

# 1 Математическая модель

Для решения общей задачи по нахождению деформаций и напряжений в деформируемом теле, занимающем область  $G$  с границей  $\partial G$ , необходимо использовать следующие соотношения:

кинематические граничные условия

$$u(x) = u_0, \quad x \in \partial G_D, \quad (1)$$

силовые граничные условия

$$\sigma(u) \cdot n = p(x), \quad x \in \partial G_N, \quad (2)$$

соотношения Коши для тензора полных деформаций

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad (3)$$

тензор напряжений

$$\sigma(u) = ??? \quad (4)$$

Здесь  $u(x)$  - компоненты вектора перемещения,  $\partial G_D$  - участок границы, на котором действуют кинематические условия Дирихле,  $\partial G_N$  - участок границы, на котором действуют силовые граничные условия Неймана,  $p(x)$  - вектор внешней нагрузки.

Решить данную задачу можно с помощью метода декомпозиции Шварца.

## 1.1 Методы Шварца

Рассмотрим классическую задачу метода Шварца для двух подобластей: имеется сложная область  $\Omega$ , состоящая из объединения двух простых областей (круга  $\Omega_1$  и прямоугольника  $\Omega_2$ ). Рассмотрим уравнение Пуассона, цель которого найти перемещения  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  при условии, что

$$\begin{aligned} -\Delta(u) &= f, \quad u \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega \end{aligned}$$

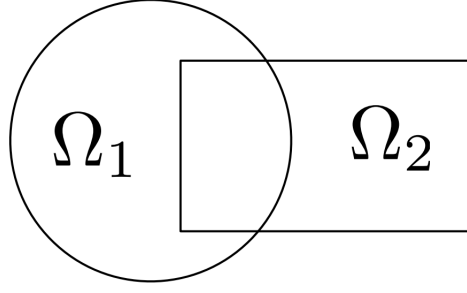


Рис. 1: Сложная область, получившаяся из объединения двух простых областей

Классический метод Шварца это итерационный метод, основанный на решении задач меньшего масштаба в подобластях  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Один шаг итерационного процесса обновления результатов  $u^n \rightarrow u^{n+1}$ :

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_1 & -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_2 \\
 u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \text{ после чего} & u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\
 u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2 & u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1
 \end{aligned}$$

Теперь же рассмотрим случай для произвольной области и произвольного числа подобластей. Вернёмся к нашей первоначальной задаче (ссылка здесь), представим область  $G$  в виде объединения конечного числа подобластей  $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$  с конечным числом границ  $\partial G_1, \dots, \partial G_M$ , где  $M$  - число подобластей. Данные подобласти пересекаются, что требует ввода дополнительных обозначений для границ, возникающих после декомпозиции областей:  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$ .

Выберем начальное приближение для перемещений, удовлетворяющее граничным условиям (ссылка здесь). Алгоритм из классического метода Шварца можно оптимизировать для большего числа подобластей:

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
 \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
 \end{aligned}$$

Данный алгоритм Шварца называют мультипликативным, он последовательный и решение на каждой подобласти зависит от решения на предыдущей подобласти (или от решения на предыдущей итерации, если речь идёт о первой подобласти для итерации).

Существует также другой вариант метода Шварца, основанный на решении локальных задач для каждой подобласти без зависимости от соседних подоб-

ластей:

$$\begin{aligned}
-\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
\sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
u^{n+1}(x) &= u^n(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
\end{aligned}$$

Этот метод называется аддитивный метод Шварца. В конце каждой итерации решение вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент  $\alpha$  - некоторый параметр, от которого зависит скорость сходимости итерационного процесса.

## 2 Численная модель

### 3 Краткое описание программы

## 4 Результаты численных расчётов

В данном разделе будут приведены расчёты четырёх тестовых задач с использованием четырёх методов. Для каждой из задач для базового случая будут приведены графики распределения напряжений вдоль поверхности, к которой приложено давление, а также графики распределения перемещений на всей расчётной области.

Для методов декомпозиции области расчётные области будут разбиты на заданное количество секторов без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$  в зависимости от задачи, где  $M$  - число подобластей. Также стоит заметить, что каждая подобласть  $\Omega_i$  ( $i = 1, \dots, M$ ) в зависимости от задачи обладает своими размерными характеристиками. Подобласть  $G_i$  соответствует объединению подобласти  $\Omega_i$  и дополнительных участков соседних подобластей  $\Omega_{i-1}$  и  $\Omega_{i+1}$ . Размеры этих дополнительных участков зависят от относительного коэффициента перекрытия (отношение размера перекрытия к размеру подобласти  $\Omega_i$ ).

Итерационный процесс для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов продолжается до тех пор, пока не выполнится условие критерия останова  $u_{err}$  для перемещений:

$$u_{err} = \sqrt{\left( \sum_{k=1}^{N_p} s_k \left( \frac{u_k^{m+1} - u_k^m}{u_k^{m+1}} \right)^2 \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_p} s_k \right)} < \varepsilon_0,$$

где  $s_k$  - суммарная площадь элементов сетки, в которые входит  $k$ -й узел, разделённая на количество узлов в элементе,  $N_{elem}$  - количество узлов сетки,  $u_k^{m+1}$  - решение на текущей итерации,  $u_k^m$  - решение на предыдущей итерации.

Дополнительно для каждой из задач для методов декомпозиции будут приведены таблицы зависимости количества итераций от относительного коэффициента перекрытия.

## 4.1 Первая тестовая задача

На рис. 2 представлена расчётная область для первой тестовой задачи - прямоугольник, закреплённый с левой и правой стороны по оси  $OX$  и с нижней стороны по оси  $OY$ . Сверху действует распределённая нагрузка  $p = 50$  МПа. Ширина тела  $a = 2$  см, высота тела  $b = 1$  см.

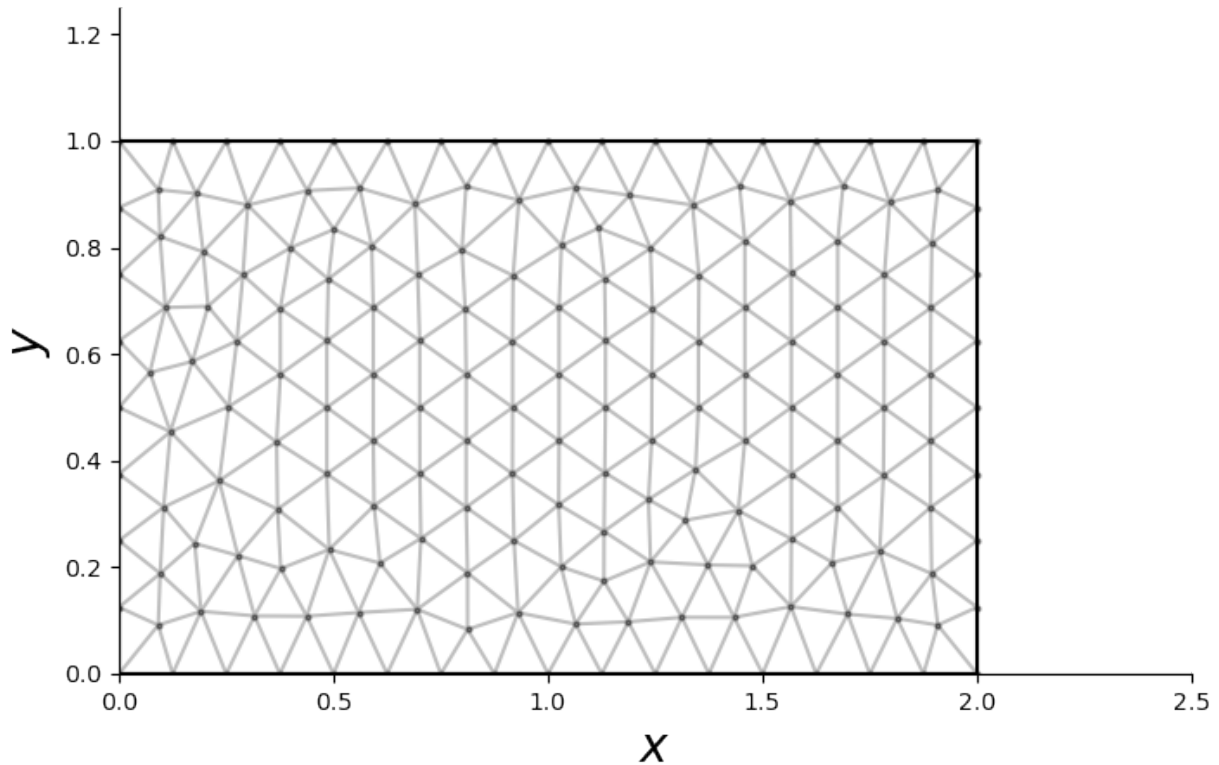


Рис. 2: Схема расчётной области

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.34$ .

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами  $h = 0.05$  (количество узлов - 994),  $h = 0.025$  (количество узлов - 3812),  $h = 0.0125$  (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр  $\alpha = 0.5$ .

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается по оси  $OX$  на заданное количество прямоугольных областей без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ . Характерные размеры каждой подобласти: ширина подобласти  $a_M = a/M$ , высота подобласти совпадает с высотой тела  $b_M = b$ . На рис. 3 представлена расчётная область первой тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

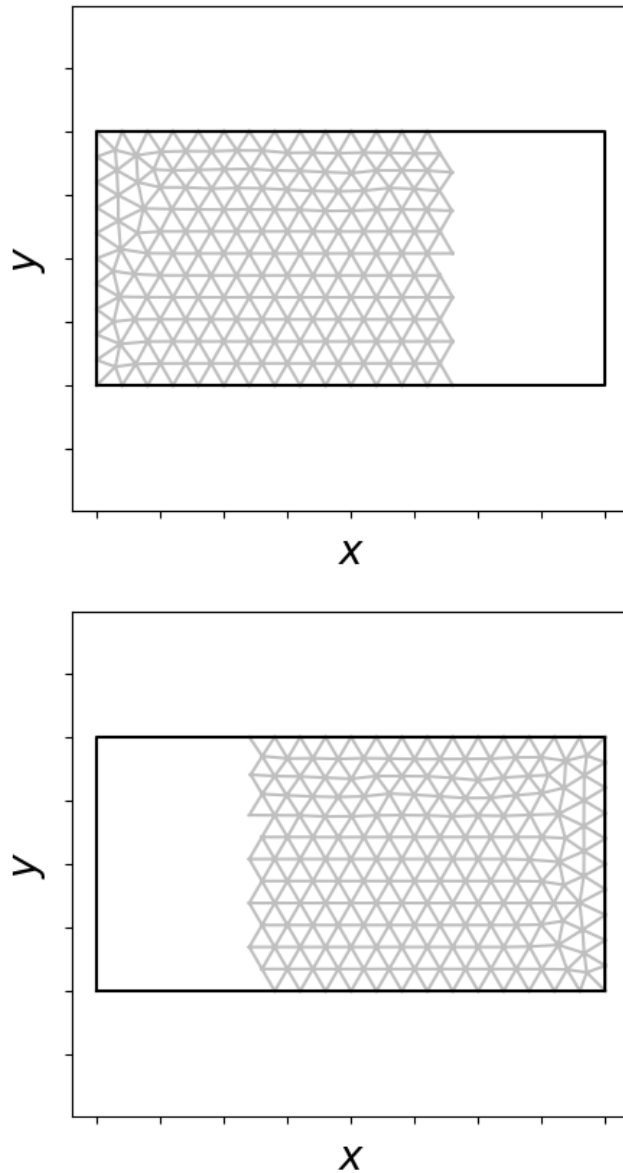


Рис. 3: Схема декомпозиции расчётной области ( $M = 2$ )



На рис. 4 приведено распределение радиальных перемещений, полученных при решении задачи во всей расчётной области без МДО, на рис. 5 - распределение узловых напряжений во всей области.

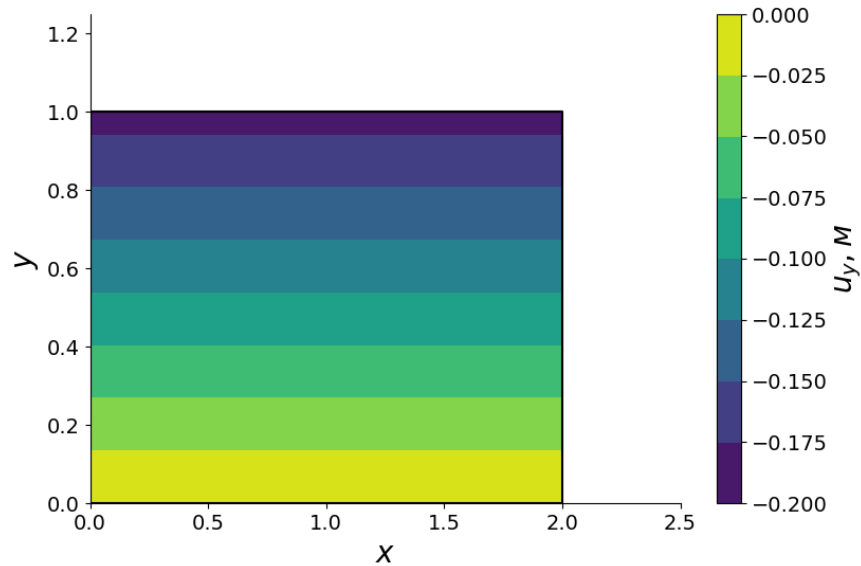


Рис. 4: Распределение перемещений во всей расчётной области

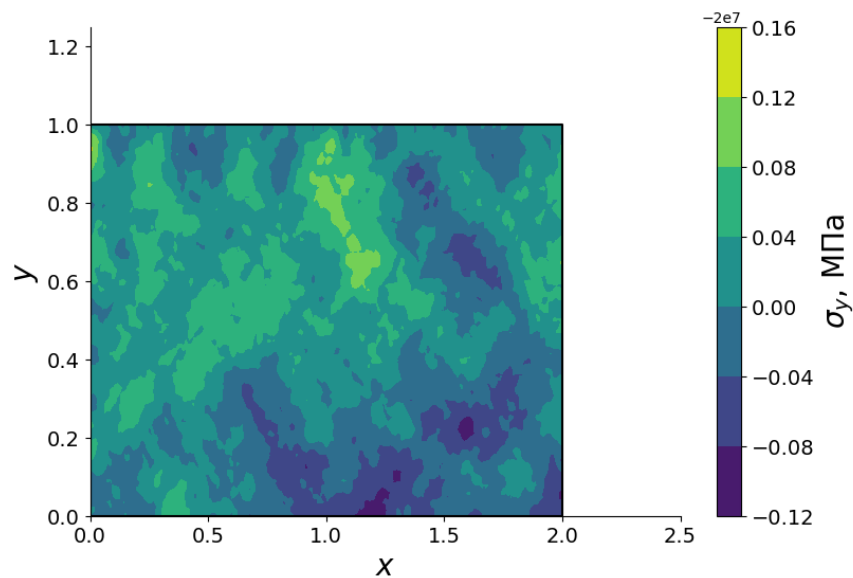


Рис. 5: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области

#### 4.1.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 1 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в  $M^2$  раз);

Таблица 1: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	13	13	13	14
4 области	39	39	40	42
8 областей	125	124	128	135

#### 4.1.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 2 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в  $M^2$  раз);
- количество итераций по сравнению со случаем применения мультипликативного метода Шварца выросло почти в 4 раза;

Таблица 2: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	23	24	30	29
4 области	57	69	85	80
8 областей	317	237	258	222

### 4.1.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для двухуровневого аддитивного метода кроме основной сетки в расчётной области зададим грубую сетку, удовлетворяющую условиям включения всех узлов мелкой сетки в элементы грубой сетки и соответствия размеров областей.

В таблице 3 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи для шага мелкой сетки  $h = 0.0125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3).

Анализ данной таблицы показывает, что для расчётов рациональнее взять шаг  $h = 0.125$ , так как в этом случае количество итераций несильно зависит от количества подобластей.

На рис. 6 изображена расчётная схема области с грубой сеткой.

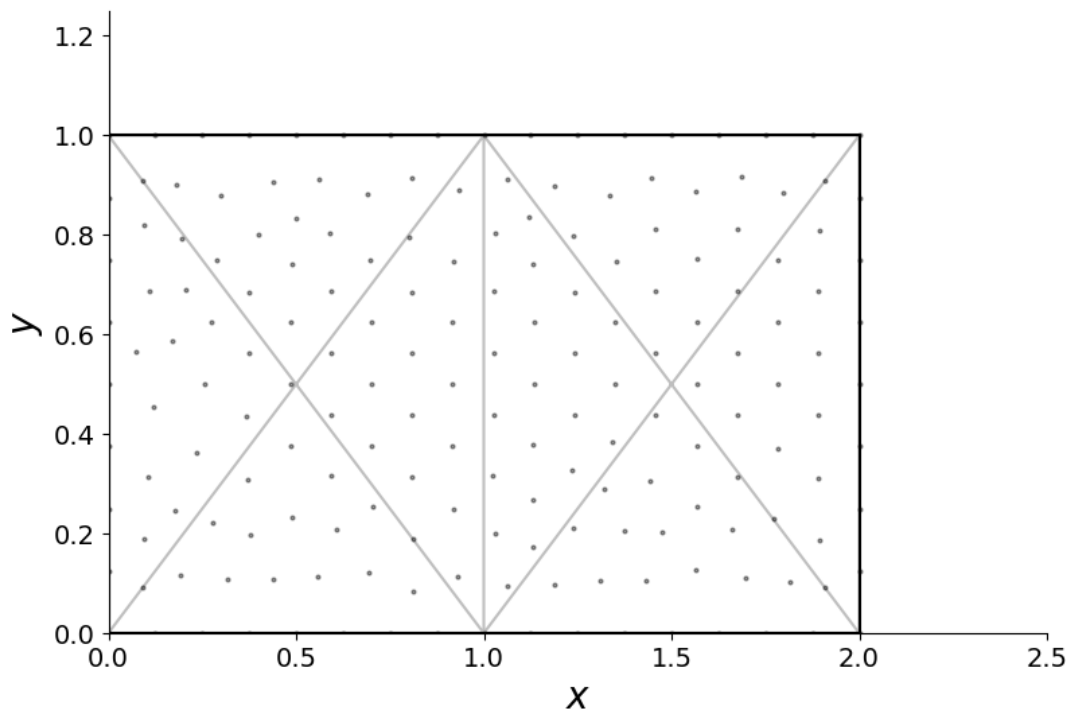


Рис. 6: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области

Таблица 3: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца (шаг мелкой сетки  $h = 0.0125$ )

Количество подобластей	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.125$
2 области	18	16	14	15
4 области	40	22	17	14
8 областей	86	32	19	16

В таблице 4 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для первой тестовой задачи для шага грубой сетки  $h = 0.125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 4: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	15	15	15	15
4 области	14	14	14	15
8 областей	16	16	16	17

В таблице 5 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$ , шага мелкой сетки  $h = 0.025$  и шага грубой сетки  $h = 0.125$ .

Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 5: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$  и  $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4
Мультипликативный МДО	55	40	31
Аддитивный МДО	119	85	65
Двухуровневый аддитивный МДО	15	14	14

## 4.2 Вторая тестовая задача

На рис. 7 представлена расчётная область для второй тестовой задачи - прямоугольник, закреплённый с левой стороны по оси  $OX$  и с нижней стороны по оси  $OY$ . Сверху действует распределённая нагрузка  $p = 50$  МПа. Ширина тела  $a = 2$  см, высота тела  $b = 1$  см.

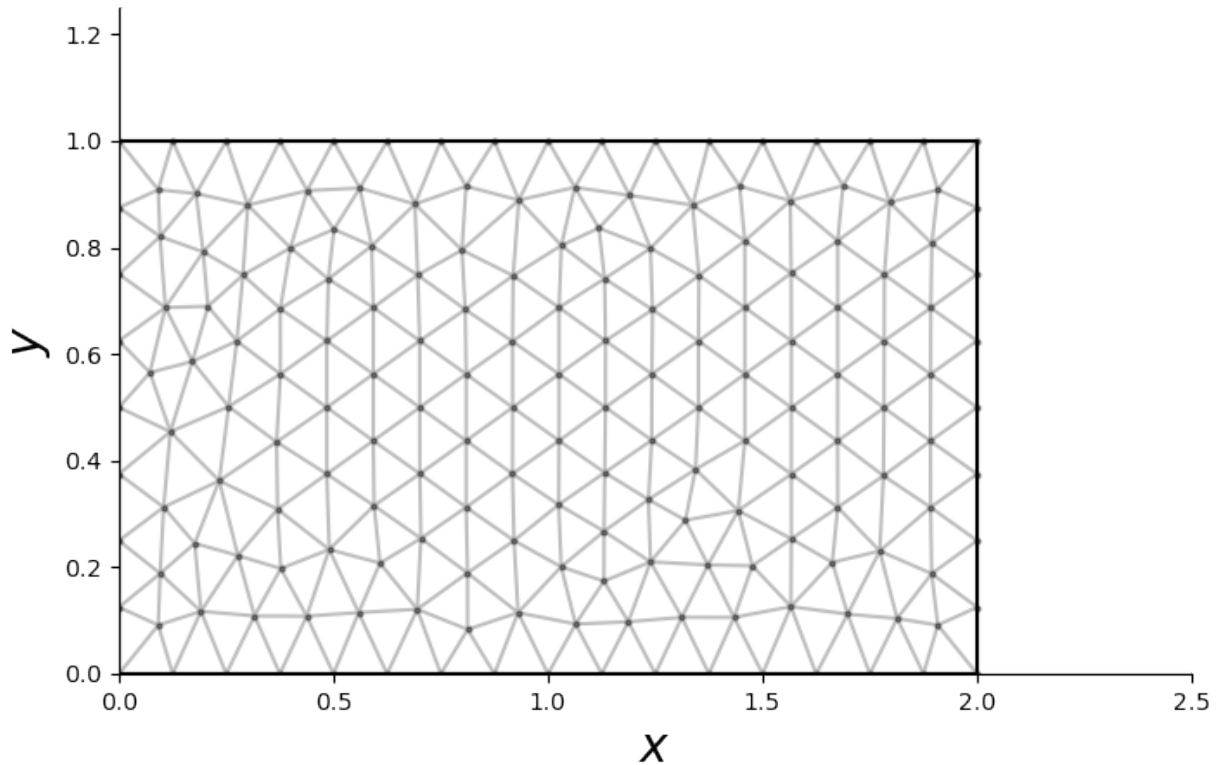


Рис. 7: Схема расчётной области

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.34$ .

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами  $h = 0.05$  (количество узлов - 994),  $h = 0.025$  (количество узлов - 3812),  $h = 0.0125$  (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр  $\alpha = 0.5$ .

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается по оси  $OX$  на заданное количество прямоугольных областей без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ . Характерные размеры каждой подобласти: ширина подобласти  $a_M = a/M$ , высота подобласти совпадает с высотой тела  $b_M = b$ . На рис. 8 представлена расчётная область вторая тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

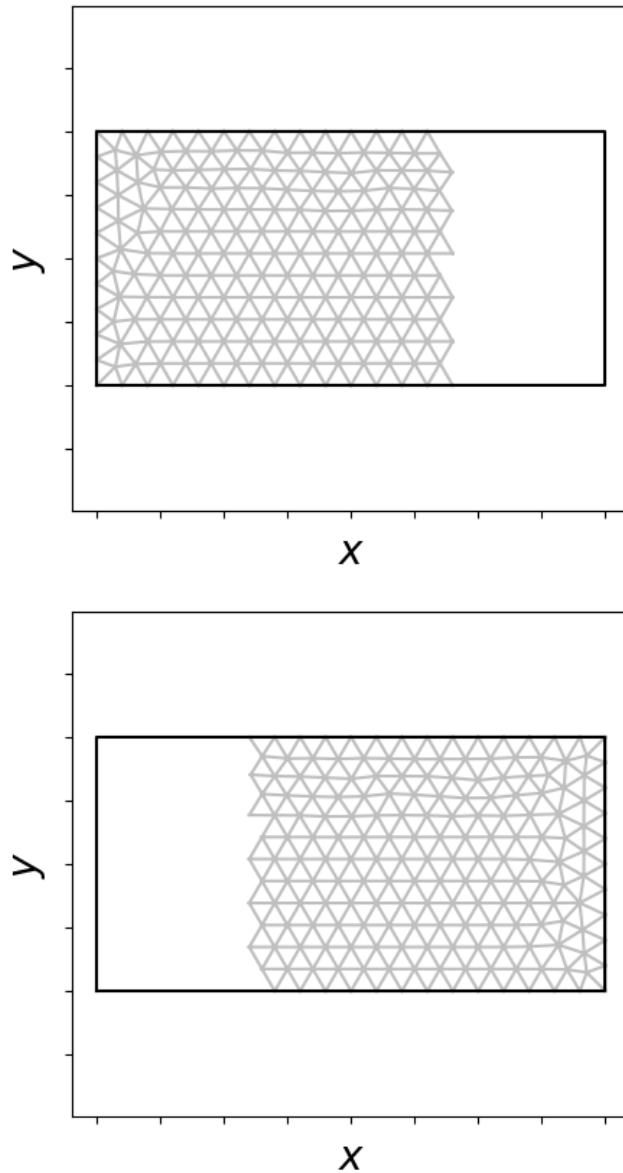


Рис. 8: Схема декомпозиции расчётной области ( $M = 2$ )

На рис. 9 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи во всей расчётной области без МДО, на рис. 10 - распределение напряжений вблизи области приложения давления.

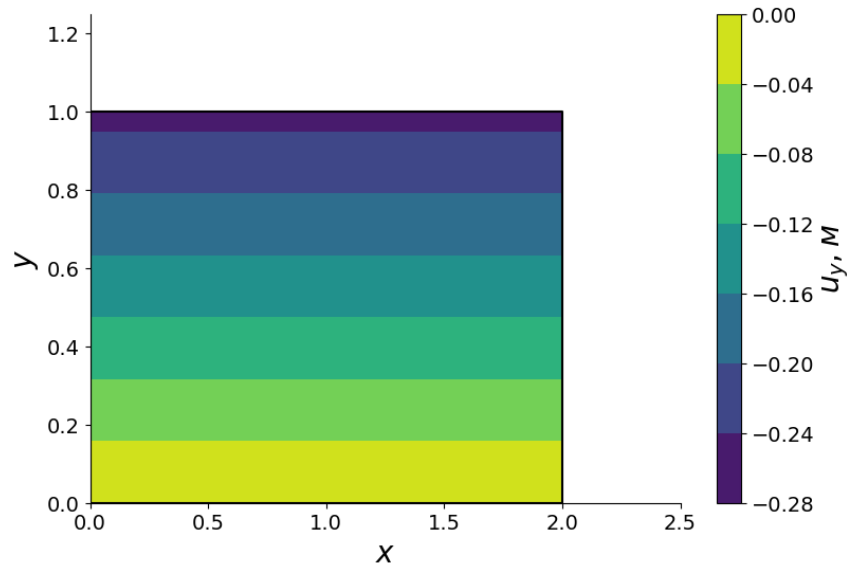


Рис. 9: Распределение перемещений во всей расчётной области

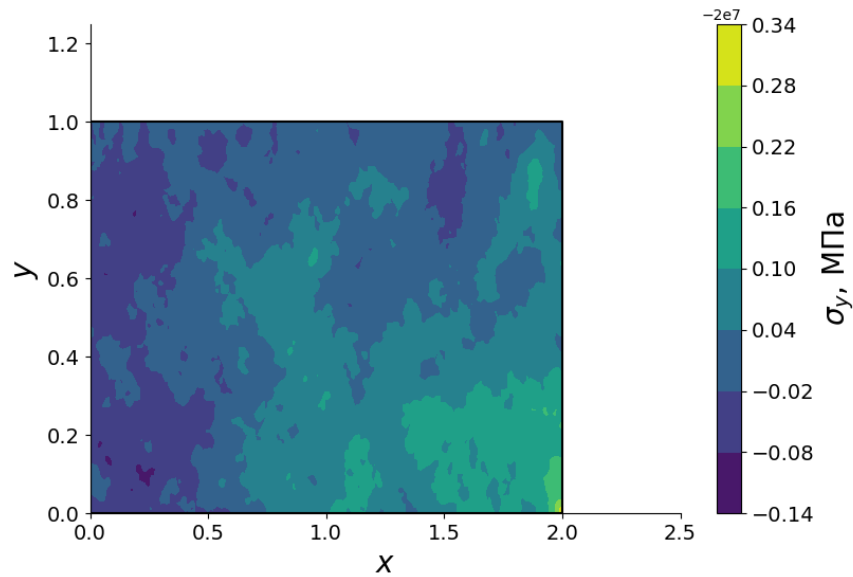


Рис. 10: Распределение узловых напряжений во всей области



### 4.2.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 6 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в  $M^2$  раз);

Таблица 6: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей (M)	h = 0.05	h = 0.025	h = 0.0125	h = 0.00625
2 области	23	23	23	22
4 области	102	100	99	99
8 областей	401	386	385	383

#### 4.2.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 7 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается (при увеличении количества подобластей количество итераций увеличивается примерно в  $M^2$  раз);
- количество итераций по сравнению со случаем применения мультипликативного метода Шварца выросло почти в 4 раза;

Таблица 7: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	23	24	30	29
4 области	57	69	85	80
8 областей	317	237	258	222

### 4.2.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для двухуровневого аддитивного метода кроме основной сетки в расчётной области зададим грубую сетку, удовлетворяющую условиям включения всех узлов мелкой сетки в элементы грубой сетки и соответствия размеров областей.

В таблице 8 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи для шага мелкой сетки  $h = 0.0125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3).

Анализ данной таблицы показывает, что для расчётов рациональнее взять шаг  $h = 0.125$ , так как в этом случае количество итераций несильно зависит от количества подобластей.

На рис. 11 изображена расчётная схема области с грубой сеткой.

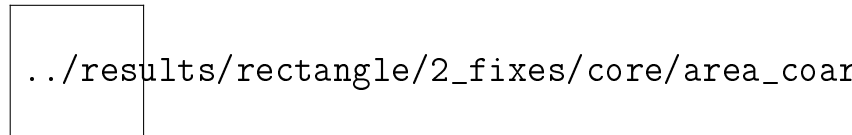


Рис. 11: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области

Таблица 8: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца (шаг мелкой сетки  $h = 0.0125$ )

Количество подобластей	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.125$
2 области	17	15	14	14
4 области	29	19	16	16
8 областей	42	26	17	17

В таблице 9 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи для шага грубой сетки  $h = 0.125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 9: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$

В таблице 10 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$ , шага мелкой сетки  $h = 0.025$  и шага грубой сетки  $h = 0.125$ .

Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 10: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$  и  $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4

### 4.3 Третья тестовая задача

На рис. 12 представлена расчётная область для второй тестовой задачи - сектор поперечного сечения толстостенной трубы, нагруженной внешним давлением  $p = 5$  МПа. Внутренний радиус  $p_a = 1$  см, внешний радиус  $p_b = 2$  см.

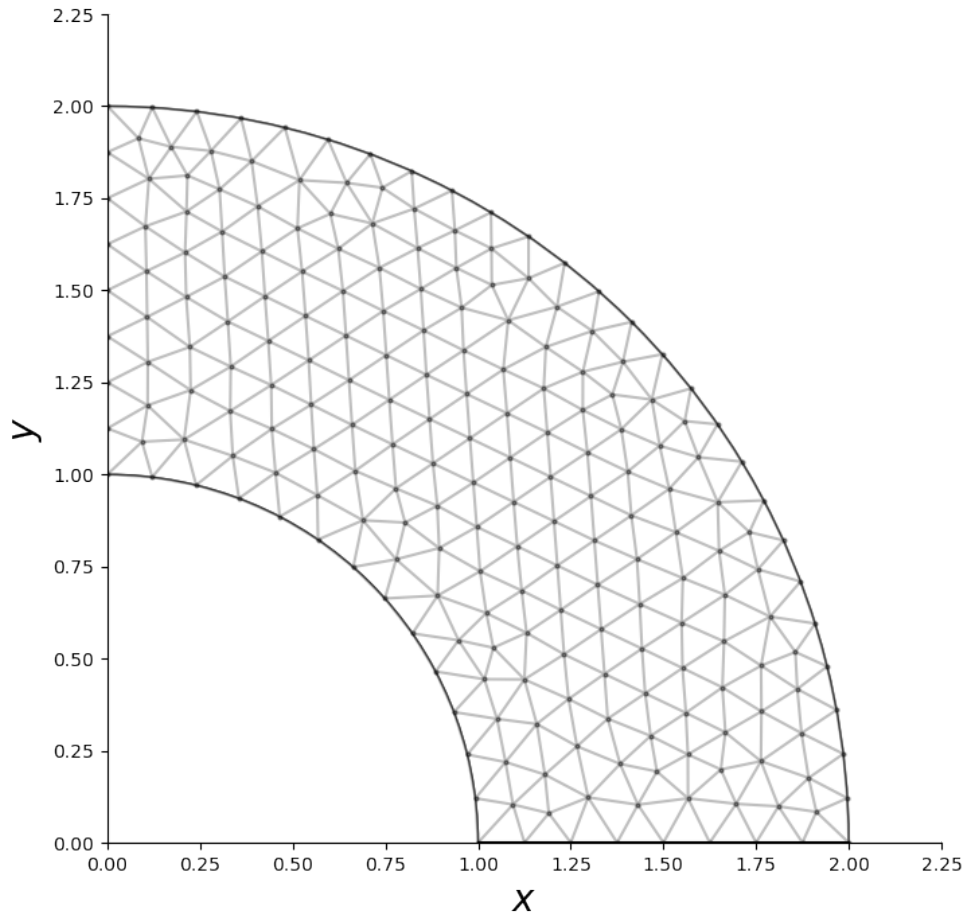


Рис. 12: Схема расчётной области третьей тестовой задачи

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.34$ .

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами  $h = 0.05$  (количество узлов - 994),  $h = 0.025$  (количество узлов - 3812),  $h = 0.0125$  (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр  $\alpha = 0.5$ .

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается на заданное количество секторов без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ .

Характерные размеры каждой подобласти: угол каждого сектора - подобласти  $\varphi_M = \pi/(2 \cdot M)$ . На рис. 13 представлена расчётная область третьей тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

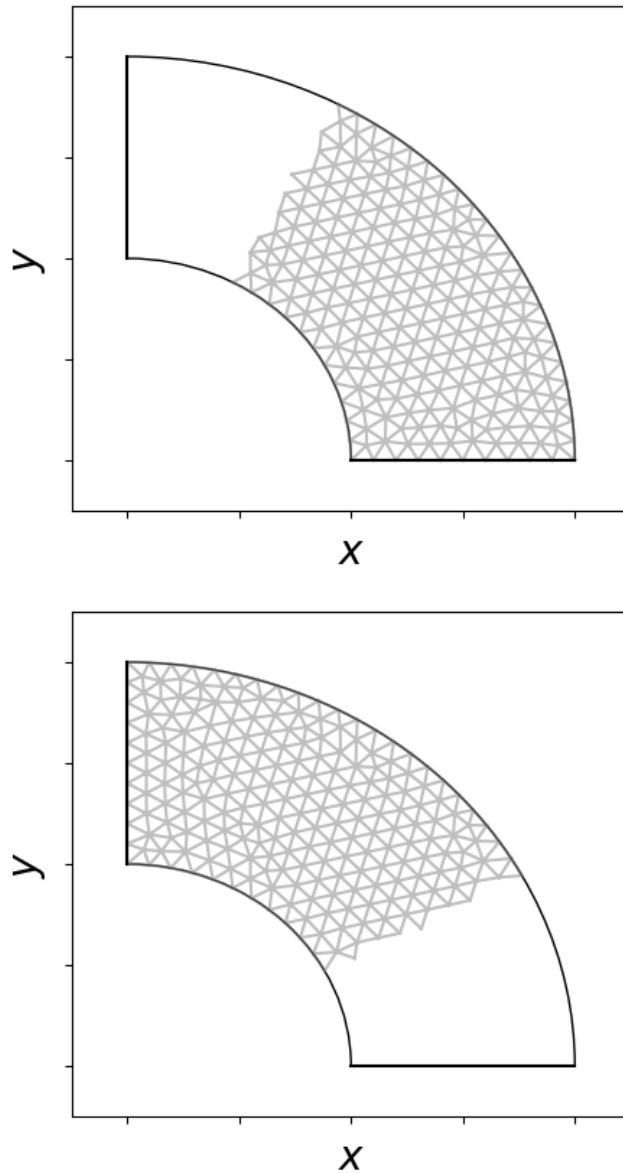


Рис. 13: Схема декомпозиции расчётной области ( $M = 2$ )

Для третьей тестовой задачи известно аналитическое решение для радиального перемещения и тензора напряжений. Тогда аналитическое радиальное перемещение считаем по формуле:

$$u_r = \frac{(1 + \mu) \cdot (1 - 2\mu)}{E} A \cdot r + \frac{(1 + \mu)}{E} \frac{B}{r},$$

где  $A = (p_a \cdot r_a^2 - p_b \cdot r_b^2) / (r_b^2 - r_a^2)$ ,  $B = (p_a - p_b) \cdot (r_a r_b)^2 / (r_b^2 - r_a^2)$ .

Вычисление аналитического радиального и окружного напряжений производится по формуле:

$$\sigma_{r,\varphi} = A \mp \frac{B}{r^2}$$

В таблице 11 представлены относительные ошибки для третьей тестовой задачи, полученные методом без применения МДО для трёх разных шагов сетки, а в таблице 12 - отношения ошибок. Относительные ошибки вычислялись по формуле:

$$\sqrt{\left( \sum_{k=1}^{N_{elem}} \left( \frac{\sigma_k^{ex} - \sigma_k^{num}}{\sigma_k^{ex}} \right)^2 \right) / \left( \sum_{k=1}^{N_{elem}} s_k \right)},$$

где  $\sigma_k^{ex}$  - точное значение рассматриваемой компоненты тензора напряжений в центре k-ого элемента,  $\sigma_k^{num}$  - полученное численное значение аналогичной величины,  $s_k$  - площадь k-го элемента сетки.

Из таблицы 12 видно, что для напряжений наблюдается линейная скорость сходимости численного решения к аналитическому при измельчении сетки, для перемещений - квадратичная.

Таблица 11: Ошибки численного решения в зависимости от шага сетки

Шаг сетки	$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
0.05	1.39e-04	2.93e-02	1.13e-02
0.025	3.50e-05	1.42e-02	5.60e-03
0.0125	8.72e-06	7.04e-03	2.84e-03

Таблица 12: Отношение ошибок численного решения

Шаг сетки	$u_r$	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
0.05	1	1	1
0.025	4	2	2
0.0125	16	4	4

На рис. 14 приведено распределение перемещений, полученных при решении задачи без методов декомпозиции области, на рис. 15 и 16- распределение узловых радиальных и тангенциальных напряжений во всей области.

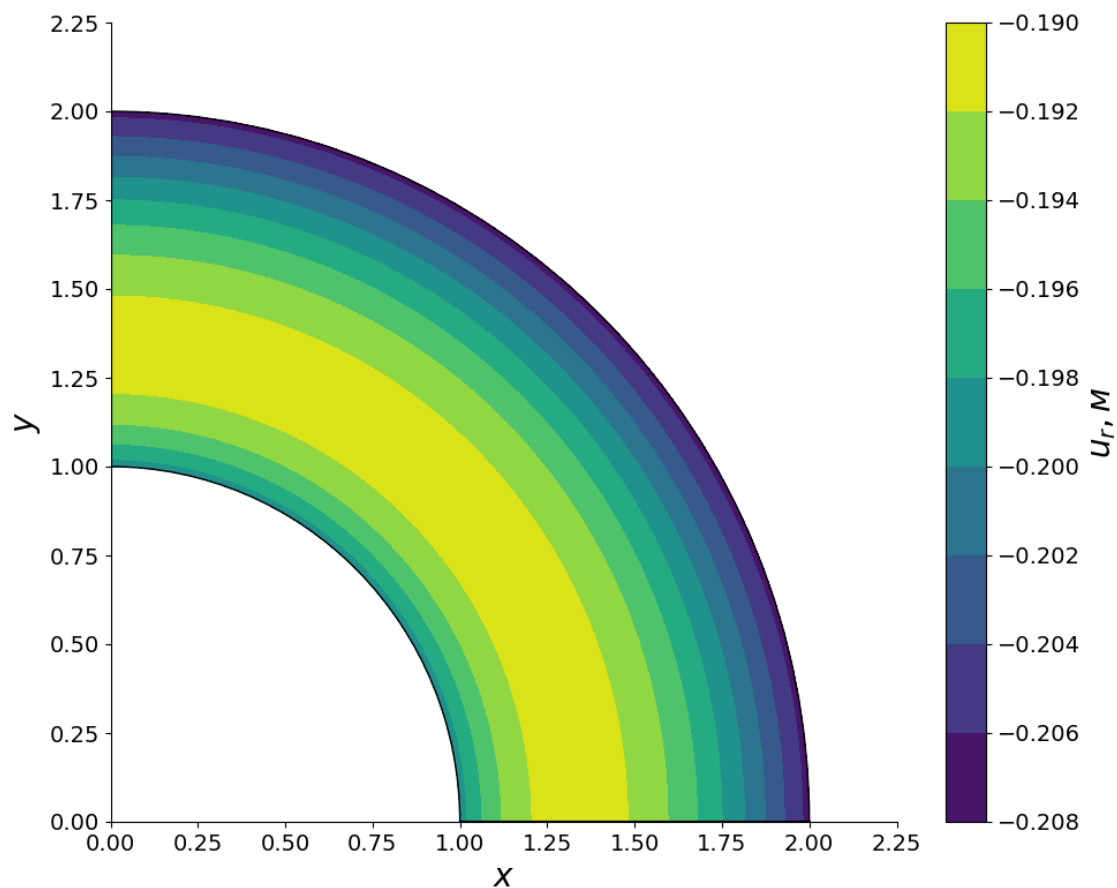


Рис. 14: Распределение перемещений во всей расчётной области



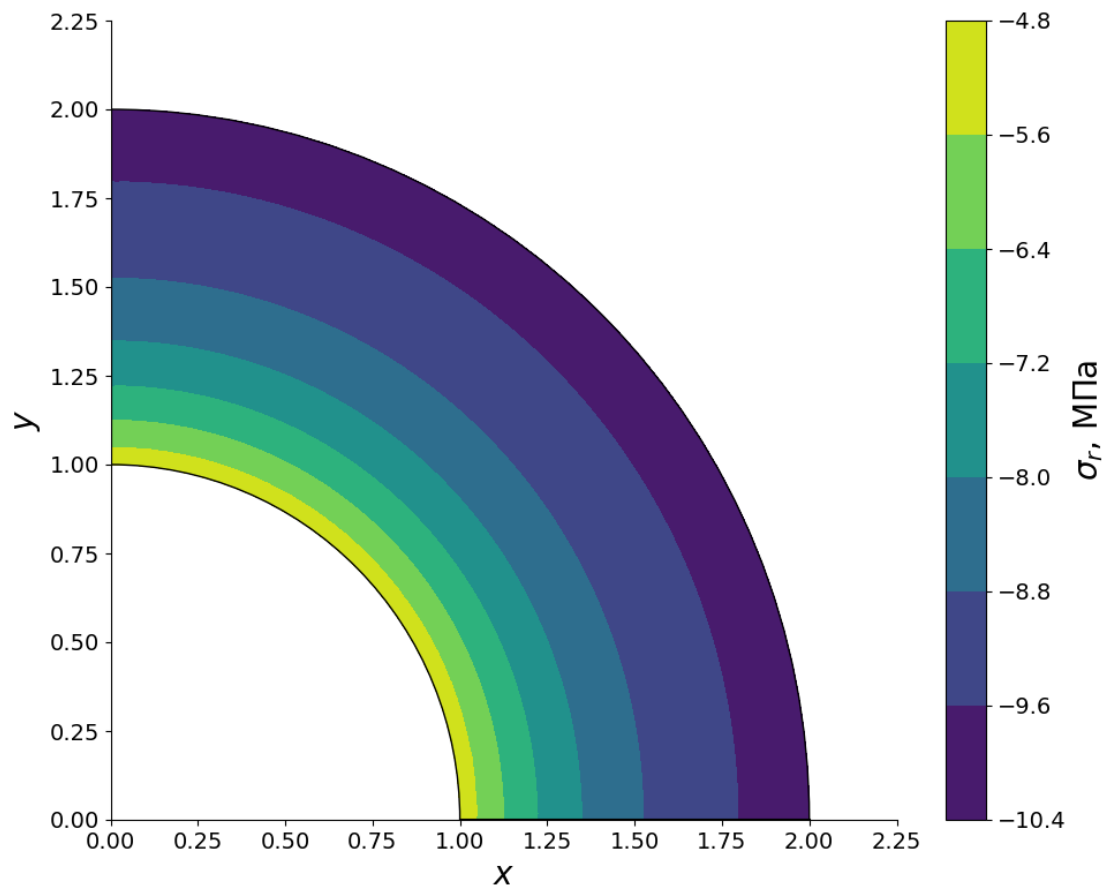


Рис. 15: Распределение узловых радиальных напряжений во всей расчётной области

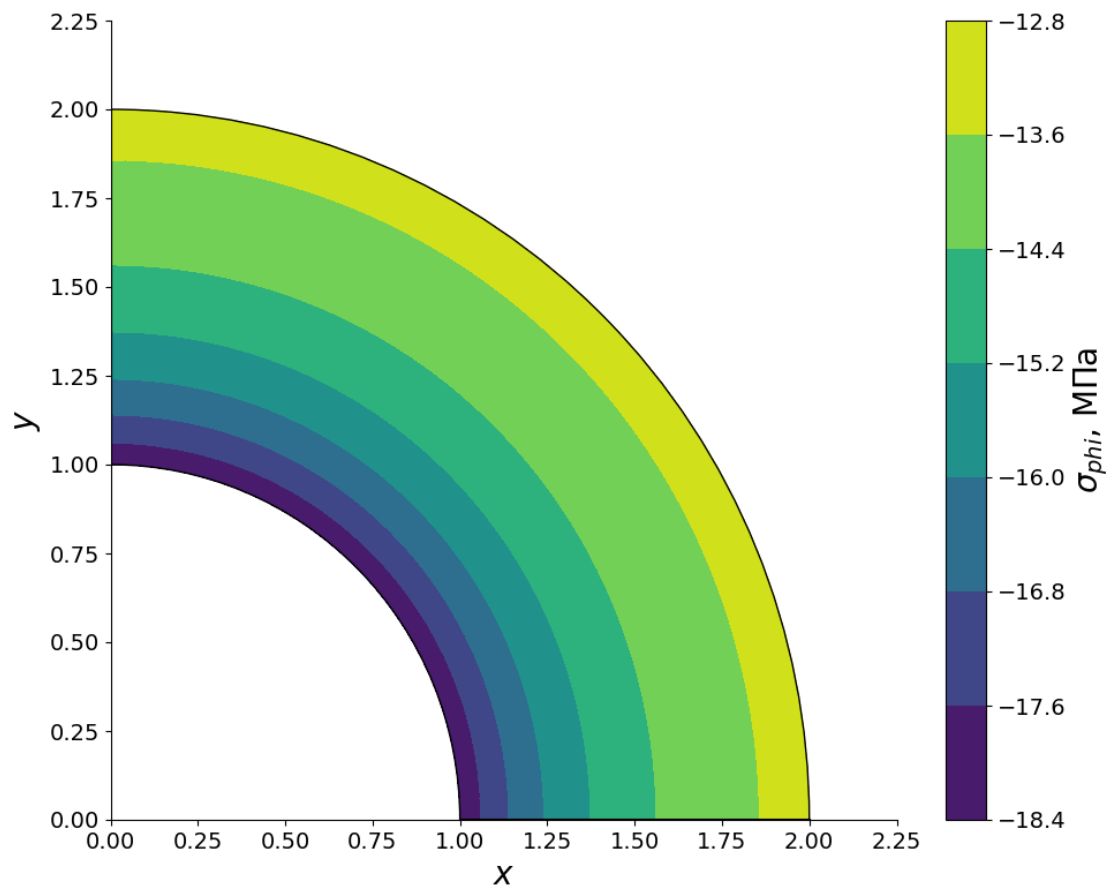


Рис. 16: Распределение узловых радиальных напряжений во всей расчётной области

### 4.3.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 13 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 13: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для мультипликативного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	44	44	44	43
4 области	178	169	169	168
8 областей	528	497	494	488

В таблице 13 представлено количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости при шаге сетки  $h = 0.0125$  и количестве подобластей  $M = 8$  (коэффициент захлёста равен 0.3).

Таблица 14: Количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости

$\varepsilon_0$	Количество итераций	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
1e-02	28	1.12e-02	7.84e-02
1e-03	57	7.82e-03	1.24e-02
1e-04	187	7.16e-03	4.33e-03
1e-05	494	7.04e-03	2.86e-03
1e-06	801	7.04e-03	2.84e-03

При сравнении таблиц 11 и 14 можем наблюдать, что ошибки, полученные мультипликативным МДО для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$  не отличаются от ошибок, полученных при решении задачи на всей области без применения методов МДО.

### 4.3.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 15 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 15: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для аддитивного метода Шварца

Количество подобластей $h = 0.00625$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$

В таблице 15 представлено количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости при шаге сетки  $h = 0.0125$  и количестве подобластей  $M = 8$  (коэффициент захлёста равен 0.3).

Таблица 16: Количество итераций и ошибки численного решения в зависимости от коэффициента сходимости

$\varepsilon_0$	Количество итераций	$\sigma_r$	$\sigma_\varphi$
1e-02	54	1.90e-02	2.34e-01
1e-03	153	7.41e-03	3.52e-02
1e-04	272	7.00e-03	4.63e-03
1e-05	393	7.04e-03	2.87e-03
1e-06	539	7.04e-03	2.84e-03

При сравнении таблиц 11 и 16 можем наблюдать, что ошибки, полученные мультипликативным МДО для  $\varepsilon_0 = 10^{-6}$  не отличаются от ошибок, полученных при решении задачи на всей области без применения методов МДО.

### 4.3.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для двухуровневого аддитивного метода кроме основной сетки в расчётной области зададим грубую сетку, удовлетворяющую условиям включения всех узлов мелкой сетки в элементы грубой сетки и соответствия размеров областей.

В таблице 17 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для третьей тестовой задачи для шага мелкой сетки  $h = 0.0125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3).

Анализ данной таблицы показывает, что для расчётов рациональнее взять шаг  $h = 0.125$ , так как в этом случае количество итераций несильно зависит от количества подобластей.

На рис. 17 изображена расчётная схема области с грубой сеткой.

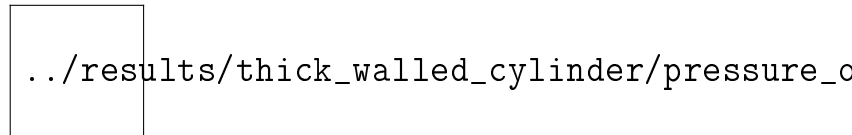


Рис. 17: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области

Таблица 17: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца (шаг мелкой сетки  $h = 0.0125$ )

Количество подобластей	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.125$

В таблице 18 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для третьей тестовой задачи для шага грубой сетки  $h = 0.125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 18: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$

В таблице 19 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$ , шага мелкой сетки  $h = 0.025$  и шага грубой сетки  $h = 0.125$ .

Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 19: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$  и  $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4

## 4.4 Четвёртая тестовая задача

На рис. 18 представлена расчётная область для четвёртой тестовой задачи - сектор поперечного сечения модели подшипника, нагруженной внешним давлением  $p = 5$  МПа. Внутренний радиус  $p_a = 1$  см, внешний радиус  $p_b = 2$  см.

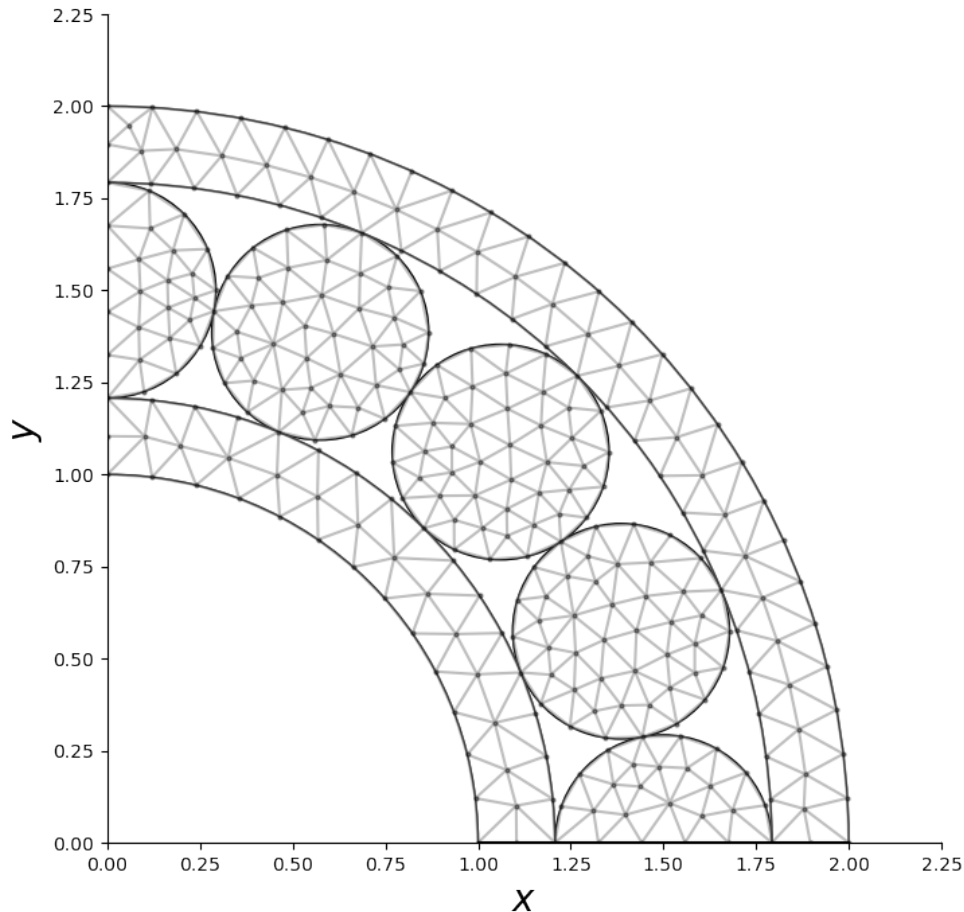


Рис. 18: Схема расчётной области третьей тестовой задачи

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга  $E = 70$  ГПа, коэффициент Пуассона  $\mu = 0.34$ .

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами  $h = 0.05$  (количество узлов - 994),  $h = 0.025$  (количество узлов - 3812),  $h = 0.0125$  (количество узлов - 15006).

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр  $\alpha = 0.5$ .

Для решения задачи методами декомпозиции области расчётная область разбивается на заданное количество секторов без перекрытия  $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ .

Характерные размеры каждой подобласти: угол каждого сектора-подобласти  $\varphi_M = \pi/(2 \cdot M)$ . На рис. 19 представлена расчётная область третьей тестовой задачи, разбитая на две подобласти.

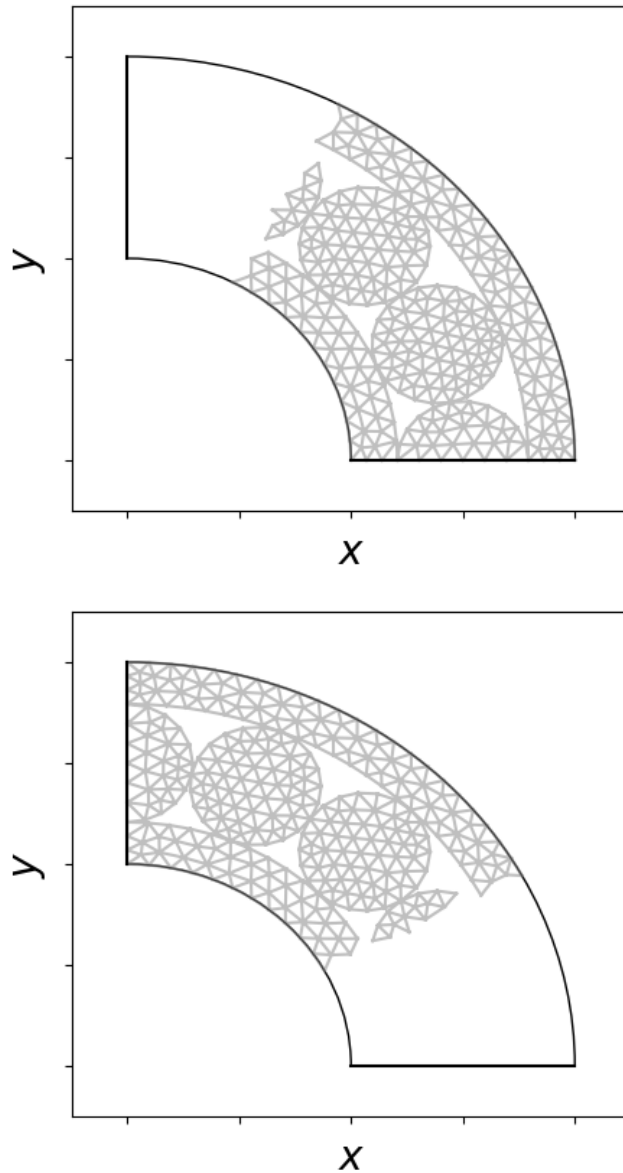


Рис. 19: Схема декомпозиции расчётной области третьей тестовой задачи



Для четвёртой тестовой задачи известно аналитическое решение для компонент вектора перемещений и тензора напряжений, на рис. 21 и 22- распределение узловых радиальных и тангенциальных напряжений во всей области.

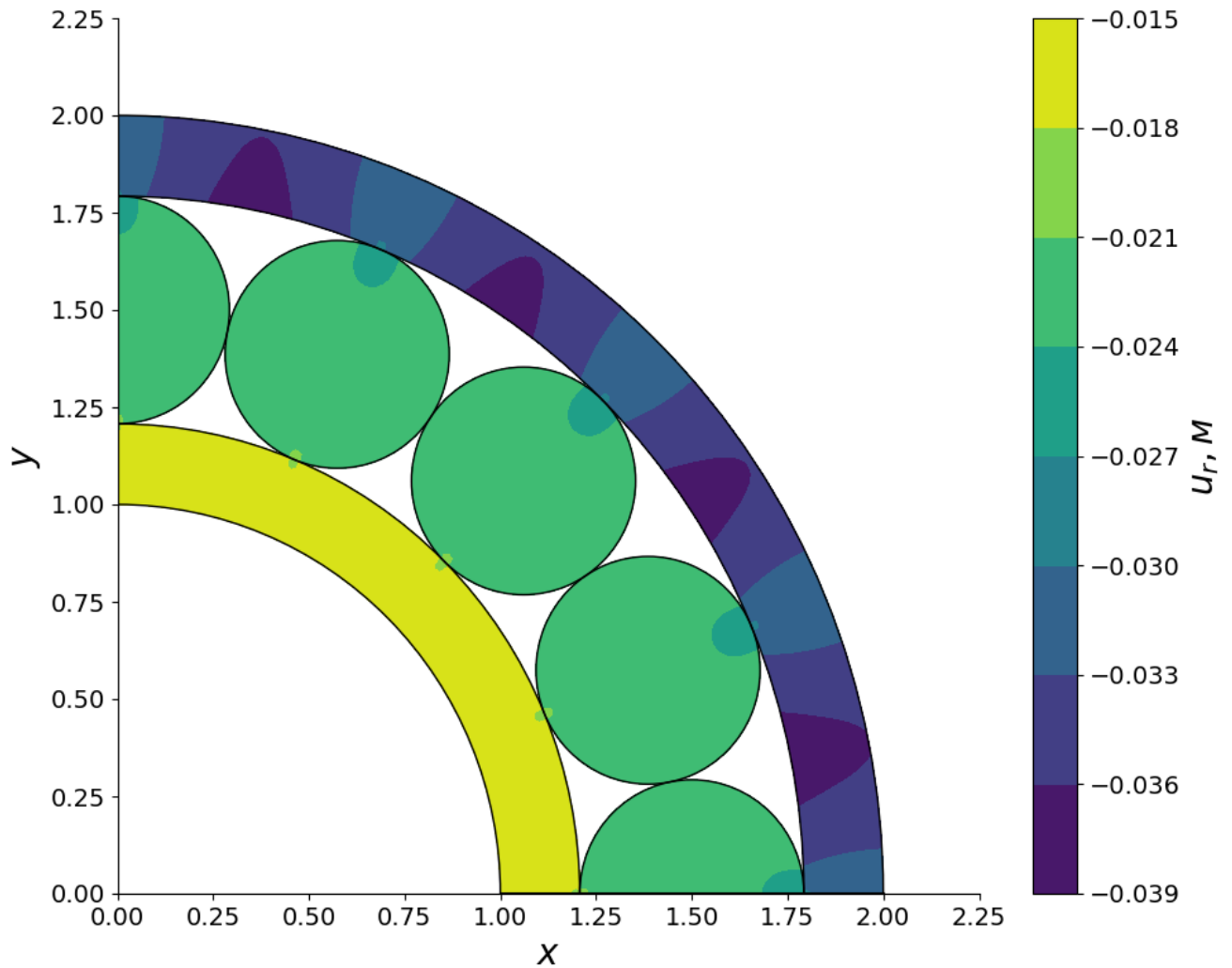


Рис. 20: Распределение перемещений во всей расчётной области

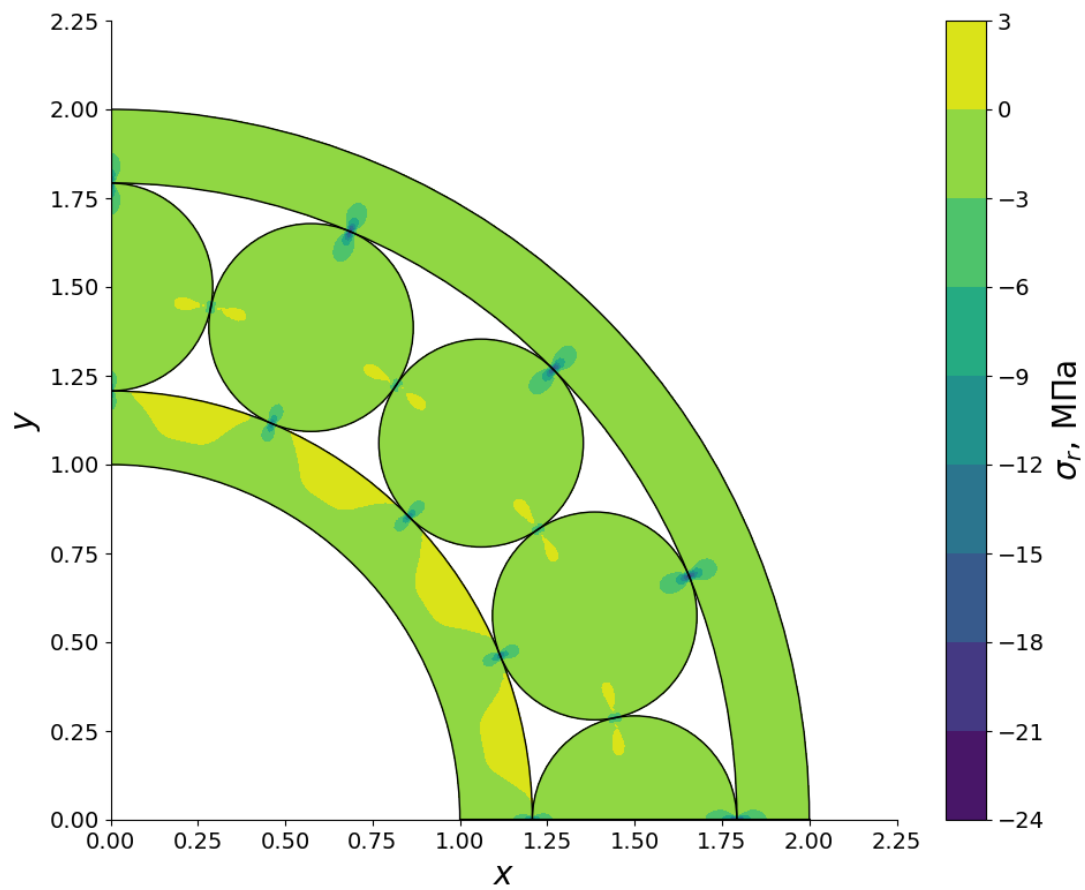


Рис. 21: Распределение узловых радиальных напряжений во всей расчётной области

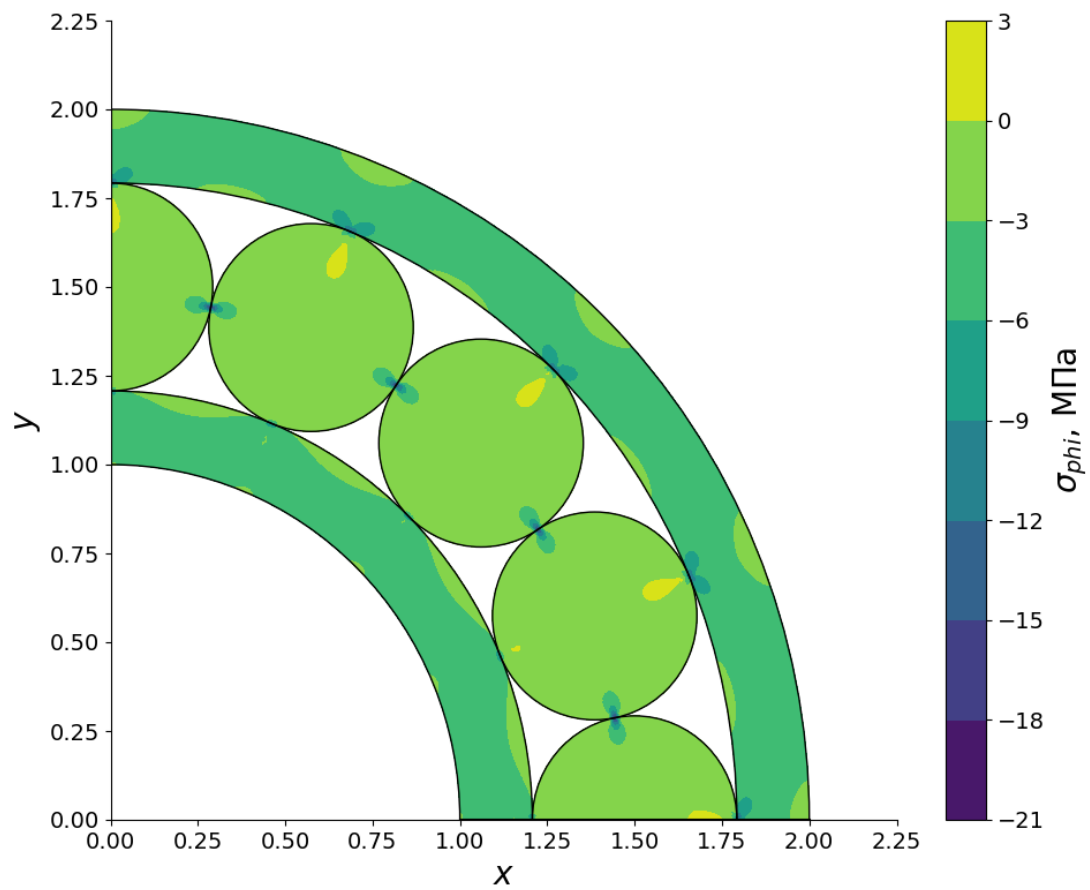


Рис. 22: Распределение узловых трансверсальных напряжений во всей расчётной области

#### 4.4.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице 20 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца для четвертой тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 20: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для мультипликативного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$
2 области	42	44	45	48
4 области	220	231	245	261
8 областей	409	509	550	592

#### 4.4.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице 21 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца для второй тестовой задачи (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 21: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$

#### 4.4.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

Для двухуровневого аддитивного метода кроме основной сетки в расчётной области зададим грубую сетку, удовлетворяющую условиям включения всех узлов мелкой сетки в элементы грубой сетки и соответствия размеров областей.

В таблице 22 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для третьей тестовой задачи для шага мелкой сетки  $h = 0.0125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3).

Анализ данной таблицы показывает, что для расчётов рациональнее взять шаг  $h = 0.125$ , так как в этом случае количество итераций несильно зависит от количества подобластей.

На рис. 17 изображена расчётная схема области с грубой сеткой.

Таблица 22: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага грубой сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца (шаг мелкой сетки  $h = 0.0125$ )

Количество подобластей	$h = 1$	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.125$

В таблице 23 представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца для четвертой тестовой задачи для шага грубой сетки  $h = 0.125$  (коэффициент захлёста для подобластей равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций не зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций не меняется;

Таблица 23: Количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки для двухуровневого аддитивного метода Шварца

Количество подобластей	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.00625$

В таблице 24 рассмотрена зависимость количества итераций от различных вариантов МДО и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$ , шага мелкой сетки  $h = 0.025$  и шага грубой сетки  $h = 0.125$ .

Из таблицы видно, что при росте коэффициента относительного захлёста количество итераций уменьшается.

Таблица 24: Количество итераций в зависимости от метода декомпозиции области и коэффициента относительного захлёста для случая  $M = 4$  и  $h = 0.025$

Коэффициент относительного захлёста	0.2	0.3	0.4

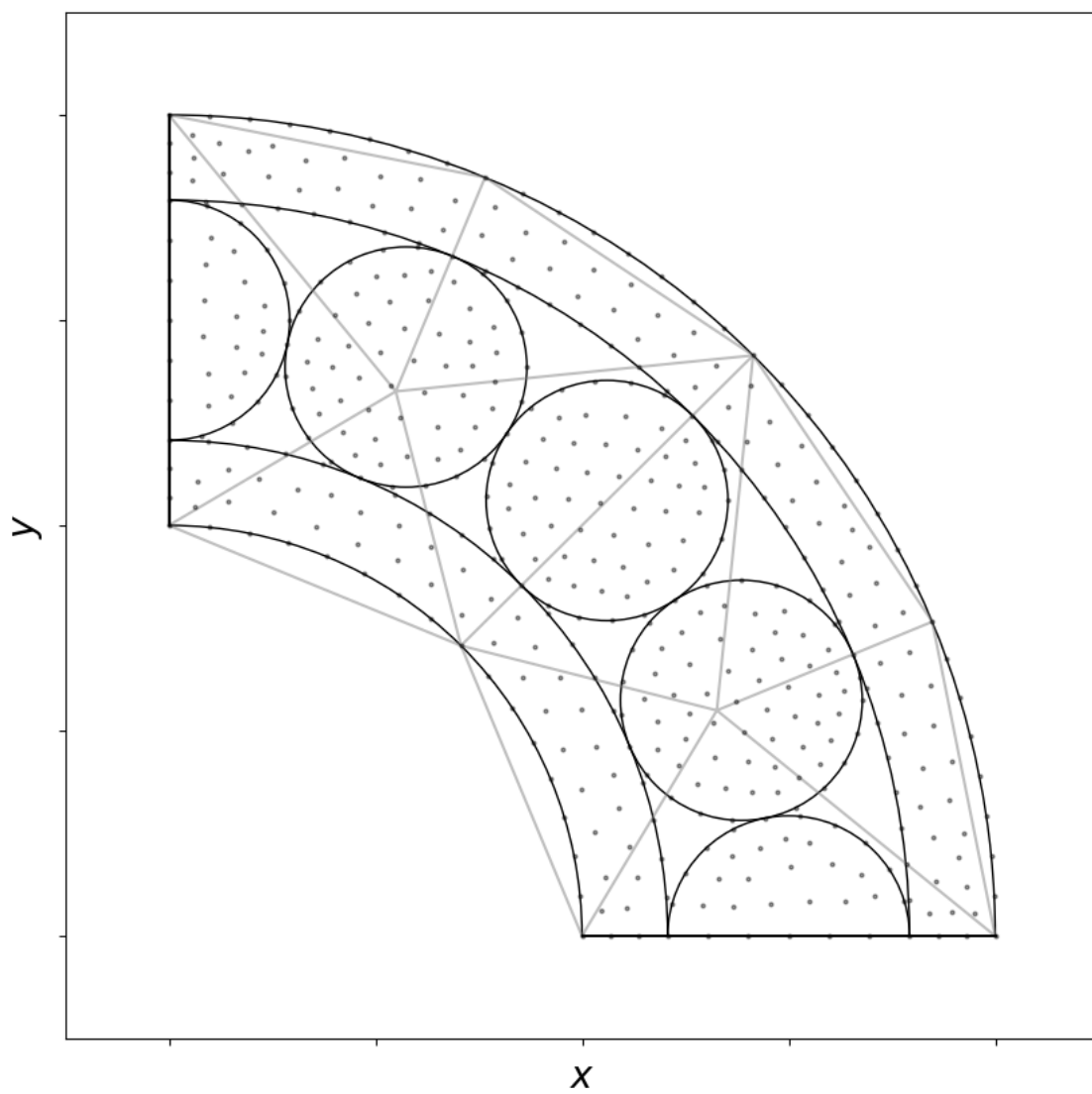


Рис. 23: Распределение узловых напряжений во всей расчётной области