



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Funkcionálanalízis kiegészítés	3
2.1. Faktorterek	3
2.2. Fredholm-operátorok	4

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük, szükségünk van a faktorterek és a Fredholm-operátorok fogalmaira.

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció. *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altér. A V tér U szerinti faktortere vagy hányadostere*

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. *Ha V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altér, akkor $\forall v, v' \in V$ -re*

$$v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor

- Megadunk

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

melyek jól definiáltak.

- A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy \mathbb{K} feletti lineáris tér.
- Az úgynevezett kanonikus π_U leképezés, melyet

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w} \quad (v, w \in V)$$

$$\alpha \bar{v} = \overline{\alpha v} \quad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szürjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. Ha V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

2.2. Fredholm-operátorok

Irodalomjegyzék

[1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006? TODO.