных элементов формируем и решаем уравнение (??) или (??), после чего при помощи закона Гука (??) находим для каждого конечного элемента вектор напряжений.

Из принятых ранее соотношений находим вектор скорости деформации ползучести:

$$\{\dot{\varepsilon}^c(t_{k+1})\} = \{f(\{\sigma\}, t_{k+1})\}. \quad (67)$$

Вычисляем вектор деформаций ползучести в момент времени t_{k+1} :

$$\{\varepsilon^c(t_{k+1})\} = \{\varepsilon^c(t_k)\} + \Delta t \{\dot{\varepsilon}^c(t_{k+1})\}. \quad (68)$$

Используя полученный вектор деформации ползучести, формируем и решаем уравнение (??) или (??) для следующего момента времени t_{k+2} . Продолжаем выполнять данные вычисления до тех пор, пока заданный интервал времени не будет пройден.

2.5 Применение неявной схемы Эйлера при решении краевой задачи с учётом деформации ползучести

Использование неявной схемы Эйлера в целом совпадает с применением явной схемы за исключением наличия итерационного алгоритма на каждом шаге по времени. Из принятых ранее соотношений находим вектор скорости деформации ползучести (??). Фиксируем вектор $\{\varepsilon_{old}^c(t_{k+1})\} = \{\varepsilon^c(t_k)\}$ и для линеаризации задачи принимаем, что

$$\{\dot{\varepsilon}^c(t_{k+1})\} \approx \{\dot{\varepsilon}^c(t_k)\}.$$

Вычисляем вектор деформации ползучести в момент времени t_{k+1} :

$$\{\varepsilon^c(t_{k+1})\} = \{\varepsilon^c(t_k)\} + \Delta t [(1 - \alpha)\{\dot{\varepsilon}^c(t_k)\} + \alpha\{\dot{\varepsilon}^c(t_{k+1})\}], \quad (69)$$

где α -весовой параметр ($\alpha > 0.5$).

Оценивая сходимость итераций внутри данного шага, проверяем выполнение неравенства

$$\max_{1 \leq e \leq K_e} \|\{\varepsilon^c(t_{k+1})\} - \{\varepsilon_{old}^c(t_{k+1})\}\| < \delta_c,$$

где δ_c -заданная точность. При выполнении, используя полученный вектор деформации ползучести, формируем и решаем уравнение (??) или (??), после чего также при помощи закона Гука (??) находим для каждого конечного элемента вектор напряжений.

Фиксируем вектор $\{\varepsilon_{old}^c(t_{k+1})\} = \{\varepsilon^c(t_{k+1})\}$ и вычисляем вектор скоростей деформации ползучести с учётом полученного вектора напряжений:

$$\{\dot{\varepsilon}^c(t_{k+1})\} = \{f(\{\sigma\}, t_{k+1})\}. \quad (70)$$

Используя полученный вектор деформации ползучести, вычисляем для момента времени t_{k+1} вектор скоростей деформации ползучести по формуле (??). Проводим данный итерационный процесс до выполнения условия сходимости (??). Продолжаем выполнять данные вычисления до тех пор, пока заданный интервал времени не будет пройден.

3 Краткое описание программы

Программа предназначена для проведения серии расчётов для задачи нагружения упругой трубы давлением и задачи нагружения давлением трубы с учётом деформации ползучести. В программе реализованы смешанный и стандартный методы конечных элементов для численного решения задач. Исходным языком программирования для программы является C++. Среда разработки-Visual Studio 2017. На рисунке ?? продемонстрирован алгоритм программы в виде блок-схемы.



Main_Alg.png

Рис. 4: Блок-схема программы

Для краевой задачи упругости временной итерационный цикл состоит только из одного временного шага. Также для краевой задачи упругости вычисляется только полная деформация, а для краевой задачи с учётом деформации ползучести-полная деформация и деформация ползучести.

В описываемой программе для численного интегрирования используется метод Гаусса для двух узлов 3-го порядка точности [8]:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{2} \left(f\left(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) + f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}}\right) \right).$$

Процедура подготовки данных предназначена для ввода геометрических параметров трубы и давлений, выбора модели материала, задания свойств материала и задания сетки с выбранным шагом h . Входными данными для программы является файл «data.txt», хранящийся в каталоге запуска программы. Это типизированный файл, содержащий данные о трубе.

Используя программу, можно сохранить полученные результаты в типизированные файлы формата .dat, хранящиеся в каталоге запуска программы.

4 Результаты решения задачи для упругой трубы

Рассмотрим случай, когда внутреннее давление $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа. Тогда аналитическое радиальное перемещение считается по формуле (??):

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a}{b^2 - a^2}. \quad (71)$$

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле (??):

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (72)$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле (??):

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \quad (73)$$

Для решения поставленной задачи примем, что материал цилиндра имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70000$ МПа и коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$. Внутренний радиус цилиндра $a = 10$ мм, внешний радиус цилиндра $b = 20$ мм.

Расчёт абсолютной погрешности произведён по формулам для норм, являющихся конечномерными аналогами следующих пространств:

- пространство L_2

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{an} - u_i^{me})^2 r_i h_i} \quad (74)$$

- пространство C

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i^{an} - u_i^{me}| \quad (75)$$

Расчёт относительной погрешности произведён по формулам для норм, являющихся конечномерными аналогами следующих пространств:

- пространство L_2

$$\frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{an} - u_i^{me})^2 r_i h_i}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (u_i^{an})^2 r_i h_i}} \quad (76)$$

- пространство C

$$\max_{1 \leq i \leq n} |u_i^{an} - u_i^{me}| / |u_i^{an}|, \quad (77)$$

где u^{an} - аналитическое решение, а u^{me} - численное.

В дальнейшем для всех значений коэффициента Пуассона (кроме 0.5) расчёты проводились двумя методами: стандартным МКЭ и смешанным МКЭ.

В ходе решения вычисляется величина

$$\varepsilon_V^* = \frac{\varepsilon_V}{\varepsilon_u} \quad (78)$$

для оценки отношения объёмной и девиаторной частей деформации.

4.1 Коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$

Проведены серии расчётов на разных сетках. Результаты расчётов представлены ниже. В таблицах ?? и ?? приведены нормы ошибок вычисления перемещений, радиального и окружного напряжений, в таблицах ?? и ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 1: Нормы ошибок для L_2

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	7.08×10^{-5}	2.74×10^{-2}	1.07×10^{-2}
	0.01	1.77×10^{-5}	1.38×10^{-2}	5.37×10^{-3}
	0.005	4.42×10^{-6}	6.9×10^{-3}	2.68×10^{-3}
Смешанный	0.02	2.29×10^{-5}	2.72×10^{-2}	1.07×10^{-2}
	0.01	5.72×10^{-6}	1.37×10^{-2}	5.36×10^{-3}
	0.005	1.43×10^{-6}	6.9×10^{-3}	2.68×10^{-3}

Таблица 2: Отношение норм ошибок для L_2

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	4	1.99	2
	0.02/0.005=4	16	3.96	4.01
Смешанный	0.02/0.01=2	4	1.98	2
	0.02/0.005=4	16	3.95	4

Таблица 3: Нормы ошибок для C_1

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	7.96×10^{-5}	2.63×10^{-2}	1.57×10^{-2}
	0.01	1.99×10^{-5}	1.32×10^{-2}	7.93×10^{-3}
	0.005	4.97×10^{-6}	6.64×10^{-3}	3.98×10^{-3}
Смешанный	0.02	2.57×10^{-5}	2.62×10^{-2}	1.57×10^{-2}
	0.01	6.43×10^{-6}	1.32×10^{-2}	7.92×10^{-3}
	0.005	1.61×10^{-6}	6.64×10^{-3}	3.98×10^{-3}

Таблица 4: Отношение норм ошибок для C_1

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погреш- ностей u	отнош. погреш- ностей σ_{rr}	отнош. погреш- ностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	4	1.99	1.98
	0.02/0.005=4	16	3.96	3.95
Смешанный	0.02/0.01=2	4	1.98	1.98
	0.02/0.005=4	16	3.95	3.94

Таблица 5: Вычисление ε_V^*

Тип МКЭ	Минимальное значение	Максимальное значение
Стандартный	0.04663	0.1828
Смешанный	0.04663	0.1828

Таблица 6: Время решения задачи

h	Стандартный МКЭ	Смешанный МКЭ
0.02	0.000116749	0.006622
0.01	0.0001466	0.02458
0.005	0.0003759	0.222698

Анализ полученных результатов показал, что:

- полученные двумя методами радиальные и окружные напряжения достаточно близки друг к другу;
- для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости численного решения к аналитическому при измельчении сетки, для перемещений - квадратичная;
- при использовании смешанного метода конечных элементов существенно возрастают вычислительные затраты по сравнению с использованием стандартного метода конечных элементов;

Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным и стандартным методами конечных элементов, соответствуют приложенным давлениям.

На рисунках ??-?? показаны распределения напряжений для сетки с шагом $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом - численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.



Рис. 5: Зависимость радиальных напряжений от радиуса



Рис. 6: Зависимость окружных напряжений от радиуса

4.2 Коэффициент Пуассона $\nu = 0.4999$

Результаты расчётов представлены ниже. В таблицах ?? и ?? приведены нормы ошибок вычисления перемещений, радиального и окружного напряжений, в таблицах ?? и ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 7: Нормы ошибок для L_2

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	9.43×10^{-2}	2.16×10^{-1}	6.82×10^{-2}
	0.01	2.54×10^{-2}	6.52×10^{-2}	2.07×10^{-2}
	0.005	6.47×10^{-3}	2.01×10^{-2}	6.51×10^{-3}
Смешанный	0.02	2.78×10^{-5}	2.72×10^{-2}	1.07×10^{-2}
	0.01	6.94×10^{-6}	1.37×10^{-2}	5.36×10^{-3}
	0.005	1.74×10^{-6}	6.9×10^{-3}	2.68×10^{-3}

Таблица 8: Отношение норм ошибок для L_2

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	3.72	3.31	3.3
	0.02/0.005=4	14.6	10.8	10.5
Стандартный	0.02/0.01=2	4	1.98	2
	0.02/0.005=4	16	3.95	4

Анализ полученных результатов показал, что:

- полученные двумя методами радиальные и окружные напряжения отличаются друг от друга, при этом решение полученное смешанным методом конечных элементов, близко к аналитическому решению;
- для смешанного МКЭ по-прежнему для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости, для перемещений - квадратичная;
- для стандартного МКЭ ошибка при измельчении сетки убывает, но скорости сходимости стали другими;

Таблица 9: Нормы ошибок для C_1

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	9.43×10^{-2}	2.21×10^{-1}	5.62×10^{-2}
	0.01	2.54×10^{-2}	6.65×10^{-2}	1.62×10^{-2}
	0.005	6.47×10^{-3}	2.03×10^{-2}	6.07×10^{-3}
Смешанный	0.02	2.78×10^{-5}	2.62×10^{-2}	1.57×10^{-2}
	0.01	6.94×10^{-6}	1.32×10^{-2}	7.92×10^{-3}
	0.005	1.74×10^{-6}	6.64×10^{-3}	3.98×10^{-3}

Таблица 10: Отношение норм ошибок для C_1

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	3.72	3.32	3.48
	0.02/0.005=4	14.6	10.9	9.26
Смешанный	0.02/0.01=2	4	1.98	1.98
	0.02/0.005=4	16	3.95	3.94

Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным методом конечных элементов, соответствуют приложенным давлениям, а для стандартного метода конечных элементов наблюдаются отличия.

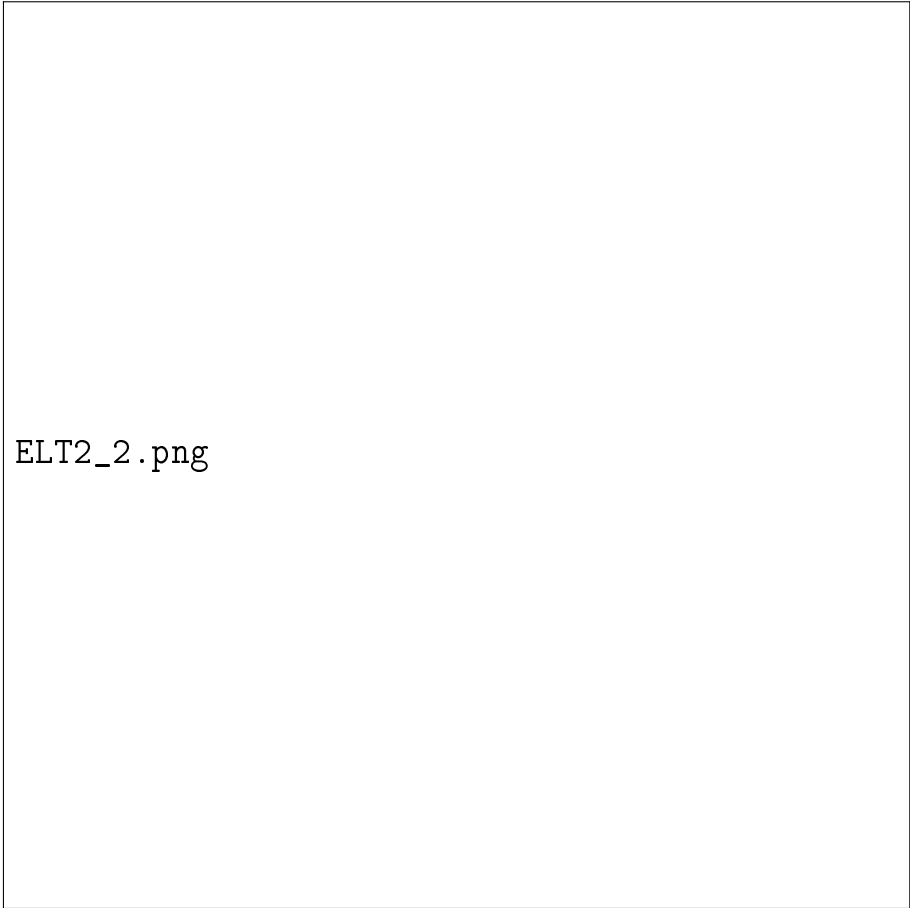
На рисунках ??-?? показаны распределения напряжений для сетки с шагом $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом - численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.

Таблица 11: Вычисление ε_V^*

Тип МКЭ	Минимальное значение	Максимальное значение
Стандартный	3.17×10^{-5}	1.12×10^{-4}
Смешанный	3.17×10^{-5}	1.12×10^{-4}



Рис. 7: Зависимость радиальных напряжений от радиуса



ELT2_2.png

Рис. 8: Зависимость окружных напряжений от радиуса

4.3 Коэффициент Пуассона $\nu = 0.49999$

Результаты расчётов представлены ниже. В таблицах ?? и ?? приведены нормы ошибок вычисления перемещений, радиального и окружного напряжений, в таблицах ?? и ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 12: Нормы ошибок для L_2

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	5.1×10^{-1}	1.05	3.27×10^{-1}
	0.01	2.07×10^{-1}	4.33×10^{-1}	1.34×10^{-1}
	0.005	6.11×10^{-2}	1.32×10^{-1}	4.07×10^{-2}
Смешанный	0.02	2.78×10^{-5}	2.72×10^{-2}	1.07×10^{-2}
	0.01	6.94×10^{-6}	1.37×10^{-2}	5.36×10^{-3}
	0.005	1.74×10^{-6}	6.9×10^{-3}	2.68×10^{-3}

Таблица 13: Отношение норм ошибок для L_2 для упругого случая

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	2.47	2.42	2.44
	0.02/0.005=4	8.35	7.96	8.04
Смешанный	0.02/0.01=2	4	1.98	2
	0.02/0.005=4	16	3.95	4

Анализ полученных результатов показал, что:

- полученные двумя методами радиальные и окружные напряжения значительно отличаются друг от друга, при этом решение полученное смешанным методом конечных элементов, всё также достаточно близко к аналитическому решению;
- для смешанного метода для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости, для перемещений - квадратичная;

Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным методом конечных элементов,

Таблица 14: Нормы ошибок для C_1 для упругого случая

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.02	5.1×10^{-1}	1.08	2.95×10^{-1}
	0.01	2.07×10^{-1}	4.47×10^{-1}	1.2×10^{-1}
	0.005	6.11×10^{-2}	1.36×10^{-1}	3.6×10^{-2}
Смешанный	0.02	2.78×10^{-5}	2.62×10^{-2}	1.57×10^{-2}
	0.01	6.94×10^{-6}	1.32×10^{-2}	7.92×10^{-3}
	0.005	1.74×10^{-6}	6.64×10^{-3}	3.98×10^{-3}

Таблица 15: Отношение норм ошибок для C_1 для упругого случая

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.02/0.01=2	2.47	2.42	2.45
	0.02/0.005=4	8.35	7.94	8.19
Смешанный	0.02/0.01=2	4	1.98	1.98
	0.02/0.005=4	16	3.95	3.94

соответствуют приложенным давлениям, а для стандартного метода конечных элементов наблюдаются отличия.

На рисунках ??-?? показаны распределения напряжений для сетки с шагом $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом- численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.

Таблица 16: Вычисление ε_V^*

Тип МКЭ	Минимальное значение	Максимальное значение
Стандартный	5.45×10^{-6}	1.27×10^{-5}
Смешанный	5.45×10^{-6}	1.27×10^{-5}



Рис. 9: Зависимость радиальных напряжений от радиуса



Рис. 10: Зависимость окружных напряжений от радиуса

4.4 Коэффициент Пуассона $\nu = 0.5$

Для несжимаемого материала расчёт стандартным МКЭ невозможен, расчёт проведён только смешанным МКЭ. Результаты расчётов представлены ниже. В таблицах ?? и ?? приведены нормы ошибок вычисления перемещений, радиального и окружного напряжений, в таблицах ?? и ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 17: Нормы ошибок для L_2 для упругого случая

h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
0.02	2.78×10^{-5}	2.72×10^{-2}	1.07×10^{-2}
0.01	6.94×10^{-6}	1.37×10^{-2}	5.36×10^{-3}
0.005	1.74×10^{-6}	6.9×10^{-3}	2.68×10^{-3}

Таблица 18: Отношение норм ошибок для L_2 для упругого случая

отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
0.02/0.01=2	4	1.98	2
0.02/0.005=4	16	3.95	4

Анализ полученных результатов показал, что:

- полученные методом смешанных конечных элементов радиальные и окружные напряжения достаточно близко к аналитическому решению;
- для одних и тех же сеток в расчётах смешанным МКЭ с разными значениями коэффициента Пуассона получены одни и те же ошибки;

Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным методом конечных элементов, соответствуют приложенным давлениям.

На рисунках ??-?? показаны распределения напряжений для сетки с шагом $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом - численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.

Таблица 19: Нормы ошибок для C_1 для упругого случая

h, мм	относительная погрешность перемещений, м	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
0.02	2.78×10^{-5}	2.62×10^{-2}	1.57×10^{-2}
0.01	6.94×10^{-6}	1.32×10^{-2}	7.92×10^{-3}
0.005	1.74×10^{-6}	6.64×10^{-3}	3.98×10^{-3}

Таблица 20: Отношение норм ошибок для C_1 для упругого случая

отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей u	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
0.02/0.01=2	4	1.98	1.98
0.02/0.005=4	16	3.95	3.94

5 Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Расчёты проведены с использованием явного и неявного методов Эйлера. В ходе вычислений показано, что численные решения, полученные двумя разными методами, практически не отличаются друг от друга, поэтому в дальнейшем приведены только результаты, полученные явным методом Эйлера.

Рассмотрим случай, когда внутреннее напряжение $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа, модуль Юнга $E = 70000$ МПа, коэффициент

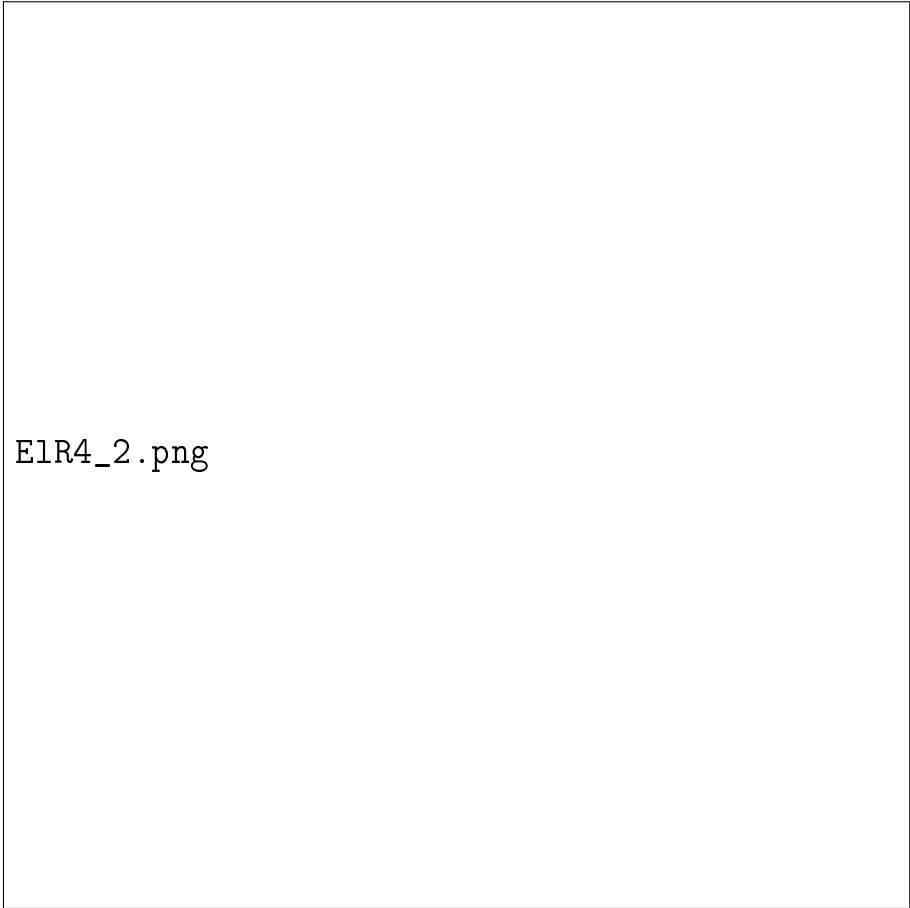
Таблица 21: Вычисление ε_V^*

Минимальное значение	Максимальное значение
-1.85884×10^{-13}	1.74592×10^{-13}

Таблица 22: Время решения задачи

h	Смешанный МКЭ
0.02	0.004329
0.01	0.030608
0.005	0.168966

Пуассона $\nu = 0.34$, в законе ползучести $n=3$, $B = 10^{-32}$. Для понимания поведения толстостенной трубы при увеличении со временем деформации ползучести построим графики зависимости относительного отклонения численного радиального напряжения от аналитического решения в пространстве L_2 от времени для разных методов. Полученные результаты для стандартного и смешанного методов конечных элементов наглядно показывают характер изменения вычисленных напряжений.



E1R4_2.png

Рис. 11: Зависимость радиальных напряжений от радиуса


На рисунке ?? видно, что решение перестраивается, приближаясь к аналитическому решению задачи установившейся ползучести. До момента времени 1500 часов численное и аналитическое решения максимально близки, причём чем подробнее сетка, тем меньше ошибка. В дальнейшем аналитическое и численное решения начинают расходиться, причём чем мельче сетка, тем медленнее происходит рост ошибки, что продемонстрировано на рисунках ??-??. Стоит отметить, что участки на графиках зависимости нормы ошибки от времени, где решение ещё перестраивается от упругого случая к установившейся ползучести, не сильно отличаются для сеток $N=25$, $N=50$ и $N=100$, что позволяет нам пренебречь этими отрезками на рисунках. Для смешанного метода ошибка увеличивается значительно медленнее, чем при использовании стандартного метода.

В рассмотренной задаче использовалась математическая модель для малых деформаций, поэтому ограничим расчёт моментом времени, когда радиальная деформация достигает $\approx 5\%$. На рисунке ?? показан график зависи-




Рис. 12: Зависимость окружных напряжений от радиуса

мости максимума модуля радиальной деформации от времени.



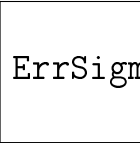
ErrSigmaRZoom.png

Рис. 13: Зависимость нормы ошибки от времени до 2000 часов




ErrSigmaR_1.png

Рис. 14: Зависимость нормы ошибки от времени для сетки N=25




ErrSigmaR_2.png

Рис. 15: Зависимость нормы ошибки от времени для сетки N=50



ErrSigmaR_3.png

Рис. 16: Зависимость нормы ошибки от времени для сетки N=100



EpsRMax.png

Рис. 17: Зависимость модуля максимума радиального напряжения от времени

Из рисунка ?? видно, что нужный нам момент времени ≈ 50000 часов, после этого деформации перестают быть малыми. Кроме моментов времени $T=1500$ часов и $T=50000$ часов рассмотрим промежуточный момент времени $T=10000$ часов для анализа характера изменения значений напряжений.

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле (??), вычисление аналитического окружного напряжения - по формуле (??). Расчёт абсолютной погрешности произведён по формуле (??), расчёт относительной погрешности - по формуле (??).

В ходе решения вычисляется величина ε_V^* для оценки отношения объёмной и девиаторной частей деформации по формуле (??). На рисунке ?? приведён график зависимости максимума $|\varepsilon_V^*|$ от времени. Видно, что с ростом

времени девиаторная часть деформации начинает на два порядка превышать объёмную.

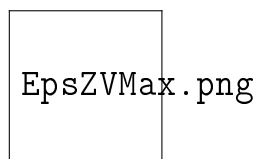


Рис. 18: Логарифмическая зависимость отношения объемной деформации к интенсивности деформации от времени

5.1 T=1500 часов

Решение уже перестроилось от упругого случая к установившейся ползучести. Проведены серии расчётов на разных сетках двумя методами. Результаты расчётов представлены ниже. В таблице ?? приведены нормы ошибок вычисления радиального и окружного напряжений, в таблице ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 23: Нормы ошибок для L_2

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.04	0.04614	0.006752
	0.02	0.02311	0.004228
	0.01	0.01176	0.003169
Смешанный	0.04	0.04476	0.007056
	0.02	0.02276	0.004283
	0.01	0.01168	0.003175

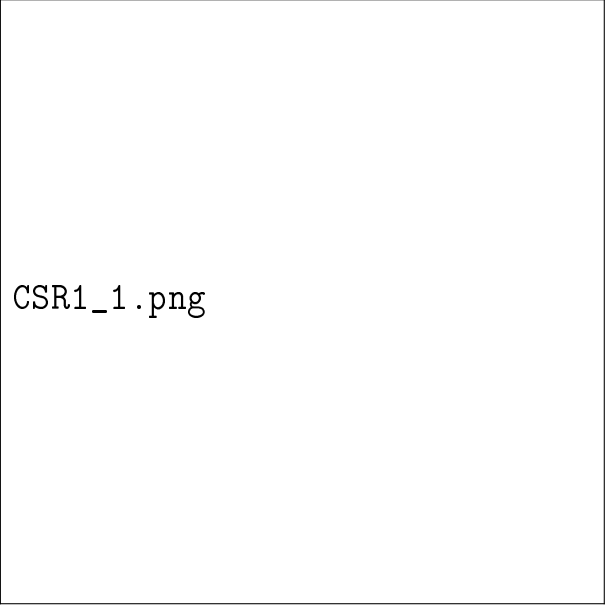
Таблица 24: Отношение норм ошибок для L_2

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.04/0.02=2	1.997	1.597
	0.04/0.01=4	3.923	2.13
Смешанный	0.04/0.02=2	1.967	1.648
	0.04/0.01=4	3.834	2.222

Анализ полученных результатов показал, что для всех трёх сеток полученные двумя методами радиальные и окружные напряжения достаточно близки друг к другу и к аналитическому решению. При измельчении сетки ошибка убывает по линейному закону;

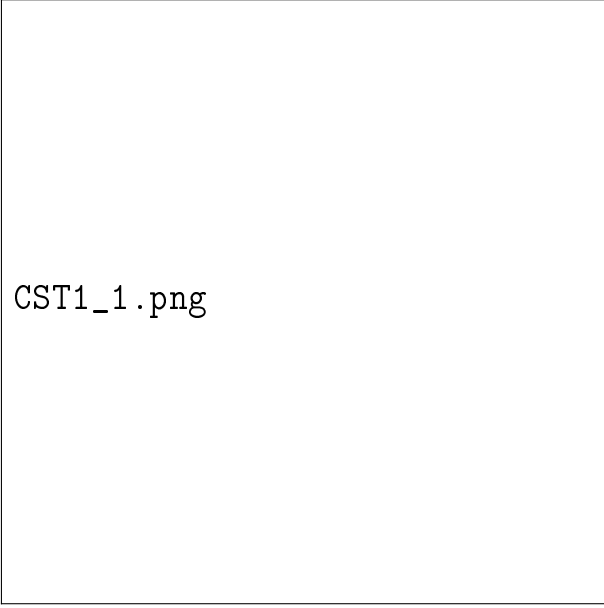
Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным и стандартным методами конечных элементов, соответствуют приложенным давлениям.

На рисунках ??-?? - ??-?? показаны распределения напряжений для сеток с шагами $h=0.04$ ($N=25$), $h=0.02$ ($N=50$) и $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом - численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.



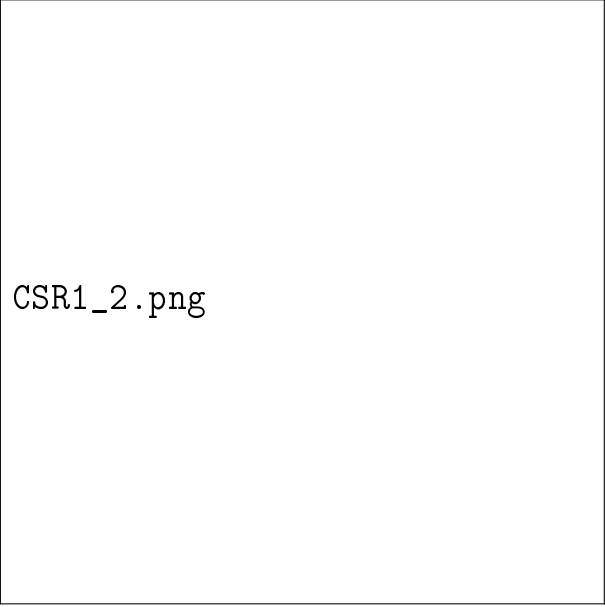
CSR1_1.png

а: зависимость радиальных
напряжений от радиуса для $h=0.02$



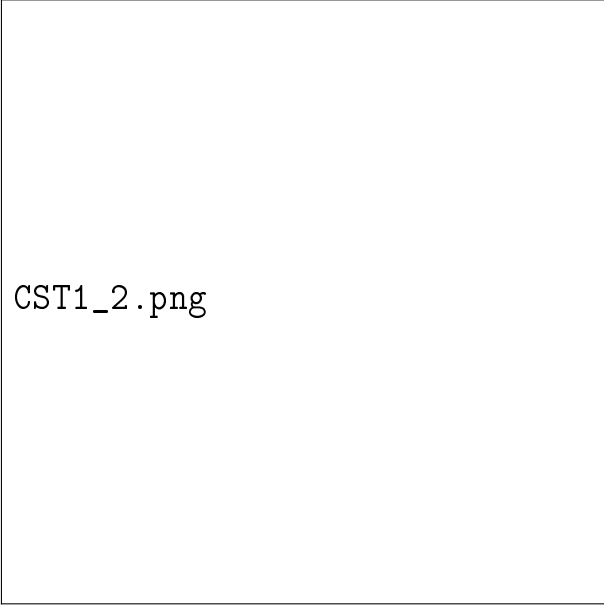
CST1_1.png

б: зависимость окружных
напряжений от радиуса для $h=0.02$



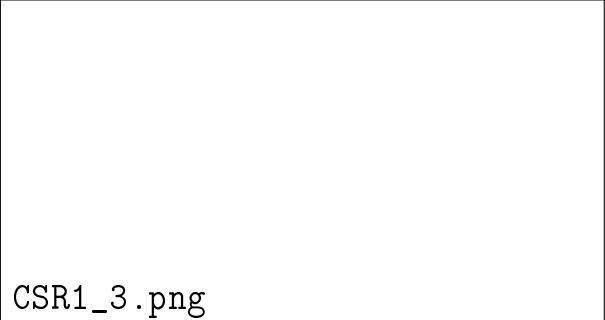
CSR1_2.png

в: зависимость радиальных
напряжений от радиуса для $h=0.01$

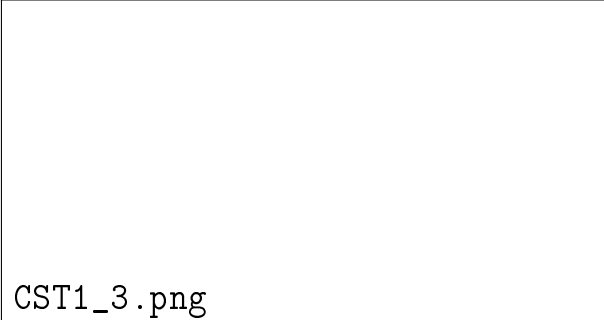


CST1_2.png

г: зависимость окружных
напряжений от радиуса для $h=0.01$



CSR1_3.png



CST1_3.png

5.2 T=10000 часов

Проведены серии расчётов на разных сетках двумя методами. Результаты расчётов представлены ниже. В таблице ?? приведены нормы ошибок вычисления радиального и окружного напряжений, в таблице ?? - отношения норм ошибок.

Таблица 25: Нормы ошибок для L_2

Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.04	0.05523	0.004521
	0.02	0.02506	0.002507
	0.01	0.01186	0.001412
Смешанный	0.04	0.04736	0.005514
	0.02	0.02304	0.002976
	0.01	0.01135	0.001549

Таблица 26: Отношение норм ошибок для L_2

Метод конечных элементов	отношение шагов по пространству	отнош. погрешностей σ_{rr}	отнош. погрешностей $\sigma_{\varphi\varphi}$
Стандартный	0.04/0.02=2	2.204	1.803
	0.04/0.01=4	4.656	3.201
Смешанный	0.04/0.02=2	2.056	1.853
	0.04/0.01=4	4.172	3.559

Анализ полученных результатов показал, что в данный момент времени для радиальных напряжений:

- норма ошибки для стандартного МКЭ на самой крупной сетке $N=25$ увеличилась (по сравнению с моментом времени $T=1500$) на 19%, для смешанного МКЭ - на 6%;
- норма ошибки для стандартного МКЭ на стандартной сетке $N=50$ увеличилась на 8%, для смешанного МКЭ - на 1%;
- норма ошибки для стандартного МКЭ на самой мелкой сетке $N=100$ увеличилась на 1%, для смешанного МКЭ на самой мелкой сетке $N=100$ уменьшилась на 0.8%;

Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным методом конечных элементов, лучше соответствуют приложенным давлениям, а для стандартного метода конечных элементов наблюдаются видимые отличия для сетки с шагом $h=0.02$ ($N=50$).

5.3 T=50000 часов

Проведены серии расчётов на разных сетках двумя методами. Результаты расчётов представлены ниже. В таблице ?? приведены нормы ошибок вычисления радиального и окружного напряжений.

Таблица 27: Нормы ошибок для L_2

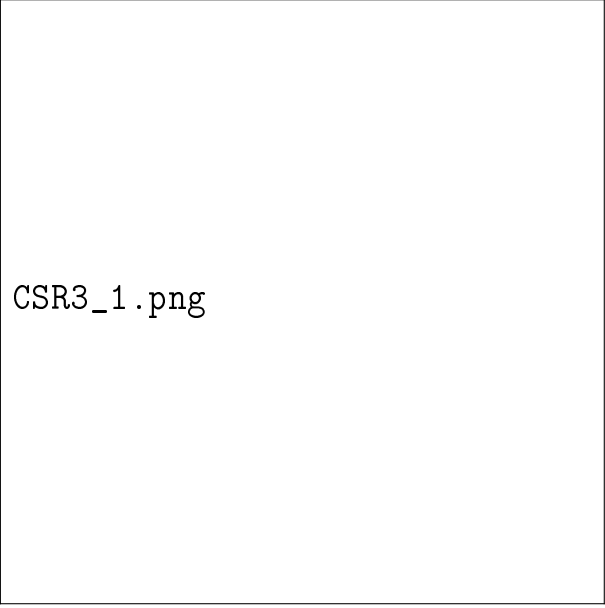
Метод конечных элементов	h, мм	относительная погрешность радиальных напряжений, МПа	относительная погрешность окружных напряжений, МПа
Стандартный	0.04	0.09862	0.01862
	0.02	0.03653	0.004189
	0.01	0.01477	0.00116
Смешанный	0.04	0.06174	0.005393
	0.02	0.02674	0.002291
	0.01	0.01229	0.001315

Анализ полученных результатов показал, что в данный момент времени для радиальных напряжений:

- норма ошибки для стандартного МКЭ на самой крупной сетке $N=25$ увеличилась (по сравнению с моментом времени $T=1500$) на 113%, для смешанного МКЭ - на 38%;
- норма ошибки для стандартного МКЭ на стандартной сетке $N=50$ увеличилась на 58%, для смешанного МКЭ - на 17%;
- норма ошибки для стандартного МКЭ на самой мелкой сетке $N=100$ увеличилась на 25%, для смешанного МКЭ - на 5%;

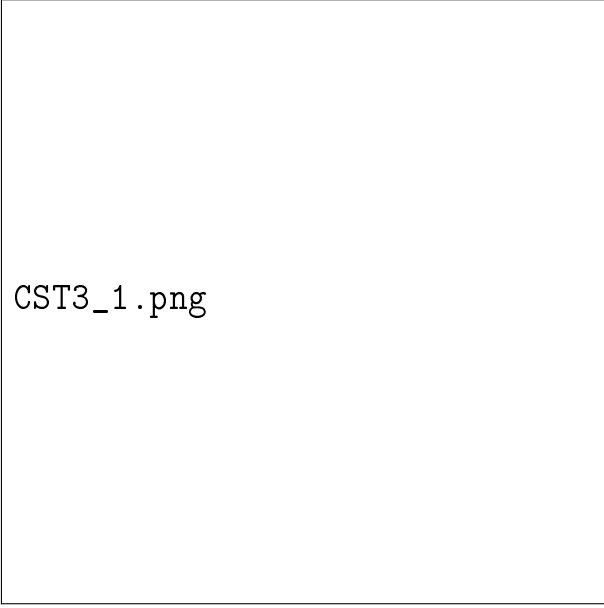
Отметим, что значения радиальных напряжений на внутренней и внешней поверхностях трубы, полученные смешанным методом конечных элементов, лучше соответствуют приложенным давлениям, но уже наблюдается расхождение. Для стандартного метода конечных элементов наблюдаются отличия для сеток с шагами $h=0.01$ ($N=100$) и $h=0.02$ ($N=50$).

На рисунках ??-?? - ??-?? показаны распределения напряжений для сеток с шагами $h=0.04$ ($N=25$), $h=0.02$ ($N=50$) и $h=0.01$ ($N=100$). Синим обозначено аналитическое решение, красным квадратом - численное решение, полученное стандартным методом конечных элементов, чёрным ромбом - численное решение, полученное смешанным методом конечных элементов.



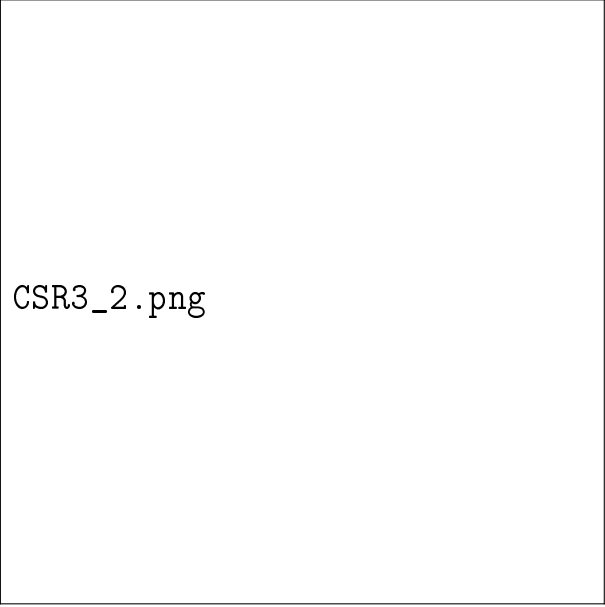
CSR3_1.png

а: зависимость радиальных
напряжений от радиуса для $h=0.02$



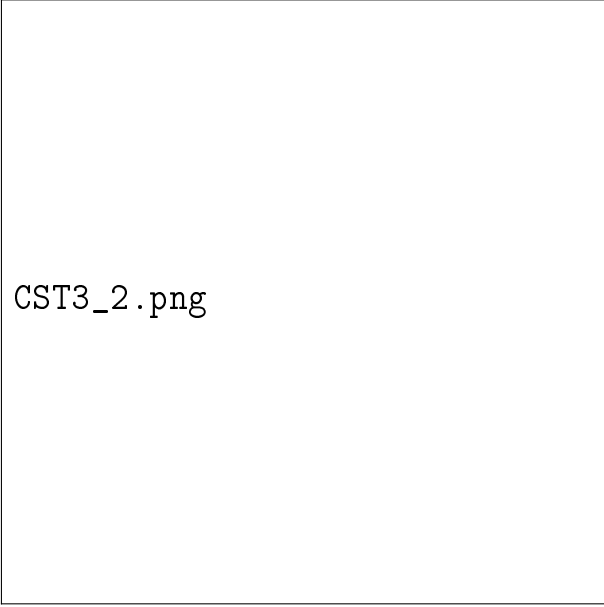
CST3_1.png

б: зависимость окружных
напряжений от радиуса для $h=0.02$



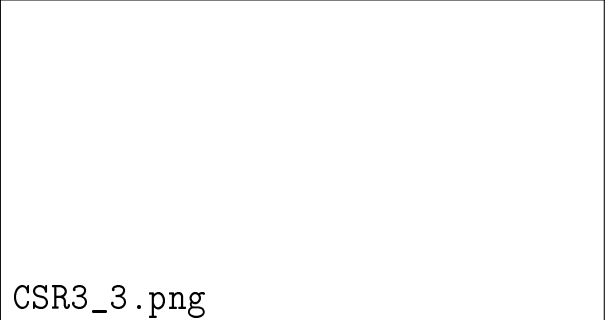
CSR3_2.png

в: зависимость радиальных
напряжений от радиуса для $h=0.01$

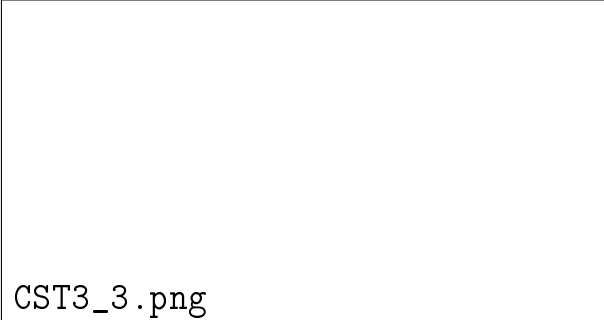


CST3_2.png

г: зависимость окружных
напряжений от радиуса для $h=0.01$



CSR3_3.png



CST3_3.png

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цели и задачи, поставленные в бакалаврской работе, выполнены. Изучены математические модели для краевой задачи упругости и краевой задачи с учётом деформации ползучести, исследованы стандартный и смешанный методы конечных элементов для численного решения поставленной задачи. Данные методы реализованы в виде программы, написанной на языке $C++$. Проведены серии расчётов для задачи нагружения упругой трубы давлением. Выполнено тестирование программы путём сравнения численных решений с аналитическим решением рассмотренной задачи, проведено сопоставление численных решений, полученных стандартным и смешанным методами конечных элементов.

Проведённый анализ норм ошибок для краевой задачи упругости показал, что для расчёта перемещений получен второй порядок точности, а для напряжений - первый порядок. Сравнение результатов при разных коэффициентах Пуассона показало, что для слабосжимаемого материала правильнее использовать смешанный метод конечных элементов, так как ошибки в вычислении напряжений при решении стандартным методом конечных элементов существенно возрастают, в то время как смешанный метод конечных элементов обладает стабильной точностью.

Проведённый анализ норм ошибок для краевой задачи с учётом деформации ползучести показал, что смешанный метод конечных элементов эффективнее стандартного метода конечных элементов, так как с течением времени аналитическое и численное решения начинают расходиться. Чем мельче сетка, тем медленнее происходит рост ошибки. Для смешанного метода ошибка увеличивается значительно медленнее, чем при использовании стандартного метода.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Зарубин В.С., Кувыркин Г.Н. Математические модели механики и электродинамики сплошной среды. - М. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2008.-512 с.
- [2] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. - М. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010.-591 с.
- [3] Сагдеева, Ю.А. Введение в метод конечных элементов: метод.пособие/Ю.А.Сагдеева, С.П.Копысов, А.К.Новиков.-Ижевск:Изд-во "Удмуртский университет".2011. 44с
- [4] Погорелов В.И. Строительная механика тонкостенных конструкций.-СПб.: БХВ-Петербург,2007.-528 с.:ил.
- [5] Алексеев Г.В. Численные методы математической физики.Введение в метод конечных элементов.-Владивосток:Изд-во "Институт прикладной математики ДВО РАН".1999. 125с.
- [6] Князева А.Г. Теплофизические основы современных методов металлообработки.-Томск:Изд-во "Томский политехнический университет".2009.-48 с.
- [7] Князева А.Г. Различные варианты метода прогонки.-Томск:Изд-во "Томский политехнический университет".2006.-8 с.
- [8] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. - М. МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2010.-591 с.
- [9] Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. М., «Машиностроение», 1975, 400 с. с ил.
- [10] Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие— Киев: Наук. думка, 1981.— 496 с.
- [11] Митчелл Э., Уэйт Р. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными. М.: Мир, 1981. - 216 с.

- [12] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Fox D.D. The finite element method for solid and structural mechanics, 5th Edition. - Elsevier, 2014. — 657 p
- [13] Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Реализация условия механического контакта упругих тел в рамках МКЭ при различном выборе базисных функций: одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2015. № 90. 25 с.
- [14] Станкевич И.В., Волков С.С. Алгоритмы решения краевых задач МДТТ с учётом деформации ползучести. Математика и математическое моделирование. 2018;(1):1-14.
- [15] В.Л. Рвачев. Геометрические приложения алгебры логики. Изд-во «Техника», Киев, 1967 г.