МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное агентство по образованию
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Э. БАУМАНА
Факультет "‘Фундаментальные науки"’
Кафедра "‘Прикладная математика"’

Применение различных вариантов метода декомпозиции для численного решения задач деформирования упругих тел

Исполнитель: Матвеев Михаил
Научный руководитель: канд. физ.-мат. наук Родин Александр Сергеевич

Москва, 2018 г.

Цель

Сравнение численных решений задачи нагружения трубы давлением, полученных с использованием стандартного и смешанного методов конечных элементов, в упругой постановке и в постановке с учётом деформации ползучести.

Задачи

- изучение модели упругого материала и модели материала, учитывающую деформации ползучести;
- анализ применения стандартного и смешанного МКЭ к задаче нагружения упругой трубы давлением;
- анализ применения стандартного и смешанного МКЭ к задаче нагружения давлением трубы с учётом деформации ползучести;

Постановка задачи механики твёрдого деформируемого тела

Уравнения равновесия в общем виде:

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

с кинематическим условием (S_1) и с силовым условием (S_2)

$$u = u_0, \qquad \sigma_{ji} n_j = p_i,$$

где σ_{ji}-компоненты тензора напряжений, p_i-компоненты вектора поверхностных сил, x_j-декартовы координаты.

Уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\frac{d}{d\,r}(\sigma_{rr}\,r) - \sigma_{\varphi\varphi} = 0.$$

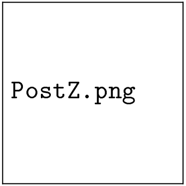

Рис. 1: Труба под внутренним и внешним давлением

Считаем, что все переменные не зависят от координат φ и z, а также осевая деформация трубы равна нулю: $\varepsilon_{zz} = 0$.

Математическая модель упругого тела

Упругие деформации совпадают с полными. Закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}.$$

Для изотропного тела с учётом принятых допущений

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{rr} &= \frac{du}{dr}, & \sigma_{rr} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{rr} + \lambda\varepsilon_{\varphi\varphi}, \\
\varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{u}{r}, & \sigma_{\varphi\varphi} &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_{\varphi\varphi} + \lambda\varepsilon_{rr}, \\
\varepsilon_{zz} &= 0, & \sigma_{zz} &= (\lambda + \mu)\left(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{\varphi\varphi}\right),
\end{aligned}$$

где λ, μ-параметры Ламе.

Математическая модель материала с учётом деформации ползучести

Аддитивное разложение тензора полной деформации:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^c,$$

где ε_{ij}^c-компоненты тензора деформации ползучести. Закон Гука:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^c),$$

Закон ползучести:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^c = \tilde{\lambda}\sigma'_{ij}.$$

Параметр ползучести:

$$\tilde{\lambda} = \frac{3}{2}B\sigma_u^2,$$

где B-функция времени, которая определяется выбором материала. Деформация ползучести несжимаемая: $\varepsilon_{ii}^c = 0$.

Численное решение задачи упругости стандартным МКЭ

Дифференциальное уравнение равновесия решим с помощью метода Бубнова-Галёркина, получив в итоге уравнение в матричном виде

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

где

матрица жёсткости: $\mathbf{K}{=}\mathbf{B}^T\ \mathbf{D}\mathbf{B}$

вектор деформаций: $\boldsymbol{\varepsilon}{=}\begin{pmatrix}\varepsilon_{rr}\\ \varepsilon_{\varphi\varphi}\end{pmatrix}{=}\mathbf{B}\mathbf{u}$

$$\mathbf{B} = \mathbf{S}\mathbf{N}{=}\begin{pmatrix}\partial/\partial r & \partial/\partial r\\ 1/r & 1/r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}N_1\\ N_2\end{pmatrix}$$

вектор напряжений: $\boldsymbol{\sigma}{=}\begin{pmatrix}\sigma_{rr}\\ \sigma_{\varphi\varphi}\\ \sigma_{zz}\end{pmatrix}{=}\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$

матрица коэфф-ов упругости: $\mathbf{D} = \dfrac{E}{1-\nu^2}\begin{pmatrix}1 & \nu\\ \nu & 1\\ \nu & \nu\end{pmatrix}$

Численное решение задачи упругости смешанным МКЭ

Рассмотрим давление как независимую переменную. Для изотропного случая объёмная деформация

$$\varepsilon_v = \frac{\varepsilon_{ii}}{3} = \frac{p}{K},$$

где K-модуль объёмной упругости.
Уравнение равновесия в матричной форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где

$$\mathbf{A} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \mathbf{B} d\Omega, \qquad \mathbf{C} = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{m} \mathbf{N_p} d\Omega,$$
$$\mathbf{V} = \int_\Omega \mathbf{N_p^T} \frac{1}{K} \mathbf{N_p} d\Omega, \qquad \mathbf{f}_1 = \int_\Gamma \mathbf{N_u^T} \bar{\mathbf{t}} d\Gamma,$$

N_u-линейная базисная функция для аппроксимации перемещения,
N_p-кусочно-постоянная базисная функция для аппроксимации давления.

Численное решение краевой задачи с учётом деформации ползучести

Учёт деформации ползучести приводит к нелинейной задаче. Линеаризация-метод начальной деформации. Уравнения равновесия в каждый момент времени t_{k+1} в матричном виде для стандартного МКЭ

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{f} + \mathbf{f}^c$$

и для смешанного МКЭ

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{C} \\ \mathbf{C}^T & -\mathbf{V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ \tilde{\mathbf{p}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1^c \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где

$$\mathbf{f}^c = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}^c(t_k) d\Omega,$$

$$\mathbf{f}_1^c = \int_\Omega \mathbf{B}^T \mathbf{D}_d \boldsymbol{\varepsilon}^c(t_k) d\Omega.$$

Результаты решения для упругой трубы

Основные данные

Внутреннее давление $p_a = 20$ МПа, внешнее давление $p_b = 0$ МПа. Не учитывается осевая растягивающая сила: $\sigma_{zz} = 0$.

Аналитические решения:

$$u = \frac{(1-2\nu)(1+\nu)}{E}\frac{p_a a^2}{b^2-a^2}r + \frac{1+\nu}{E}\frac{a^2 b^2}{r}\frac{p_a}{b^2-a^2},$$

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a a^2}{b^2-a^2} - \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a}{b^2-a^2},$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a a^2}{b^2-a^2} + \frac{a^2 b^2}{r^2}\frac{p_a}{b^2-a^2}.$$

Численные расчёты проведены:

- на трёх сетках (h=0,02; h=0,01; h=0,005);
- двумя методами (стандартный и смешанный МКЭ);
- для разных значений коэффициента Пуассона (ν=0,34; ν=0,4999; ν=0,49999; ν=0,5);

Результаты решения для упругой трубы

Коэффициент Пуассона ν=0.34

Результаты решения для упругой трубы

Коэффициент Пуассона ν=0.49999

Результаты решения для упругой трубы

Анализ результатов

Смешанный МКЭ

- при любом коэффициенте Пуассона ошибки не меняются (на одинаковых сетках);
- для перемещений наблюдается квадратичная скорость сходимости, для напряжений-линейная скорость сходимости.

Стандартный МКЭ

- при коэффициенте $\nu = 0,34$ ошибки такие же, как в смешанном МКЭ;
- чем ближе коэффициент Пуассона ν к 0,5, тем больше ошибки (на одинаковых сетках);
- при измельчении сетки ошибки уменьшаются, но скорости сходимости другие.

Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Основные данные

Для случая установившейся ползучести пренебрегаем упругими деформациями. Материал несжимаемый. В законе ползучести n=3, тогда аналитические формулы:

$$\sigma_{rr} = \frac{p_a\, a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{b^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}} \right),$$

$$\sigma_{\varphi\varphi} = \frac{p_a\, a^{\frac{2}{3}}}{b^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{b^{\frac{2}{3}}}{r^{\frac{2}{3}}} \right).$$

Численные расчёты проведены:

- на трёх сетках (h=0,02; h=0,01; h=0,005);
- двумя методами (стандартный и смешанный МКЭ);
- для значения коэффициента Пуассона ν=0,34;

Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Основные данные

Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Момент времени T=1500 часов

Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Момент времени T=50000 часов

Результаты решения задачи для трубы с учётом деформации ползучести

Анализ результатов

- для смешанного и стандартного МКЭ в момент времени T=1500 часов ошибки идентичные (на одинаковых сетках), для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости;
- для обоих методов с течением времени численное решение начинает расходиться с аналитическим, причём чем мельче сетка, тем медленнее растёт ошибка;
- для смешанного метода ошибка увеличивается значительно медленнее, чем при использовании стандартного метода.

Заключение

- рассмотрены уравнения равновесия для модели упругого материала и модели материала, учитывающей деформацию ползучести, в квазиодномерном случае;
- построены численные модели с использованием стандартного и смешанного МКЭ;
- данные модели реализованы в виде программы, написанной на языке C++;
- проведены серии расчётов для задачи нагружения давлением упругой трубы и трубы с учётом деформации ползучести;
- проведены анализ полученных результатов и сравнение с аналитическими решениями.

Спасибо за внимание!

Приложение

Блок-схема программы

Main_Alg.png