Ans-1- $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$

to prove $\|AB\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2$ (sub-multiplicativity property)

$$\|A\|_2 = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} \le \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \|A\|_2$$

$$\Rightarrow \|Ax\|_2 \le \|A\|_2 \|x\|_2 \quad \text{— (1)}$$

Now $\|ABx\|_2 \le \|A\|_2 \|Bx\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2 \|x\|_2$ (Using equation (1) repeatedly)

$$\frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \le \|A\|_2 \|B\|_2$$

$$\Rightarrow \boxed{\|AB\|_2 \le \|A\|_2 \|B\|_2}$$

In case of Frobenius Norm,

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |A_{ij}|^2\right)^{1/2}$$

let $C = AB \Rightarrow [c_{ij}] = C$; $[a_{ij}] = A$; $[b_{ij}] = B$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

$$\text{so } \|AB\|_F^2 = \|C\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right|^2$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2\right) \quad \text{(Cauchy-schwatz ineq.)}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \cdot \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 = \|A\|_F^2 \, \|B\|_F^2$$

$$\boxed{\|AB\|_F \le \|A\|_F \cdot \|B\|_F}$$

Sub-multiplicativity is true for Frobenius norm.