СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

При численном решении задач деформирования упругих тел в виде дифференциальных уравнений в частных производных, чаще всего матрица получившейся системы линейных уравнений получается сильно разреженной. Лучше всего в таком случае использовать итерационные методы решения системы.

Одним из эффективных способов решения подобной задачи является метод декомпозиции области. Благодаря ему можно свести решение задачи в большой области к решению множества локальных задач в подобластях меньшего размера, но с учётом дополнительных итераций внутри области. За счёт количества подобластей размеры полученных систем линейных уравнений для каждой из локальных задач остаются приемлемыми. На данный момент существуют разные методы декомпозиции области. У некоторых методов общее количество итераций не зависит от шага выбранной сетки для области, но, при этом, довольно сильно зависит от количества подобластей. Существуют также методы, где данная проблема устранена, и количество итераций кардинально не зависит ни от шага сетки, ни от количества вводимых подобластей. Локальные задачи, в зависимости от выбранного метода, могут решаться как последовательно, так и независимо друг от друга.

Целью работы является применение методов декомпозиции области для решения задач деформирования упругих тел и исследование сходимости для разных вариантов методов декомпозиции области.

Для достижения поставленной цели решены следующие задачи:

- рассмотрение модели упругого материала;

- исследование мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца;

- реализация мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца в виде программы для моделей упругого материала;

- проведение серии расчётов для ряда тестовых задач;

- исследование сходимости путём сравнения количества итераций для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца;

- изучение скорости роста итераций и временных затрат при решении задачи методом сопряженных градиентов.

1 ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1.1 Постановка задачи

Для решения общей задачи по нахождению деформаций и напряжений в деформируемом теле, занимающем область G с границей ∂G, необходимо использовать следующие соотношения [1]:

- уравнение равновесия

$$L\mathbf{u} = -\triangledown \boldsymbol{\sigma(u)} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \tag{1}$$

- кинематические граничные условия

$$\boldsymbol{u(x)} = u_0,\ x \in \partial G_D, \tag{2}$$

- силовые граничные условия

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{p}(\mathbf{x}),\ x \in \partial G_N, \tag{3}$$

- соотношение Коши для тензора полных деформаций

$$\boldsymbol{\varepsilon(u)} = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T, \tag{4}$$

- уравнение для тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma(u)} = \mathbf{C}\cdot\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \tag{5}$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ - вектор перемещений, $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ - вектор массовых сил, ∂G_D - участок границы области G, на котором заданы кинематические условия, ∂G_N - участок границы области G, на котором заданы силовые условия, $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ - вектор внешней нагрузки, действующей на участке ∂G_N, $\mathbf{C}$ - тензор упругих коэффициентов.

1.2 Методы Шварца

Решить данную задачу можно с помощью методов декомпозиции области. Методы декомпозиции области области бывают двух видов: с перекрытием и без перекрытия подобластей. Один из вариантов метода декомпозиции области с перекрытием подобластей называется методом Шварца.

Рассмотрим классическую задачу метода Шварца для двух подобластей [3]: имеется сложная область Ω, состоящая из объединения двух простых областей (круга Ω_1 и прямоугольника Ω_2). Рассмотрим уравнение, цель которого найти перемещения $u : \Omega \to \mathbb{R}$ при условии, что

$$\begin{aligned} -\triangle(u) &= f, \quad u \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega \end{aligned}$$

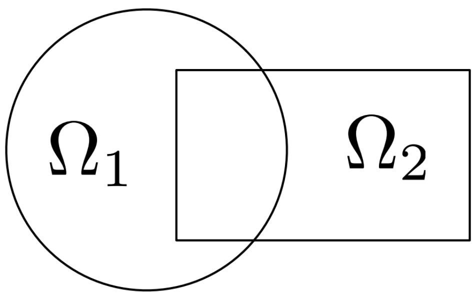

Рис. 1: Сложная область, получившаяся из объединения двух простых областей

Классический метод Шварца это итерационный метод, основанный на решении задач меньшего масштаба в подобластях Ω_1 и Ω_2. Один шаг итерационного процесса обновления результатов $u^n \to u^{n+1}$:

$$\begin{aligned} -\triangle(u^{n+1}) &= f, \qquad u \in \Omega_1 \\ u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \\ u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\triangle(u^{n+1}) &= f, \qquad u \in \Omega_2 \\ u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\ u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega_1} \end{aligned}$$

Рассмотрим случай для произвольной области и произвольного числа подобластей, представим область G в виде объединения конечного числа подобластей $G = \bigcup_{i=1}^{M} G_i$ с конечным числом границ $\partial G_1, \ldots, \partial G_M$, где M - число подобластей. Данные подобласти пересекаются, что требует ввода дополнительных обозначений для границ, возникающих после декомпозиции областей: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{M} \Gamma_i$.

Выберем начальное приближение для перемещений, удовлетворяющее граничным условиям (ссылка здесь). Алгоритм из классического метода Шварца можно оптимизировать для большего числа подобластей:

$$\begin{aligned}
-\triangle(u^{n+\frac{i}{M}}) = f(x), &\quad x \in G_i \\
\sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n = p(x), &\quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) = 0, &\quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) = u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), &\quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
\end{aligned}$$

Данный алгоритм Шварца называют мультипликативным, он последовательный и решение на каждой подобласти зависит от решения на предыдущей подобласти (или от решения на предыдущей итерации, если речь идёт о первой подобласти для итерации).

Существует также другой вариант метода Шварца, основанный на решении локальных задач для каждой подобласти без зависимости от соседних подобластей:

$$\begin{aligned}
-\triangle(u^{n+\frac{i}{M}}) = f(x), &\quad x \in G_i \\
\sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n = p(x), &\quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) = 0, &\quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
u^{n+1}(x) = u^{n}(x), &\quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
\end{aligned}$$

Этот метод называется аддитивный метод Шварца. В конце каждой итерации решение вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^{M} (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент α - параметр скорости сходимости итерационного процесса.

Для получения функции перемещений для элемента запишем в общем случае функцию $u(x, y)$, зависящую от переменных x, y и интерполируем её линейной функцией [4]:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \tag{6}$$

где a_1, a_2, a_3 - произвольные коэффициенты. Теперь введём аппроксимацию данной функции для треугольного элемента. Обозначим значения функции перемещений в узлах конечного элемента как $u(x_1, y_1), u(x_2, y_2), u(x_3, y_3)$. С помощью данных узловых значений мы сможем получить коэффициенты формулы 6. Запишем её как:

$$\begin{cases} u_1 = u(x_1, y_1) = \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 \\ u_2 = u(x_2, y_2) = \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 \\ u_3 = u(x_3, y_3) = \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 \end{cases} \tag{7}$$

Разрешим систему 7 относительно α_i и подставим получившиеся коэффициенты в 6, получим, что

$$u = N_i u_i + N_j u_j + N_k u_k,$$

где $N_m = \frac{1}{2A}(a_m + b_m x + c_m y)$ - функция формы, равная единице в узле (x_m, y_m) и нулю в прочих двух узлах. Коэффициенты a_m, b_m, c_m, полученные в уравнении функции формы, вычисляются как

$$\begin{cases} a_i = x_j y_k - x_k y_j \\ b_i = y_j - y_k \\ c_i = x_k - x_j \end{cases} \begin{cases} a_j = x_k y_i - x_i y_k \\ b_j = y_k - y_i \\ c_j = x_i - x_k \end{cases} \begin{cases} a_k = x_i y_j - x_j y_i \\ b_k = y_i - y_j \\ c_k = x_j - x_i \end{cases}$$

В качестве функций формы для треугольного элемента возьмём барицентрические координаты или L - координаты: $N_i = L_1, N_j = L_2, N_k = L_3$ [5].

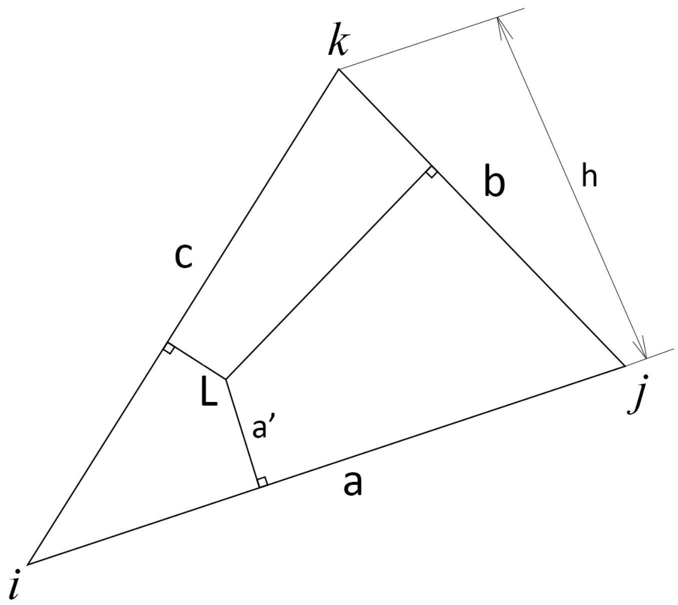

Рис. 2: Бариоцентрические координаты

L-координата представляет собой отношение расстояния из выбранной точки до любой из сторон треугольника к высоте, опущенной из противолежащей вершины на выбранную сторону треугольника. Величина L_i меняется от нуля до единицы, причём в узле i с координатами (x_i, y_i) L-координата равна единице, в то время как в прочих вершинах треугольника бариоцентрическая координата равна нулю.

Координаты случайной точки в декартовой системе координат можно выразить через бариоцентрические координаты:

$$x = L_1x_i + L_2x_j + L_3x_k$$
$$y = L_1y_i + L_2y_j + L_3y_k$$

Выгода использования бариоцентрических координат заключается в упрощении вычисления интегралов по площади треугольного элемента или вдоль сторон треугольного элемента:

$$\int_l (L_1)^a (L_2)^b dl = \frac{a!b!}{(a+b+1)!}l \tag{8}$$

$$\int_S (L_1)^a (L_2)^b (L_3)^c dS = \frac{a!b!c!}{(a+b+c+2)!}2S \tag{9}$$

1.3 Численное решение задачи деформирования упругих тел

Запишем локальную матрицу жёсткости треугольного элемента:

$$K_l = \int_V \mathbf{B}_l^T \, \mathbf{D} \, \mathbf{B}_l dxdy, \tag{10}$$

где матрицы **B** и **D** получены из векторов тензора напряжений

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}, \tag{11}$$

где

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{pmatrix} \tag{12}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} \tag{13}$$

и тензора деформаций

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{B}\boldsymbol{u}, \tag{14}$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Домножим в уравнении 10 вектор B_l^T на матрицу **D**, проведём преобразования и получим итоговое уравнение [8]:

$$K_l = \frac{1}{4A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & \frac{c_i}{2} \\ 0 & c_i & \frac{b_i}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_j & 0 \\ 0 & c_j \\ \frac{c_j}{2} & \frac{b_j}{2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

2 Результаты численных расчётов

В данном разделе будут приведены расчёты четырёх тестовых задач с использованием четырёх методов. Для каждой из задач для базового случая будут приведены графики распределения напряжений вдоль поверхности, к которой приложено давление, а также графики распределения перемещений на всей расчётной области.

Для методов декомпозиции области расчётные области будут разбиты на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$ в зависимости от задачи, где M - число подобластей. Также стоит заметить, что каждая подобласть Ω_i $(i = 1, \ldots, M)$ в зависимости от задачи обладает своими размерными характеристиками. Подобласть G_i соответствует объединению подобласти Ω_i и дополнительных участков соседних подобластей Ω_{i-1} и Ω_{i+1}. Размеры этих дополнительных участков зависят от относительного коэффициента перекрытия (отношение размера перекрытия к размеру подобласти Ω_i).

Итерационный процесс для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов продолжается до тех пор, пока не выполнится условие критерия останова u_{err} для перемещений:

$$u_{err} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N_p} s_k \left(\frac{u_k^{m+1} - u_k^m}{u_k^{m+1}} \right)^2 \right) \Bigg/ \left(\sum_{k=1}^{N_p} s_k \right)} < \varepsilon_0,$$

где s_k - суммарная площадь элементов сетки, в которые входит k-й узел, разделённая на количество узлов в элементе, N_{elem} - количество узлов сетки, u_k^{m+1} - решение на текущей итерации, u_k^m - решение на предыдущей итерации.

Дополнительно для каждой из задач для методов декомпозиции будут приведены таблицы зависимости количества итераций от относительного коэффициента перекрытия.

2.1 Первая тестовая задача

На рис. 3 представлена расчётная область - прямоугольник, закреплённый с левой и правой стороны по оси OX и с нижней стороны по оси OY. Сверху действует распределённая нагрузка $p = 50$ МПа. Ширина тела $a = 2$ см, высота тела $b = 1$ см.

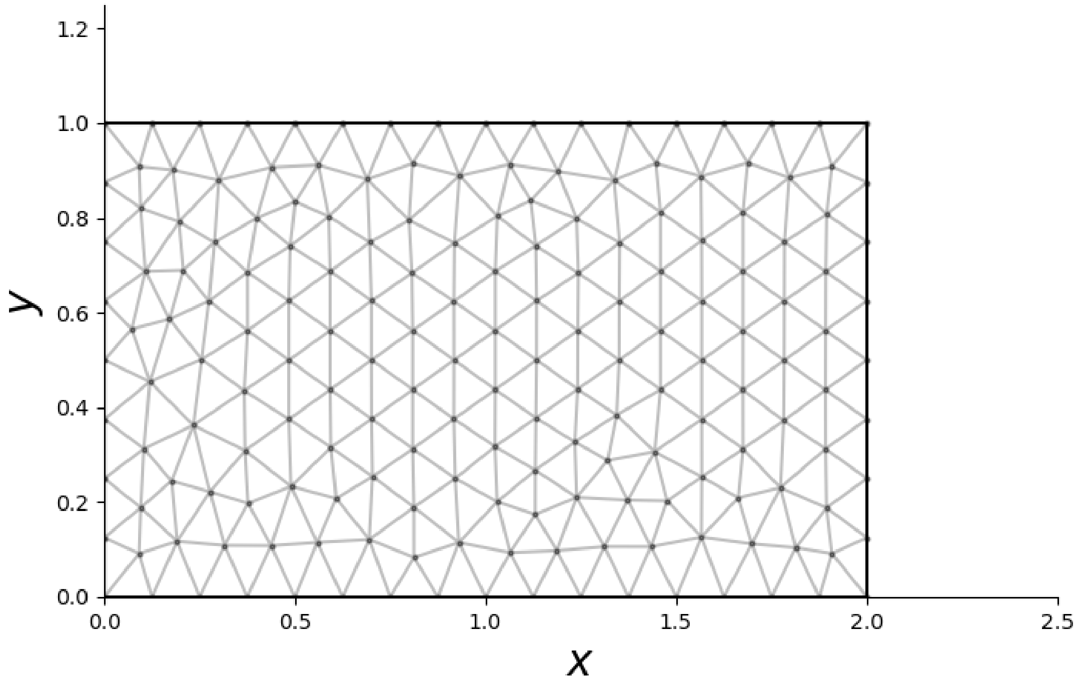

Рис. 3: Схема расчётной области (h = 0.125)

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается по оси OX на заданное количество прямоугольных областей без перекрытия $\Omega_1, \ldots, \Omega_M$. Характерные размеры каждой подобласти: ширина подобласти $a_M = a/M$, высота подобласти совпадает с высотой тела $b_M = b$. На рис. 4 представлена расчётная область первой тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

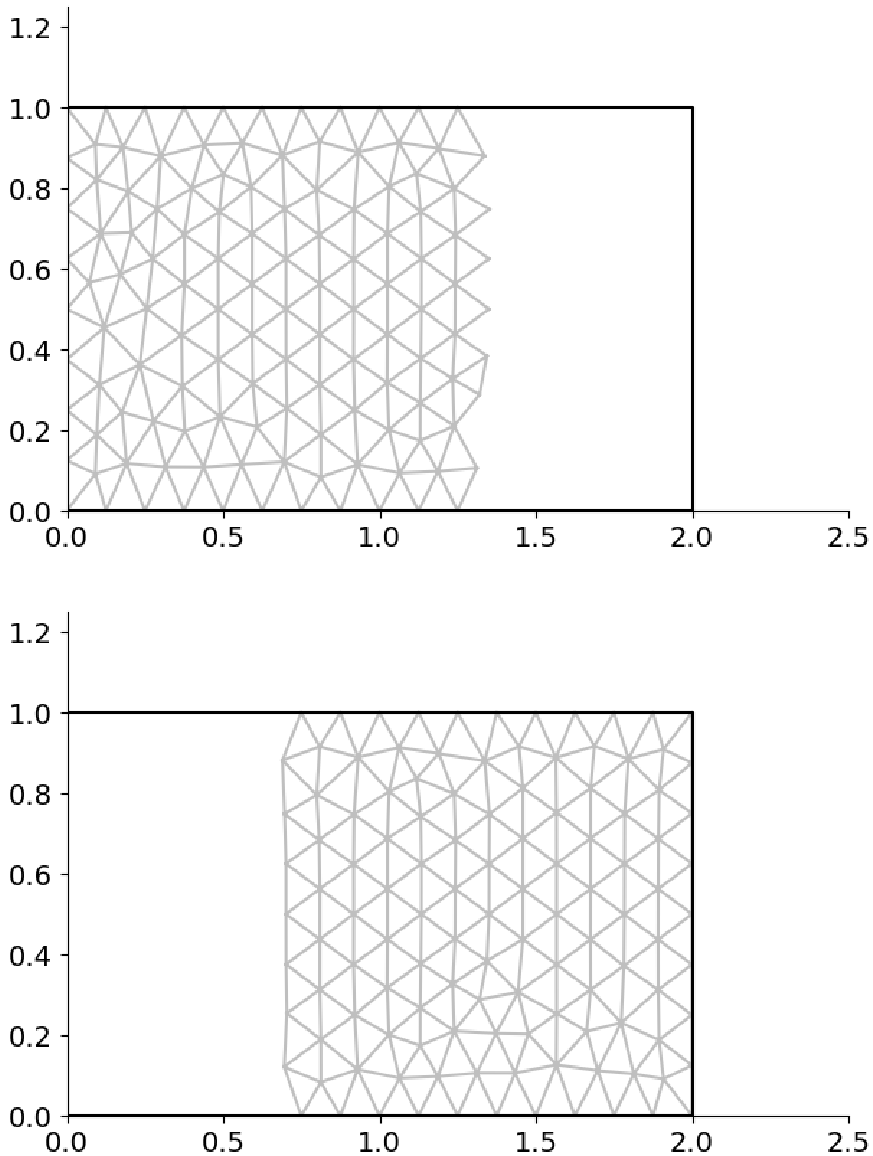

Рис. 4: Схема декомпозиции расчётной области (M = 2, h = 0.125)

На рис. 5 приведено распределение радиальных перемещений, полученных при решении задачи во всей расчётной области базовым методом, на рис. 6 - распределение погрешностей узловых напряжений $\Delta\sigma_y$, полученных при решении задачи во всей расчётной области, причём полная погрешность вычисляется по формуле $\sigma_y = \tilde{\sigma_y} + \Delta\sigma_y$, где $\tilde{\sigma_y} = 50$ МПа.

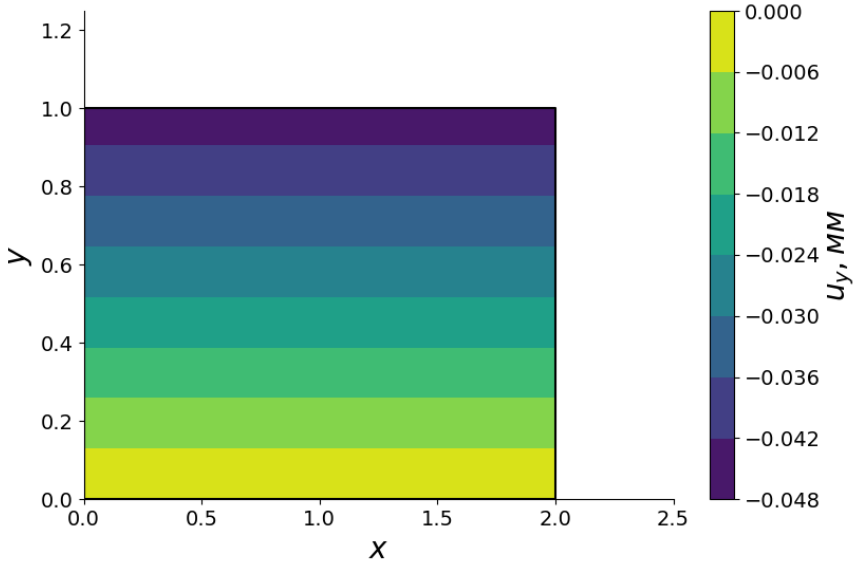

Рис. 5: Распределение перемещений во всей расчётной области (h = 0.125)

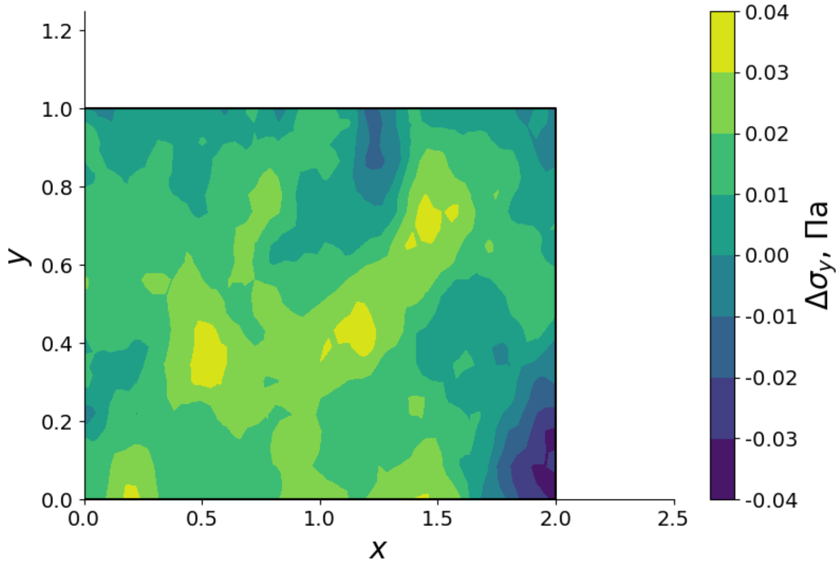

Рис. 6: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области (h = 0.125)

2.1.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 1 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);

Таблица 1: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	h = 0.05	h = 0.025	h = 0.0125	h = 0.00625
2 области	13	13	13	14
4 области	39	39	40	42
8 областей	125	124	128	135

2.1.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 2 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);
- количество итераций по сравнению со случаем применения мультипликативного метода Шварца выросло почти в 4 раза;

Таблица 2: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	h = 0.05	h = 0.025	h = 0.0125	h = 0.00625
2 области	23	24	30	29
4 области	57	69	85	80
8 областей	317	237	258	222

2.1.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для двухуровневого аддитивного метода кроме основной сетки в расчётной области зададим грубую сетку, удовлетворяющую условиям включения всех узлов мелкой сетки в элементы грубой сетки и соответствия размеров областей.

В таблице 3 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для шага мелкой сетки h = 0.0125 (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3).

Анализ данной таблицы показывает, что для расчётов рациональнее взять шаг H = 0.125, так как в этом случае количество итераций незначительно зависит от количества подобластей.

На рис. 7 изображена расчётная схема области с грубой сеткой при H = 1.

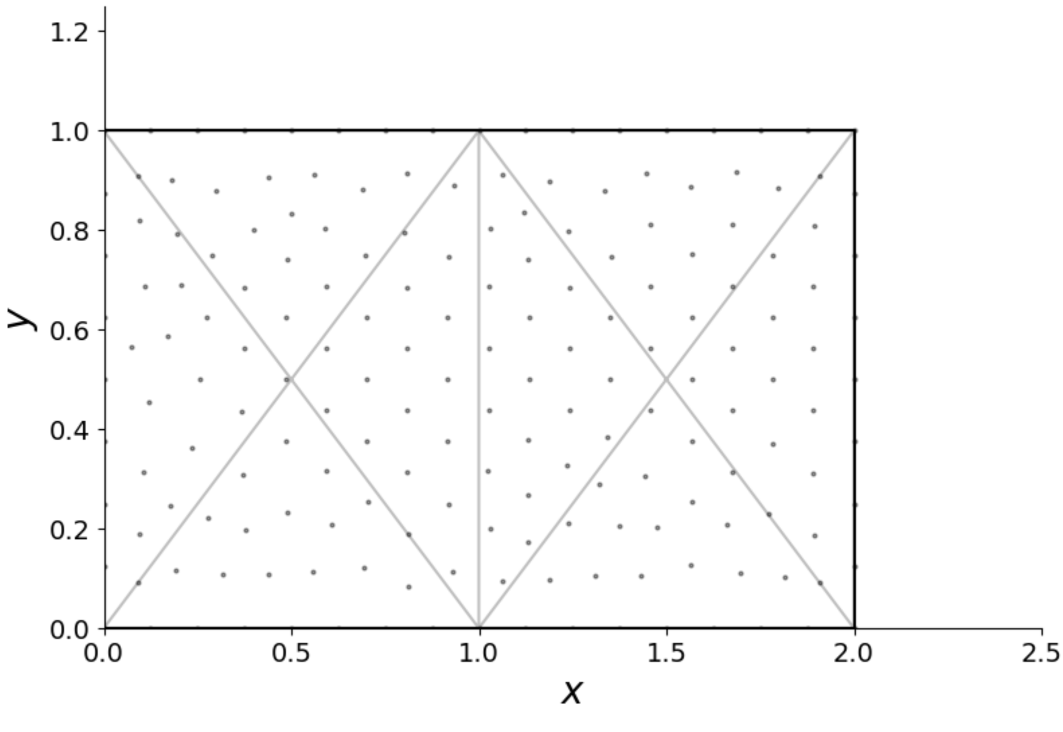

Рис. 7: Схема расчётной области с прямоугольной областью в качестве грубой области
(h = 0.125, H = 1)

Таблица 3: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца ($h = 0.0125$)

Количество подобластей	$H = 1$	$H = 0.5$	$H = 0.025$	$H = 0.125$
2 области	18	16	14	15
4 области	40	22	17	14
8 областей	86	32	19	16

В таблице 4 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи при $H = 0.125$ (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 4: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца ($H = 0.125$)

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	15	15	15	15
4 области	14	14	14	15
8 областей	16	16	16	17

В таблице 5 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста при $M = 4$, $h = 0.025$ и $H = 0.125$.

Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 5: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста ($M = 4$, $h = 0.025$, $H = 0.125$)

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	54	39	30
Аддитивный МДО	82	57	45
Двухуровневый аддитивный МДО	24	20	19

В таблице 6 приведены количество итераций, за которое сходится метод сопряженных градиентов, при решении задачи во всей области без методов декомпозиции, а также общее количество итераций, за которое сходится метода сопряженных градиентов для каждой локальной задачи, при решении задачи во всей области двухуровневым аддитивным методом Шварца.

В таблице 7 приведены отношения размерностей систем, отношения количества итераций при решении задачи во всей области без методов декомпозиции, отношения количества итераций в соответствии с теорией и отношения количества итераций при решении задачи во всей области двухуровневым аддитивным методом Шварца.

Из таблицы 7 видно, что отношения для базового метода и двухуровневого метода практически идентичны благодаря тому, что общее количество итераций для двухуровневого аддитивного метода Шварца не меняется при изменении размерности системы. На рис. 8 наглядно продемонстрированы результаты, полученные в таблице 7.

Таблица 6: Количество итераций метода сопряженных градиентов в зависимости от размера СЛАУ и метода решения задачи

Размерность системы	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный МДО
1988	861	36890
7624	1470	63885
30012	2700	120676
119488	5017	235980

Таблица 7: Отношение количества итераций метода сопряженных градиентов

Размерность системы	Отношение размеров	Теория	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный МДО
1988	1.00	1.00	1.00	1.00
7624	3.84	1.96	1.71	1.73
30012	15.10	3.89	3.14	3.27
119488	60.10	7.75	5.83	6.40

В таблице 8 приведены временные затраты, необходимые для решения задачи во всей области без методов декомпозиции, а также временные затраты для решения задачи во всей области двухуровневым аддитивным методом Шварца.

В таблице 9 приведены отношения размерностей систем, отношения временных затрат при решении задачи во всей области без методов декомпозиции, отношения временных затрат в соответствии с теорией и отношения временных затрат при решении задачи во всей области двухуровневым аддитивным методом Шварца.

Из таблицы 9 видно, что отношение временных затрат для двухуровневого аддитивного метода Шварца лучше, чем для теоретического случая и тем более для базового метода решения задачи без применения МДО. На рис. 9 наглядно продемонстрированы результаты, полученные в таблице 9.

Таблица 8: Время, затраченное на метод сопряженных градиентов, в зависимости от размера СЛАУ и метода решения задачи

Размер СЛАУ	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный МДО
1988	0.64	9.69
7624	4.89	32.09
30012	45.07	205.51
119488	389.57	3922.21

Таблица 9: Отношение затраченного времени на метод сопряженных градиентов

Размер СЛАУ	Теория	Базовый метод	Двухуровневый аддитивный МДО
1988	1.00	1.00	1.00
7624	7.51	7.63	3.31
30012	58.66	70.33	21.21
119488	465.97	607.85	404.86

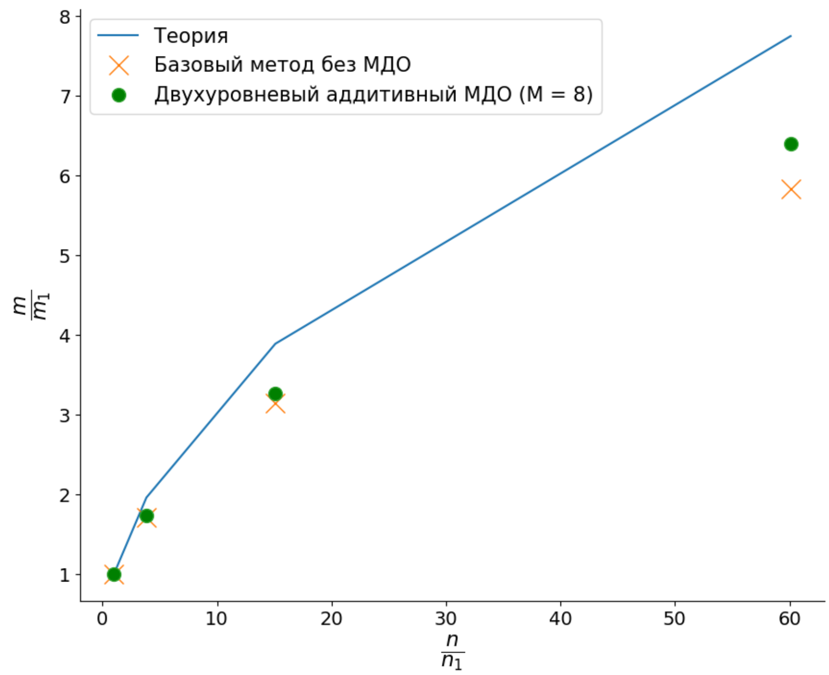

Рис. 8: График отношений количества итераций

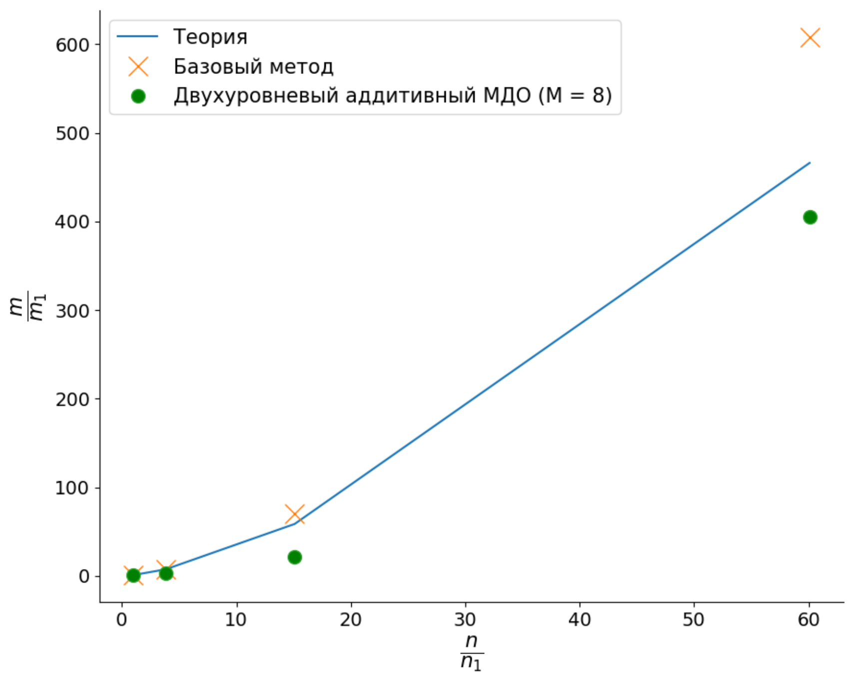

Рис. 9: График отношений временных затрат

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цели и задачи, поставленные в магистерской работе, выполнены. Изучены математические модели для задач деформирования упругих тел, исследованы мультипликативный, аддитивный и двухуровневый аддитивный методы Шварца. Данные методы реализованы в виде программы, написанной на языке Python. Проведены серии расчётов для четырёх тестовых задач. Выполнено исследование сходимости путём сравнения количества итераций для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов Шварца, изучена скорость роста итераций и временных затрат при решении задачи методом сопряженных градиентов.

Результаты, полученные при решении ряда тестовых задач, показывают, что двухуровневый аддитивный метод Шварца выигрывает у мультипликативного и аддитивного методов Шварца по нескольким параметрам: во-первых, локальные задачи в каждой из подобластей решаются независимо друг от друга, количество итераций не зависит практически ни от изменения шага сетки, ни от изменения количества подобластей, на которое разбивается исходная область.

Анализ результатов количества итераций и временных затрат при решении задачи методом сопряженных градиентов показал, что скорости роста количества итераций для базового случая решения задачи без методов декомпозиции области и двухуровневого аддитивного метода Шварца практически не отличаются друг от друга, а скорость роста временных затрат при решении задачи двухуровневым аддитивным методом Шварца меньше, чем при решении задачи базовым методом без применения методом декомпозиции области.