3. 单点迭代法：复习

$p=2$

2阶收敛 $\Leftrightarrow \varphi'(x^*)=0$

$\varphi''(x^*)\neq 0$

$f(x)=0 \quad x=\varphi(x)$

$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)| \leq L|x_1-x_2| \quad L<1$

$|\varphi'(x)| < L < 1$

$|\varphi'(x^*)| < L < 1$ 局部收敛

$\lim\limits_{i\to\infty}\frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p}=C\neq 0 \quad p=1$ 时 $C<1$

p阶收敛 $\Longleftrightarrow \varphi'(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0$

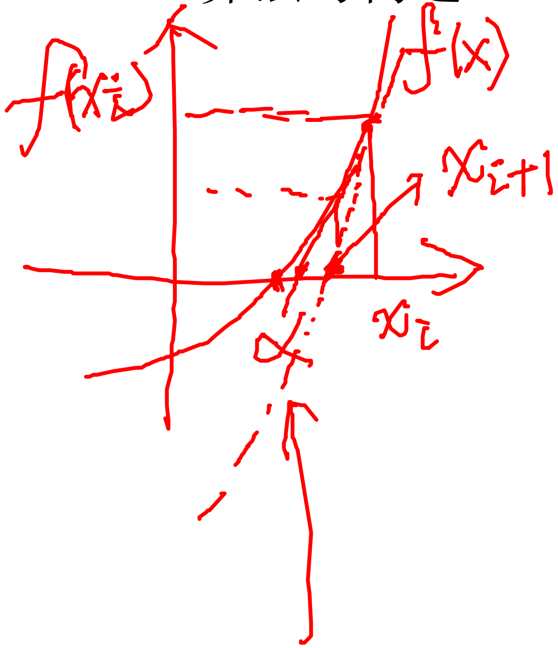
$\varphi^{(p)}(x^*)\neq 0 \quad \lim\limits_{i\to\infty}\frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p}=\frac{\varphi^{(p)}(x^*)}{p!}$

3. 单点迭代法

（五）牛顿（Newton）迭代法（切线法）：

f 连，$f'(x)\neq 0$

（a）算法与构造：



$$y=f(x_i)+f'(x_i)(x-x_i)=0$$

$$\Rightarrow x_{i+1}=x_i-\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

x_0 初值

$$x_{i+1}=\varphi(x_i)$$

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$$

（b）直观解释：

$$x=\varphi(x)\Longleftrightarrow f(x)=0 \qquad x_{i+1}=\varphi(x_i)$$

称牛顿迭代法（切线法）

3. 单点迭代法

（五）牛顿（Newton）迭代法（切线法）：

（c）收敛阶分析：

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \varphi'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}$$

$$\underline{\varphi'(\alpha)} = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{[f'(\alpha)]^2} = 0 \Leftarrow f(\alpha) = 0$$

$$\varphi''(x) = \frac{[f'(x)]^2(ff''' + f''f') - ff''([f'(x)]^2)'}{[f'(x)]^4}$$

$$\varphi''(\alpha) = \frac{f''(\alpha)}{\cancel{4}f'(\alpha)}$$

至少二阶收敛

平方

则 $$\lim_{i \to \infty} \frac{|x_{i+1} - \alpha|}{|x_i - \alpha|^2} = \frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}$$

3. 单点迭代法 大范围收敛

（五）牛顿（Newton）迭代法（切线法）： 局部收敛 x_0 要与 α 接近

（d）例：任给正数C，应用牛顿法解方程$x^2 - C = 0$导出无理数$\sqrt{C}$的迭代计算程序，并证明对任意初值$x_0 > 0$，该牛顿迭代格式都是收敛的

解：$\sqrt{C}$ 是 $x^2 - C = 0$ 的解

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} = x_i - \frac{x_i^2 - C}{2x_i}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x_i + \frac{C}{x_i}\right)$$

$$\frac{x_{i+1} - \sqrt{C}}{x_{i+1} + \sqrt{C}} = \left[\frac{x_i - \sqrt{C}}{x_i + \sqrt{C}}\right]^2 = \left[\frac{x_{i-1} - \sqrt{C}}{x_{i-1} + \sqrt{C}}\right]^{2^2}$$

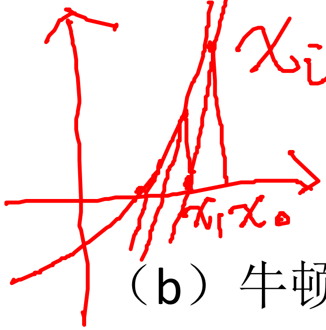
$$= \cdots\cdots = q^{2^{i+1}} \qquad q = \frac{x_0 - \sqrt{C}}{x_0 + \sqrt{C}} \qquad |q| < 1$$

$$0 \leftarrow x_{i+1} - \sqrt{C} = 2\sqrt{C}\,\frac{q^{2^{i+1}}}{1 - q^{2^{i+1}}} \qquad i \to \infty$$

3. 单点迭代法

（六）简化的牛顿法：

（a）简化牛顿法（直观解释）：



$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{C}$$

牛顿法每一步$f'(x_i)$求得代价高

$C = f'(x_0)$

"收敛慢"

（b）牛顿下山法：放宽 x_0 的选择范围

$$x_{i+1} = x_i - \lambda\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad \lambda \in (0,1)$$

$$\varphi(x) = x - \lambda\frac{f(x)}{f'(x)} \qquad \varphi'(\alpha) = 1-\lambda \neq 0$$

一阶收敛

$$x_{i+1} = x_i - \lambda_i\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

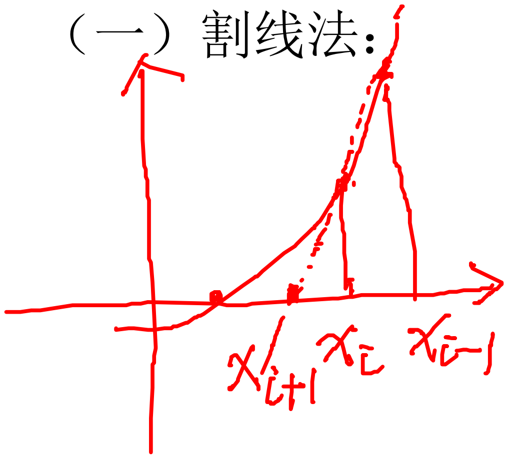
λ_i 取到使的

$$\underbrace{|f(x_{i+1})| < |f(x_i)|}_{\text{"下山"}}$$

加快收敛速度

4. 多点迭代法

（一）割线法：



x_{i+1} 由 x_i, x_{i-1} --- 构造

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}}$$

由 x_i, x_{i-1} 造 x_{i+1}

$$x_{i+1} = \frac{f(x_i)}{f(x_i)-f(x_{i-1})} x_{i-1} + \frac{f(x_{i-1})}{f(x_{i-1})-f(x_i)} \cdot x_i$$

定理 x_0, x_1 接近 α 时 $\lim\limits_{i\to\infty} \frac{|\varepsilon_{i+1}|}{|\varepsilon_i|^p} = \left|\frac{f''(\alpha)}{2f'(\alpha)}\right|^{p-1}$

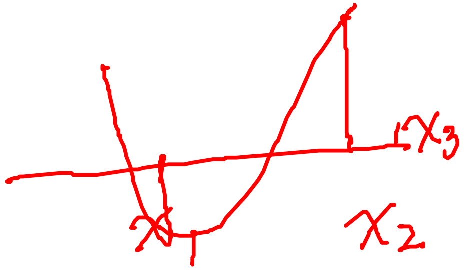
$$p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

4. 多点迭代法

（二）虚伪法（试位法）：

$f(x_1)\cdot f(x_2)<0$，则用割线法求 x_3

若 $f(x_3)\cdot f(x_i)<0$　$i=1$ 或 2



使用 x_3 与 x_i 的割线法求 x_4

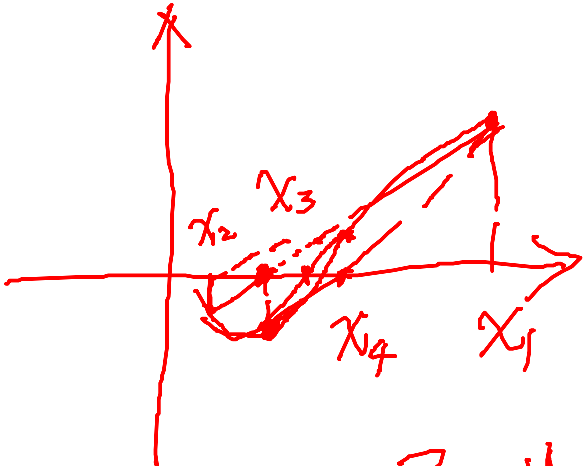
依次类推

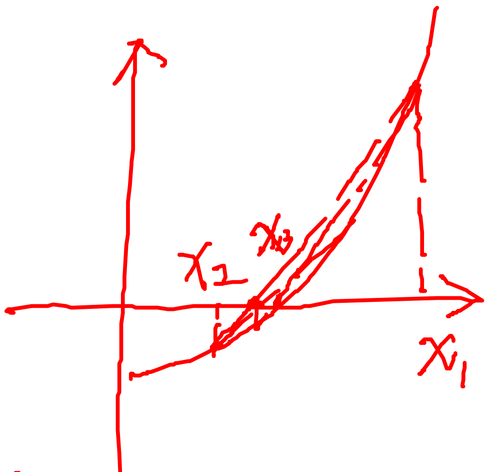
f 凹凸强

则 x_3, x_4

都在 x_1 或右同侧

收敛与二分法相当.





改进试位法 不介绍

9:30 回来

5. 重根迭代法

（一）（a）r重根及等价定义：

若 $f(x)=(x-\alpha)^r g(x)$ $g(\alpha)\neq 0$. α, r重根

r重根 $\Longleftrightarrow f(\alpha)=f'(\alpha)=\cdots=f^{(r-1)}(\alpha)=0$

$f^{(r)}(\alpha)\neq 0$

$\Downarrow$

$f'(\alpha)=\lim_{x\to\alpha}\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}=0$

（b）r重根牛顿法的线性收敛性：

$f'(x)\neq 0$ $\begin{cases} f'(\alpha)\neq 0 \\ f(\alpha)=0 \end{cases}$

$r\geq 2$ --- $f'(\alpha)=0$ 牛顿法 ???

$f(x)=(x-\alpha)^r g(x)$ $g(\alpha)\neq 0$

$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}=x-\frac{(x-\alpha)^r g(x)}{(x-\alpha)^r g'(x)+r(x-\alpha)^{r-1}g(x)}=x-\frac{(x-\alpha)g(x)}{(x-\alpha)g'(x)+rg(x)}$

$\varphi'(\alpha)=1-\frac{1}{r}\neq 0<1$

（c）重数r已知时修改的牛顿法：

r已知 $x_{i+1}=x_i-r\frac{f(x_i)}{f'(x_i)}=\psi(x_i)$ $\psi(x)=x-r\frac{f(x)}{f'(x)}$

$\psi'(\alpha)=0$ 二阶

5. 重根迭代法

（d）重数r未知时修改的牛顿法：构造 $u(x)=\dfrac{f(x)}{f'(x)}$

α 是 f r 重根，则 α 是 $u(x)$ 单重根

$u(x)$ 应用 N 法

$$x_{i+1}=x_i-\frac{u(x_i)}{u'(x_i)}=\varphi(x_i)$$

$$\varphi(x)=x-\frac{u(x)}{u'(x)}=x-\frac{f\cdot f'}{[f']^2-f f''}$$

$x_{i+1}=\varphi(x_i)$ 平方收敛

（例）：$\left(\sin x-\frac{x}{2}\right)^2=0$ 正根

$\alpha>0$ 二重根

(1) N 法 $x_{i+1}=x_i-\dfrac{\left(\sin x_i-\frac{x_i}{2}\right)^2}{2\left(\sin x_i-\frac{x_i}{2}\right)\left(\cos x_i-\frac{1}{2}\right)}$

(2) $r=2$ N 法. $x_{i+1}=x_i-2(\quad)$

(3) $u(x)$ 法

……

6. 迭代加速法

（一）线性收敛的埃特金（Aitken）加速：

若 x_i 线性收敛于 α $\quad \lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\alpha - x_{i+1}}{\alpha - x_i} = c \quad 0<|c|<1$

i 很大时

$$\alpha - x_{i+1} \approx c(\alpha - x_i)$$

$$\alpha - x_{i+2} \approx c(\alpha - x_{i+1})$$

相除

$$\frac{\alpha - x_{i+1}}{\alpha - x_{i+2}} \approx \frac{(\alpha - x_i)}{(\alpha - x_{i+1})}$$

$$\alpha \approx \frac{x_i x_{i+2} - x_{i+1}^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i} = \overline{x_{i+1}}$$

Aitken 加速

$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3} \cdots \overline{x_i}, \overline{x_{i+1}} \cdots\cdots$

$$\overline{x_{i+1}} = x_i - \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{x_{i+2} - 2x_{i+1} + x_i}$$

可证，$\lim\limits_{i\to\infty} \dfrac{\overline{x_i} - \alpha}{x_i - \alpha} = 0$

6. 迭代加速法

（二）Steffensen加速：

$$y_k = \varphi(x_k) \quad z_k = \varphi(y_k)$$

用 x_k, y_k, z_k Aitken 加速

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(y_k - x_k)^2}{z_k - 2y_k + x_k} = \psi(x_k)$$

$$\psi = x - \frac{[\varphi(x) - x]^2}{\varphi(\varphi(x)) - 2\varphi(x) + x}$$ 可以证明：平方收敛

把不收敛的迭代法加速为收敛：例 $x^3 - x - 1 = 0$

$x_{i+1} = x_i^3 - 1$

$x = x^3 - 1 = \varphi(x)$

$\alpha \approx 1.5$ $\varphi'(x) = 3x^2$ 在 1.5 附近 > 1 不收敛

Steffeson 加速，收敛

$$p \text{ 阶收敛} \xrightarrow{S\text{加}} p+1 \text{ 阶收敛}$$

6. 迭代加速法

（三）确定重根的重数r：

作业：P36

12，14，18(1)(2)

7. 非线性方程组迭代法

（一）非线性方程组及其牛顿法：

计算公式：

7. 非线性方程组迭代法

（二）非线性方程组的拟牛顿法：

7. 非线性方程组迭代法

（例）：用牛顿法求解下列方程组：

$$x_1^2 - x_2 - 1 = 0,\ x_1^2 - 4x_1 + x_2^2 - x_2 + 3.25 = 0$$

取初值$x^0 = (0,0)^T$