Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emellett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

TODO jelölések szekció: Lin op, korl Lin op halmazai, esetleg skaláris szorzás jelölése, ha kell

TODO ebből mi maradjon meg? - kinek a szintjére kell belőni a részletességet, szükséges-e az, hogy pl egy évfolyamtárs megérthesse belőle az egészet? faktortér def talán szükséges, Fredholm-op valószínűleg, Frechét-differenciálás és implicit fv tétel szintén

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció (Faktortér). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altere. A V tér U szerinti* ***faktortere*** *vagy* ***hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \tag{2.1}$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \tag{2.2}$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. *Ha V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, akkor $\forall v, v' \in V$-re*

$$v + U = v' + U \qquad \Leftrightarrow \qquad v - v' \in U. \tag{2.3}$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha "$v - v' \in U$" feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

- *Megadunk*

  $$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$
  $$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

  leképezéseket a következő módon

  $$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \tag{2.4}$$
  $$\alpha(v + U) := \alpha v + U \tag{2.5}$$

  melyek jól definiáltak.

- *A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér.*

- *π_U az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

  $$\pi_U(v) := v + U \qquad (v \in V)$$

  módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\overline{v} := v + U \qquad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w} \qquad\qquad (v, w \in V)$$
$$\alpha\overline{v} = \overline{\alpha v} \qquad\qquad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szürjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \tag{2.6}$$

Ha egy $v \in V$ elemet egy $u \in U$ elemmel eltolunk ($U \subset V$ altér), akkor a V/U faktortérbeli π_U általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az U altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $F : V \to W$ egy lineáris leképezés, $U \subset V$ egy altér amire $U \subset \operatorname{Ker} F$. Ekkor egyértelműen létezik $F' : V/U \to W$ amivel $F = F' \circ \pi_U$. Emellett*

- $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} F'$, *illetve F' pontosan akkor szürjektív, amikor F is,*
- $\operatorname{Ker} F' = (\operatorname{Ker} F)/U$, *illetve F' pontosan akkor injektív, amikor $U = \operatorname{Ker} F$.*

*F'-t az **F által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.*

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

2.1.4. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, $W \subset V$ pedig az U komplemens altere (tehát $V = W \oplus U$). Ekkor a π_U kanonikus leképezés leszűkítése W-re*

$$\pi_{|_U} : W \longrightarrow V/U,\ \pi_{|_U}(w) = w + U$$

izomorfia, azaz $W \cong V/U$.

2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek.

2.2.1. Definíció (Kompakt operátor). *$A : X \to Y$ operátor **kompakt**, ha bármely $U \subset X$ korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz $\overline{A[U]} \subset Y$ kompakt, valamint ha A korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]*

A továbbiakban az $X \to Y$ közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát $K(X,Y)$-al, $X = Y$ esetén $K(X)$-szel jelöljük, ez zárt alteret alkot $L(X,Y)$-ban.

2.2.2. Definíció. *$A \in L(X,Y)$ operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ($\dim \operatorname{Im} A < \infty$). A véges rangú operátorok halmazát $K_{fin}(X,Y)$-al rövidítjük. [2, 3]*

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetőek véges rangú operátorokkal:

2.2.1. Tétel. *Ha Y-ban van Schauder-bázis, akkor $A \in L(X,Y)$ pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz $K(X,Y) = \overline{K_{fin}(X,Y)}$. [3]*

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy L^p-terekben ($p \geq 1$).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

2.2.2. Tétel. *Legyenek $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek, $A \in L(X,Y)$, ekkor*

$$A \in K(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha A^* adjungált operátora kompakt. [2, 4]

2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operárokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek.

2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor). *$T \in L(X,Y)$ **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:*

- $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$,
- *$T[X]$ zárt Y-ban,*
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$.

*Ekkor a T operátor **indexe** $\operatorname{ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$, T **cokernele** $\operatorname{coker} T := Y/T[X]$ (azaz Y-ban a T képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója** $\operatorname{codim} T := \dim \operatorname{coker} T$. [1, 3, 4, 5]*

Az X és Y közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(X,Y)$-al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel (T képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

2.3.1. Tétel. *Legyenek $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(Z, \|.\|_Z)$ Banach-terek, ekkor:*

- *$A \in \mathcal{F}(X,Y)$ és $B \in \mathcal{F}(Y,Z)$, ekkor $B \circ A \in \mathcal{F}(X,Z)$ és $\operatorname{ind}(B \circ A) = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A$,*
- *$A \in \mathcal{F}(X,Y)$, ekkor $A^* \in \mathcal{F}(X^*,Y^*)$ és $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$,*
- *$\mathcal{F}(X,Y)$ nyílt részhalmaza L(X, Y)-nak, és az $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}$ függvény lokálisan konstans.*

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

2.3.2. Tétel. *$T \in L(X,Y)$ bijektív, $K \in L(X,Y)$ kompakt, ekkor $T + K$ Fredholm-operátor és $\operatorname{ind}(T + K) = 0$. Ennek speciális esete amikor $(X, \|.\|_X) = (Y, \|.\|_Y)$ és T az identitás X-en. [3, 5]*

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

2.3.3. Tétel. *$K \in K(X,Y)$ és $F \in \mathcal{F}(X,Y)$ esetén $K+F \in \mathcal{F}(X,Y)$, valamint $\operatorname{ind}(K+F) = \operatorname{ind} F$. [3]*

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

2.3.4. Tétel. *$T \in L(X,Y)$ pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik $B \in L(Y,X)$, $K_X \in K(X)$, $K_Y \in K(Y)$ úgy, hogy*

$$BT = I_{|_X} + K_X, TB = I_{|_Y} + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(Z, \|.\|_Z)$ a következők során Banach-terek.

2.4.1. Definíció. *$F : X \times Y \to Z$ **Fréchet-differenciálható** X-ben az (u_0, v_0) pontban, ha létezik $(D_xF)(u_0, v_0) \in L(X,Z)$ úgy, hogy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_xF)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben). *$F : X \times Y \to Z$ folytonos, $(u_0, v_0) \in X \times Y$, $F(u_0, v_0) = 0$, $(D_xF)(u_0, v_0)$ bijektív és folytonos. Ekkor létezik (u_0, v_0)-nak olyan $U \times V \subset X \times Y$ környezete és $G : V \to U$ függvény, amivel $G(v_0) = u_0$ és*

$$F(G(v), v) = 0 \qquad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden $U \times V$-beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező D_xF függvényeket lineáris homeomorfizmusnak nevezzük:

2.4.2. Definíció. *Az A leképezés* ***lineáris homeomorfizmus****, ha folytonos, bijektív és az inverze is folytonos.*

Az inverz folytonossága pedig a Banach-féle inverz tételből (vagy Banach-féle homeomorfia-tételből) következik:

2.4.2. Tétel. *$A \in L(X,Y)$ Banach-terek közötti bijektív operátor, ekkor $A^{-1} \in L(Y,X)$. ([2] 6.1.4)*

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

Először is vizsgáljunk meg egy bifurkációs problémát [7] alapján, ezen keresztül szemléltetve a módszer lényegét. Tekintsük a következő egyenletet:

$$F(\lambda, x) = 0$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ valós paraméter, $x \in X$ állapotváltozó (TODO ?) X Banach-térben, $0 \in Y$ pedig egy Banach-tér nulleleme, F pedig kétszer folytonosan differenciálható operátor. A feladat meghatározni azon $(\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X$ párokat, amelyek kielégítik az egyenletet, lehetőség szerint az x-eket λ függvényében.

Feltesszük, hogy létezik megoldás, valamint azt, hogy minden $x = 0$ esetén minden $\lambda \in \mathbb{R}$ megoldása az egyenletnek (az úgynevezett triviális megoldások). Ezen kívül tegyük fel azt, hogy $(\lambda_0, 0) \in \mathbb{R} \times X$ bármely környezetében van nemtriviális megoldás, azaz $(\lambda_0, 0)$ bifurkációs pont. Ez maga után vonja, hogy $F_x(\lambda_0, 0)$ Fréchet-derivált nem invertálható.

Legyen

$$\begin{aligned} L &:= F_x(\lambda_0, x_0) : X \to Y, \\ K &:= \operatorname{Ker} L, \\ R &:= \operatorname{Im} L. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy K-nak és R-nek (amelyek zárt alterek X-ben és Y-ban) vannak komplemens alterei, azaz létezik $W \subset X$ zárt altér, amellyel $K \oplus W = X$, illetve $Z \subset Y$ szintén zárt altér, amellyel $R \oplus Z = Y$, és bármely $x \in X$ egyértelműen felírható $x = u + v, u \in K, v \in W$ alakban, valamint bármely $y \in Y$ egyértelműen felírható $y = r + z, r \in R, z \in Z$ alakban - ezek teljesülnek például akkor, hogyha K és R véges dimenziós alterek, azaz ha L Fredholm-operátor. Vegyük ezenfelül a $Q : Y \to R$ és $P : Y \to Z$ projekciókat.

Írjuk fel az eredeti egyenlet Taylor-polinomját:

$$0 = F(\lambda, x) = Lx + \phi(\lambda, x)$$

(ahol $\phi(\lambda, x) = F(\lambda, x) - Lx$ a megfelelő maradéktag), és ezekbe írjuk be az $x = u + v$ felírást, valamint vetítsük őket az R és a Z alterekre, így kapjuk az alábbi két egyenletet:

$$\begin{aligned} 0 &= QL(u+v) + Q\phi(\lambda, u+v) = Lv + Q\phi(\lambda, u+v), \\ 0 &= PL(u+v) + P\phi(\lambda, u+v). \end{aligned}$$

Az első egyenlet így egy 3-változós függvényt ír le:

$$\Phi(\lambda, u, v) := Lv + Q\phi(\lambda, u+v),$$

ami folytonosan differenciálható, és deriváltja a 3. változó szerint az $u = v = 0$ helyen

$$\Phi_v(\lambda_0, 0, 0) : v \to Lv + Q\phi_x(\lambda_0, 0)v.$$

Mivel $\phi(\lambda, x) = F(\lambda, x) - Lx$, így

$$\phi_x(\lambda_0, 0) = F_x(\lambda_0, 0) - L = L - L = 0,$$

ezért

$$\Phi_v(\lambda_0, 0, 0) = L_{|W},$$

viszont $\operatorname{Ker} L_{|W} = \{0\}$ és $\operatorname{Im} L = R$, így $\Phi_v(\lambda, 0, 0)$ folytonos bijekció W és R között. Alkalmazható az implicit függvény tétel, tehát van $(\lambda_0, 0, 0)$-nak egy olyan $\Lambda \times \mathcal{K} \times \mathcal{W}$ környezete, amiben egy $\gamma : \Lambda \times \mathcal{K} \to \mathcal{W}$ függvény meghatározza a $\Phi_v(\lambda, u, v) = 0$ összes megoldását $\Phi_v(\lambda, u, \gamma(\lambda, u))$ alakban. Ezt behelyettesítve az eredeti egyenletbe kapjuk az

$$0 = PF(\lambda, u + \gamma(\lambda, u))$$

egyenletet. Mivel $u \in K$ és $\dim K < \infty$, valamint $\operatorname{Im} P = Z$, $\dim Z < \infty$, így az eredeti egyenletet sikerült redukálnunk egy véges dimenzión értelmezett, véges dimenziós értékkészletű (TODO?) egyenletre, amit könnyebb megoldani.

4. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer mint numerikus módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt módszernek egy numerikus módszerkénti felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [8] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x),\ x \in [a,b] \tag{4.1}$$

ahol L úgynevezett Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol $p(x) > 0, w(x) > 0$ ($x \in [a,b]$), $p \in C^1[a,b]$; $q, w \in C[a,b]$ adott függvények, valamint u-ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0,$$
$$\alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0.$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen L-ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [9]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.
Emellett feltesszük a következőket:

- S valós, szeparábilis Hilbert-tér, $L : \mathrm{Dom}\, L \subset S \to S$ lineáris operátor, $N : \mathrm{Dom}\, N \subset S \to S$ nemlineáris operátor,
- L zárt leképezés (amivel ekvivalens [2]: $x_n \to x$ és $Lx_n \to y$-ból következik hogy

$x \in \mathrm{Dom}\, L$ és $Lx = y$), önadjungált, $\mathrm{Dom}\, L$ sűrű S-ben, $\mathrm{Ker}\, L = p > 0$ véges,

- L-nek a sajátértékei $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}$, $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$, és a hozzájuk tartozó $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sajátfüggvények S-ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,

- létezik egy $S' \subset S$ altér, ami egy μ normával teljes, $\mathrm{Dom}\, L \subset S'$, minden $x \in \mathrm{Dom}\, L$ esetén a Φ_i-szerinti Fourier-sora ($\sum_{k=1}^{\infty}(x, \Phi_k)\Phi_k$) μ-ben konvergál x-hez és $\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2$, valamint létezik $\alpha > 0$, amivel $x \in S'$ esetén $\|x\|_S \leq \alpha\mu(x)$ (tehát μ α-szorosa felső becslése az eredeti normának, és μ-beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),

- $\mathrm{Dom}\, L \cap \mathrm{Dom}\, N \neq \emptyset$, $\mathrm{Dom}\, N \subset S'$ és altér S'-ben, $\mathrm{Dom}\, N$ zárt μ szerint,

- bármely $R > 0$-hoz létezik $\beta_R > 0, b_R > 0$, amelyekkel bármely $x, y \in \mathrm{Dom}\, N$ amire $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$ teljesül $\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R \mu(x - y)$ és $\mu(Nx) \leq b_R$, tehát tetszőleges μ-szerinti gömb N-szerinti képe korlátos (μ normával), valamint minden elem környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (4.1) egyenlet megoldásait $\mathrm{Dom}\, L \cap \mathrm{Dom}\, N$-ben keressük. Legyen $m \geq p$ és

$$S_m = \mathrm{span}\{\Phi_1, \ldots, \Phi_m\},\ S_0 = \{0\}$$

S_m az első m sajátfüggvény által kifeszített altér, $S_m \subset \mathrm{Dom}\, L$. Definiáljuk a következő operátorokat, amennyiben $u = \sum_{k=1}^{\infty}(u, \Phi_k), \Phi_k$ ($u \in S$):

$$P_m u := \sum_{k=1}^{m}(u, \Phi_k), \Phi_k,$$

tehát P_m az S_m-re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(u, \Phi_k), \Phi_k.$$

H_m-ről látható, hogy lineáris, $\mathrm{Dom}\, L$-be képez, $H_m = (L_{|S_m^\perp})^{-1}$, illetve $H_m L u = (I - P_m)u$ (I az identitás operátor). Az S-téren vett normája $\|H_m\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}}$, a μ-szerinti

normája $\mu(H_m) \le \alpha\sigma(m)$, ahol $\sigma(m) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\right)^2\right)^{1/2}$ (ez utóbbi Cauchy-Schwarz-egyenlőtlenséggel belátható). Ebből következik, hogy $\lim_{m\to\infty} \mu(H_m) = 0$. A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, hogy $\operatorname{Im} H_m \subset \operatorname{Dom} N$ és $S_m \subset \operatorname{Dom} N$, hogy a P_m és a H_m alkalmazása után tudjuk az N-et is még alkalmazni.
Tegyük fel, hogy $\overline{u} \in \operatorname{Dom} N \cap \operatorname{Dom} L$ megoldása az (4.1) egyenletnek, tehát

$$L\overline{u} = N\overline{u}. \tag{4.2}$$

Erre először alkalmazzuk H_m-et:

$$\begin{aligned} H_m L\overline{u} &= H_m N\overline{u}, \\ (I - P_m)\overline{u} &= H_m N\overline{u}, \\ \overline{u} &= P_m\overline{u} + H_m N\overline{u}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (4.2)-re P_m-et:

$$P_m(L\overline{u} - N\overline{u}) = 0, \tag{4.4}$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan $\overline{u} \in \operatorname{Dom} L \cap \operatorname{Dom} N$, ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (4.1) feladatnak.
Legyenek $a > 0, b > 0$ valós számok, és legyen u_0 egy közelítő megoldása az $Lu = Nu$ egyenletnek úgy, hogy létezik $u^* \in S_m$ ($u^* = \sum_{k=1}^{m} c_k\Phi_k$), amivel $\mu(u^* - u_0) \le a$. Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \operatorname{Dom} N \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \le b\},$$

tehát $S_{u^*}^b$ azon u-kat tartalmazza, melyek S_m-re levetítve u^*-ba esnek, és u^*-tól μ-szerinti távolságuk legfeljebb b. Ezen elemek μ-normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \le \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \le \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$\begin{aligned} T_{u^*}^b &: S_{u^*}^b \to S, \\ T_{u^*}^b(u) &:= u^* + H_m N u. \end{aligned}$$

Lássuk be $T^b_{u^*}$-ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen $x, y \in S^b_{u^*}$:

$$\begin{aligned}\mu(T^b_{u^*}(x) - T^b_{u^*}(y)) &= \mu((u^* + H_m Nx) - (u^* + H_m Ny)) = \\ &= \mu(H_m(Nx - Ny)) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\beta_R \mu(x - y),\end{aligned}$$

ahol $R = \mu(u^*) + b$, tehát u^*-tól és b-től függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján β_R egy R-től függő konstans. Mivel $\lim_{m\to\infty} \mu(H_m) = 0$, ezért elég nagy m esetén $\mu(H_m)\beta_R < 1$. Annak, hogy $\operatorname{Im} T^b_{u^*} \subset S^b_{u^*}$ (tehát lehet $T^b_{u^*}$-t iteratívan alkalmazni) elégséges feltétele, hogy $\mu(H_m)^2\mu(L)b_R \leq b$, ami kellően nagy m-re szintén teljesül. Tehát ha m elég nagy, akkor $T^b_{u^*}$ kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az u^*-tól függő fixpontot jelöljük $y(u^*)$-al, és asszociált elemnek nevezzük. $y(u^*)$-ról könnyen belátható, hogy megoldása az (4.3) egyenletnek.
Vezessük be a $c_k := (u^*, \Phi_k)$ $(k = 1, \ldots, m)$ jelölést, amivel $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$. Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz $y(u^*)$ megoldása a bifurkációs egyenletnek (4.4)?

$$\begin{aligned}0 &= P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_m Ly(u^*) - P_m Ny(u^*), \\ P_m Ly(u^*) &= P_m L(u^* + H_m Ny(u^*)) = P_m Lu^* + P_m L H_m Ny(u^*) = \\ &= P_m L(\sum_{k=1}^m c_k \Phi_k) + P_m L \sum_{k=m+1}^\infty (Ny(u^*), \Phi_k)\Phi_k = \\ &= P_m(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k) + P_m \sum_{k=m+1}^\infty (Ny(u^*, \Phi_k)\lambda_k \Phi_k = \\ &= P_m(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k) + \sum_{k=m+1}^\infty (Ny(u^*), \Phi_k)\lambda_k P_m \Phi_k = \\ &= P_m(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k),\end{aligned}$$

tehát

$$0 = P_m(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*)),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$
\begin{aligned}
0 &= (\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j \Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k) \ (k = 1, \dots, m), \\
0 &= (c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k) \ (k = 1, \dots, m), \text{vagy} \\
0 &= (\lambda_k u^* - Ny(u^*), \Phi_k) \ (k = 1, \dots, m). \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Ez utóbbi egy m-változós (c_k $(k = 1, \dots, m)$ számok meghatározzák u^*-ot), m egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha a, b, m elég nagyok, akkor az eredeti (4.1) egyenletnek $\overline{u}$ pontosan akkor megoldása, ha az (4.5) egyenletnek u^* megoldása és $\overline{u} = y(u^*)$.
Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük. Legyen $N \geq m$. Az $Lu = Nu$ feladat megoldásait

$$
u = \sum_{k=1}^{N} c_k \Phi_k = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{N} c_k \Phi_k
$$

alakban keressük, tehát N növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a műveletigény rovására). H_m-en is hasonlóképpen módosítunk:

$$
H_m u := \sum_{k=m+1}^{N} \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k
$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő L-hez $\Phi_k (k = 1, \dots, N)$ sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti $u^* = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k$ kiinduló értéket.
3. Állítsuk elő $y(u^*)$-ot a fixpontiterációval: $y_0 := u^*$, $y_{i+1} := u^* + H_m N y_i$, $(i = 1, \dots, S)$.
4. Oldjuk meg az $Lu^* = P_m N y_{S+1}$ egyenletet u^*-ra, például Newton-módszerrel.
5. Az így kapott u^*-ból kiindulva ismételjük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük.

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor m növelése szükséges lehet (ami miatt N-et is lehet, hogy növelni kell).
A peremfeltételeket u-ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a Φ_k sajátfüggvényekre, így az ő lineáris kombinációjukkal előálló függvényre

is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

4.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az L alakjára vonatkozó megkötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [9] és [10] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.
Legyen L egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a $(-1, 1)$. A peremfeltételeink a következők:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0. \end{aligned}$$

Ha L-nek λ sajátértéke, v pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $Lv = \lambda v$, azaz

$$\begin{aligned} &\frac{1}{w}(-(pv')' + qv) = \lambda v, \\ &-pv'' - p'v' + qv = \lambda wv. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Jelöljük $T_n(x)$-el a $(-1, 1)$-en értelmezett Csebisev-polinomokat: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük ($T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$). A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ és $\mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \ldots, T_N(x)]^T$, így az együtthatók $\mathbf{a}$ vektora egyértelműen meghatározza a $v(x)$ függvényt.

Mivel L-nek szüksége van v deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t} \tag{4.7}$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a $\theta := \arccos x$ jelölést (amivel $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$).

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\theta) \\
T'_n(x) &= \sin(n\theta) n \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) &= \sin((n+1)\theta) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= \sin((n-1)\theta) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}} \\
\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\sin\theta = 2T_n(x)\sqrt{1-x^2} \\
\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) &= 2T_n(x)
\end{aligned}$$

Ez működik $n \geq 2$ esetén, kis n-ekre pedig egyszerű a dolog:

$$\begin{aligned}
T'_0(x) &= 0, \\
T'_1(x) &= 1 = T_0(x), \\
T'_2(x) &= 4x = 4T_1(x).
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be (4.7)-be a $T_k(x)$-ek helyére az így kapott képleteket:

$$\begin{aligned}
v' &= \sum_{n=0}^{N} b_n T_n = b_0 T'_1 + \frac{b_1}{4} T'_2 + \sum_{n=2}^{N} \frac{b_n}{2(n+1)} T'_{n+1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{b_n}{2(n-1)} T'_{n-1} = \\
&= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T'_1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T'_n + \frac{b_{N-1}}{2N} T'_N + \frac{b_N}{2(N+1)} T'_{N+1}.
\end{aligned}$$

Így már látható az összefüggés a_n és b_n között:

$$\begin{aligned} b_N &= 0 \\ b_{N-1} &= 2Na_N \\ b_{n-1} &= b_{n+1} + 2na_n \ (n = N-1, \dots, 2) \\ b_0 &= \frac{b_2}{2} + a_1. \end{aligned}$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ egyenletet $(k, l = 0, \dots, N)$:

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan} \\ 2l, & \text{ha } l \geq k \geq 1 \text{ és } l + k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T\mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T\mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az x-szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$xv(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$\begin{aligned} xT_0(x) &= T_1(x) \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \ (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{a_1}{2} \\ b_1 &= a_0 + \frac{a_2}{2} \\ b_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \ (n = 2, \dots, N-1) \\ b_N &\approx \frac{a_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a $M\mathbf{a} \approx \mathbf{c}$ szorzást $(k, l = 0, \ldots, N)$:

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k,l) = (1,0) \\ \frac{1}{2}l, & \text{ha } l \geq 2 \text{ és } |k-l| = 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx \mathbf{c}^T\mathbf{t} \approx (M\mathbf{a})^T\mathbf{t}.$$

Ezenfelül, ha f analitikus függvény, akkor $f(x)v(x) \approx (f(M)\mathbf{c})^T\mathbf{t}$.
Ezek segítségével írjuk fel az (4.6) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrixműveletként:

$$\hat{L}\mathbf{a} := \left(-p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M)\right)\mathbf{a}.$$

A (4.6) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig $\lambda w(M)\mathbf{a}$, jelölésként $\mathbf{B} := w(M)$.
Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy $\mathbf{t}$ egy vektorértékű függvény, $[a, b] = [-1, 1]$, és ennek az intervallumnak a végpontjain $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_n(1) = 1$. Legyen

$$\begin{aligned} h_1^T &= \alpha_{11}(\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{t}(-1))^T\hat{D}, \\ h_2^T &= \alpha_{21}(\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{t}(1))^T\hat{D} \end{aligned}$$

amivel (ismét a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ jelölést alkalmazva)

$$\begin{aligned} h_1^T\mathbf{a} &= \alpha_{11}(\mathbf{a}^T\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{b}^T\mathbf{t}(-1))^T &&= \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1), \\ h_2^T\mathbf{a} &= \alpha_{21}(\mathbf{a}^T\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{b}^T\mathbf{t}(1))^T &&= \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1). \end{aligned}$$

Legyen $H = (h_1, h_2)^T$, amivel a peremfeltétel megfogalmazható $H\mathbf{a} = \mathbf{0}$ formában.
Legyen $\hat{A}$ az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy $\hat{L}$ utolsó két sorát elhagyjuk (tehát $N-1 \times N+1$ mátrix), és állítsuk elő $\hat{B}$-t ugyanígy $\mathbf{B}$-ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix}\mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{a}.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha $\mathbf{0}$ helyett $\frac{1}{\lambda_*}H$-t használunk, ahol λ_* egy nagy szám, ami nem sajátértéke a feladatnak. Így a jobb oldal mátrixának $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$ nincsenek csupa 0 sorai.
Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a $[-1,1]$, hanem valami $[a,b]$, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni: $D := \frac{1}{\alpha}\hat{D}$, ahol α az intervallum középpontja ($\alpha = \frac{b-a}{2}$).

4.2. Példa a numerikus alkalmazásra

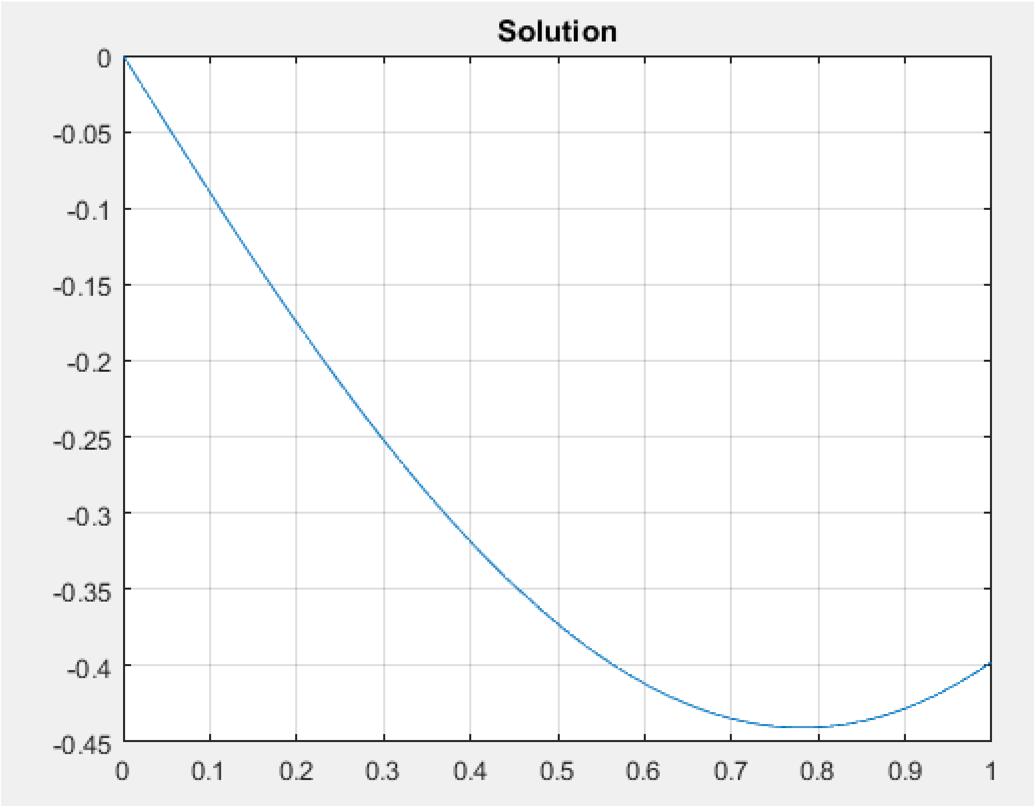
Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [8] cikkhez készült MATLAB csomagot.
Tekintsük az

$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x}$$

egyenletet a $[0,1]$ intervallumon a

$$u(0) = 0$$
$$u(1) + u'(1) = 0$$

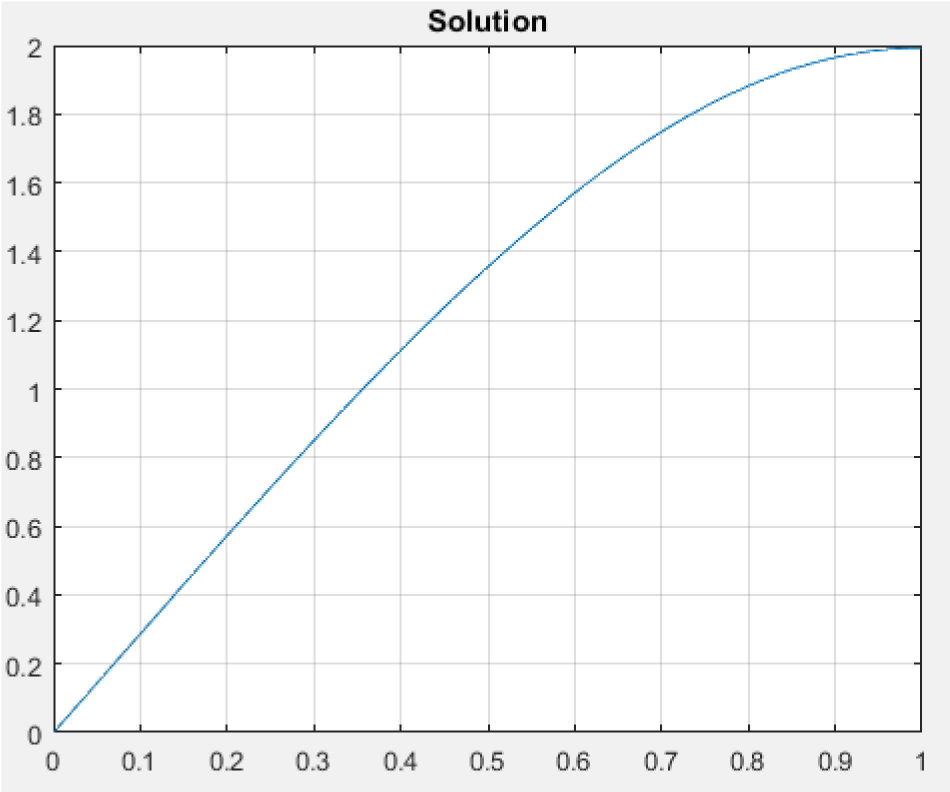
peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb 10^{-5} hibát megengedve:



Ehhez az $m = 0$ választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltételen, és az intervallum jobb oldalán a

$$u'(1) = 0$$

feltételt követeljük meg, akkor $m = 0$ esetén nincs konvergencia, és még $m = 1$ esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A cinit $= [1]$ paraméterrel, azaz a Φ_1 komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:



4.3. Kiegészítés

H_m lineáris:

$$
\begin{aligned}
H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\alpha x + y, \Phi_k)\Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}((\alpha x, \Phi_k) + (y, \Phi_k))\Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\alpha x, \Phi_k)\Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, \Phi_k)\Phi_k = \\
&= \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(x, \Phi_k)\Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(y, \Phi_k)\Phi_k = \\
&= \alpha H_m x + H_m y
\end{aligned}
$$

$H_m = (L_{|S_m^\perp})^{-1}$, linearitás miatt elég Φ_n-ra nézni ($n > m$):

$$\begin{aligned} LH_m\Phi_n &= L\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\Phi_n, \Phi_k)\Phi_k\right) = \\ &= L\left(\frac{1}{\lambda_n}\Phi_n\right) = \frac{1}{\lambda_n}\lambda_n\Phi_n = \Phi_n \end{aligned}$$

$H_m Lu = (I - P_m)u$, linearitás miatt elég Φ_n-re:

$$\begin{aligned} H_m L\Phi_n = H_m(\lambda_n\Phi_n) = \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\Phi_n, \Phi_k)\Phi_k = \\ = \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{ha } n \le m \\ \Phi_n, & \text{ha } n \ge m+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$\|H_m\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}}$, kihasználva, hogy a sajátértékek növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy $\|I - P_m\| \le 1$ a projekció tulajdonsága miatt:

$$\begin{aligned} \|H_m u\| &= \|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(u, \Phi_k)\Phi_k\| \le \\ &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|(I - P_m)u\| \le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|u\| \end{aligned}$$

és $u = \Phi_{m+1}$ esetén

$$\begin{aligned} \|H_m\Phi_{m+1}\| &= \|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}(\Phi_{m+1}, \Phi_k)\Phi_k\| = \\ &= \|\frac{1}{\lambda_{m+1}}\Phi_{m+1}\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|\Phi_{m+1}\| \end{aligned}$$

$\mu(H_m) \leq \alpha\sigma(m)$, ahol $\sigma(m) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\right)^2\right)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}
\mu(H_m u) &= \mu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}(u,\Phi_k)\Phi_k\right) \leq \\
&\leq \left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}(u,\Phi_k)\mu(\Phi_k)\right| = \\
&= \left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}(u,\Phi_k)\right| \leq \\
&\leq \left|\left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k},(u,\Phi_k)\right)_{l_2}\right| \leq \\
&\leq \|\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\|_{l_2}\|(u,\Phi_k)\|_{l_2}
\end{aligned}$$

ahol $(\,,\,)_{l_2}$ az l_2-beli skaláris szorzást jelöli, és erre alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-Scwarz-egyenlőtlenséget. Ha $\|(u,\Phi_k)\|_{l_2} = 1$ (ami $u = \Phi_k$ választással biztosítható), akkor megkaptuk, hogy $\mu(H_m) \leq \alpha\sigma(m)$.

Irodalomjegyzék

[1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.

[2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.

[3] TODO, *Notex on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.

[4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.

[5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.

[6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapnov-Schmidt*. TODO, TODO.

[7] TODO, *Cambridge Studies in Advanced Mathemathics*. TODO, 1995.

[8] D. Trif, „The lyapunov-schmidt method for two-point boundary value problems," vol. 6, pp. 119–132, 2005.

[9] M. Liefvendahl, „A chebyshev tau spectral method for the calculation of eigenvalues and pseudospectra,"

[10] D. Trif, „Lisc - a matlab package for linear differential problems," vol. 2, pp. 203–208, 2006.