1 Метод декомпозиции Шварца. Одномерный случай.

Расмотрим в заданной расчётной области $\Omega = [r_1, r_2]$ дифференциальное уравнение равновесия для трубы, записанное в матричном виде:

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f}. \tag{1}$$

Разобъем область Ω, для примера, на две пересекающиеся подобласти: $\Omega = \cup_{i=1}^{2} \Omega_i$, где $\Omega_1 = [r_1, r_3]$ и $\Omega_2 = [r_4, r_2]$ (r_1 и r_2 - внешние границы, r_4 и r_3 - внутренние границы). Обозначим начальное линейное приближение как u^0.

(Здесь будет рисунок разбиения)

Для начала, решаем задачу, записанную в матричной форме, в области Ω_1:

$$K_{\Omega_1} u^{n+\frac{1}{k}} = f^{n+\frac{1}{k}} \tag{2}$$

с кинематическим граничным условием на границе r_1

$$u(r_1) = u^0$$

и силовым граничным условием на границе r_1

$$\sigma_{r_1} = p_{r_1}, \tag{3}$$

где k - количество подобластей (в нашем случае k=2).

Следующим шагом решим задачу, записанную в матричной форме, в области Ω_2:

$$K_{\Omega_2} u^{n+\frac{2}{k}} = f^{n+\frac{2}{k}} \tag{4}$$

с кинематическим граничным условием на границе r_4

$$u(r_4) = u^{\frac{1}{2}} \Omega_1$$

и силовым граничным условием на границе r_2

$$\sigma_{r_2} = p_{r_2}, \tag{5}$$

где k - количество подобластей (в нашем случае k=2). Дальнейший итерационный процесс решения дифференциального уравнения

$$K_{\Omega_i} u^{n+\frac{i}{k}} = f^{n+\frac{i}{k}},\ i = 1, \ldots, k \tag{6}$$

где k -количество подобластей, продолжается до тех пор, пока выполняется условие

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(u^{n+1} - u^{n})^2}{(u^{n+1})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \tag{7}$$

где u^{n+1} - численное решение, полученное по прошествию одного расчёта итерационного процесса, u^{me} - численное решение, полученное на прошлой итерации, s_i - полусумма двух шагов $\dfrac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $\sum s_i$ - сумма всех шагов на всём отрезке.

2 Результаты решения задачи для упругой трубы. Одномерный случай.

Рассмотрим случай, когда внутреннее давление $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа. Тогда аналитическое радиальное перемещение считается по формуле :

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E} \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{a^2 b^2}{r} \frac{p_a}{b^2 - a^2}. \tag{8}$$

Вычисление аналитического радиального напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \tag{9}$$

Вычисление аналитического окружного напряжения производится по формуле :

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{p_a}{b^2 - a^2} \tag{10}$$

Для решения поставленной задачи примем, что материал цилиндра имеет следующие параметры: модуль Юнга $E - 70000$ МПА и коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$. Внутренний радиус цилиндра $a - 10$ мм, внешний радиус цилиндра $b - 20$ мм.

Расчёт относительной погрешности произведён по формуле для нормы, являющейся конечномерным аналогам следующих пространства L_2:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(u_i^{an} - u_i^{me})^2}{(u_i^{an})^2} \frac{s_i}{\sum s_i}} \tag{11}$$

где u^{an} - аналитическое решение, u^{me} - численное решение, s_i - полусумма двух шагов $\frac{h_i + h_{i+1}}{2}$, $\sum s_i$ - сумма всех шагов на всём отрезке.
Коэффициент относительного захлёста (Overlapping coefficient) - 0.24. Критерий останова - 10^{-4}.

Кол-во подобластей \ Критерий останова ε	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}
2	59	92	124	157
4	205	387	576	765
10	609	1691	3062	4473

Проведена серия расчётов на сетке N=100. Результаты расчётов представлены ниже.

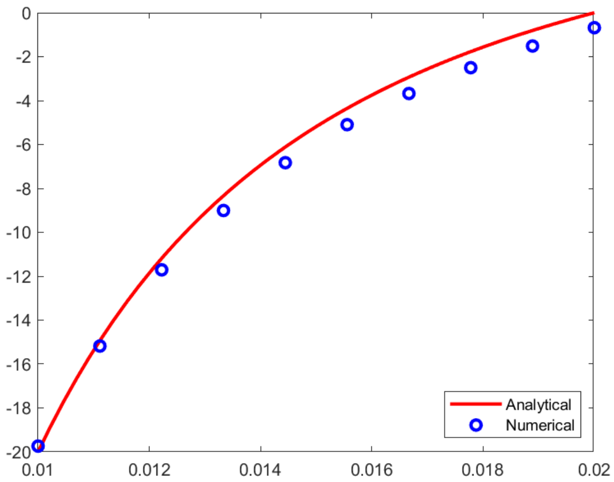

Рис. 1: Зависимость радиальных напряжений от радиуса

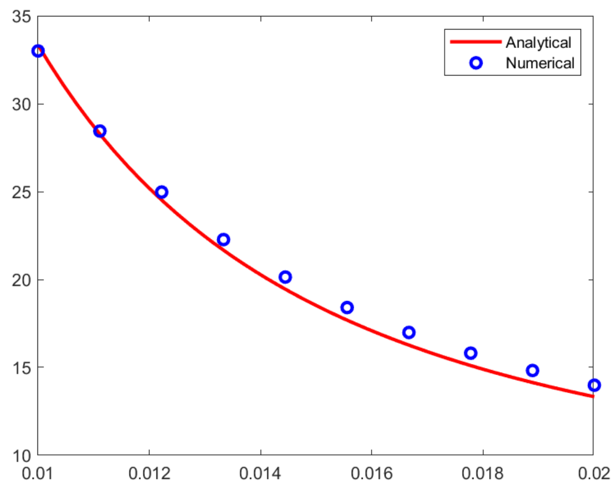

Рис. 2: Зависимость окружных напряжений от радиуса

Таблица 1: Относительная радиальная погрешность , пространство L_2

Сетка / Кол-во подобластей	50	100	200
1	2.72×10^{-2}	1.36×10^{-2}	6.78×10^{-3}
2	2.65×10^{-2}	1.33×10^{-2}	6.61×10^{-3}
4	2.53×10^{-2}	1.21×10^{-2}	5.57×10^{-3}
10	1.62×10^{-2}	1.05×10^{-2}	9.53×10^{-3}

Таблица 2: Относительная окружная погрешность , пространство L_2

Сетка / Кол-во подобластей	50	100	200
1	1.14×10^{-2}	5.69×10^{-3}	2.82×10^{-3}
2	1.31×10^{-2}	7.38×10^{-3}	4.57×10^{-3}
4	2.22×10^{-2}	1.67×10^{-2}	1.39×10^{-2}
10	1.04×10^{-1}	1.01×10^{-1}	8.01×10^{-2}

Расчёты относительных погрешностей были произведены по формуле 11. Можно заметить, что ошибки численного решения по сравнению с аналитическим для случаев, когда нет и разбиений и когда подобластей 2, 4 и 10, для радиального напряжения остаются приблизительно такими же (кроме случая 10 ("десяти") подобластей для сетки N=100). Для случая окружных напряжений значения разнятся вплоть до изменения порядка.

(Мои предположения - различие значений коэффициента захлёста. Кое-где пришлось брать его $\approx$0.20)