

1 Математическая постановка задачи

Для решения общей задачи по нахождению деформаций и напряжений в деформируемом теле, занимающем область G с границей ∂G , необходимо использовать следующие соотношения:

кинематические граничные условия

$$u(x) = u_0, \quad x \in \partial G_D, \quad (1)$$

силовые граничные условия

$$\sigma(u) \cdot n = p(x), \quad x \in \partial G_N, \quad (2)$$

соотношения Коши для тензора полных деформаций

$$\varepsilon(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T), \quad (3)$$

тензор напряжений

$$\sigma(u) = ??? \quad (4)$$

Здесь $u(x)$ - компоненты вектора перемещения, ∂G_D - участок границы, на котором действуют кинематические условия Дирихле, ∂G_N - участок границы, на котором действуют силовые граничные условия Неймана, $p(x)$ - вектор внешней нагрузки.

Решить данную задачу можно с помощью метода декомпозиции Шварца.

1.1 Методы Шварца

Рассмотрим классическую задачу метода Шварца для двух подобластей: имеется сложная область Ω , состоящая из объединения двух простых областей (круга Ω_1 и прямоугольника Ω_2). Рассмотрим уравнение Пуассона, цель которого найти перемещения $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ при условии, что

$$\begin{aligned} -\Delta(u) &= f, \quad u \in \Omega \\ u &= 0, \quad u \in \partial\Omega \end{aligned}$$

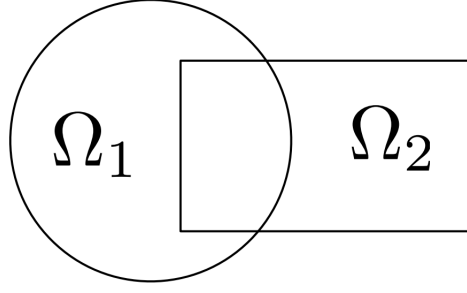


Рис. 1: Сложная область, получившаяся из объединения двух простых областей

Классический метод Шварца это итерационный метод, основанный на решении задач меньшего масштаба в подобластях Ω_1 и Ω_2 . Один шаг итерационного процесса обновления результатов $u^n \rightarrow u^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_1 & -\Delta(u^{n+1}) &= f, \quad u \in \Omega_2 \\
 u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega \text{ после чего} & u^{n+1} &= 0, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \partial\Omega \\
 u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_1 \cap \bar{\Omega}_2 & u^{n+1} &= u^n, \quad u \in \partial\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_1
 \end{aligned}$$

Теперь же рассмотрим случай для произвольной области и произвольного числа подобластей. Вернёмся к нашей первоначальной задаче (ссылка здесь), представим область G в виде объединения конечного числа подобластей $G = \bigcup_{i=1}^M G_i$ с конечным числом границ $\partial G_1, \dots, \partial G_M$, где M - число подобластей. Данные подобласти пересекаются, что требует ввода дополнительных обозначений для границ, возникающих после декомпозиции областей: $\Gamma = \bigcup_{i=1}^M \Gamma_i$.

Выберем начальное приближение для перемещений, удовлетворяющее граничным условиям (ссылка здесь). Алгоритм из классического метода Шварца можно оптимизировать для большего числа подобластей:

$$\begin{aligned}
 -\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
 \sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
 u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= u^{n+\frac{(i-1)}{M}}(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
 \end{aligned}$$

Данный алгоритм Шварца называют мультипликативным, он последовательный и решение на каждой подобласти зависит от решения на предыдущей подобласти (или от решения на предыдущей итерации, если речь идёт о первой подобласти для итерации).

Существует также другой вариант метода Шварца, основанный на решении локальных задач для каждой подобласти без зависимости от соседних подоб-

ластей:

$$\begin{aligned}
-\Delta(u^{n+\frac{i}{M}}) &= f(x), \quad x \in G_i \\
\sigma(u^{n+\frac{i}{M}}) \cdot n &= p(x), \quad x \in \partial G_N \cap \partial G_i \\
u^{n+\frac{i}{M}}(x) &= 0, \quad x \in \partial G_D \cap \partial G_i \\
u^{n+1}(x) &= u^n(x), \quad x \in G \setminus ((G_i \setminus \partial G_i) \cap (\partial G_N \cup \partial G_i))
\end{aligned}$$

Этот метод называется аддитивный метод Шварца. В конце каждой итерации решение вычисляется по формуле

$$u^{n+1} = u^n + \alpha \sum_{i=1}^M (u_i^{n+1} - u^n),$$

где коэффициент α - некоторый параметр, от которого зависит скорость сходимости итерационного процесса.

2 Результаты численных расчётов

В данном разделе будут приведены расчёты четырёх тестовых задач с использованием четырёх методов. Для каждой из задач для базового случая будут приведены графики распределения напряжений вдоль поверхности, к которой приложено давление, а также графики распределения перемещений на всей расчётной области.

Для методов декомпозиции области расчётные области будут разбиты на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$ в зависимости от задачи, где M - число подобластей. Также стоит заметить, что каждая подобласть Ω_i ($i = 1, \dots, M$) в зависимости от задачи обладает своими размерными характеристиками. Подобласть G_i соответствует объединению подобласти Ω_i и дополнительных участков соседних подобластей Ω_{i-1} и Ω_{i+1} . Размеры этих дополнительных участков зависят от относительного коэффициента перекрытия (отношение размера перекрытия к размеру подобласти Ω_i).

Итерационный процесс для мультипликативного, аддитивного и двухуровневого аддитивного методов продолжался до тех пор, пока не выполнялось условие критерия останова:

$$u_{error} = \sqrt{\frac{\sum_{k=1}^{N_p} s_k \left(\frac{u_k^{m+1} - u_k^m}{u_k^{m+1}} \right)^2}{\sum_{k=1}^{N_p} s_k}} < \varepsilon_0, \quad (5)$$

где s_k - суммарная площадь элементов сетки, в которые входит k -й узел, разделённая на количество узлов в элементе, N_{elem} - количество узлов сетки, u_k^{m+1} - решение на текущей итерации, u_k^m - решение на предыдущей итерации.

Дополнительно для каждой из задач для методов декомпозиции будут приведены таблицы зависимости количества итераций от относительного коэффициента перекрытия.

2.1 Первая тестовая задача

Расчётная область - тело, закреплённое с левой и правой стороны по оси ОХ и с нижней стороны по оси ОУ. Сверху действует распределённая нагрузка $p = 50$ МПа. Ширина тела $a = 2$ см, высота тела $b = 1$ см.

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следу-



Рис. 2: Схема расчётной области первой тестовой задачи (заглушка)

ющие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$.

Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 994), $h = 0.025$ (количество узлов - 3812), $h = 0.0125$ (количество узлов - 15006). Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$.

Для данной задачи известны аналитические решения для компонент тензора напряжений и для перемещений. В таблице 1 представлены нормы ошибок вычислений перемещений, радиального и окружного напряжений, полученные при решении задачи без декомпозиции для различных сеток, в таблице 2 - отношения норм ошибок.

2.2 Третья тестовая задача

Расчётная область - сектор поперечного сечения толстостенной трубы, основные размерные характеристики трубы - внутренний радиус $r_1 = 1$ см, внешний радиус $r_2 = 2$ см. К внутреннему торцу приложено давление $p_1 = 5$ МПа, к внешнему торцу также приложено давление $p_2 = 10$ МПа.



Рис. 3: Схема расчётной области четвёртой тестовой задачи (заглушка)

Для применения методов декомпозиции области исходная область разбивалась на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, где M - число подобластей. Размеры участков, а именно центральный угол каждого из них, задавался заранее выбранным коэффициентом относительного перекрытия.

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 70$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.34$. Для данной задачи известны аналитические решения для компонент тензора напряжений и для перемещений.

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$. Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой системы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 1334), $h = 0.025$ (количество узлов - 4571), $h = 0.0125$ (количество узлов - 16636).

2.2.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице (1) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 1: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	38	38	38
4 области	155	151	149
8 областей	480	462	453

2.2.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице (2) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- при увеличении числа подобластей количество итераций существенно возрастает;

Таблица 2: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	33	64	34
4 области	125	98	94
8 областей	397	353	337

2.2.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице (3) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций меняется, но не так сильно по сравнению с применением аддитивного метода Шварца;

Таблица 3: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	23	36	27
4 области	48	47	46
8 областей	79	75	73

2.3 Четвёртая тестовая задача

Расчётная область - сектор поперечного сечения подшипника, основные размерные характеристики подшипника - центральный угол - 90° , внутренний радиус внутреннего кольца $r_{in}^a = 1.0$ см, внешний радиус внешнего кольца $r_{out}^b = 2.0$ см. Прочие характеристики, а именно внешний радиус внутреннего кольца r_{out}^a , внутренний радиус внешнего кольца r_{in}^b и радиус шарика в полости, зависят от количества шариков в полости между кольцами.

(Тут нужно расписать, как выбирается параметр для оставшихся характеристик)



Рис. 4: Схема расчётной области четвёртой тестовой задачи (заглушка)

Для применения методов декомпозиции области исходная область разбивалась на заданное количество секторов без перекрытия $\Omega_1, \dots, \Omega_M$, где M - число подобластей. Размеры участков, а именно центральный угол каждого из них, задавался заранее выбранным коэффициентом относительного перекрытия.

Для решения поставленной задачи примем, что материал тела имеет следующие параметры: модуль Юнга $E = 210$ ГПа, коэффициент Пуассона $\mu = 0.25$. Для данной задачи неизвестны аналитические решения для компонент тензора напряжений и для перемещений.

Для аддитивного метода Шварца итерационный параметр $\alpha = 0.5$. Для исследования зависимости сходимости метода от размерности итоговой систе-

мы линейных уравнений рассмотрены три расчётные сетки с шагами $h = 0.05$ (количество узлов - 1334), $h = 0.025$ (количество узлов - 4571), $h = 0.0125$ (количество узлов - 16636).

2.3.1 Мультипликативный метод Шварца

В таблице (4) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании мультипликативного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- при увеличении числа подобластей количество итераций увеличивается;

Таблица 4: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	37	39	40
4 области	192	202	213
8 областей	510	488	518

2.3.2 Аддитивный метод Шварца

В таблице (5) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- при увеличении числа подобластей количество итераций существенно возрастает;

Таблица 5: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	33	64	34
4 области	125	98	94
8 областей	397	353	337

2.3.3 Двухуровневый аддитивный метод Шварца

В таблице (6) представлено количество итераций в зависимости от количества подобластей и шага сетки при использовании двухуровневого аддитивного метода Шварца в случае фиксированного относительного перекрытия подобластей (данный коэффициент равен 0.3). Анализ полученных результатов показал, что:

- количество итераций несильно зависит от шага сетки;
- при увеличении числа подобластей количество итераций меняется, но не так сильно по сравнению с применением аддитивного метода Шварца;

Таблица 6: Количество итераций в зависимости от количества подобластей

Количество подобластей	$h = 0.5$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$
2 области	44	46	40
4 области	72	74	79
8 областей	106	108	114