

1 Математическая постановка задачи

Для решения общей задачи по нахождению деформаций и напряжений в деформируемом теле, занимающем область G с границей ∂G , необходимо использовать следующие соотношения:

кинематические граничные условия

$$u(x) = u_0, \quad x \in \partial G_D, \quad (1)$$

силовые граничные условия

$$\sigma(u) \cdot n = p(x), \quad x \in \partial G_N, \quad (2)$$

соотношения Коши для тензора полных деформаций

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad (3)$$

тензор напряжений

$$\sigma(u) = ??? \quad (4)$$

Здесь $u(x)$ - компоненты вектора перемещения, ∂G_D - участок границы, на котором действуют кинематические условия Дирихле, ∂G_N - участок границы, на котором действуют силовые граничные условия Неймана, $p(x)$ - вектор внешней нагрузки.

Решить данную задачу можно с помощью метода декомпозиции Шварца.

1.1 Методы Шварца

Рассмотрим классическую задачу метода Шварца для двух подобластей: имеется сложная область Ω , состоящая из объединения двух простых областей (круга Ω_1 и прямоугольника Ω_2). Рассмотрим уравнение Пуассона, цель которого найти перемещения $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ при условии, что

$$\begin{aligned} -\Delta(u) &= f, \quad u \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega \end{aligned}$$

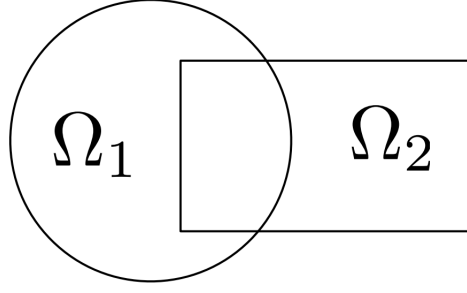


Рис. 1: Сложная область, получившаяся из объединения двух простых областей

Классический метод Шварца это итерационный метод, основанный на решении задач меньшего масштаба в подобластях Ω_1 и Ω_2 . Один шаг итерационного процесса обновления результатов $u^n \rightarrow u^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_1 & -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_2 \\
 u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \text{ после чего} & u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\
 u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2 & u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1
 \end{aligned}$$

Теперь же рассмотрим случай для произвольной области и произвольного числа подобластей. Вернёмся к нашей первоначальной задаче (ссылка здесь), представим область G в виде объединения конечного числа подобластей $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$ с конечным числом границ $\partial G_1, \dots, \partial G_M$, где M - число подобластей. Данные подобласти пересекаются, что требует ввода дополнительных обозначений для границ, возникающих после декомпозиции областей: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$.

Выберем начальное приближение для перемещений, удовлетворяющее граничным условиям (ссылка здесь). Алгоритм из классического метода Шварца можно оптимизировать для большего числа подобластей:

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
 \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
 \end{aligned}$$

Данный алгоритм Шварца называют мультипликативным, он последовательный и решение на каждой подобласти зависит от решения на предыдущей подобласти (или от решения на предыдущей итерации, если речь идёт о первой подобласти для итерации).

Существует также другой вариант метода Шварца, основанный на решении локальных задач для каждой подобласти без зависимости от соседних подоб-

ластей:

$$\begin{aligned}
-\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
\sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
u^{n+1}(x) &= u^n(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
\end{aligned}$$

Этот метод называется аддитивный метод Шварца. В конце каждой итерации решение вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент α - некоторый параметр, от которого зависит скорость сходимости итерационного процесса.

2 Результаты численных расчётов

В данном разделе будут приведены расчёты четырёх тестовых задач с использованием четырёх методов. Для каждой из задач для базового случая будут приведены графики распределения напряжений вдоль поверхности, к которой приложено давление, а также графики распределения перемещений на всей расчётной области.

Для методов декомпозиции области расчётные области будут разбиты на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ в зависимости от задачи, где M - число подобластей. Также стоит заметить, что каждая подобласть Ω_i ($i = 1, \dots, M$) в зависимости от задачи обладает своими размерными характеристиками. Подобласть G_i соответствует объединению подобласти Ω_i и дополнительных участков соседних подобластей Ω_{i-1} и Ω_{i+1} . Размеры этих дополнительных участков зависят от относительного коэффициента перекрытия (отношение размера перекрытия к размеру подобласти Ω_i).

Итерационный процесс для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов продолжается до тех пор, пока не выполнится условие критерия останова u_{err} для перемещений:

$$u_{err} = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N_p} s_k \left(\frac{u_k^{m+1} - u_k^m}{u_k^{m+1}} \right)^2 \right) / \left(\sum_{k=1}^{N_p} s_k \right)} < \varepsilon_0,$$

где s_k - суммарная площадь элементов сетки, в которые входит k -й узел, разделённая на количество узлов в элементе, N_{elem} - количество узлов сетки, u_k^{m+1} - решение на текущей итерации, u_k^m - решение на предыдущей итерации.

Дополнительно для каждой из задач для методов декомпозиции будут приведены таблицы зависимости количества итераций от относительного коэффициента перекрытия.

2.1 Первая тестовая задача

На рис. 2 представлена расчётная область для первой тестовой задачи - прямоугольник, закреплённый с левой и правой стороны по оси OX и с нижней стороны по оси OY . Сверху действует распределённая нагрузка $p = 50$ МПа. Ширина тела $a = 2$ см, высота тела $b = 1$ см.

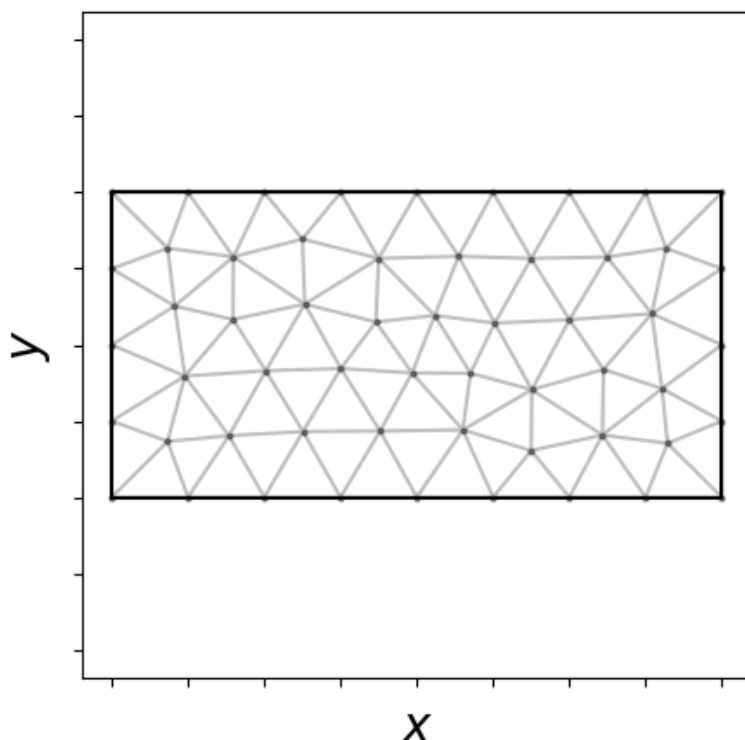


Рис. 2: Схема расчётной области

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается по оси OX на заданное количество прямоугольных областей без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$. Характерные размеры каждой подобласти: ширина подобласти $a_M = a/M$, высота подобласти совпадает с высотой тела $b_M = b$. На рис. 3 представлена расчётная область первой тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

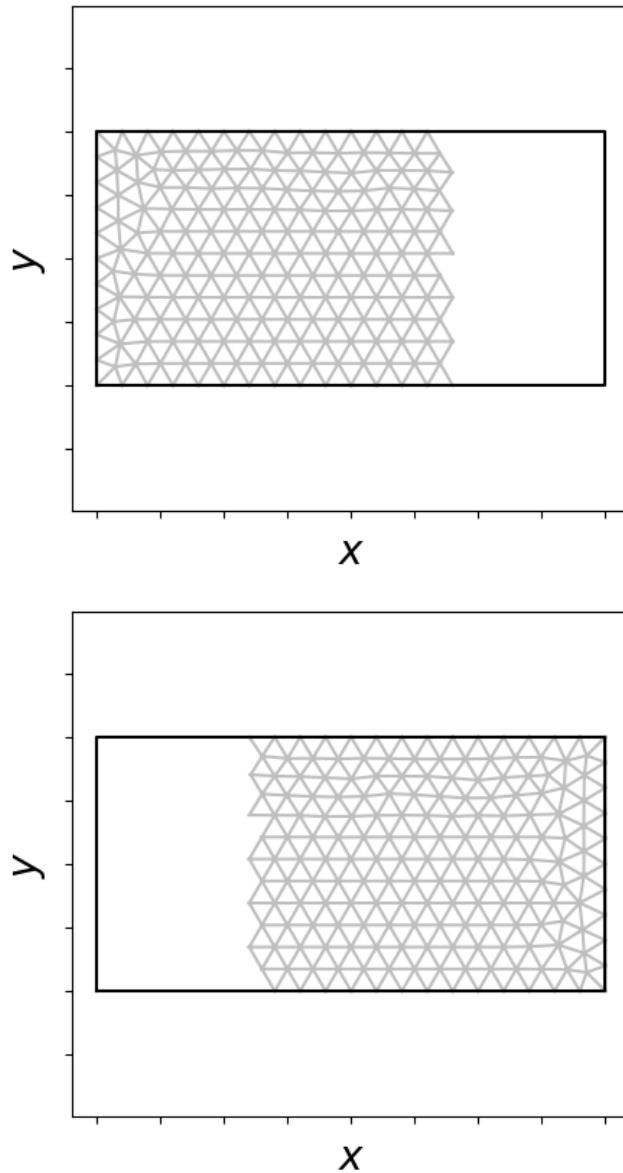


Рис. 3: Схема декомпозиции расчётной области ($M = 2$)

На рис. 4 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи во всей расчётной области без МДО, на рис. 5 - распределение напряжений вблизи области приложения давления.

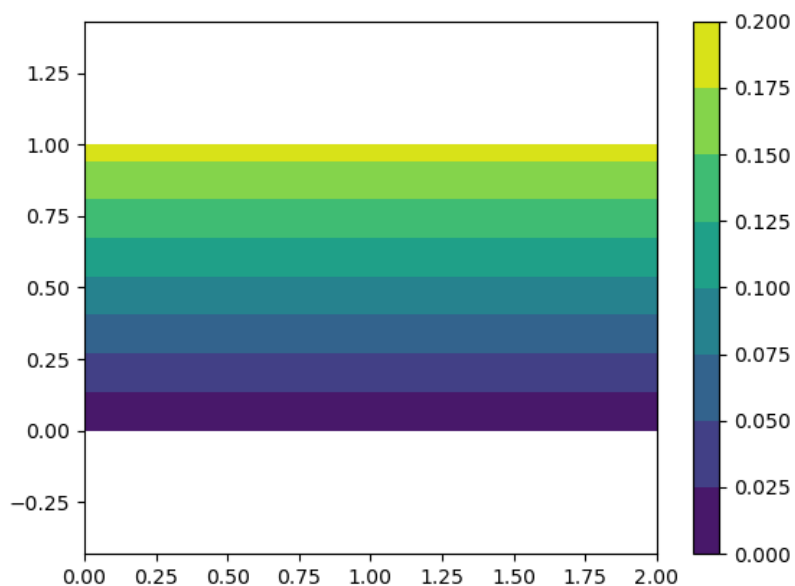


Рис. 4: Распределение перемещений во всей расчётной области

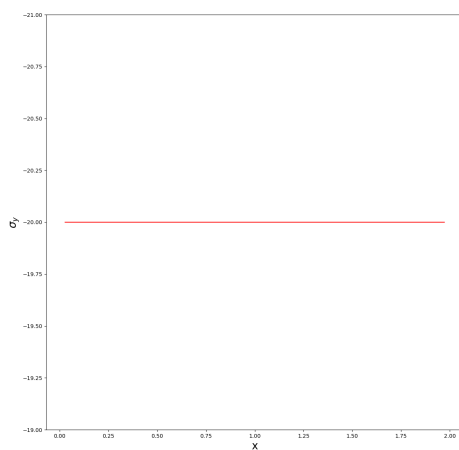


Рис. 5: Распределение напряжений вблизи области приложения давления

2.1.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 1 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);

Таблица 1: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	13	13	13
4 области	39	39	40
8 областей	125	124	128

2.1.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 2 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);
- количество итераций по сравнению со случаем применения мультипликативного метода Шварца выросло почти в 4 раза;

Таблица 2: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	23	24	30
4 области	57	69	85
8 областей	317	237	258

2.1.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице 3 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 3: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	15	15	16
4 области	20	21	22
8 областей	32	32	32

В таблице 4 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и шага сетки $h = 0.025$. Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 4: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	54	39	30
Аддитивный МДО	82	57	45
Двухуровневый аддитивный МДО	24	20	19

2.2 Вторая тестовая задача

На рис. 6 представлена расчётная область для второй тестовой задачи - прямоугольник, закреплённый с левой стороны по оси OX и с нижней стороны по оси OY . Сверху действует распределённая нагрузка $p = 50$ МПа. Ширина тела $a = 2$ см, высота тела $b = 1$ см.

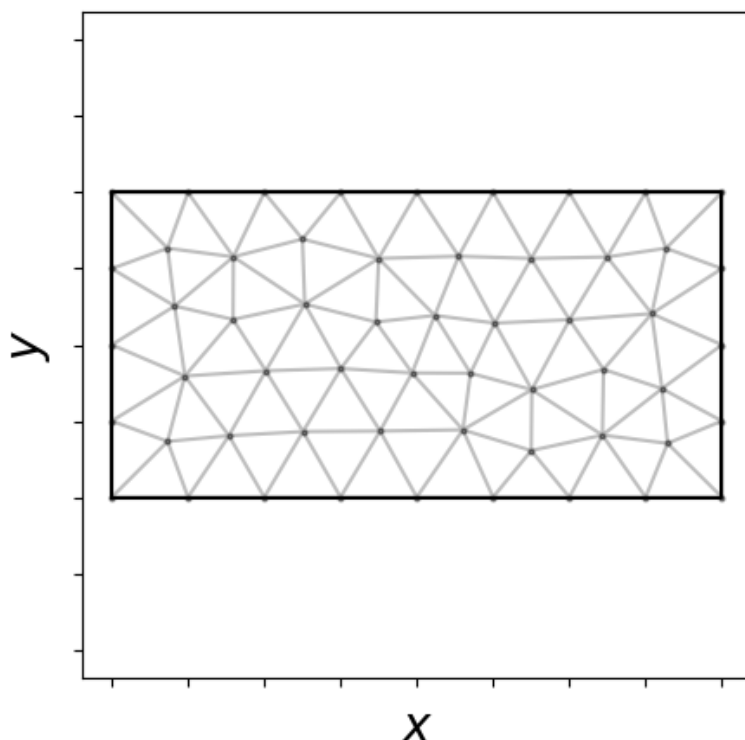


Рис. 6: Схема расчётной области

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается по оси OX на заданное количество прямоугольных областей без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$. Характерные размеры каждой подобласти: ширина подобласти $a_M = a/M$, высота подобласти совпадает с высотой тела $b_M = b$. На рис. 7 представлена расчётная область вторая тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

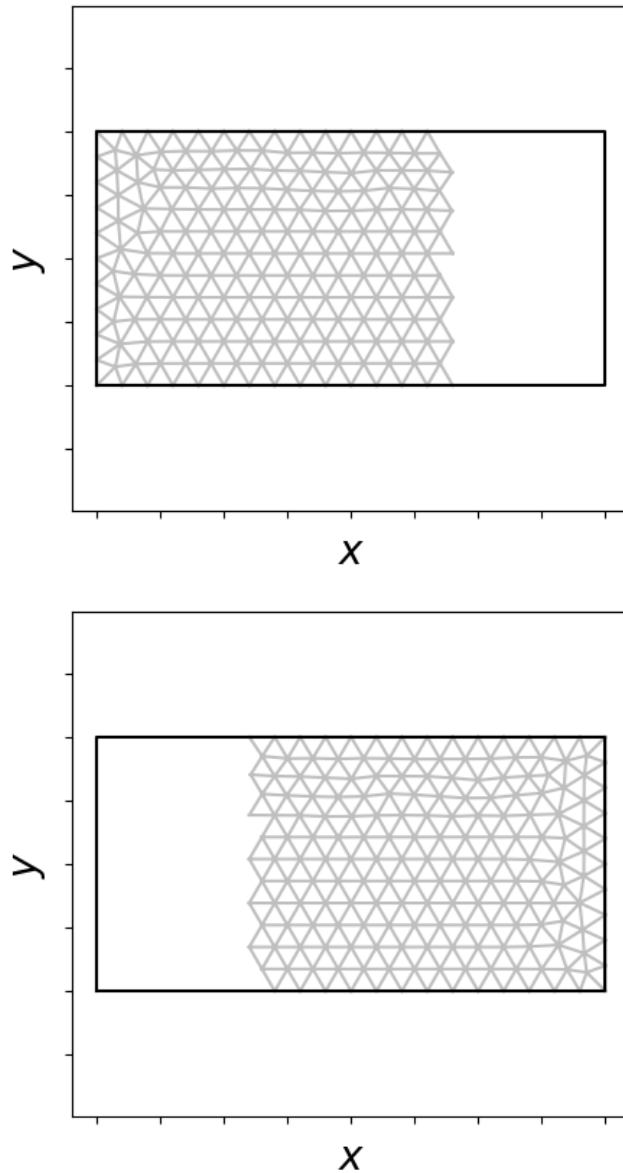


Рис. 7: Схема декомпозиции расчётной области ($M = 2$)

На рис. 8 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи во всей расчётной области без МДО, на рис. 9 - распределение напряжений вблизи области приложения давления.

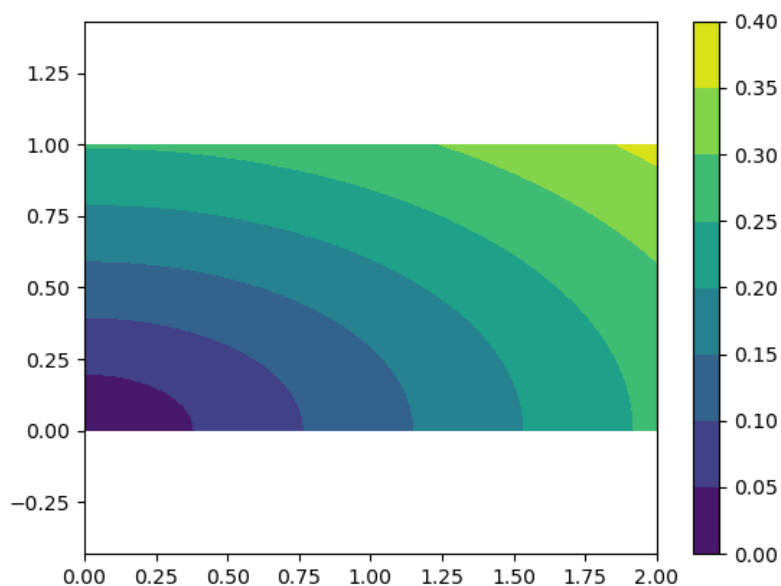


Рис. 8: Распределение перемещений во всей расчётной области

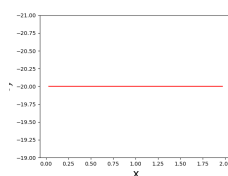


Рис. 9: Распределение напряжений вблизи области приложения давления

2.2.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 5 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);

Таблица 5: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	23	23	23
4 области	102	100	99
8 областей	401	386	385

2.2.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 6 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в M^2 раз);
- количество итераций по сравнению со случаем применения мультипликативного метода Шварца выросло почти в 4 раза;

Таблица 6: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	23	24	30
4 области	57	69	85
8 областей	317	237	258

2.2.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице 7 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 7: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	15	15	16
4 области	20	21	22
8 областей	32	32	32

В таблице 8 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и шага сетки $h = 0.025$. Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 8: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	149	102	77
Аддитивный МДО	499	346	263
Двухуровневый аддитивный МДО	22	19	18

2.3 Третья тестовая задача

На рис. 10 представлена расчётная область для второй тестовой задачи - сектор поперечного сечения толстостенной трубы, нагруженной внешним давлением $p = 5$ МПа. Внутренний радиус $p_a = 1$ см, внешний радиус $p_b = 2$ см.

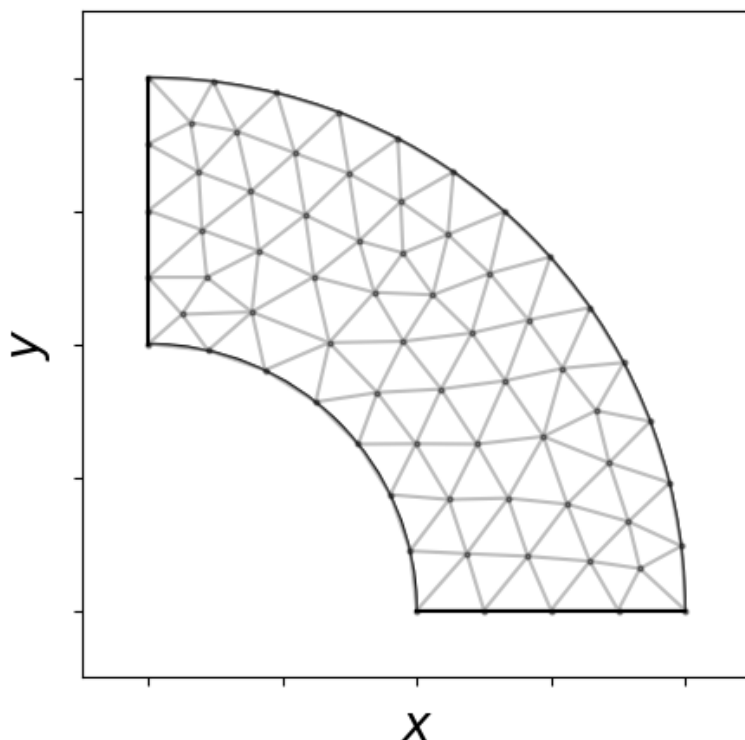


Рис. 10: Схема расчётной области третьей тестовой задачи

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$.

Характерные размеры каждой подобласти: угол каждого сектора - подобласти $\varphi_M = \pi/(2 \cdot M)$. На рис. 11 представлена расчётная область третьей тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

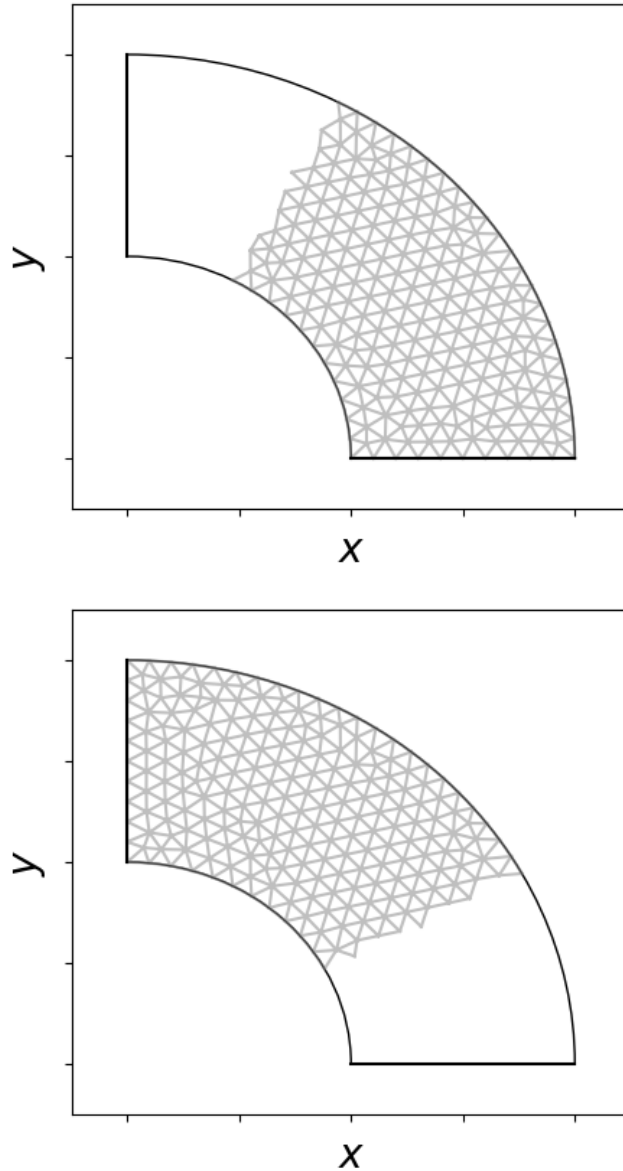


Рис. 11: Схема декомпозиции расчётной области ($M = 2$)

Для третьей тестовой задачи известно аналитическое решение для радиального перемещения и тензора напряжений. Тогда аналитическое радиальное перемещение считаем по формуле:

$$u_r = \frac{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}{E} A \cdot r + \frac{(1 + \mu)}{E} \frac{B}{r},$$

где $A = (p_a \cdot r_a^2 - p_b \cdot r_b^2) / (r_b^2 - r_a^2)$, $B = (p_a - p_b) \cdot (r_a r_b)^2 / (r_b^2 - r_a^2)$.

Вычисление аналитического радиального и окружного напряжений производится по формуле:

$$\sigma_{r,\varphi} = A \mp \frac{B}{r^2}$$

В таблице 9 представлены относительные ошибки для третьей тестовой задачи, полученные методом без применения МДО для трёх разных шагов сетки, а в таблице 10 - отношения ошибок. Относительные ошибки вычислялись по формуле:

$$\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N_{elem}} \left(\frac{\sigma_k^{ex} - \sigma_k^{num}}{\sigma_k^{ex}} \right)^2 \right) / \left(\sum_{k=1}^{N_{elem}} s_k \right)},$$

где σ_k^{ex} - точное значение рассматриваемой компоненты тензора напряжений в центре k-ого элемента, σ_k^{num} - полученное численное значение аналогичной величины, s_k - площадь k-го элемента сетки.

Из таблицы 10 видно, что для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости численного решения к аналитическому при измельчении сетки, для перемещений - квадратичная.

Таблица 9: Ошибки численного решения в зависимости от шага сетки

Шаг сетки	u_r	σ_r	σ_φ
0.05	1.39e-04	2.93e-02	1.13e-02
0.025	3.50e-05	1.42e-02	5.60e-03
0.0125	8.72e-06	7.04e-03	2.84e-03

Таблица 10: Отношение ошибок численного решения

Шаг сетки	u_r	σ_r	σ_φ
0.05	1	1	1
0.025	4	2	2
0.0125	16	4	4

На рис. 12 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи без методов декомпозиции области, на рис. 13 - распределение напряжений вблизи области приложения давления.

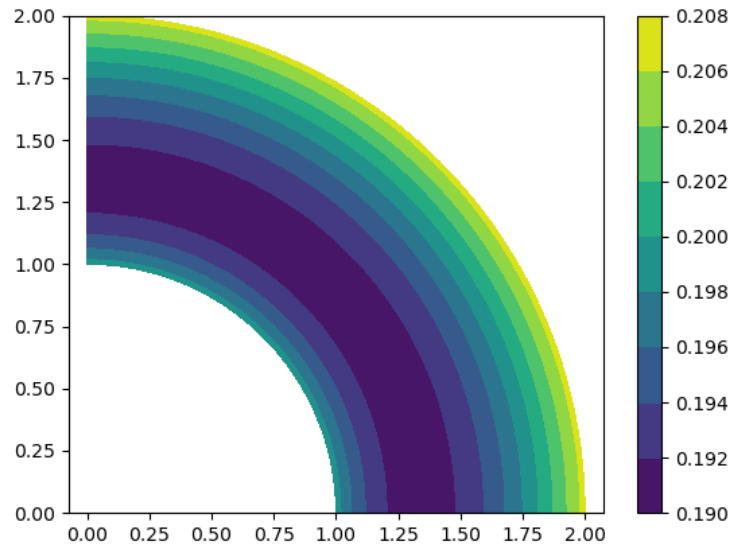


Рис. 12: Распределение перемещений во всей расчётной области

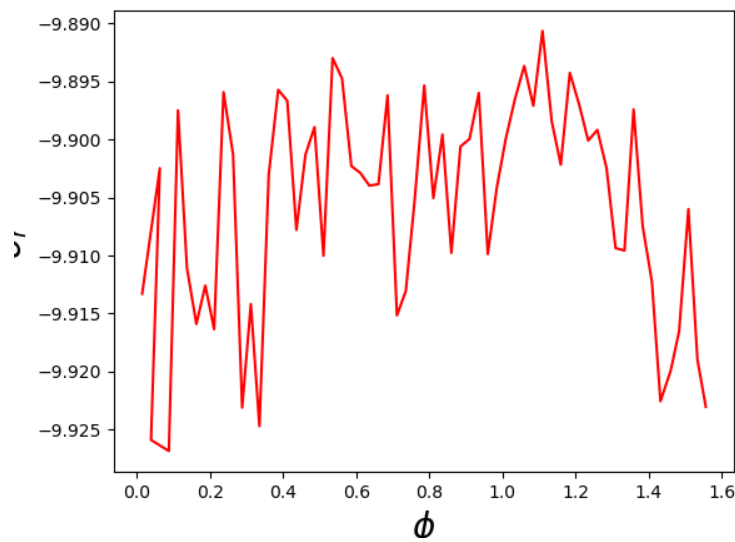


Рис. 13: Распределение напряжений в расчётной области третьей тестовой задачи

2.3.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 11 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 11: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для мультипликативного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	44	44	44
4 области	178	169	169
8 областей	528	497	494

В таблице 11 представлено количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости при шаге сетки $h = 0.0125$ и количестве подобластей $M = 8$ (коэффициент захлёста равен 0.3).

Таблица 12: Количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости

ε_0	Количество итераций	σ_r	σ_φ
1e-02	28	1.12e-02	7.84e-02
1e-03	57	7.82e-03	1.24e-02
1e-04	187	7.16e-03	4.33e-03
1e-05	494	7.04e-03	2.86e-03
1e-06	801	7.04e-03	2.84e-03

При сравнении таблиц 9 и 12 можем наблюдать, что ошибки, полученные мультипликативным МДО для $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ не отличаются от ошибок, полученных при решении задачи на всей области без применения методов МДО.

2.3.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 13 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 13: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	68	38	40
4 области	128	170	110
8 областей	463	408	393

В таблице 13 представлено количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости при шаге сетки $h = 0.0125$ и количестве подобластей $M = 8$ (коэффициент захлёста равен 0.3).

Таблица 14: Количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости

ε_0	Количество итераций	σ_r	σ_φ
1e-02	54	1.90e-02	2.34e-01
1e-03	153	7.41e-03	3.52e-02
1e-04	272	7.00e-03	4.63e-03
1e-05	393	7.04e-03	2.87e-03
1e-06	539	7.04e-03	2.84e-03

При сравнении таблиц 9 и 14 можем наблюдать, что ошибки, полученные мультипликативным МДО для $\varepsilon_0 = 10^{-6}$ не отличаются от ошибок, полученных при решении задачи на всей области без применения методов МДО.

2.3.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице 15 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 15: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	16	17	17
4 области	21	21	21
8 областей	24	23	23

В таблице 16 рассмотрена зависимость количества итераций для различных вариантов методов декомпозиции области от коэффициента относительного перекрытия для случая 4 подобластей и шага сетки $h = 0.025$. Анализ полученных результатов показал, что:

- при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается

Таблица 16: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	231	178	138
Аддитивный МДО	172	128	90
Двухуровневый аддитивный МДО	22	21	19

Для улучшения ситуации решения третьей тестовой задачи двухуровневым аддитивным методом можно использовать в качестве грубой сетки сектор поперечного сечения цилиндра. Радиус цилиндра совпадает с внешним радиусом толстостенной трубы.

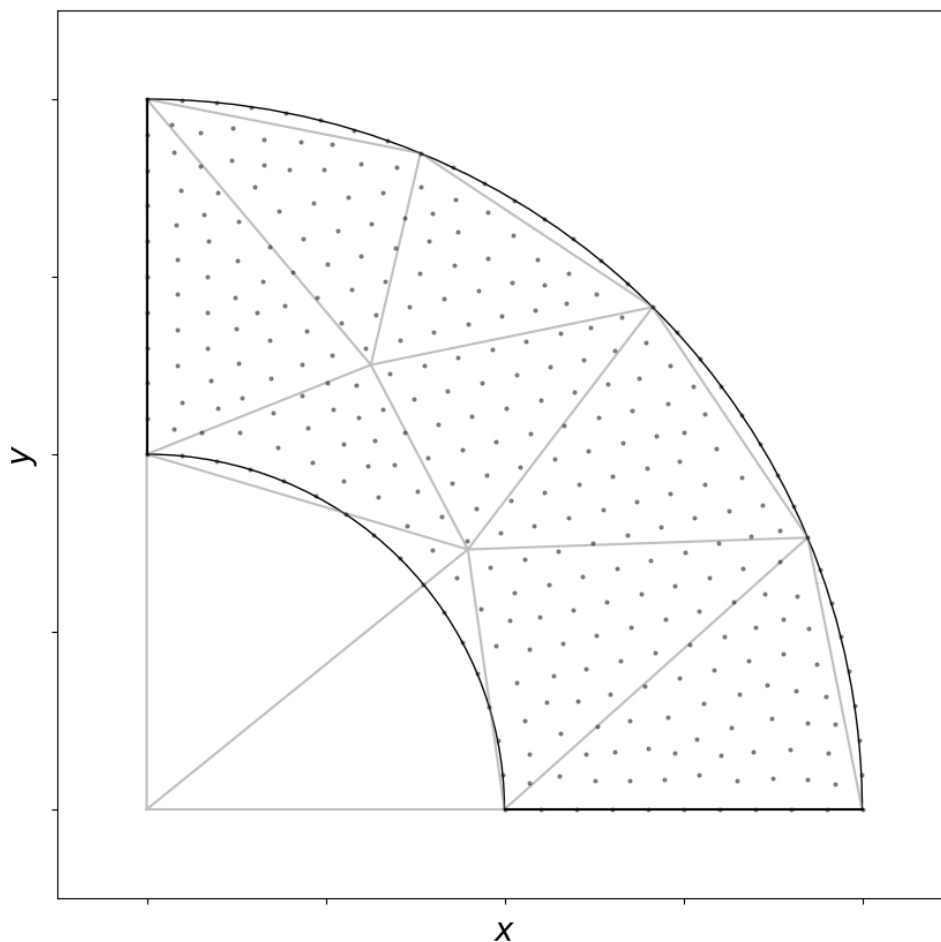


Рис. 14: Схема грубой расчётной области для третьей тестовой задачи

В таблице 15 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 17: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	28	25	25
4 области	56	58	49
8 областей	80	77	76

В таблице 16 рассмотрена зависимость количества итераций для различных вариантов методов декомпозиции области от коэффициента относительного перекрытия для случая 4 подобластей и шага сетки $h = 0.025$. Анализ полученных результатов показал, что:

- при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается

Таблица 18: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	231	178	138
Аддитивный МДО	172	128	90
Двухуровневый аддитивный МДО	60	56	44

2.4 Четвёртая тестовая задача

На рис. 15 представлена расчётная область для четвёртой тестовой задачи - сектор поперечного сечения подшипника, нагруженный внешним давлением $p = 5$ МПа. Внутренний радиус $p_a = 1$ см, внешний радиус $p_b = 2$ см.

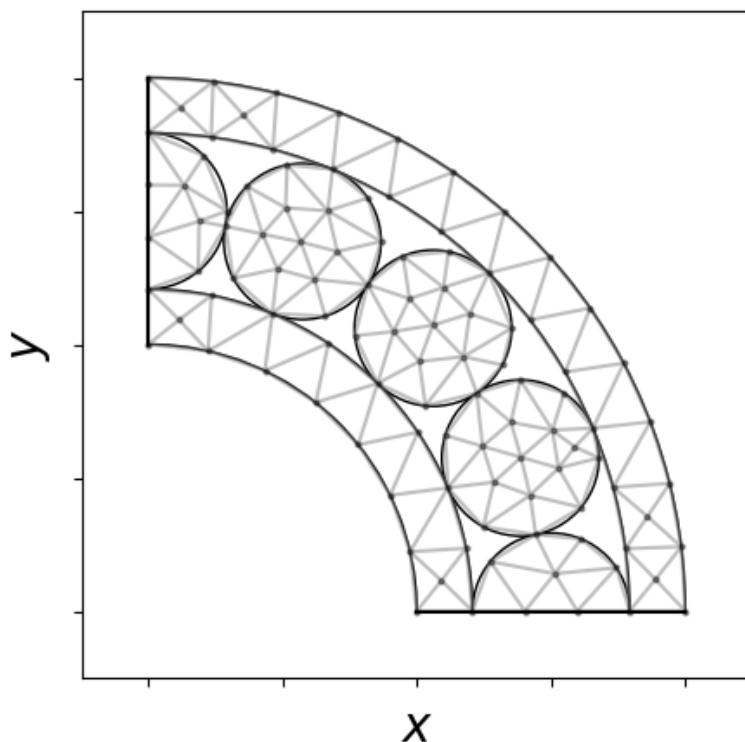


Рис. 15: Схема расчётной области третьей тестовой задачи

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$.

Характерные размеры каждой подобласти: угол каждого сектора-подобласти $\varphi_M = \pi/(2 \cdot M)$. На рис. 16 представлена расчётная область третьей тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

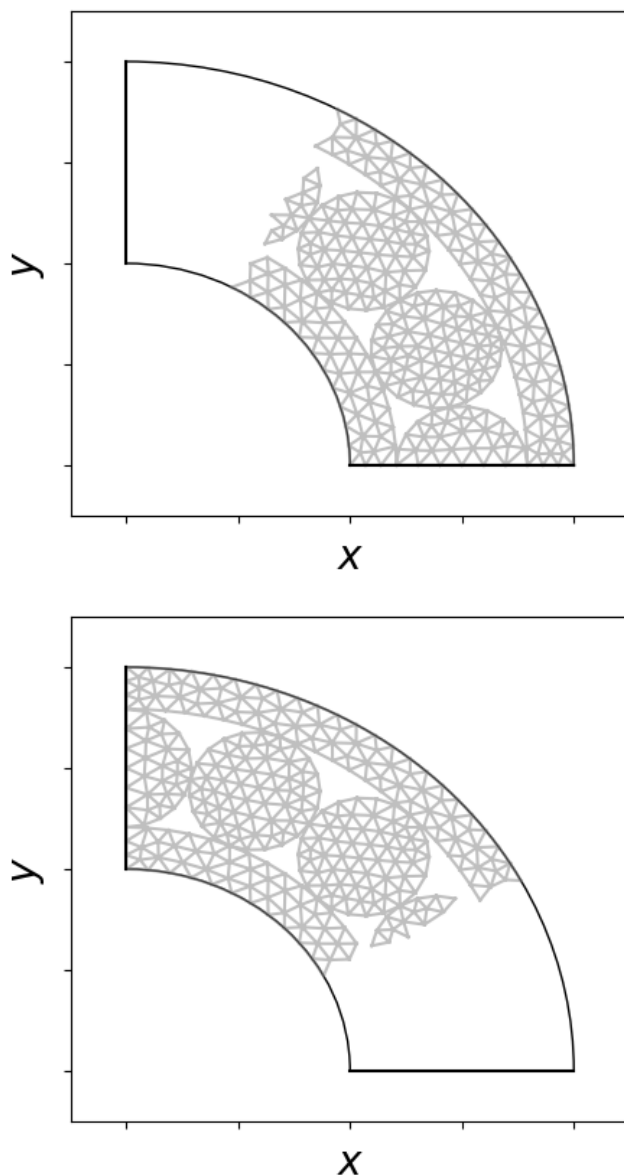


Рис. 16: Схема декомпозиции расчётной области третьей тестовой задачи

Для четвёртой тестовой задачи известно аналитическое решение для компонент вектора перемещений и тензора напряжений. На рис. 17 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи без методов декомпозиции области, на рис. 18 - распределение напряжений вблизи области приложения давления.

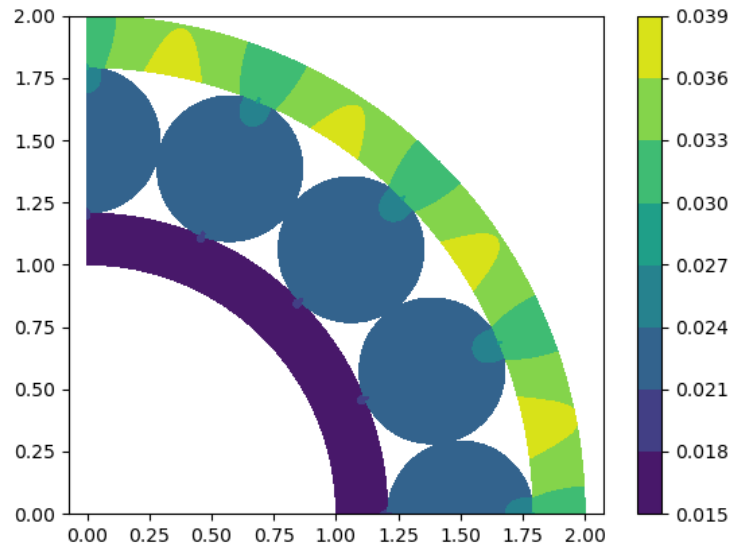


Рис. 17: Распределение перемещений во всей расчётной области

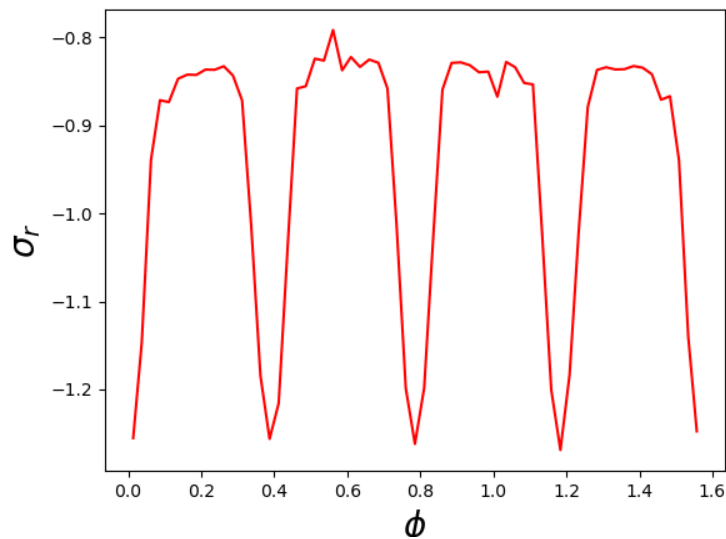


Рис. 18: Распределение напряжений вблизи области приложения давления

2.4.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 19 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 19: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для мультипликативного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	42	44	45
4 области	220	231	245
8 областей	409	509	550

2.4.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 20 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 20: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	52	36	49
4 области	194	184	183
8 областей	647	566	546

2.4.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице 21 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 21: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	27	26	26
4 области	48	51	56
8 областей	70	76	83

В таблице 22 рассмотрена зависимость количества итераций для различных вариантов методов декомпозиции области от коэффициента относительного перекрытия для случая 4 подобластей и шага сетки $h = 0.025$. Анализ полученных результатов показал, что:

- при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается

Таблица 22: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	264	220	171
Аддитивный МДО	387	194	230
Двухуровневый аддитивный МДО	54	48	42

Для улучшения ситуации решения третьей тестовой задачи двухуровневым аддитивным методом можно использовать в качестве грубой сетки сектор поперечного сечения цилиндра. Радиус цилиндра совпадает с внешним радиусом толстостенной трубы.

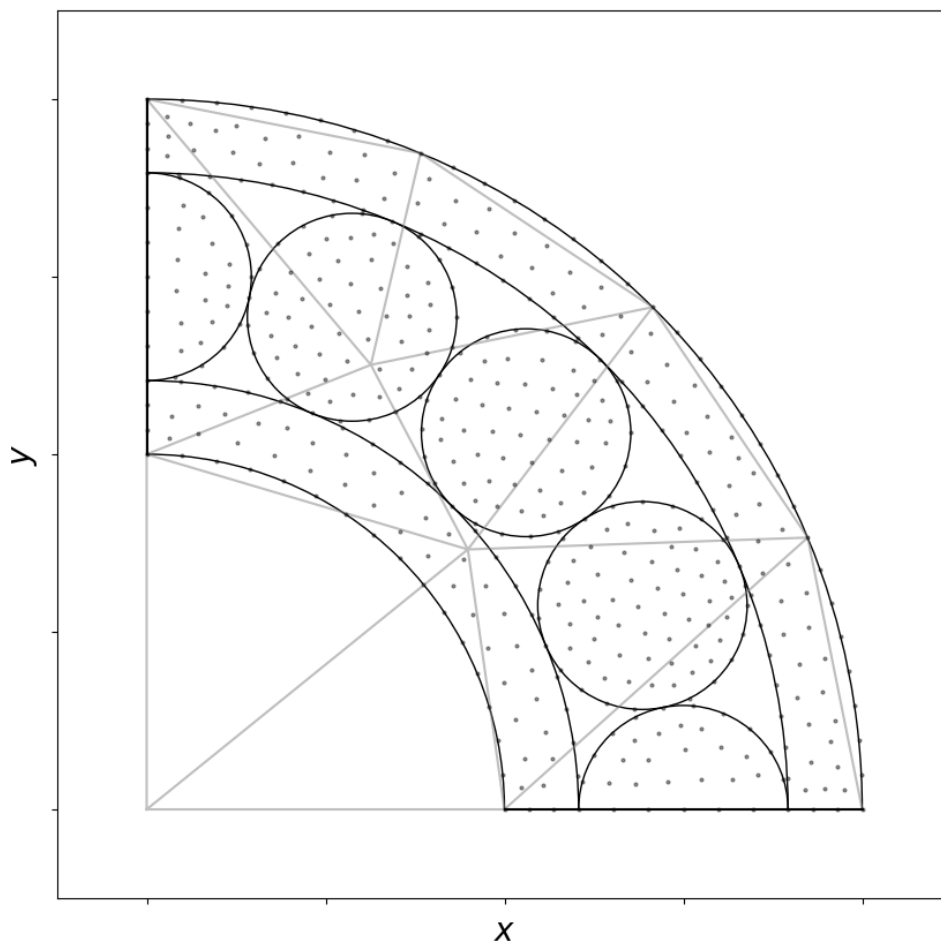


Рис. 19: Схема грубой расчётной области для третьей тестовой задачи

В таблице 21 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 23: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	44	36	43
4 области	87	92	87
8 областей	109	111	118

В таблице 22 рассмотрена зависимость количества итераций для различных вариантов методов декомпозиции области от коэффициента относительного перекрытия для случая 4 подобластей и шага сетки $h = 0.025$. Анализ полученных результатов показал, что:

- при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается

Таблица 24: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая $M = 4$ и $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	264	220	171
Аддитивный МДО	387	194	230
Двухуровневый аддитивный МДО	105	87	78