Ans - 3 - $w \in \mathbb{R}^n$ and $w_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

for any $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_w = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2}$$: weighted norm

consider $X \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\boxed{X_i = \sqrt{w_i}\, x_i}$$

clearly $\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^2} = \|x\|_w$

$$\boxed{\|X\|_2 = \|x\|_w}$$

Scanned with CamScanner

i) Non- negativity

$$\|x\|_w = \|X\|_2 \geq 0 \Rightarrow \boxed{\|x\|_w \geq 0}$$

ii) Definitiveness

$$\|x\|_w = 0$$
$$\Rightarrow \|X\|_2 = 0$$
$$\Rightarrow \sqrt{w_i}\, x_i = 0 \quad \forall i \quad (\text{since } w_i > 0)$$
$$\Rightarrow x_i = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \boxed{x = 0}$$

iii) Non - neg Homogenity

$$\|\alpha x\|_w = \|\alpha X\|_2 = |\alpha|\, \|X\|_2 = |\alpha|\, \|x\|_w$$

iv) Triangle Inequality

$$\|x\|_w + \|y\|_w = \|X\|_2 + \|Y\|_2$$
$$\geq \|X + Y\|_2 = \|x + y\|_w$$
$$\Rightarrow \boxed{\|x + y\|_w \leq \|x\|_w + \|y\|_w}$$

Thus $\|\cdot\|_w$ defines a norm, called weighted norm.