

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное агентство по образованию  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Э. БАУМАНА  
Факультет "'Фундаментальные науки"'  
Кафедра "'Прикладная математика"'

Применение различных вариантов  
метода декомпозиции  
для численного решения  
задач деформирования упругих тел

Исполнитель:

Научный руководитель:

Матвеев Михаил

канд. физ.-мат. наук

Родин Александр Сергеевич

Москва, 2021 г.

## Цель

Исследование сходимости итерационного цикла при решении задач деформирования упругих тел различными методами декомпозиции области

## Задачи

- применение МКЭ для решения задач теории упругости;
- реализация различных методов Шварца;
- анализ применения мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца при решении ряда задач упругого деформирования тела;

# Постановка задачи механики твёрдого деформируемого тела

Уравнения равновесия в деформируемом теле, занимающем область  $G$  с границей  $\partial G$ :

$$L\mathbf{u} = -\nabla\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad x \in G$$

с кинематическими и силовыми граничными условиями

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = u_0, \quad x \in \partial G_D,$$

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}(\mathbf{x}), \quad x \in \partial G_N,$$

где  $\partial G_D$  - участок границы области  $G$ , на котором заданы кинематические условия,  $\partial G_N$  - участок границы области  $G$ , на котором заданы силовые условия.

# Основные положения для метода Шварца

Рассмотрим произвольную область  $G$ , разделённую на конечное число подобластей  $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$  с внутренними границами  $\partial G_1, \dots, \partial G_M$ .

Данные подобласти пересекаются, необходимо ввести дополнительные обозначения граничных значений:

$$\partial G_{N,i} = \partial G_N \cap \partial G_i$$

$$\partial G_{D,i} = \partial G_D \cap \partial G_i$$

$$\partial \tilde{G}_i = G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap \partial G_{N,i})$$

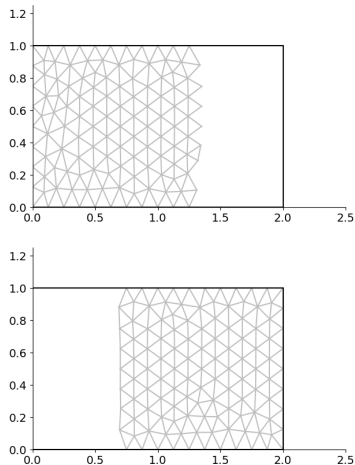


Рис. 1: Схема декомпозиции расчётной области

# Мультипликативный и аддитивный методы Шварца

Основные формулы  
мультипликативного метода Шварца:

$$\begin{aligned}L(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), & x \in G_i \\ \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), & x \in \partial G_{N,i} \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, & x \in \partial G_{D,i} \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), & x \in \partial \tilde{G}_i\end{aligned}$$

Мультипликативный метод Шварца  
последователен, решение на каждой  
итерации зависит от решения на  
предыдущей подобласти.

Основные формулы аддитивного метода  
Шварца:

$$\begin{aligned}L(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), & x \in G_i \\ \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), & x \in \partial G_{N,i} \\ u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, & x \in \partial G_{D,i} \\ u^{n+1}(x) &= u^n(x), & x \in \partial \tilde{G}_i\end{aligned}$$

В конце каждой итерации решение  
вычисляется по формуле:

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент  $\alpha$  - итерационный  
параметр, от которого зависит скорость  
сходимости итерационного процесса.

# Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для улучшения сходимости метода Шварца используются двухуровневые методы, заключающиеся в наличии помимо основной сетки грубой сетки.

Для двухуровневого аддитивного метода Шварца решение на каждой итерации ищется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u^n) + \alpha \Delta \hat{u}_0^{n+1},$$

где  $\Delta \hat{u}_0^{n+1}$  - решение задачи, полученное на грубой сетке и пересчитанное на узлы основной сетки путём интерполяции.

Решение в узлах грубой сетки ищется по формуле

$$\mathbf{K}_c \Delta u_0^{n+1} = \mathbf{R}_c^{n+1}$$

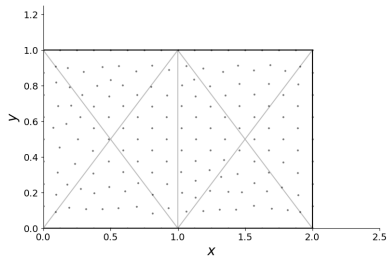


Рис. 2: Схема расчётной области с прямоугольной областью в качестве грубой области

Вектор правой части для грубой сетки вычисляется по формуле

$$\mathbf{R}_c^{n+1} = \mathbf{A} \mathbf{r}^n,$$

где  $\mathbf{r}^n$  - вектор невязки в узлах базовой сетки,  $\mathbf{A}$  - интерполяционная матрица.

$$\Delta \hat{u}_0^{n+1} = \mathbf{F} \Delta u_0^{n+1}$$

# Первая тестовая задача

## Основные сведения и таблицы

Расчётная область - прямоугольник, закреплённый с левой стороны по оси  $OX$  и с нижней стороны по оси  $OY$ . Внешнее давление  $p = 50$  МПа, ширина тела  $a = 2$  см, высота тела  $b = 1$  см.

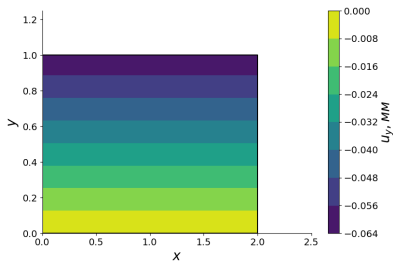


Рис. 3: Распределение перемещений во всей расчётной области

МДО	M	h = 0.05	h = 0.025	h = 0.0125	h = 0.00625
Мульти	2	23	23	23	22
	4	102	100	99	99
	8	401	386	385	383
Адд	2	80	79	79	78
	4	346	338	336	334
	8	1303	1254	1251	1250
2Адд	2	15	15	14	15
	4	14	14	16	15
	8	1	16	17	17

Таблица 1: Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага мелкой сетки

Количество подобл-тей	H = 1	H = 0.5	H = 0.25	H = 0.125
2	17	15	14	14
4	29	19	16	16
8	42	26	17	17

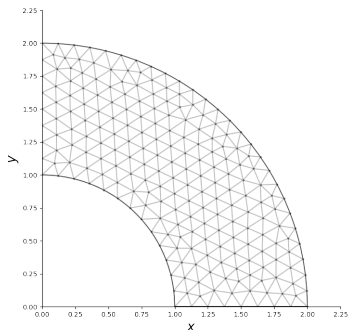
Таблица 2: Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки

# Вторая тестовая задача

## Основные сведения и таблицы

Расчётная область - сектор поперечного сечения толстостенной трубы, нагруженной внешним давлением.

Внутренний радиус  $r_a = 1$  см, внешний радиус  $r_b = 2$  см, внешнее давление  $p = 5$  МПа.



МДО	M	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
Мульти	2	44	44	44	43
	4	178	169	169	168
	8	528	497	494	488
Адд	2	68	38	40	42
	4	128	170	110	120
	8	463	408	393	398
2Адд	2	15	15	14	15
	4	14	14	16	15
	8	16	16	17	17

**Таблица 3:** Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага мелкой сетки

Количество подобл-тей	$H = 0.5$	$H = 0.25$	$H = 0.125$
2	17	16	15
4	21	19	15
8	23	19	17

**Таблица 4:** Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки



# Вторая тестовая задача

## Аналитические решения

Для толстостенного цилиндра известно аналитическое решение:

$$u = \frac{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}{E} \frac{(p_a \cdot r_a^2 - p_b \cdot r_b^2)}{(r_b^2 - r_a^2)} r + \frac{1 + \nu}{E} \frac{(r_a r_b)^2}{r} \frac{(p_a - p_b)}{(r_b^2 - r_a^2)},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{(p_a \cdot r_a^2 - p_b \cdot r_b^2)}{b^2 - a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{(p_a \cdot r_a^2 - p_b \cdot r_b^2)}{b^2 - a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2} \frac{(p_a - p_b)}{b^2 - a^2}.$$

Шаг сетки	$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
0.05	$1.39 \times 10^{-4}$	$2.93 \times 10^{-2}$	$1.13 \times 10^{-2}$
0.025	$3.50 \times 10^{-5}$	$1.42 \times 10^{-2}$	$5.60 \times 10^{-3}$
0.0125	$8.72 \times 10^{-6}$	$7.04 \times 10^{-3}$	$2.84 \times 10^{-3}$

Таблица 5: Ошибки численного решения

Шаг сетки	$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
0.05	1	1	1
0.05	4.1	2.5	2.02
0.05	16.21	4.46	4.28

Таблица 6: Отношение ошибок численного решения

# Вторая тестовая задача

## Дополнительные графики

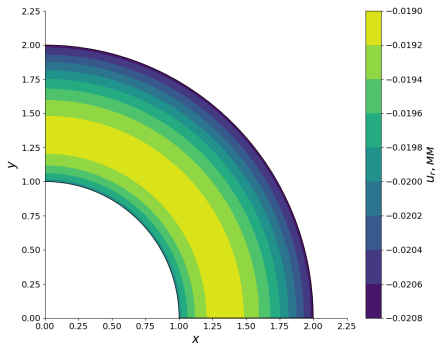


Рис. 4: Распределение узловых перемещений во всей области

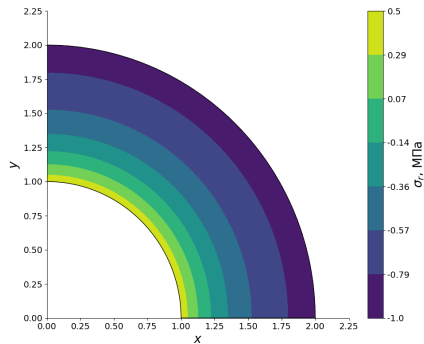
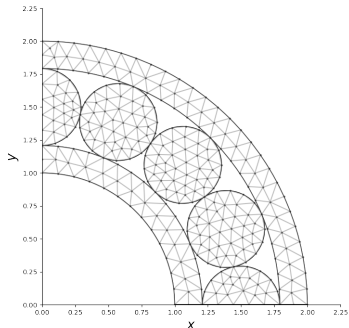


Рис. 5: Распределение узловых радиальных напряжений во всей области

# Третья тестовая задача

## Основные сведения и таблицы

Расчётная область - сектор поперечного сечения модели подшипника, нагруженной внешним давлением. Внутренний радиус  $r_a = 1$  см, внешний радиус  $r_b = 2$  см, внешнее давление  $p = 5$  МПа.



МДО	M	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
Мульти	2	42	44	45	48
	4	220	231	245	261
	8	409	509	550	592
Адд	2	52	36	49	50
	4	194	184	183	182
	8	647	566	546	550
2Адд	2	17	18	18	19
	4	24	26	24	24
	8	29	30	28	28

**Таблица 7:** Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага мелкой сетки

Количество подобл-тей	$H = 0.5$	$H = 0.25$	$H = 0.125$
2	23	20	18
4	39	31	24
8	52	42	28

**Таблица 8:** Таблица количества итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки

# Третья тестовая задача

## Дополнительные графики

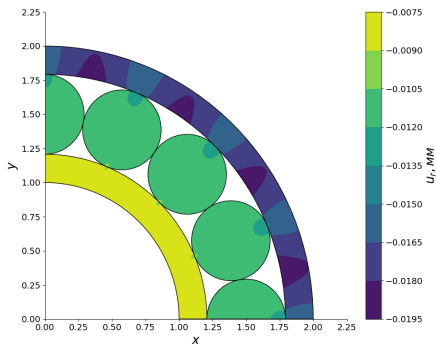


Рис. 6: Распределение узловых перемещений во всей области

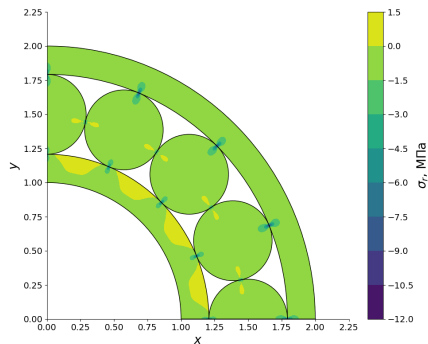


Рис. 7: Распределение узловых радиальных напряжений во всей области

# Третья тестовая задача

## Анализ временных затрат

Размерность задачи	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 2$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 4$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 8$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 16$ )
9142	1.54	6.01	7.47	9.4	14.86
33272	6.84	25.36	30.98	38.01	51.98
127674	49.28	153.99	149.7	179.16	211.52
497796	423.57	1319.15	1284.39	919.38	931.23

Таблица 9: Таблица временных затрат

Размерность задачи	Отношение размерностей	Теория	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 2$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 4$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 8$ )	Двухуровневый аддитивный метод ( $M = 16$ )
9142	1	1	1	1	1	1	1
33272	3.63	6.91	4.44	4.21	4.14	4.04	3.49
127674	13.96	52.15	32	25.62	20.04	19.05	14.23
497796	54.45	401.78	275.05	219.5	171.93	97.81	62.6

Таблица 10: Таблица отношений временных затрат

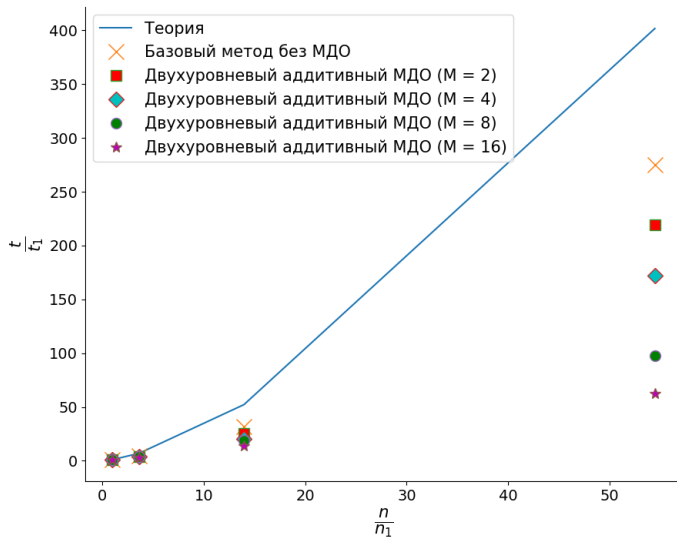


Рис. 8: График отношений временных затрат

# Заключение

- Применён МКЭ для решения упругих задач
- реализованы мультипликативный, аддитивный и двухуровневый аддитивный методы Шварца для численного решения задачи упругости;
- проведены серии расчётов для ряда тестовых задач;
- исследована зависимость сходимости путём сравнения количества итераций для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца от шага сетки и количества вводимых подобластей;
- изучены скорости роста итераций и временных затрат при решении задачи методом сопряженных градиентов.

Спасибо за внимание!