

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM  
INFORMATIKAI KAR

---

Lipták Bence

# A LJAPUNOV-SCHMIDT-MÓDSZER

MSc diplomamunka

Modellalkotó informatikus szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor  
Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2018.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kovács Sándor tanár úrnak a segítségét, munkáját és végtelen türelmét, ami nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Budapest, 2018 ősz

*Lipták Bence*

# Tartalomjegyzék

<b>1. Funkcionálanalitikai segédeszközök</b>	<b>3</b>
1.1. Faktorterek, direkt kiegészítők . . . . .	3
1.2. Lineáris operátorok . . . . .	6
1.3. Kompakt operátorok . . . . .	18
1.4. Fredholm-operátorok . . . . .	19
1.5. Az implicit függvényre vonatkozó tétel . . . . .	22
<b>2. Bifurkációk</b>	<b>25</b>
<b>3. A Ljapunov-Schmidt-redukció</b>	<b>29</b>
<b>4. Alkalmazások</b>	<b>32</b>
4.1. Egy elsőrendű peremérték-feladat . . . . .	32
4.2. Egy $n$ -edrendű peremérték-feladat . . . . .	35
<b>5. A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer</b>	<b>43</b>
5.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására . . . . .	48
5.2. Példa a numerikus alkalmazásra . . . . .	52

# 1. fejezet

## Funkcionálanalitikai segédeszközök

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a funkcionálanalízis azon fogalmait, ill. tételeit, amelyekre a későbbiekben hivatkozunk, ill. amelyeket a Ljapunov-Schmidt-módszer tárgyalása folyamán felhasználunk. Ha mást nem írunk, akkor a továbbiakban legyen  $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  egy-egy a  $\mathbb{K}$  testre vonatkozó vektortér. A jelölés-, ill. szimbólumrendszert illetően alapvetően a [6] jegyzetre támaszkodunk.

### 1.1. Faktorterek, direkt kiegészítők

Adott  $\mathcal{H}$  halmaz, ill.  $\sim \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$  ekvivalencia esetében a

$$[x] := \{y \in \mathcal{H} : x \sim y\}$$

szimbólum jelöli az  $x \in \mathcal{H}$  elemhez tartozó ekvivalenciaosztályt,

$$\mathcal{H}/\sim := \{[x] \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : x \in \mathcal{H}\}$$

a  $\sim$ -ekvivalenciaosztályok halmazát.

Ha  $\mathcal{X}$  vektortér a  $\mathbb{K}$  testre vonatkozóan,  $A, B \subset \mathcal{X}$  és  $\alpha \in \mathbb{K}$ , akkor

$$A + B := \{a + b \in \mathcal{X} : a \in A, b \in B\}, \quad \{a\} + B =: a + B \quad (a \in \mathcal{X}),$$

$$\alpha A := \{\alpha a \in \mathcal{X} : a \in A\}.$$

#### 1.1.1. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \quad \text{és} \quad r := (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

akkor

$$r + \mathcal{A} = \{r + u : u \in \mathcal{A}\} = \{(x + a, y + 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\},$$

azaz  $r + \mathcal{A}$  nem más mint az  $y$  abszcisszájú vízszintes egyenes.

Adott  $\mathcal{X}$  vektortér,  $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  altér és  $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$  esetén az

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} =: \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

komplexusösszeget **direktösszegnek**, a  $\mathcal{B}$  alteret pedig az  $\mathcal{A}$  altér **direkt kiegészítőjének** nevezzük, ha  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$  teljesül. Könnyen belátható, hogy

$$x \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \iff \exists u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{B} : x = u + v,$$

Ha  $\mathcal{A}$  altér az  $\mathcal{X}$  vektortérben, akkor az

$$x \sim y \iff x - y \in \mathcal{A} \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

reláció  $\mathcal{X}$ -beli ekvivalencia, és az  $x \in \mathcal{X}$  elemhez tartozó ekvivalenciaosztályra

$$[x] = \{u \in \mathcal{X} : x - u \in \mathcal{A}\} = \{x + y \in \mathcal{X} : y \in \mathcal{A}\} = x + \mathcal{A}.$$

A  $\sim$ -ekvivalenciaosztályok halmazára  $\mathcal{X}/\sim$  helyett gyakran az  $\mathcal{X}/\mathcal{A}$  jelölés használatos. Így

$$\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{x + \mathcal{A} : x \in \mathcal{X}\}.$$

Mivel bármely  $\lambda \in \mathbb{K}$  és  $x, y, u, v \in \mathcal{X}$  esetén

$$(x \sim y \wedge u \sim v) \implies x + u \sim y + v, \quad x \sim y \implies \lambda x \sim \lambda y,$$

ezért az

$$[x] + [y] := [x + y] \quad (x, y \in \mathcal{X}), \quad \lambda \cdot [x] := [\lambda \cdot x] \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathcal{X})$$

műveletekkel  $\mathcal{X}/\mathcal{A}$  halmaz vektortér, amelyet az  $\mathcal{X}$  vektortér  $\mathcal{A}$  altere szerinti **faktortérnek** vagy **hányadostérnek** nevezünk. Az  $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ -beli nullvektor:  $[0] = \mathcal{A}$ .

**1.1.2. példa.** Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2 \quad \text{és} \quad \mathcal{A} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

akkor

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{A} = \{r + \mathcal{A} : r \in \mathbb{R}^2\},$$

azaz  $\mathbb{R}^2/\mathcal{A}$  nem más mint az  $\mathbb{R}^2$ -beli vízszintes egyenesek halmaza.

**1.1.3. példa.** Világos, hogy ha  $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$ , akkor

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{X} : \int_0^1 f = 0 \right\}$$

altér  $\mathcal{X}$ -ben. Ha

$$e : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad e(x) := 1,$$

akkor  $([e])$  bázisa  $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ -nak, hiszen

- $\int_0^1 1 \, dx = 1 \neq 0$  következtében  $e \notin \mathcal{A}$ , tehát  $[e] \neq [0]$ , így  $([e])$  lineárisan független.
- ha

$$f \in \mathcal{X} \quad \text{és} \quad \lambda := \int_0^1 f,$$

akkor

$$\int_0^1 (f - \lambda e) = \int_0^1 f(x) \, dx - \lambda \int_0^1 1 \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx - \lambda = 0$$

következtében

$$f - \lambda e \in \mathcal{A}, \quad \text{azaz} \quad [f] = \lambda[e].$$

Adott  $\mathcal{X}$  vektortér és  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  altér esetében  $\mathcal{A}$  kodimenziója a

$$(\text{codim}(\mathcal{A}) :=) \text{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}} := \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A})$$

(kibővített értelemben vett) szám. Ha  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  altér az  $\mathcal{A}$  direkt kiegészítője:  $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$ , akkor  $\text{codim}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{B})$ .

Belátható, hogy

- ha  $\mathcal{A} = \mathcal{X}$ , akkor  $\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{0\}$ , így  $\text{codim}(\mathcal{X}) = 0$ .
- a következő három állítás egyenértékű:
  1.  $\text{codim}(\mathcal{A}) = 1$ .
  2. alkalmas  $v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$  esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. tetszőleges  $v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$  esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v.$$

**1.1.1. tétel.** Ha  $\mathcal{A}$  altér az  $\mathcal{X}$  vektortérben, amelynek a  $\mathcal{B}$  vektorrendszer egy bázisa, akkor  $\mathcal{X}$ -ben van olyan  $\mathcal{C}$  bázis, hogy  $\mathcal{B}$  részrendszere  $\mathcal{C}$ -nek és

$$\{x + \mathcal{A} : x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}\}$$

bázisa az  $\mathcal{X}/\mathcal{A}$  faktortérnek.

Az iménti tétel következménye az

**1.1.1. állítás.** Ha  $\mathcal{A}$  altér az  $\mathcal{X}$  vektortérben, akkor

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}) + \operatorname{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}}.$$

**1.1.2. tétel.** Legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  normált tér,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  altér. Ekkor a  $|||\cdot||| : \mathcal{X}/\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$|||[x]||| := d(x, \mathcal{A}) := \inf \{\|x - y\| \in \mathbb{R} : y \in \mathcal{A}\} = \inf \{\|z\| \in \mathbb{R} : z \in [x]\}$$

leképezés norma, továbbá, ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  Banach-tér, akkor  $(\mathcal{X}/\mathcal{A}, |||\cdot|||)$  is Banach-tér.

## 1.2. Lineáris operátorok

A lineáris operátorok, ill. az  $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$  esetben lineáris funkcionálok terének jelölésére az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} : A \text{ lineáris}\},$$

ill. az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} : A \text{ lineáris}\}$$

szimbólumot használjuk,  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  esetén pedig az  $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et  $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük. Sok esetben – különösen fizikai alkalmazásokban – szokás az

$$\mathcal{X}^+ := \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$$

teret **lineáris formák** vagy **kovektorok** tereként emlegetni,  $\mathcal{X}$  elemeire a „ket-vektor”,  $\mathcal{X}^+$  elemeire pedig a „bra-vektor” elnevezést használni, és tetszőleges  $f \in \mathcal{X}^+$  és  $x \in \mathcal{X}$  esetén az  $f(x)$  helyettesítési értéket az  $\langle f, x \rangle$ , ill.  $\langle f|x \rangle$  („bracket”) jelsorozattal jelölni:

$$\langle f, x \rangle := \langle f|x \rangle := f(x) \quad (x \in \mathcal{X}).$$

Az  $\mathcal{X}^+$  teret szokás az  $\mathcal{X}$  tér **algebrai duálisának** nevezni. Ha  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in \mathcal{Y} : u \in \mathcal{D}(A)\},$$

ill. az

$$\mathcal{N}(A) := A^{-1}[\{0\}] = \{u \in \mathcal{D}(A) : Au = 0 \in \mathcal{Y}\}$$

altételeket az  $A$  operátor (funkcionál) **képterének**, ill. **magterének** nevezzük.

**1.2.1. megjegyzés.** Világos, hogy, ha  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor

$$A \text{ izomorfizmus} \iff / \mathcal{N}(A) = \{0\} \text{ és } \mathcal{R}(A) = \mathcal{Y} \text{ } (\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A) = \{0\})/,$$

azaz

$$A \text{ izomorfizmus} \iff / \dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A))/.$$

A lineáris algebrából közismert az alábbi

**1.2.1. tétel.** Ha  $\mathcal{X}$  véges dimenziós vektortér,  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ , akkor igaz az

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) \iff \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$$

ekvivalencia.

**1.2.2. tétel. (Dimenziótétel.)** Ha  $\mathcal{X}$  véges dimenziós vektortér,  $\mathcal{Y}$  pedig (nem feltétlenül véges dimenziós) vektortér, továbbá  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{X}).$$

Adott  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ,  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált terek és  $A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  operátor esetén értelmezzük az

$$\|A\| := |||A||| := \inf \{K \in [0, +\infty] : \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}} \text{ } (x \in \mathcal{D}(A))\} \quad / \inf \emptyset := +\infty /$$

(kibővített értelemben) valós számot. Az  $A$  operátor **korlátos**, ha  $\|A\| < +\infty$ . A korlátos, lineáris operátorok halmazának jelölésére az

$$L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) : A \text{ korlátos}\},$$

ill. az

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : A \text{ korlátos}\}$$

szimbólumokat fogjuk használni,  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  esetén pedig az  $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et  $L(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük:

$$L(\mathcal{X}) := L(\mathcal{X}, \mathcal{X}).$$

Ha  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}.$$



**1.2.1. példa.**

1. Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  normált tér,  $\mathcal{X} \neq \{0\}$ , akkor az  $I$  identikus operátorra

$$I \in L(\mathcal{X}) \quad \text{és} \quad \|I\| = 1$$

teljesül.

2. Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (L^2[0, \pi], \|\cdot\|_{L^2}),$$

akkor az

$$A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad Au := -u'' \quad (u \in \mathfrak{C}^2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0)$$

operátor nem korlátos, ui. ha

$$\varphi_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) := \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi/2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|A\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\pi n^2 \sin^2(nt) dt} = n^2 \|\varphi_n\| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Valamely  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  (lineáris) operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy az  $\mathcal{N}(A)$  magtér zárt altér  $\mathcal{X}$ -nek.

Ha  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  egy kodimenziós zárt altér, akkor alkalmas  $f \in \mathcal{X}^*$  funkcionálra

$$\mathcal{A} = \mathcal{N}(f) := \{x \in \mathcal{X} : \langle f, x \rangle = 0\},$$

hiszen a feltételek következtében

$$v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A} \quad \implies \quad \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

így az

$$f(x) = f(a + \lambda v) := \lambda \quad (x \in \mathcal{X})$$

választással a kívánt funkcionálhoz jutunk (vö. [5], 131. old.)

**1.2.1. definíció.** Adott  $\mathcal{X}$  lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy az  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  operátor

1. **idempotens**, ha  $A^2 := A \circ A = A$ ;
2. **projekció**, ha alkalmas az  $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{X}$  feltételnek eleget tévő  $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  altér esetén

$$Ax := u \quad (\exists | u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V} : x = u + v).$$

Az  $A$  (lineáris) operátort szokás az  $U$  altérre való,  $V$  altér menti, vagy  $V$  altérrel párhuzamos irányú **vetítő operátornak** is nevezni.

**1.2.2. példa.** Az  $I : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, Ix := x$  identikus operátor projekció.

**1.2.3. példa.** A  $\mathcal{O} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, Ix := 0$  zérusoperátor projekció.

**1.2.4. példa.** Ha  $p \in [1, +\infty)$ , és  $\mathcal{X} := l_p$ , akkor az

$$A : l_p \rightarrow l_p, \quad Au := (u_1, \dots, u_n, 0, \dots)$$

operátor projekció.

**1.2.5. példa.** Ha  $d \in \mathbb{N}$ , és  $\mathcal{X} := \mathbb{K}^{d \times d}$ , akkor az

$$AM := \frac{1}{2}(M + M^T) \quad (M \in \mathcal{X})$$

operátor projekció.

**1.2.6. példa.** Ha valamely  $0 < a \in \mathbb{R}$  esetén

$$\mathcal{X} := \{f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{K} : f \in \mathfrak{C}\},$$

akkor az

$$(Af)(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad (f \in \mathcal{X}, x \in [-a, a])$$

operátor projekció. Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ páratlan}\} \quad \text{és az} \quad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ páros}\}$$

alterekre

$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$$

teljesül, hiszen

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \quad (x \in [-a, a]).$$

Projekciók jellemzésére szolgál a következő állítás.

**1.2.3. tétel.** Legyen  $\mathcal{X}$  lineáris tér. Az  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$  operátor pontosan akkor projekció, ha idempotens, továbbá ez utóbbi esetben

1.  $\mathcal{N}(I - A) = \mathcal{R}(A)$  és  $\mathcal{R}(I - A) = \mathcal{N}(A)$ .
2.  $\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$ , pontosabban bármely  $x \in \mathcal{X}$  esetén

$$x = u + v, \quad u \in \mathcal{N}(A), \quad v \in \mathcal{R}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad u = (I - A)x, \quad v = Ax.$$

3. Az  $I - A$  operátor projekció: az  $\mathcal{N}(A)$  altérre való  $\mathcal{R}(A)$ -val párhuzamos vetítés.
4. Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  Banach-tér,  $\mathcal{X} = U \oplus V$ , úgy az  $U$  altérre való  $A$  projekció pontosan akkor lesz korlátos, ha  $U$  és  $V$  zárt altér  $\mathcal{X}$ -ben.

**1.2.7. példa.** Ha

$$\mathcal{X} := L^2([0,1] \times [0,1]),$$

akkor az

$$(Af)(x, y) := \frac{1}{2} (f(x, y) - f(y, x)) \quad (f \in \mathcal{X}, (x, y) \in [0,1] \times [0,1])$$

operátor projekció, ui. bármely  $f \in \mathcal{X}$ , ill.  $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$  esetén

$$\begin{aligned} (A^2 f)(x, y) &= (A(Af))(x, y) = \frac{1}{2} \{ (Af)(x, y) - (Af)(y, x) \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2} - \frac{f(y, x) - f(x, y)}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} (2f(x, y) - 2f(y, x)) = (Af)(x, y). \end{aligned}$$

Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ szimmetrikus}\}, \quad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ antiszimmetrikus}\}$$

alterekre  $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$  teljesül, hiszen bármely  $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$  esetén

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(y, x)) + \frac{1}{2} (f(x, y) - f(y, x)).$$

Az  $\mathcal{X}^* := L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$  szimbólum jelöli az  $\mathcal{X}$ -en értelmezett korlátos, lineáris funkcionálok összességét, az  $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$  normált teret az  $\mathcal{X}$  vektortér, ill. az  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  normált tér

(topológiai) duálisának (duális terének vagy konjugált terének) nevezzük. Az egyszerűség kedvéért  $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$  helyett gyakran csak  $\mathcal{X}^*$ -ot írunk. Az  $\mathcal{X}^*$  altere  $\mathcal{X}^+$ -nek és

$$\dim(\mathcal{X}) < \infty \quad \implies \quad \mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^*.$$

Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Hilbert-tér, akkor  $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  azonosítható duálisukkal, és  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  nem más mint a skaláris szorzat.

**1.2.2. definíció.** Legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér, valamint  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ . Azt mondjuk, hogy  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  **nyílt**, ill. **zárt operátor**, ha bármely  $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$  nyílt, ill. zárt halmaz esetén az  $A[\mathcal{H}] \subset \mathcal{Y}$  képhalmaz nyílt, ill. zárt.

**1.2.4. tétel. (Nyílt leképezések tétele.)** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-tér, akkor tetszőleges  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  (folytonos, lineáris) operátor esetében egyenértékűek az alábbi állítások.

- (1). Az  $A$  operátor szűrjektív.
- (2). Az  $A$  operátor nyílt.

Az iménti tétel következményeként kapjuk az alábbi igen fontos állítást.

**1.2.5. tétel. (Banach-féle homeomorfia-tétel.)** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-tér, továbbá az  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  (folytonos, lineáris) operátor bijektív, akkor  $A^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$ , azaz minden, Banach-teret Banach-térbe képező korlátos lineáris bijekció inverze is korlátos.

Operátorok folytonossága sok esetben gráfjuk zártóságára vezethető vissza.

**1.2.6. tétel. (Zárt gráfra vonatkozó tétel.)** Az  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ ,  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-terek és az  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$  (lineáris) operátor esetén, ha

- (1)  $\mathcal{D}(A)$  zárt  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ -ben/ és (2)  $\Gamma(A)$  zárt  $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot, \cdot)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}})$ -ban/, akkor  $A$  folytonos, ahol

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

és

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \|x\|_{\mathcal{X}}^p + \|y\|_{\mathcal{Y}}^p \quad (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, p \in [1, +\infty))$$

vagy

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \max\{\|x\|_{\mathcal{X}}, \|y\|_{\mathcal{Y}}\} \quad (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}).$$

Bármely normált tér egy alterén értelmezett korlátos, lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a norma megtartásával. Erről szól a

**1.2.7. tétel. (Hahn-Banach-tétel.)** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  normált tér,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  altér, akkor tetszőleges  $f \in \mathcal{A}^*$  esetén van olyan  $F \in \mathcal{X}^*$ , hogy

$$(1) f \subset F, \quad \text{azaz} \quad F(u) = f(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \quad \text{és} \quad (2) \|F\| = \|f\|.$$

Következésképpen

- az  $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$  operátortér pontosan akkor Banach-tér, ha  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  is Banach-tér. Így a  $(\mathbb{K}, |\cdot|)$  tér teljessége miatt az  $(L(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$  tér is teljes, azaz Banach-tér (vö. [6], 578. old. és 624. old.).

- ha  $\mathcal{X} \neq \{0\}$ , akkor bármely  $0 \neq u \in \mathcal{X}$  vektorhoz van olyan  $f \in \mathcal{X}^*$  funkcionál, amelyre

$$\|f\| = 1 \quad \text{and} \quad f(u) = \|u\|$$

(vö. [15], 449. old.)

- bármely véges lineárisan független  $\{u_1, \dots, u_d\} \subset \mathcal{X}$  rendszerhez létezik  $\{f_1, \dots, f_d\} \subset \mathcal{X}^*$  funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$\{f_i, u_i\} \quad (i \in \{1, \dots, d\})$$

**biortogonális rendszer:**

$$\langle f_i, u_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, d\}),$$

továbbá az

$$Ax := \sum_{k=1}^d \langle f_k, x \rangle u_k \quad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos projekció a  $\text{span}\{u_1, \dots, u_d\}$  altérre (vö. [6], 622. old.).

**1.2.3. definíció.** Legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  normált tér,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ , ill.  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}^*$  alterek. Az

$$\mathcal{A}^\perp := \{f \in \mathcal{X}^* : f(u) = 0 \ (u \in \mathcal{A})\} = \{f \in \mathcal{X}^* : \langle f, u \rangle = 0 \ (u \in \mathcal{A})\},$$

ill. a

$$\mathcal{B}_\perp := \{u \in \mathcal{X} : f(u) = 0 \ (f \in \mathcal{B})\} = \{u \in \mathcal{X} : \langle f, u \rangle = 0 \ (f \in \mathcal{B})\}$$

altérek az  $\mathcal{A}$ , ill. a  $\mathcal{B}$  altér **annihilátorának** nevezzük.

Világos, hogy

1.  $\mathcal{A}^\perp$ , ill.  $\mathcal{B}_\perp$  zárt altere  $\mathcal{X}^*$ -nak, ill.  $\mathcal{X}$ -nek.
2. ha  $\mathcal{X}$  véges-dimenziós, akkor

$$\dim(\mathcal{A}^\perp) = \dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{A}).$$

**1.2.8. tétel.** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$  normált tér,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  zárt altér, akkor a

$$\varphi : \mathcal{A}^\perp \rightarrow (\mathcal{X}/\mathcal{A})^*, \quad \varphi(f)([x]) := f(x) \quad (f \in \mathcal{A}^\perp, [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{A}),$$

ill. a

$$\psi : \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp \rightarrow \mathcal{A}^*, \quad \psi([f]) := f|_{\mathcal{Y}} \quad ([f] \in \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp)$$

leképezések izometrikus izomorfizmusok.

**1.2.9. tétel.** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér, továbbá  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor az

$$A^*f := f \circ A \quad (f \in \mathcal{Y}^*)$$

operátorra

$$A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*), \quad \text{továbbá} \quad \|A^*\|_{L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} = \|A\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}.$$

Az 1.2.9. tételbeli  $A^*$  operátort az  $A$  operátor duálisának nevezzük. A fenti jelölésekkel tehát tehát  $A^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$  pontosan akkor **duális operátora**  $A$ -nak, ha

$$\langle f, Ax \rangle = f(Ax) = (A^*(f))(x) = \langle A^*f, x \rangle \quad (x \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{Y}^*).$$

**1.2.8. példa.** Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_{12}, \|\cdot\|_{l_{12}}) \quad \text{és} \quad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (l_3, \|\cdot\|_{l_3}),$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad A(x_n) := \left( \frac{x_n}{\sqrt{n}} \right)$$

operátor duálisa az

$$A^*f = \left( \frac{f_n}{\sqrt{n}} \right) \quad (f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*)$$

operátor, ahol

$$\mathcal{X}^* = l_{12/11} \quad \text{és} \quad \mathcal{Y}^* = l_{3/2},$$

hiszen bármely

$$f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*$$

esetén

$$A^*f(g) = f(Ag) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{g_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{n}} g_n \quad (g \in \mathcal{X}).$$

Az alábbi két példában legyen

$$p \in [1, +\infty), \quad q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & (p \neq 1), \\ +\infty & (p = 1). \end{cases}$$

**1.2.9. példa.** Ha  $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := l_p$ , és  $B$ , ill.  $J$  jelöli **balra**, ill. a **jobbra való eltolás** operátorát:

$$B : l_p \rightarrow l_p, \quad Bu := (u_{n+1}), \quad J : l_p \rightarrow l_p, \quad Ju := (u_{n-1}),$$

akkor  $B, J \in L(\mathcal{X})$ , ui.  $B$ , ill.  $J$  triviálisan lineáris, továbbá

$$\|Bu\|_{l_p} = \left( \sum_{n=2}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} \leq \left( \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

ill.

$$\|Ju\|_{l_p} = \left( 0 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

és bármely

$$v \in \mathcal{X}^* = l_q$$

esetén

$$B^*v(u) = v(Bu) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot u_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1} \cdot u_n \quad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$B^*v = (0, v_1, v_2, \dots) = Jv \quad (v \in l_q).$$

**1.2.10. példa.** Ha  $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := L^p[0,1]$ , továbbá  $\varphi \in L^\infty[0,1]$ , úgy az

$$A_p u := \varphi u \quad (u \in L^p[0,1])$$

operátor triviálisan lineáris, ill. duálisa az  $A_q$  operátor, hiszen bármely  $u \in L^p[0,1]$  és  $v \in L^q[0,1]$  esetén

$$(A_p^* v)(u) = \int_0^1 (A_p u) v = \int_0^1 \varphi u v = \int_0^1 u (A_q v) = (A_q v)(u).$$

Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér, továbbá  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor nyilvánvalóan  $\mathcal{N}(A)$  és  $\mathcal{R}(A)$  altér  $\mathcal{X}$ -ben, ill.  $\mathcal{Y}$ -ban továbbá  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  esetén  $\mathcal{N}(A)$  zárt altér (vö. pl. [6]). Az  $\mathcal{R}(A)$  altér azonban nem mindig zárt altere  $\mathcal{Y}$ -nak. Az

$$A : l_\infty \rightarrow l_\infty, \quad Au := \left( \frac{u_n}{n} \right)$$

operátor esetében

– bármely  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ , ill.  $(u_n), (v_n) \in l_\infty$  esetén

$$A(\alpha(u_n) + \beta(v_n)) = \left( \frac{\alpha u_n + \beta v_n}{n} \right) = \alpha \left( \frac{u_n}{n} \right) + \beta \left( \frac{v_n}{n} \right) = \alpha A(u_n) + \beta A(v_n),$$

azaz  $A$  lineáris;

– tetszőleges  $u \in l_\infty$  sorozatra

$$\|Au\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty,$$

tehát  $A$  korlátos és így folytonos is:  $A \in L(l_\infty)$  (következésképpen  $\mathcal{N}(A)$  zárt);

– ha

$$u_n := (1, \dots, n, 0, \dots, 0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor  $(u_n) \in L_\infty$  és a

$$v_n := (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vektorral  $A(u_n) = (v_n)$ . Ennélfogva  $(v_n) \in \mathcal{R}(A)$  és

$$v_n \longrightarrow v := (1, \dots, 1, \dots) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így  $v \notin \mathcal{R}(A)$ , hiszen  $u := A^{-1}v = (1, \dots, n, \dots) \notin l_\infty$ .

Igaz viszont a következő

**1.2.1. tétel.** Legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér. Ha  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor

1.  $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$  és  $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A^*)_\perp$ ;

2. ha  $\mathcal{R}(A)$  zárt altere  $\mathcal{Y}$ -nak, akkor még

$$\dim((\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A))^*) = \dim(\mathcal{R}(A)^\perp) = \dim(\mathcal{N}(A^*))$$

is igaz.

**Biz.**

1. Világos, hogy bármely  $x \in \mathcal{X}$  esetén igaz az

$$f \in \mathcal{R}(A)^\perp \iff f(Ax) = A^*f(x) = 0 \iff A^*f = 0 \iff f \in \mathcal{N}(A^*).$$

Továbbá

–  $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{N}(A^*)_\perp$ , hiszen bármely  $u \in \mathcal{X}$ , ill.  $v := Au \in \mathcal{R}(A)$  esetén, ha  $f \in \mathcal{N}(A^*)$ , akkor

$$f(v) = f(Au) = (A^*f)(u) = 0,$$

ahonnan  $v \in \mathcal{N}(A^*)_\perp$  következik;



- $\overline{\mathcal{R}(A)} \supset \mathcal{N}(A^*)^\perp$ , hiszen  $U := \overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{Y}$  zárt altér, ennél fogva (vö. Hahn-Banach-tétel egyik következménye) bármely  $v \notin U$  esetén van olyan  $f \in \mathcal{Y}^*$  funkcionál, hogy  $f(v) \neq 0$  ( $v \in \mathcal{Y}^*$ ). Így tetszőleges  $x \in \mathcal{X}$  vektorra

$$(A^*f)(x) = f(Ax) = 0,$$

azaz  $f \in \mathcal{N}(A^*)$ . Világos, hogy  $f \notin \mathcal{N}(A^*)^\perp$ , hiszen ellenkező esetben  $f(v) = 0$  lenne. Mindez azt jelenti, hogy  $v \notin U$ , ahonnan  $v \notin \mathcal{N}(A^*)^\perp$  és így

$$\mathcal{N}(A^*)^\perp \subset U = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

következik.

2. Az előző állítás következménye. ■

Az 1.2.1. tételbeli állítás következményeként elmondható, hogy ha  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  zárt képterű operátor, úgy valamely  $Au = v$  egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha igaz az

$$A^*f = 0 \quad \implies \quad f(v) = 0$$

implikáció.

**1.2.4. definíció.** Valamely  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  lineáris operátort **véges rangúnak** nevezünk, ha  $\mathcal{R}(A)$  képtere véges dimenziós. Ha  $A$  véges rangú, akkor a  $\dim(\mathcal{R}(A))$  számot az  $A$  operátor **rangjának** nevezzük.

**1.2.11. példa.** Ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ , ill.  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált terek és  $f \in \mathcal{X}^*$ , ill.  $y \in \mathcal{Y}$ , akkor az

$$f \otimes y : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (f \otimes y)(x) := \langle f, x \rangle y$$

operátor nyilván véges rangú:  $\dim(\mathcal{R}(f \otimes y)) = 1$ .

Nem nehéz belátni, hogy ha az  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  lineáris operátor esetén  $\mathcal{X}$  vagy  $\mathcal{Y}$  véges dimenziós, akkor  $A$  véges rangú.

Lineáris algebrai megfontolásokra támaszkodva elmondható, hogy egy vektortér minden alterének van direkt kiegészítője. Sőt, ha  $\mathcal{X}$  Hilbert-tér és  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  altér, akkor

$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{A}^\perp.$$

Az ortogonális kiegészítő zárt altér, továbbá  $(\mathcal{A}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{A}}$ . Ha  $\mathcal{X}$  Banach-tér, akkor bármely zárt  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  alternek van ugyan direkt kiegészítője, azonban ez a kiegészítő altér nem feltétlenül zárt. Így pl. a  $c_0 \subset l_\infty$  alternek nincsen zárt direkt kiegészítője  $l_\infty$ -ben, ill. a

$$\mathfrak{C}[0,1] \subset L^\infty[0,1]$$

alternek sincsen zárt direkt kiegészítője (vö. pl. [19, 11]).

**1.2.2. tétel.** Legyen  $\mathcal{X}$  Banach-tér,  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  pedig véges dimenziós altér:  $\dim(\mathcal{A}) < \infty$ . Ekkor  $\mathcal{A}$ -nak van  $\mathcal{X}$ -beli zárt direkt kiegészítője, azaz alkalmas zárt  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  altér esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

teljesül.

**Biz.** Mivel  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  véges dimenziós, ezért alkalmas  $d \in \mathbb{N}$  esetén  $\mathcal{A}$ -ban van  $d$ -elemű bázis:  $b_1, \dots, b_d$ . Így alkalmas  $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$  esetén

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_d b_d.$$

Jelölje  $f_1, \dots, f_d$  a megfelelő Auerbach-bázist (vö. [10], 70. old.), azaz legyen  $\{f_1, \dots, f_d\} \subset \mathcal{A}^*$  olyan, amelyre

$$f_k(b_l) = \delta_{kl} \quad (k, l \in \{1, \dots, d\},$$

ahol  $\mathcal{A}^*$  jelöli az  $\mathcal{A}$  altér duálisát. Ekkor (vö. Hahn-Banach-tétel harmadik következménye) alkalmas  $f_1, \dots, f_d$  ( $\mathcal{X}^*$ -beli) funkcionálok esetén az

$$Ax := \sum_{k=1}^d \langle f_k, x \rangle u_k \quad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos projekció. Ha most  $\mathcal{B} := \mathcal{N}(A)$ , akkor  $A$  folytonossága következtében  $\mathcal{B}$  zárt altér  $\mathcal{X}$ -ben, továbbá  $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \{0\}$ , hiszen ellenkező esetben valamely  $v \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$  esetén  $v \neq 0$ , ahonnan

$$v \in \mathcal{B} = \mathcal{N}(A),$$

azaz  $A(v) = 0$  következik, ez pedig  $v \in \mathcal{X}$  miatt azt jelenti, hogy

$$0 = A(v) = vz,$$

ami ellentmond annak, hogy  $v \neq 0$ . Mivel bármely  $u \in \mathcal{B}$  esetén  $Au \in \mathcal{B}$ , ill.

$$A(u - Pu) = Au - A^2u = Au - Au = 0$$

következtében  $u - Au \in \mathcal{B}$ , ezért

$$u = (u - Au) + Au$$

a kívánt felbontás. ■

Ha tehát az  $\mathcal{X}$  Banach-tér, ill.  $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$  zárt altér esetén  $\text{codim}(\mathcal{A}) < +\infty$ , akkor  $\mathcal{A}$ -nak van  $\mathcal{X}$ -beli zárt direkt kiegészítője, ui. ha a  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  altérre  $\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ , akkor

$$\dim(\mathcal{B}) = \text{codim}(\mathcal{A}) < +\infty,$$

így  $\mathcal{B}$  zárt  $\mathcal{X}$ -ben.

### 1.3. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált terek.

**1.3.1. definíció.** Adott  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált terek esetén az  $A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  operátort **kompaktnak** nevezzük, ha bármely  $H \subset \mathcal{X}$  korlátos halmaz  $A[H] \subset \mathcal{Y}$  képe prekompakt halmaz. Ha az  $A$  operátor még folytonos is, akkor  $A$ -t **teljesen folytonosnak** nevezzük.

**1.3.1. példa.** A

$$B : l_2 \rightarrow l_2, \quad Bu := (u_{n+1})$$

operátor nem kompakt, ui. az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \in l_2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, és az  $(Ae_n)$  sorozatnak nincsen Cauchy-féle, így konvergens részsorozata, hiszen

$$Ae_n = e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{és így} \quad \|Ae_m - Ae_n\|_2 = 2 \quad (m \neq n).$$

A kompakt, lineáris  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  operátorok halmazának jelölésére a

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : A \text{ kompakt}\}$$

szimbólumot használjuk, az  $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$  esetben  $K(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et pedig  $K(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük. Belátható (vö. [6], 788. old), hogy  $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , továbbá (vö. [6], 790. old.), hogy minden véges rangú operátor kompakt.

Belátható (vö. [6], 790-793. old.), hogy minden véges rangú, folytonos lineáris operátor kompakt, továbbá ha valamely korlátos lineáris operátor tetszőleges pontossággal közelíthető véges rangú operátorokkal az indukált operátornormában, akkor a szóban forgó operátor kompakt.

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok duálisával kapcsolatban.

**1.3.1. tétel. (Schauder).** Legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-tér,  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , ekkor

$$A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \quad \Longleftrightarrow \quad A^* \in K(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*),$$

azaz  $A$  pontosan akkor kompakt, ha az  $A^*$  duális operátor kompakt.

**Biz.** Vö. [6], 799-801. old. ■

## 1.4. Fredholm-operátorok

Ismeretes, hogy ha  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér,  $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , úgy az  $A$  (lineáris) operátor pontosan akkor izomorfizmus, ha injektív és szürjektív, azaz ha

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \quad \text{és} \quad A[\mathcal{X}] = \mathcal{Y}$$

teljesül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy  $\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}] = \{0\}$ . Így az  $A$  lineáris operátor izomorfiája azzal egyenértékű, hogy

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \dim(\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}]).$$

**1.4.1. definíció.** Adott  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-tér esetén azt mondjuk

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

**Fredholm-operátor** (jelben  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ), ha

$$n := \dim \mathcal{N}(A) = \dim A^{-1}[\{0\}] < +\infty \quad \text{és} \quad r := \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{Y}/A[\mathcal{X}] < +\infty,$$

továbbá az  $n - r$  számot az  $A$  **indexének** nevezzük:  $\operatorname{ind}(A) := n - r$ .

**1.4.1. példa.** Ha  $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  véges dimenziós:  $\dim \mathcal{X} =: m \in \mathbb{N}$ ,  $\dim \mathcal{Y} =: n \in \mathbb{N}$ , akkor  $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$   $(m - n)$ -indexű Fredholm-operátor, ui.

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(A) &= \dim \mathcal{N}(A) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = \\ &= (\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{R}(A)) - (\dim \mathcal{Y} - \dim \mathcal{R}(A)) = \\ &= \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{Y} = m - n. \end{aligned}$$

**1.4.2. példa.** A balra való eltolás

$$B : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}, \quad (Bu)_n := u_{n+1}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(B) = e_1 \quad \text{and} \quad \mathcal{R}(B) = l_{\infty}$$

ennél fogva  $\dim \mathcal{N}(B) = 1$ ,  $\operatorname{codim} \mathcal{R}(B) = 0$ , ami azt jelenti, hogy  $\operatorname{ind}(B) = 1$ .

**1.4.3. példa.** A jobbra való eltolás

$$J : l_\infty \rightarrow l_\infty, \quad (Ju)_n := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ u_{n-1} & (n > 0) \end{cases}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(J) = \{0\} \quad \text{és} \quad \text{codim } \mathcal{R}(J) = \dim \mathcal{N}(B) = 1$$

és így

$$\text{ind}(J) = -1$$

$\mathcal{R}(J)$  zárt, hiszen tartalmaz minden olyan  $v = (v_1, v_2, v_2, \dots) \in l_\infty$  sorozatot, amelyre  $v_1 = 0$ .

**1.4.4. példa.** Ha  $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}^1[a, b]$  és  $\mathcal{Y} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ , ill.

$$\|u\|_{\mathcal{X}} := \max \{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\} \quad (u \in \mathcal{X}) \quad \text{és} \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty,$$

akkor az

$$Au := u' \quad (x \in \mathcal{X}).$$

operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad \text{ind}(A) = 1,$$

hiszen

- bármely  $v \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$  esetén az  $u' = v$  egyenletnek van  $\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}^1[a, b]$ -ban megoldása:

$$u(x) = \int_a^x v(t) dt \quad (t \in [a, b])$$

így  $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$ , ahonnan  $\text{codim } \mathcal{R}(A) = 0$  következik;

- továbbá  $v = 0$  esetén  $u = \text{const}$ , és így

$$\dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

Belátható (vö. [20], 366-367. old.), hogy a Fredholm-operátorok rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.

1. Ha  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ ,  $\text{ind}(A) = 0$ , továbbá  $\mathcal{N}(A) = \{0\}$ , akkor  $A$  **invertálható**, azaz

$$A \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \exists T^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})\}.$$

2. Bármely  $A \in \mathcal{K}(X)$  operátorra  $I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  és  $\text{ind}(A - I) = 0$ .

3. Ha  $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}$  zárt altér /  $A$  folytonossága következtében  $\mathcal{N}(A)$  is zárt/, akkor alkalmas  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$  zárt alterekkel

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0 \quad \text{és} \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$

továbbá

$$\dim(\mathcal{Y}_0) = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \quad \text{és} \quad \text{codim}(\mathcal{X}_0) = \dim(\mathcal{N}(A)) < +\infty.$$

4. Ha  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ , akkor az  $A^*$  duális operátorra is  $A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$ , továbbá

$$\dim \mathcal{N}(A^*) = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \quad \text{és} \quad \text{codim} \mathcal{R}(A^*) = \dim \mathcal{N}(A) < +\infty.$$

5. Az  $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  pontosan akkor bijektív, ha  $\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$ . Így a Banach-féle homeorfia-tétel következményeként tetszőleges  $b \in \mathcal{Y}$  esetén az  $Ax = b$  egyenletnek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha  $\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$  teljesül.

A fenti  $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$ , ill.  $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$  zárt alterek menti

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(A), \quad \text{ill.} \quad Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(A)$$

folytonos projekciók és a kiegészítő alterek az alábbi módon konstruálhatók meg (vö. [20], 369. old.). Válasszunk egy-egy bázist  $\mathcal{N}(A)$ -ban és  $\mathcal{N}(A^*)$ -ban:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{N}(A), \quad \{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathcal{N}(A^*),$$

majd legyenek

$$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{X}^* \quad \text{és} \quad y_1, \dots, y_m \in \mathcal{Y}$$

olyan funkcionálok, amelyekre

$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}) \quad \text{és} \quad \langle g_i, y_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \dots, m\})$$

teljesül. Ez a korábban említettek szerint megtehető. Így az

$$\{f_j, x_j\}, \quad \text{ill.} \quad \{g_j, y_j\}$$

biortogonális rendszerekkel a

$$Px := \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle x_k \quad (x \in \mathcal{X}) \quad \text{és a} \quad Qy := y - \sum_{l=1}^m \langle g_l, y \rangle y_l \quad (y \in \mathcal{Y})$$

operátorok olyan projekciók, amelyek folytonosak (vö. zárt gráfra vonatkozó tétel), továbbá

1.  $I - P$  az  $\mathcal{X}$ -ről az  $\mathcal{X}_0 = (I - P)[\mathcal{X}]$  altérre
2.  $I - Q$  pedig  $\mathcal{Y}$ -ről az  $\mathcal{Y}_0 = (I - Q)[\mathcal{Y}]$  altérre

való projekció.

## 1.5. Az implicit függvényre vonatkozó tétel

A továbbiakban legyen  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  normált tér,  $\Omega \subset \mathcal{X}$ , és  $\Lambda \subset \mathbb{R}$  egy-egy nyílt halmaz.

**1.5.1. tétel.** Ha  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$  és  $z_0 \in \mathcal{Y}$ , továbbá az  $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$  leképezés teljesíti az

$$(i) \quad F(x_0, \lambda_0) = z_0 \quad \text{és} \quad (ii) \quad \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

feltételeket, akkor alkalmas  $\exists \delta > 0$  esetén van olyan

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \rightarrow K_\varepsilon(x_0) \quad / \phi \in \mathfrak{C}^k /$$

leképezés (**implicit függvény**), amelyre

- $\phi(\lambda_0) = x_0$ ,
- a  $K_\varepsilon(x_0) \times K_\delta(\lambda_0)$  környezetben  $F(x, \lambda) = z_0 \iff x = \phi(\lambda)$ ,
- $\phi'(\lambda_0) = -(\partial_1 F(x_0, \lambda_0))^{-1} \circ \partial_2 F(x_0, \lambda_0)$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel „konstruktív”, ui. a

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \rightarrow K_\varepsilon(x_0)$$

függvény a következő numerikus (módosított Newton-) módszer eredményeként adódik (vö. [5], 523. old., [20], 151. old.):

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &:= x_0, & \phi_{n+1}(\lambda) &:= \phi_n(\lambda) - [\partial_1 F(\phi_n, \lambda_0)]^{-1} \circ \{F(\phi_n(\lambda), \lambda) - z_0\} \\ & & (n \in \mathbb{N}; \lambda \in K_\delta(\lambda_0)). \end{aligned}$$

**1.5.1. példa.** Ha  $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$F_1(x, \lambda) := x^2 - \lambda, \quad F_2(x, \lambda) := x^2 - \lambda^2, \quad F_3(x, \lambda) := x^3 - \lambda.$$

akkor

$$F_n(0,0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 F_n(0,0) = 0,$$

következésképpen nem teljesül az 1.5.1. tételben a (ii) feltétel (vö. (1.5.1) ábra). Nem csoda, hogy az

$$F_n(x, \lambda) = 0$$

egyenletből nem fejezhető ki  $x$  a  $\lambda$  (sima) függvényeként.

1.5.1. ábra. Az  $F_n^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^2$  ősképek alakja.



Előfordulhat, hogy

$$\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

de a  $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  operátor szürjektív. Ebben az esetben az implicit függvényre vonatkozó tétel alábbi variánsa igazolható.

**1.5.1. tétel.** Legyen  $k \in \mathbb{N}$   $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ ,  $z_0 \in \mathcal{Y}$ . Ha az  $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$  függvényre

(i)  $F(x_0, \lambda_0) = z_0$  és

(ii)  $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  szürjektív úgy, hogy alkalmas  $P \in L(\mathcal{X})$  projekcióval

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) \quad \text{és} \quad \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)),$$

akkor alkalmas  $\rho > 0$  szám, ill.

$$U := K(x_0) \subset \mathcal{R}(P) \quad \text{és} \quad V := K(z_0) \subset \mathcal{N}(P)$$

környezetek esetén pontosan egy olyan

$$\phi : U \times K_\rho(\lambda_0) \rightarrow V, \quad \phi \in \mathfrak{C}^k$$

függvény van, amelyre

$$F(x_0 + \xi + \phi(\xi, \lambda), \lambda) = z_0 \quad ((\xi, \lambda) \in U \times K_\rho(\lambda_0))$$

teljesül.

**Biz.** Legyen  $\mathcal{X} =: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ , ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R}(P) \quad \text{és} \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(P).$$

Ekkor az

$$L := \partial_1 F(x_0, \lambda_0)|_{\mathcal{X}_2} : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}$$

operátor bijektív, ui. ha valamely  $\eta \in \mathcal{X}_2$  vektorra  $L\eta = 0$ , akkor  $\eta \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)) = \mathcal{X}_1$ , ennél fogva  $\eta = 0$ . Legyen most

$$G(\eta, \xi, \lambda) := F(x_0 + \xi + \eta, \lambda) \quad (\xi \in \mathcal{X}_1, \eta \in \mathcal{X}_2 : x_0 + \xi + \eta \in \Omega, \lambda \in \Lambda).$$

Ekkor

$$G(0, 0, \lambda_0) = z_0 \quad \text{és} \quad \partial_1 G(0, 0, \lambda) = \partial_1 F(x_0, \lambda)|_{\mathcal{X}_2} = L \in GL(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}),$$

következésképpen  $G$ -re teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei: a

$$G(\eta, \xi, \lambda) = z_0$$

egyenletből az első változó kifejezhető a második, ill. a harmadik változó függvényeként:

$\eta = \phi(\xi, \lambda)$ . ■

## 2. fejezet

### Bifurkációk

Ebben a bevezetjük a bifurkáció fogalmát, majd példákon keresztül szemléltetünk néhány egyszerűbb esetet.

Adott  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-terek esetén legyen  $\emptyset \neq \Omega \subset \mathcal{X}$  és  $\emptyset \neq \Lambda \subset \mathbb{R}$  az  $x_0 \in \mathcal{X}$  és a  $\lambda_0 \in \mathbb{R}$  egy-egy környezete, majd tegyük fel, hogy az

$$F : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathcal{Y}, \quad F \in \mathfrak{C}^2$$

leképezésre

$$F(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{2.0.1}$$

teljesül. Feladatunk az  $(x_0, \lambda_0)$  pont egy környezetében az

$$S := F^{-1}[\{0\}] = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda : F(x, \lambda) = 0\},$$

**megoldáshalmaz** vizsgálata, ill. a  $\lambda$  **paramétertől** függő

$$S_{\lambda} := \{x \in \mathcal{X} : (x, \lambda) \in S\} \tag{2.0.2}$$

halmaz szerkezetének feltárása.

**2.0.1. definíció.** Azt mondjuk, hogy a  $(x_0, \lambda_0)$  pár **bifurkációs pont**, ill.  $\lambda_0$  **kritikus érték**, amelynél **bifurkáció lép fel**, ha  $(x_0, \lambda_0)$  tetszőleges környezetében az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{2.0.3}$$

egyenlet megoldható, pontosabban alkalmas

$$(u_n, \lambda_n), (v_n, \lambda_n) \in \Omega \times \Lambda \quad (u_n \neq v_n) \quad (n \in \mathbb{N}) :$$

sorozatra

$$F(u_n, \lambda_n) = 0 = F(v_n, \lambda_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \lambda_n) = (x_0, \lambda_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, \lambda_n).$$

**2.0.1. példa.** A  $(0,0)$  pár az

$$F_{\pm} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\pm}(x, \lambda) := \pm x^2 + \lambda.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **nyereg-csomó-bifurkáció**). A  $\lambda \in \mathbb{R}$  paramétertől függően a szub-, ill. a szuperkritikus esetben a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}\} & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda = 0), \\ \emptyset & (\lambda > 0); \end{cases} \quad \text{ill.} \quad S_{\lambda} = \begin{cases} \emptyset & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda = 0), \\ \{-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

**2.0.2. példa.** A  $(0,1)$  pár az

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) := \lambda x(1 - x) - x.$$

leképezés bifurkációs pontja (**transzkritikus bifurkáció**). A  $\lambda \in \mathbb{R}$  paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \in \{0; 1\}), \\ \{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\} & (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}). \end{cases}$$

**2.0.3. példa.** A  $(0,0)$  pár az

$$F_{\pm} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\pm}(x, \lambda) := \lambda x \pm x^3.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **vasvilla-bifurkáció**). A  $\lambda \in \mathbb{R}$  paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda}, 0, \sqrt{-\lambda}\} & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda \geq 0), \end{cases} \quad \text{ill.} \quad S_{\lambda} = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \leq 0), \\ \{-\sqrt{\lambda}, 0, \sqrt{\lambda}\} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

**2.0.4. példa.** Ha

$$A \in L(\mathcal{X}), \quad \mu \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{N}(A - \mu I) \neq \{0\},$$

akkor a  $(0, \mu)$  pár az

$$F(x, \lambda) := Ax - \lambda x \quad ((x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda),$$

leképezés bifurkációs pontja, hiszen bármely  $\varepsilon > 0$  esetén van olyan  $u \in \mathcal{X}$ ,  $\|u\| = \varepsilon$  vektor, amelyre  $Au = \mu u$  (**lineáris sajátérték-feladat**).

**2.0.5. példa.** Ha valamely az  $(x, y)$ -síkon lévő  $L$  hosszúságú **rugalmas szál** egyik végét rögzítjük az origóban, a másik vége szabadon mozoghat, és az  $x$ -tengely mentén hat rá erő, akkor a rugalmas szál mozgását leíró peremérték-feladat a következő

$$\vartheta''(s) + \lambda \sin(\vartheta(s)) = 0 \quad (s \in [0, L]), \quad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0,$$

ahol  $\vartheta(s)$  jelöli a szál és az  $x$ -tengely közötti szöget az  $(x(s), y(s))$ ,  $s \in [0, L]$  pontban. A  $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$  egyszerűsítő feltevéssel lineáris peremérték-feladatot kapunk:

$$\vartheta''(s) + \lambda \vartheta(s) = 0 \quad (s \in [0, L]), \quad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0.$$

Látható, hogy az iménti peremérték-feladat

$$\vartheta(s) := 0 \quad (s \in [0, L])$$

triviális megoldásából a  $\lambda$  paraméter változásával végtelen sok megoldás „bifurkálódik”:

$$\vartheta_n(s) := \gamma \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \quad \left( n \in \mathbb{N}_0, 0 \neq \gamma \in \mathbb{R}, \lambda_n := \left( \frac{n\pi}{L} \right)^2 \right).$$

A rugalmas szálra vonatkozó feladat absztrakt megfogalmazása a következő. Határozzuk meg az

$$F(\vartheta, \lambda) = 0$$

egyenlet bifurkációs pontjait, ahol

$$F : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad F(\vartheta, \lambda) := \vartheta'' + \lambda \sin(\vartheta),$$

ill.

$$\mathcal{X} := \{ \vartheta \in \mathcal{C}^2[0, L] : \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0 \}, \quad \|\vartheta\|_{\mathcal{X}} := \max \{ \|\vartheta\|_{\infty}, \|\vartheta'\|_{\infty}, \|\vartheta''\|_{\infty} \}$$

és

$$\mathcal{Y} := \mathcal{C}[0, L], \quad \|\vartheta\|_{\mathcal{Y}} := \|\vartheta\|_{\infty}.$$

Az alábbiakban a bifurkáció fellépésének szükséges feltételét fogalmazzuk meg.

**2.0.1. tétel.** Ha az  $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$  pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek, akkor  $F$  első változó szerinti Fréchet-driváltja nem invertálható:  $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ .

**Biz.** H  $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$  nem invertálható operátor (nincs folytonos inverze), akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében bármely  $\lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda$  esetén az  $x$  kifejezhető  $\lambda$  függvényeként, azaz  $(x_0, \lambda_0)$  nem lehet bifurkációs pont. ■

**2.0.6. példa. (Lineáris sajátérték-feladat).** Ha  $A \in L(\mathcal{X})$  és  $F(x, \lambda) := Ax - \lambda x$ , akkor – mint ahogy azt fentebb láttuk – az  $A$  operátor tetszőleges sajátértéke esetén a  $(0, \mu)$  pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek. Nem csoda tehát, hogy

$$\partial_1 F(0, \mu) = A - \mu I \notin GL(\mathcal{X}).$$

**2.0.7. példa. (Nemlineáris sajátérték-feladat).** Legyen  $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$ ,  $\Lambda = \mathbb{R}$ ,  $0 \in \Omega$  és tegyük fel, hogy az  $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{X})$  függvényre  $f(0) = 0$ . Ekkor az

$$f(x) = \mu x$$

nemlineáris sajátérték-feladat az

$$F(x, \lambda) := f(x) - \lambda x$$

leképezés segítségével írható le. Világos, hogy a  $(0, \mu)$  pár megoldása az  $f(x) - \lambda x = 0$  egyenletnek. Ha  $(0, \mu)$  bifurkációs pont, akkor a fentiekből  $\mu \in \sigma(f'(0))$  következik, hiszen

$$\partial_1 F(0, \mu) = f'(0) - \mu I.$$

Megjegyezzük, hogy a  $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$  operátor nem invertálható volta még nem elégséges a bifurkáció fellépéséhez, mint ahogy azt az alábbi példa is mutatja.

**2.0.8. példa.** Ha  $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$ ,  $\Lambda = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{Y} := \mathbb{R}^2$ , továbbá

$$F(x, y, \lambda) := (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3)),$$

akkor

$$\partial_{(x,y)} F(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

A  $(0,0,1)$  pár nem bifurkációs pontja  $F$ -nek, ui. az

$$(0,0) = F(x, y, \lambda) = (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3))$$

egyenlőség első komponensét  $y$ -nal, a másodikat  $(-x)$ -szel szorozva azt kapjuk, hogy

$$(0,0) = (xy - \lambda(yx - y^4), -xy + \lambda(yx + x^4)).$$

Az iménti két egyenlőség összeadásával  $0 = \lambda(x^4 + y^4)$  adódik, ami azt jelenti, hogy bármely  $\lambda \in \mathbb{R}$  esetén  $F(x, y, \lambda) = (0,0)$ , azaz  $(x, y) = (0,0)$ .

## 3. fejezet

# A Ljapunov-Schmidt-redukció

Ebben a fejezetben egy olyan módszert mutatunk be, amelynek segítségével egy végtelen dimenziós feladatot véges dimenziósra tudunk redukálni. A „lényeges” koordinátákra való vetítéssel vezetjük vissza a (2.0.3) végtelen dimenziós egyenletrendszert véges dimenziós egyenletrendszerre, az ún. **bifurkációs egyenletre**.

Adott  $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$  és  $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$  Banach-terek esetén legyen

$$A := \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

ill. tegyük fel, hogy a (2.0.3) egyenletnek van triviális megoldása, azaz (2.0.1) teljesül. Világos, hogy ha  $A$  invertálható operátor, akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel alkalmazásával a (2.0.3) egyenletet meg tudjuk oldani: az (2.0.3) egyenletnek az  $(x_0, \lambda_0)$  pont egy környezetében van nemtriviális megoldása. Igen gyakori azonban az az eset, amikor az  $A$  operátor nem invertálható. Ekkor, mint ahogy a következőkben látni fogjuk, néhány változótól eltekintve a megoldás nem reménytelen.

Mivel  $A$  Fredholm-operátor, ezért  $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  felbontható direkt kiegészítő alterekre:

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$

ahol a  $P \in L(\mathcal{X})$ ,  $Q \in L(\mathcal{Y})$  ún. **Ljapunov-Schmidt-projekciókra**

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(A) \quad \text{és} \quad Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(A),$$

ill. alkalmas

$$x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}; \quad y_1, \dots, y_m \in \mathcal{Y}$$

lineárisan független vektorok esetén

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{és} \quad (I - Q)[\mathcal{Y}] = \text{span}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

**3.0.1. tétel.** Tetszőleges  $x \in \Omega$  vektornak a fenti projekciókkal való

$$x = x_0 + v + w$$

felbontása esetén, ahol  $v \in \mathcal{N}(A)$  és  $w \in \mathcal{X}_0$  a (2.0.3) egyenlet egyenértékű a

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0 \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0. \quad (3.0.1)$$

egyenletekből álló rendszerrel.

**Biz.**

**1. lépés.** Világos, hogy a (2.0.3), azaz az  $F(x, \lambda) = 0$  egyenlet következménye

$$Q \circ F(x, \lambda) = 0 \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x, \lambda) = 0.$$

**2. lépés.** Ha pedig (3.0.1) teljesül, akkor nyilvánvalóan

$$(I - Q) \circ F(x, \lambda) = Q \circ F(x, \lambda)$$

is igaz, így

$$Q \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{R}(A), \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{Y}_0,$$

ahonnan  $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{Y}_0 = \{0\}$  figyelembe vételével  $F(x, \lambda) = 0$  következik. ■

Így a (2.0.3) egyenlet helyett külön-külön kell megoldanunk a végtelen dimenziós

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0,$$

ill. a véges dimenziós

$$(I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0$$

egyenletet. A fenti dimenzió végtelen, illetve véges voltát az indokolja, hogy a  $v \in \mathcal{N}(A)$  vektor „végesen generált”, a  $w \in \mathcal{X}_0$  vektor pedig nem. Jelölje  $U \subset \mathbb{R}^n$  halmaz a 0 egy környezetét, ekkor a 1.5.1. tételt a

$$G : \mathcal{N}(A) \times U \times \Lambda \rightarrow \mathcal{R}(Q), \quad G(w, s, \lambda) := Q \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + w, \lambda \right),$$

függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q)).$$

Ennélfogva

$$w = \phi(s, \lambda),$$

ahol a

$$\phi : S \times \Lambda_0 \rightarrow \mathcal{X}_0 \quad \text{függvényre} \quad \phi(0, \lambda_0) = 0$$

és

$$Q \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad ((s, \lambda) \in S \times \Lambda_0),$$

ahol  $S \subset \mathbb{R}^n$ , ill.  $\Lambda_0 \subset \Lambda$  egy-egy, a 0-t, ill.  $\lambda_0$ -at tartalmazó konvex, nyílt halmaz.

**3.0.2. tétel.** A fenti  $\phi$  függvényre  $\partial_1 \phi(0, \lambda_0) = 0$  teljesül.

**Biz.** Ha deriváljuk az

$$Q \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az  $s_k$  változók szerint, akkor  $s = 0$ -t, ill.  $\lambda = \lambda_0$ -t helyettesítve az  $x_k \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0))$  vektorral azt kapjuk, hogy

$$0 = Q \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0)[x_k + \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0)] = Q \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0).$$

Így  $A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q))$  következtében

$$\partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0) = 0 \quad (k \in \{1, \dots, n\}),$$

ennél fogva  $\partial_1 \phi(0, \lambda_0) = 0$ . ■

Így tehát a (2.0.3) egyenlet helyett egy  $m$  egyenletből álló

$$f(s, \lambda) = 0, \tag{3.0.2}$$

rendszert, ún. **bifurkációs egyenletet** kell megoldanunk, ahol az  $n$ -, pontosabban  $(n + 1)$ -változós  $f$  függvényre

$$f = (f_1, \dots, f_m), \quad f_l : S \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_l \in \mathfrak{C}^k \quad (l \in \{1, \dots, m\})$$

és

$$\sum_{l=1}^m f_l(s, \lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right)$$

teljesül. Világos, hogy ez a függvény deriválható, továbbá igaz a

**3.0.3. tétel.** A bifurkációs egyenletet definiáló  $f$  függvényre  $\partial_1 f(0, \lambda_0) = 0$  teljesül.

**Biz.** Ha deriváljuk a

$$\sum_{l=1}^m f_l(s, \lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az  $s_k$  változók szerint, akkot  $s = 0$ -t, ill.  $\lambda = \lambda_0$ -t helyettesítve tetszőleges  $k \in \{1, \dots, n\}$  esetén azt kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^m \partial_{s_k} f_l(s, \lambda) y_l = (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0)[x_k + \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0)] = \\ &= (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) x_k + (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0) = \\ &= 0 + 0 = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$



## 4. fejezet

# Alkalmazások

Az alábbiakban a Ljapunov-Schmidt módszert fogjuk használni peremérték-feladatok megoldhatóságának vizsgálatára.

### 4.1. Egy elsőrendű peremérték-feladat

Ebben a pontban adott  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , ill.

$$f := (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény esetén az

$$\dot{x}(t) = \lambda f(t, x(t)) \quad (t \in (0, 1)), \quad x(0) = x(1) \quad (4.1.1)$$

peremérték-feladat megoldhatóságának vizsgálatával foglalkozunk: feltételeket adunk meg a peremérték-feladat megoldhatóságára.

**4.1.1. tétel.** Tegyük fel, hogy  $f$  folytonos

$$\partial_j f_i \in \mathfrak{C} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}),$$

továbbá valamely  $v \in \mathbb{R}^n$  vektorra

$$\int_0^1 f(s, v) \, ds = 0, \quad \det \left[ \int_0^1 \partial_j f_i(s, v) \, ds \right] \neq 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\}),$$

teljesül. Ekkor alkalmas  $\delta > 0$  számra és

$$\Phi : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

differenciálható függvényre  $\Phi(\cdot, 0) = v$ , és a  $\Phi(\cdot, \lambda)$  függvény megoldása a (4.1.1) peremérték-feladatnak.

**Biz.** Világos, hogy ha  $\lambda := 0$ , akkor a (4.1.1) peremérték-feladatnak van (triviális) megoldása,

hiszen bármely  $c \in \mathbb{R}^n$  esetén a

$$\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := c$$

függvény megoldás. Legyen most

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1)\} \quad \text{és} \quad \mathcal{Y} := \{y \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^n) : y(0) = 0\},$$

majd értelmezzük az  $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , ill.  $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  lineáris, ill. nemlineáris operátorokat az alábbi módon:

$$(Lu)(t) := u(t) - u(0) \quad (u \in \mathcal{X}, t \in [0,1]), \quad (Nu)(t) := \int_0^t f(s, u(s)) \, ds \quad (u \in \mathcal{X}, t \in [0,1]).$$

Látható, hogy valamely  $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható függvény pontosan akkor lesz a (4.1.1) peremértékfeladat megoldása, ha megoldása az

$$F(x, \lambda) := Lx - N(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

egyenletnek. Mivel az  $L$  operátor lineáris, és folytonos, ezért deriválható (vö. [1], 1. fejezet), továbbá Fréchet-deriváltjára

$$dL(x)h = Lh \quad (h \in \mathcal{X}).$$

Az  $N$  nemlineáris operátor is Fréchet-differenciálható, és deriváltjára

$$(dN(x)h)(t) = \int_0^t \partial_2 f(s, x(s))h(s) \, ds \quad (h \in \mathcal{X}, t \in [0,1]).$$

Így a

$$\partial_1 F(c, 0)h = Lh$$

operátor nem injektív és

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L) = \text{span} \{ \alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \text{ állandófüggvény} \},$$

sőt

$$\mathcal{Y}_1 := \mathcal{R}(L) := \{y \in \mathcal{Y} : y(0) = y(1) = 0\}.$$

A

$$(Px)(t) := x(0), \quad (x \in \mathcal{X}, t \in [0,1]), \quad (Qy)(t) := y(t) - ty(1) \quad (y \in \mathcal{Y}, t \in [0,1])$$

folytonos projekciókkal az  $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  tér alterek direkt összegére bomlik:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2,$$

ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{N}(P) = \{x \in \mathcal{X} : x(0) = 0\}, \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(L),$$

ill.

$$\mathcal{Y} := \mathcal{R}(Q) := \mathcal{R}(L), \quad \mathcal{Y}_2 := \mathcal{N}(Q) = \{y \in \mathcal{Y} : y(t) = \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ennélfogva  $L$  Fredholm-operátor, hiszen

$$\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathcal{X}_2 = n \quad \text{és} \quad \text{codim } \mathcal{R}(L) = \dim \mathcal{Y}_2 = n,$$

így

$$\text{ind}(L) = \dim \mathcal{N}(L) - \text{codim } \mathcal{R}(L) = n - n = 0.$$

Alkalmazható tehát Ljapunov-Schmidt-módszer. A (4.1.2) egyenlet tehát pontosan akkor megoldható, ha az

$$x = x_1 + b \quad (x_1 \in \mathcal{X}_1, b \in \mathcal{X}_2)$$

vektorokkal az

$$F_1(x_1, b, \lambda) := QL(x_1 + b) - \lambda QN(x_1 + b) = QLx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0,$$

$$F_2(x_1, b, \lambda) := (I - Q)L(x_1 + b) - \lambda(I - Q)N(x_1 + b) = 0$$

egyenletekből álló rendszer megoldható. Mivel  $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{Y}_1$  és így  $QLx_1 = Lx_1$ , ezért

$$(I - Q)L(x_1 + b) = (I - Q)Lx_1 = Lx_1 - QLx_1 = 0.$$

Ennélfogva a (4.1.2) egyenlet az alábbi egyenletekből álló rendszerrel egyenértékű:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, b, \lambda) &:= Lx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0, \\ F_2(x_1, b, \lambda) &:= (I - Q)N(x_1 + b) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Látható, hogy bármely  $h \in \mathcal{X}_1$  esetén

$$F_1(0, b, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 F_1(0, b, 0) = Lh.$$

Ennélfogva az  $\partial_1 F_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$  lineáris, folytonos és bijektív leképezés. Így (vö. nyílt leképezések tétele)  $(\partial_1 F_1)^{-1}$  folytonos. Az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében tehát a  $(b, 0) \in \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R}$  pont egy környezetében a  $F_1$  első változója kifejezhető a második, és a harmadik változó függvényeként: alkalmas  $\phi \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$  függvényre

$$x_1 = \phi(b, \lambda)$$

teljesül. Ezen kívül még az is igaz, hogy

$$\phi(b, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 \phi(b, 0) = 0.$$

Ez azt jelenti, a megoldhatóság vizsgálata a

$$H(b, \lambda) := (I - Q)N(\phi(b, \lambda) + b) = 0$$

egyenlet az első változójának a többi változó függvényében való kifejezhetőségét jelenti. Mivel

$$\dim \mathcal{X}_2 = \dim \mathcal{Y}_2 = n < +\infty \quad \text{és} \quad H : \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

ezért az implicit függvényre vonatkozó tétel ismét alkalmazható. Ez persze olyan  $v \in \mathcal{X}_2$  meglétét tételezi fel, amelyre

$$(I - Q)N(v) = t \int_0^1 f(s, v) \, ds = 0, \quad \text{azaz} \quad \int_0^1 f(s, v) \, ds = 0$$

és amelyre a

$$(I - Q)dN(v)d = t \left( \int_0^1 \partial_2 f(s, v) \, ds \right) d = ta$$

tetszőleges  $a \in \mathbb{R}^n$  esetén megoldható  $d$ -re. Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\int_0^1 \partial_2 f(s, v) \, ds$$

mátrix invertálható. ■

## 4.2. Egy $n$ -edrendű peremérték-feladat

Legyen

$$n, N \in \mathbb{N}, \quad B := [b_{ij}] \in \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad g, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Az alábbiakban az

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = g(y(t)) \quad (t \in [0, 1]), \quad (4.2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \dots + \sum_{j=1}^n b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.2.2)$$

$n$ -edrendű, nemlineáris peremérték-feladat megoldhatóságát vizsgáljuk, ahol

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

(vö. [14]). Feltesszük, hogy  $g$  Lipschitz-folytonos, valamint

$$a_0(t) \neq 0 \quad (0 \leq t \leq 1),$$

továbbá

$$g(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad g(-\infty) := \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) \in \mathbb{R}.$$

A vizsgálat során fontos szerepet fog játszani a

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (4.2.3)$$

homogén egyenlet a (4.2.2) peremfeltételekkel. Első lépésként fogalmazzuk át a feladatot: a magasabbrendű egyenlet írjuk át elsőrendű egyenletrendszerre. Az

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

továbbá az

$$f(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(y) \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad B_k = \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \dots & b_{1n}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \dots & b_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \dots & b_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

jelölések bevezetésével a (4.2), ill. a (4.2) egyenlet a (4.2.2) peremértékfeltétellel következő:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) \quad (t \in [0,1]), \quad (4.2.4)$$

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (t \in [0,1]), \quad (4.2.5)$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0. \quad (4.2.6)$$

Legyen  $\Phi$  a homogén egyenlet alapmátrixa, azaz

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (t \in [0,1]), \quad \Phi(0) = I,$$

ahol  $I$  jelöli az  $N \times N$  méretű egységmatrixot. Ezt felhasználva még legyen

$$D := B_0 + B_1\Phi(t_1) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1).$$

Emellett még szükséges az inhomogén, lineáris egyenlet vizsgálata:

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (4.2.7)$$

Az állandók variálásának módszerét használva látható, hogy valamely  $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  differenciálható függvény pontosan akkor lesz (4.2.7)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldása, ha

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \quad (t \in [0,1]),$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1) \left( x(0) + \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) + \dots + \\
&\quad + B_N\Phi(t_{N-1}) \left( x(0) + \int_0^{t_{N-1}} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) + \\
&\quad + B_N\Phi(1) \left( x(0) + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_N\Phi(1)x(0) + \\
&\quad + B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Mivel

$$Dx(0) = B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0),$$

ezért az előbbi átrendezve

$$Dx(0) = - \left( B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right)$$

adódik. Tehát a

$$B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds$$

vektor benne van a  $D$  mátrix képterében. Mivel  $\mathcal{R}(D) \perp \mathcal{N}(D^T)$ , ezért ha  $p \in \mathcal{N}(D^T)$ , akkor

$$0 = p^T \left( B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right).$$

Ezután megvizsgáljuk a (4.2.5)-(4.2.6) feladatot. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned}
x(t) &= \Phi(t)x(0) \quad (t \in [0,1]), \\
B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) &= 0
\end{aligned}$$

teljesül. A második egyenlet a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}
0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0) = \\
&= Dx(0).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy  $x$  pontosan akkor megoldása a homogén peremfeladatnak, ha  $x(0) \in \mathcal{N}(D)$ . Ebből az is kiderült, hogy a megoldástér ugyanannyi dimenziós, mint  $\mathcal{N}(D)$ . A továbbiakban feltesszük, hogy  $\dim \mathcal{N}(D) = 1$ ,  $\hat{p} \in \mathcal{N}(D)$ ,  $\|\hat{p}\| = 1$ , majd legyen

$$u(t) := \Phi(t)\hat{p} \quad (t \in [0,1]).$$

Hogy alkalmazhassuk a Ljapunov-Schmidt-módszert, értelmezzük az alábbi operátorokat. Legyen

$$N : L^2[0,1] \rightarrow L^2[0,1], \quad Nx := f \circ x,$$

továbbá

$$L : \mathcal{D}(L) \rightarrow L^2[0,1], \quad Lx := x' - Ax$$

ahol

$$\mathcal{D}(L) := \left\{ \phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n : \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi' \in L^2[0,1], \sum_{k=1}^N B_k \phi(t_k) = 0 \right\}.$$

Látható, hogy az  $N$  operátor az  $f$  függvény korlátossága következtében folytonos, továbbá az  $L$  operátor  $\mathcal{D}$  értelmezési tartományában azok a függvények vannak, amelyek kielégítik a (4.2.6) peremfeltételt. Valamely  $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvényre pontosan akkor teljesül (4.2.4), ha

$$Lx = Nx. \quad (4.2.8)$$

Amennyiben  $L$  invertálható, akkor  $x$ -re az  $x = L^{-1}Nx$  fixpont-egyenletet kapjuk. Tegyük fel, hogy  $L$  nem invertálható:  $\mathcal{N}(L) \neq \{0\}$ . Erre fogjuk a Ljapunov-Schmidt-módszert alkalmazni. Alkalmasan választott

$$Q : L^2[0,1] \rightarrow \mathcal{R}(L), \quad \text{és} \quad P : L^2[0,1] \rightarrow \mathcal{N}(L)$$

projekciók bevezetésével az  $A$   $Q$  segítségével felírjuk a (4.2.8) operátoregyenlettel egyenértékű

$$QLx = Lx = QNx, \quad (4.2.9)$$

$$(I - Q)Lx = 0 = (I - Q)Nx \quad (4.2.10)$$

egyenletekből álló rendszert.

**Innentől nem értem. Néhol javítottam egy-két jelölést, meg némi félreértést, ami az operátork**

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L), \quad \mathcal{X}_1 := \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{X}_2^\perp,$$

amivel

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2.$$

Mivel

$$\mathcal{N}(L|_{\mathcal{X}_1}) = \{0\},$$

így  $L|_{\mathcal{X}_1}$  invertálható, legyen

$$M := (L|_{\mathcal{X}_1})^{-1}.$$

Értelemszerűen

$$\begin{aligned} LMh &= h & (h \in \mathcal{R}(L)), \\ MLx &= (I - P)x & (x \in \mathcal{D}(L)). \end{aligned}$$

Bontsuk fel  $x \in \mathcal{D}(L)$ -et az  $\mathcal{X}_1$  és  $\mathcal{X}_2$  alterek mentén:

$$x = \tilde{x} + \bar{x}, \quad (\tilde{x} \in \mathcal{X}_1, \bar{x} \in \mathcal{X}_2).$$

Jól látható, hogy

$$Px = \bar{x}, \quad (I - P)x = \tilde{x},$$

valamint

$$ML\tilde{x} = \tilde{x}. \quad (4.2.11)$$

Ezt a (4.2.9) egyenletbe behelyettesítve és  $M$ -et alkalmazva mindkét oldalra jutunk az

$$\begin{aligned} \tilde{x} &= MQN(\tilde{x} + \bar{x}), \\ 0 &= (I - Q)N(\tilde{x} + \bar{x}) \end{aligned}$$

egyenletrendszerhez, amiből az első egyenlet a fixpont feladat, de a cikket követve viszont már más megközelítéssel fogjuk megoldani az egyenletrendszert.

Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben. A korábbi levezetésünkéből és  $L$  definíciójából következik, hogy  $x \in \mathcal{X}_2$  pontosan akkor, ha  $x(t) = \Phi(t)\hat{p}$  (ami egybevág  $u$ -nak a definíciójával, tehát  $u \in \mathcal{X}_2$ ).

Konstruáljunk meg egy  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvényt úgy, hogy az ő merőleges kiegészítője  $\mathcal{X}_2$  legyen. Legyen  $p \in \mathcal{N}(D^T) \setminus \{0\}$ , és legyen

$$\psi(t) = \begin{cases} [(B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-1}, 1] \\ [(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-2}, t_{N-1}] \\ \vdots \\ [(B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_1, t_2] \\ [(B_1\Phi(t_1) + B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in [0, t_1]. \end{cases}$$



Ellenőrizzük, hogy  $\psi(t) = 0$  ( $t \in [0, 1]$ ) lehetséges-e. Először nézzük meg, hogy  $(t_{N-1}, 1]$  intervallumon ez mit jelentene:

$$0 = \psi(t) = [B_N \Phi(1) \Phi^{-1}(t)]^T p = \Phi^{-T}(t) \Phi^T(1) B_N^T p,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha  $p \in \mathcal{N}(B_N^T)$ . Ezt feltéve és továbbhaladva,  $(t_{N-2}, t_{N-1}]$  intervallumon nézzük:

$$\begin{aligned} 0 = \psi(t) &= [(B_{N-1} \Phi(t_{N-1}) + B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p = \\ &= \Phi^{-T}(t) (B_{N-1}^T \Phi^T(t_{N-1}) + \Phi^T(1) B_N^T) p = \Phi^{-T}(t) \Phi^T(t_{N-1}) B_{N-1}^T p, \end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha  $p \in \mathcal{N}(B_{N-1}^T)$ . Ezt ismét feltételezve és  $i = N-3, \dots, 1$  tovább folytatva azt kapjuk, hogy ha  $\psi(t) = 0$  ( $t \in [0, 1]$ ), abból az következik, hogy  $p \in \mathcal{N}(B_i^T)$ . A továbbiakban feltesszük, hogy  $\cap_{i=1}^N \mathcal{N}(B_i^T) = \{0\}$ , így  $\psi$  nem az azonosan 0 függvény, valamint hogy  $p \in \mathcal{N}(D^T)$ -at úgy választjuk, hogy  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ .

Belátható, hogy  $\mathcal{R}(L) = \psi^\perp$ . Ennek segítségével írjuk fel az  $Q$  projekciót:

$$(Qx)(t) = x(t) - \psi(t) \int_0^1 \psi^T(s) x(s) ds = x(t) - \psi(t) \langle x, \psi \rangle_{L^2}.$$

Értelemszerűen  $QLx = Lx$  ( $x \in \mathcal{D}(L)$ ).

Írjuk fel a  $P$  projekciót is integrál segítségével:

$$(Px)(t) = u(t) \int_0^1 u^T(s) x(s) ds = u(t) \langle x, u \rangle_{L^2},$$

ahol  $u$  volt az a vektor, ami kifeszíti  $\mathcal{X}_2$ -öt. Így bármely  $x \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ -re  $Px = \bar{x} = \alpha u$ , ahol  $\alpha$  megfelelő ( $x$ -től függő) valós szám.

Írjuk fel  $x$ -et az  $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$  felbontásával és helyettesítsük be a (4.2.11) azonosságot, a (4.2.9) levetített feladatot, illetve a  $\mathcal{X}_2$ -öt kifeszítő  $u$ -t:

$$x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x} + ML\tilde{x} = \bar{x} + MLx = \bar{x} + MQNx = \alpha u + MQNx.$$

A (4.2.9) egyenlet azt is jelenti, hogy  $N(x) \in \mathcal{R}(L)$ , és mivel  $\psi$  ortogonális  $\mathcal{R}(L)$ -re, ezért pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \langle Nx, \psi \rangle = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $u(t)$  első komponensét jelöljük  $s(t)$ -vel,
- $MQN(x)$  első komponensét jelöljük  $w(x)$ -szel,
- $\psi(t)$   $n$ . komponensét jelöljük  $v(t)$ -vel.

Mivel  $f$  az a függvény, aminek az első  $n - 1$  komponense azonosan 0, az  $n$ . komponense pedig  $f_n(x) = g(x_1)$ , emellett  $x_1$  felírható  $x_1(t) = \alpha s(t) + w(x(t))$  alakban, így az integrál átalakítható:

$$0 = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt = \int_0^1 v(t)g(x_1(t)) dt = \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt.$$

Mivel  $\{t : s(t) = 0\}$  0-mértékű, ezért az integrál felbontható:

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt = \int_{\{s(t)>0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt + \int_{\{s(t)<0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt$$

$M$ ,  $E$  és  $g$  korlátossága miatt  $w$  is korlátos, írjuk fel  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  esetén az egyenletet:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &= g(\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(-\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &= g(-\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_2. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy  $J_2 < 0 < J_1$  ( $J_1 < 0 < J_2$  esetén analóg módon folytatható, de  $J_1 J_2 < 0$  szükséges). Így létezik  $\alpha_0$ , amivel

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &> 0 && \text{ha } \alpha \geq \alpha_0, \\ \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &< 0 && \text{ha } \alpha \leq -\alpha_0. \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

Definiáljuk az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned} H_1 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \\ H_1(x, \alpha) &:= \alpha u + MQN(x) \\ H_2 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ H_2(x, \alpha) &:= \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \\ H &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \\ H(x, \alpha) &:= (H_1(x, \alpha), H_2(x, \alpha)). \end{aligned}$$

Ezzel a szétválasztással  $\bar{x} = \alpha u$ , azaz  $x$ -nek az  $\mathcal{X}_2$  irányú komponensét az  $\alpha$  reprezentálja.  $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ -en a norma amit használunk  $\|(x, \alpha)\| := \max\{\|x\|_{L^2}, |\alpha|\}$ . Jól látható, hogy az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldhatósága a  $H$  fixpontjának létezésével hozható összefüggésbe.

Legyen

$$r := \sup\{|g(t)| \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{és} \quad m := \sup\{|v(t)| \in \mathbb{R} : t \in [0, 1]\}.$$

Ekkor

$$\left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq rm.$$

Válasszunk  $\alpha_0$ -át úgy, hogy (4.2.12) egyenletek teljesüljenek és  $\alpha_0 > rm$ , legyen  $\delta := \alpha_0 + rm$ .  $u, g$  és  $ME$  korlátossága miatt ha  $|\alpha| \leq \delta$  és  $x \in L^2[0, 1]$ , akkor

$$\|H_1(x, \alpha)\| = \|\alpha u + MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQ\|\|g(x_1)\| \leq b_1$$

megfelelő  $b_1$  választásával. Legyen

$$\mathcal{B} = \{(x, \alpha) \in L^2[0, 1] \times \mathbb{R} : \|x\| \leq b_1 \text{ és } |\alpha| \leq \delta\},$$

így  $\mathcal{B}$  egy zárt, korlátos, konvex halmaz. A cél megmutatni, hogy  $H$  a  $\mathcal{B}$  halmazt önmagába képezi.  $\|H_1(x, \alpha)\| \leq b_1$ -et az előbb beláttuk, nézzük  $\|H_2(x, \alpha)\| \leq \delta$ -t.

Először legyen  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \delta$ , a feltételünk miatt

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt > 0,$$

így

$$H_2(x, \alpha) = \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \geq \alpha_0 - rm > 0,$$

így  $H_2(x, \alpha) \in [0, \alpha_0 - rm] \subset [-\delta, \delta]$ .

Ha  $0 \leq \alpha < \alpha_0$ , akkor

$$\begin{aligned} |H_2(x, \alpha)| &= \left| \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq \\ &\leq |\alpha| + \left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq \alpha_0 + rm = \delta, \end{aligned}$$

így  $H_2(x, \alpha) \in [-\delta, \delta]$ , tehát ha  $0 \leq \alpha \leq \delta$  és  $x \in L^2[0, 1]$ , akkor  $H(x, \alpha) \in \mathcal{B}$ . Analóg módon belátható, hogy ha  $-\delta \leq \alpha \leq 0$ , akkor ugyanez fenn áll.

Így tehát  $H(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ .  $H$  kompaktsága következik  $MQN$  kompaktságából, és így a Schauder fixpont-tétel értelmében  $H$ -nak van fixpontja  $\mathcal{B}$ -ben, tehát van  $(x_0, \alpha_0) \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ , amivel

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 u + MQN(x_0), \text{ és} \\ \alpha_0 &= \alpha_0 - \int_0^1 v(t)g(\alpha_0 s(t) + w(x_0(t))) dt \end{aligned}$$

teljesül, tehát az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremfeladat megoldható, és  $x_0 + \alpha_0 u$  egy megoldása.

## 5. fejezet

# A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt módszernek egy numerikus módszerkénti felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [16] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x), \quad x \in [a, b] \quad (5.0.1)$$

ahol  $L$  úgynevezett Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol  $p(x) > 0$ ,  $w(x) > 0$  ( $x \in [a, b]$ ),  $p, q, w$  adott analitikus függvények, valamint  $u$ -ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) &= 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen  $L$ -ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [8]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.

Emellett feltesszük a következőket:

- $\mathcal{X}$  valós, szeparábilis Hilbert-tér,  $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  lineáris operátor,  $N : \mathcal{D}(N) \subset \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  nemlineáris operátor,
- $L$  zárt leképezés (amivel ekvivalens [6]:  $x_n \rightarrow x$  és  $Lx_n \rightarrow y$ -ből következik hogy  $x \in \mathcal{D}(L)$  és  $Lx = y$ ), önadjungált,  $\mathcal{D}(L)$  sűrű  $\mathcal{X}$ -ben,  $\mathcal{N}(L) = p > 0$  véges,
- $L$ -nek a sajátértékei  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}$ ,  $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$ , és a hozzájuk tartozó  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  sajátfüggvények  $\mathcal{X}$ -ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a tulajdonságokat a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,

- létezik egy  $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$  altér, ami egy  $\mu$  normával teljes,  $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X}'$ , minden  $x \in \mathcal{D}(L)$  esetén a  $\Phi_i$ -szerinti Fourier-sora  $(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k)$   $\mu$ -ben konvergál  $x$ -hez és  $\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2$ , valamint létezik  $\alpha > 0$ , amivel  $x \in \mathcal{X}'$  esetén  $\|x\|_S \leq \alpha\mu(x)$  (tehát  $\mu$   $\alpha$ -szoros felső becslése az eredeti normának, és  $\mu$ -beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),
- $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N) \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{X}'$  és altér  $\mathcal{X}'$ -ben,  $\mathcal{D}(N)$  zárt  $\mu$  szerint,
- bármely  $R > 0$ -hoz létezik  $\beta_R > 0, b_R > 0$ , amelyekkel azon  $x, y \in \mathcal{D}(N)$ -ekre, amelyekre  $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$  teljesül,  $\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R\mu(x - y)$  és  $\mu(Nx) \leq b_R$ , tehát tetszőleges  $\mu$ -szerinti gömb  $N$ -szerinti képe korlátos ( $\mu$  normával), valamint ezen gömbbeli elemek környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (5.0.1) egyenlet megoldásait  $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N)$ -ben keressük. Legyen  $m \geq p$  és

$$S_m := \text{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}, \quad S_0 := \{0\},$$

azaz  $S_m$  az első  $m$  sajátfüggvény által kifeszített altér,  $S_m \subset \mathcal{D}(L)$ . Definiáljuk a következő operátorokat, amennyiben  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k$  ( $u \in S$ ):

$$P_m u := \sum_{k=1}^m \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k,$$

tehát  $P_m$  az  $S_m$ -re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k.$$

$H_m$   $\mathcal{D}(L)$ -be képez (mivel  $\Phi_k \in \mathcal{D}(L)$  ( $k = 0, \dots, m+1, \dots$ )), lássuk be róla, hogy lineáris ( $x, y \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned} H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x + y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\langle \alpha x, \Phi_k \rangle + \langle y, \Phi_k \rangle) \Phi_k = \\ &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\ &= \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\ &= \alpha H_m x + H_m y. \end{aligned}$$

$H_m$  az  $L$  egy leszűkítésének inverze, pontosabban  $H_m = (L|_{S_m^\perp})^{-1}$ , értelemszerűen  $S_m^\perp = \text{span}\{\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots\}$ , így a linearitás miatt elég  $\Phi_n$ -re nézni ( $n > m$ ):

$$\begin{aligned} LH_m\Phi_n &= L\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k\right) = \\ &= L\left(\frac{1}{\lambda_n} \Phi_n\right) = \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \Phi_n = \Phi_n. \end{aligned}$$

$H_m Lu = (I - P_m)u$ , ahol  $I$  az identitás operátor, ezt szintén elég  $\Phi_n$ -re vizsgálni ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned} H_m L\Phi_n &= H_m(\lambda_n \Phi_n) = \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\ &= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \leq m \\ \Phi_n, & \text{ha } n \geq m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$H_m$   $\mathcal{X}$ -szerinti normája  $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ , ehhez felhasználjuk, hogy  $L$  sajátértékei növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy  $\|I - P_m\| \leq 1$  az ortogonális projekció tulajdonsága miatt:

$$\begin{aligned} \|H_m u\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|(I - P_m)u\| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \| \cdot \| u \| \end{aligned}$$

és  $u = \Phi_{m+1}$  esetén teljesül az egyenlőség:

$$\begin{aligned} \|H_m \Phi_{m+1}\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_{m+1}, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda_{m+1}} \Phi_{m+1} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\Phi_{m+1}\|. \end{aligned}$$

Még nézzük meg  $H_m$   $\mu$ -szerinti normáját:  $\mu(H_m) \leq \alpha\sigma(m)$ , ahol  $\sigma(m) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\right)^2\right)^{1/2}$ :

$$\begin{aligned} \mu(H_m u) &= \mu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k\right) \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \mu(\Phi_k) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \right| \leq \\ &\leq \left| \left( \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}, \langle u, \Phi_k \rangle \right)_{l_2} \right| \leq \left\| \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right\|_{l_2} \cdot \|\langle u, \Phi_k \rangle\|_{l_2} = \\ &= \sigma(m) \|u\| \leq \sigma(m) \alpha \mu(u) \end{aligned}$$

ahol  $(\cdot, \cdot)_{l_2}$  az  $l_2$ -beli skaláris szorzást jelöli. A levezetés során alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-egyenlőtlenséget és a Parseval-egyenlőséget. Ebből az is következik, hogy  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$ . A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, így  $\mathcal{R}(H_m) \subset \mathcal{D}(N)$  és  $S_m \subset \mathcal{D}(N)$ , hogy a  $P_m$  és a  $H_m$  alkalmazása után tudjuk az  $N$ -et is még alkalmazni.

Tegyük fel, hogy  $\bar{u} \in \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{D}(L)$  megoldása az (5.0.1) egyenletnek, tehát

$$L\bar{u} = N\bar{u}. \quad (5.0.2)$$

Erre először alkalmazzuk  $H_m$ -et:

$$\begin{aligned} H_m L\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ (I - P_m)\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ \bar{u} &= P_m \bar{u} + H_m N\bar{u}, \end{aligned} \quad (5.0.3)$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (5.0.2)-re  $P_m$ -et:

$$P_m(L\bar{u} - N\bar{u}) = 0, \quad (5.0.4)$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan  $\bar{u} \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N)$ , ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (5.0.1) feladatnak.

Legyenek  $a > 0, b > 0$  valós számok, és legyen  $u_0$  egy közelítő megoldása az  $Lu = Nu$  egyenletnek úgy, hogy létezik  $u^* \in S_m$  ( $u^* = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k$  valamely  $a_k$  számokra,  $k = 1, \dots, m$ ), amivel  $\mu(u^* - u_0) \leq a$ . Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \mathcal{D}(N) \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \leq b\},$$

tehát  $S_{u^*}^b$  azon  $u$ -kat tartalmazza, melyek  $S_m$ -re levetítve  $u^*$ -ba esnek, és  $u^*$ -tól  $\mu$ -szerinti távolságuk legfeljebb  $b$ . Ezen elemek  $\mu$ -normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$\begin{aligned} T_{u^*}^b : S_{u^*}^b &\rightarrow \mathcal{X}, \\ T_{u^*}^b(u) &:= u^* + H_m N u. \end{aligned}$$

Lássuk be  $T_{u^*}^b$ -ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen  $x, y \in S_{u^*}^b$ :

$$\begin{aligned} \mu(T_{u^*}^b(x) - T_{u^*}^b(y)) &= \mu((u^* + H_m N x) - (u^* + H_m N y)) = \\ &= \mu(H_m(Nx - Ny)) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\beta_R\mu(x - y), \end{aligned}$$

ahol  $R = \mu(u^*) + b$ , tehát  $u^*$ -tól és  $b$ -tól függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján  $\beta_R$  egy  $R$ -tól függő konstans. Mivel  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$ , ezért elég nagy  $m$  esetén  $\mu(H_m)\beta_R < 1$ . Annak, hogy  $\mathcal{R}(T_{u^*}^b) \subset S_{u^*}^b$  (tehát lehet  $T_{u^*}^b$ -t iteratívan alkalmazni) elégséges feltétele, hogy  $\mu(H_m)^2 \mu(L)b_R \leq b$ , ami kellően nagy  $m$ -re szintén teljesül. Tehát ha  $m$  elég nagy, akkor  $T_{u^*}^b$  kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az  $u^*$ -tól függő fixpontot jelöljük  $y(u^*)$ -al, és asszociált elemnek nevezzük.  $y(u^*)$ -ról könnyen belátható, hogy megoldása az (5.0.3) egyenletnek. Vezessük be a  $c_k := \langle u^*, \Phi_k \rangle$  ( $k = 1, \dots, m$ ) jelölést, amivel  $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$ . Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz  $y(u^*)$  megoldása a (5.0.4) bifurkációs egyenletnek:

$$\begin{aligned}
0 &= P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_mLy(u^*) - P_mNy(u^*), \\
P_mLy(u^*) &= P_mL(u^* + H_mNy(u^*)) = P_mLu^* + P_mLH_mNy(u^*) = \\
&= P_mL\left(\sum_{k=1}^m c_k \Phi_k\right) + P_mL \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + P_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k P_m \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right),
\end{aligned}$$

tehát

$$0 = P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*)\right),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k \right\rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ azaz} \\
0 &= \langle c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ vagy} \\
0 &= \langle \lambda_k u^* - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m). \tag{5.0.5}
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egy  $m$ -változós ( $c_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) számok meghatározzák  $u^*$ -ot),  $m$  egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha  $a, b, m$  elég nagyok, akkor az eredeti (5.0.1) egyenletnek  $\bar{u}$  pontosan akkor megoldása, ha az (5.0.5) egyenletnek  $u^*$  megoldása és  $\bar{u} = y(u^*)$ .

Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük. Legyen  $N \geq m$ . Az  $Lu = Nu$  feladat megoldásait

$$u = \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k + \sum_{k=m+1}^N c_k \Phi_k$$



alakban keressük, tehát  $N$  növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a műveletigény rovására).  $H_m$ -en is hasonlóképpen módosítunk:

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^N \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő  $L$ -hez  $\Phi_k (k = 1, \dots, N)$  sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti  $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$  kiinduló értéket.
3. Állítsuk elő  $y(u^*)$ -ot a fixpontiterációval:  $y_0 := u^*$ ,  $y_{i+1} := u^* + H_m N y_i$ , ( $i = 1, \dots, S$ ).
4. Oldjuk meg az  $Lu^* = P_m N y_{S+1}$  egyenletet  $u^*$ -ra, például Newton-módszerrel.
5. Az így kapott  $u^*$ -ból kiindulva ismételjük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük (amit  $Lu^* - Nu^*$  normájával lehet jellemezni).

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor  $m$  növelése szükséges lehet (ami miatt  $N$ -et is lehet, hogy növelni kell).

A peremfeltételeket  $u$ -ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a  $\Phi_k$  sajátfüggvényekre, így az ő lineáris kombinációjukkal előálló függvényre is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

## 5.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az  $L$  alakjára vonatkozó megköötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [8] és [17] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.

Legyen  $L$  egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a  $(-1, 1)$ . A peremfeltételeink a következők:

$$\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0,$$

$$\alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0.$$

Ha  $L$ -nek  $\lambda$  sajátértéke,  $v$  pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor  $Lv = \lambda v$ , azaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(-(pv')' + qv) &= \lambda v, \\ -pv'' - p'v' + qv &= \lambda wv.\end{aligned}\tag{5.1.1}$$

Jelöljük  $T_n(x)$ -el a  $(-1, 1)$ -en értelmezett Csebisev-polinomokat:  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ . Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak az  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük ( $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ ). A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol  $\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N]$  és  $\mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \dots, T_N(x)]^T$ , így az együtthatók a vektora egyértelműen meghatározza a  $v(x)$  függvényt.

Mivel  $L$ -nek szüksége van  $v$  deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^N a_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^N b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t}\tag{5.1.2}$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a  $\theta := \arccos x$  jelölést (amivel  $\sin \theta = \sqrt{1-x^2}$ ).

$$\begin{aligned}T_n(x) &= \cos(n\theta) \\ T'_n(x) &= \sin(n\theta)n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) &= \sin((n+1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \sin((n-1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}} \\ \sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\sin\theta = 2T_n(x)\sqrt{1-x^2} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= 2T_n(x)\end{aligned}$$

Ez működik  $n \geq 2$  esetén, kis  $n$ -ekre pedig egyszerű a dolog:

$$\begin{aligned}T'_0(x) &= 0, \\ T'_1(x) &= 1 = T_0(x), \\ T'_2(x) &= 4x = 4T_1(x).\end{aligned}$$

Helyettesítsük be (5.1.2)-be a  $T_k(x)$ -ek helyére az így kapott képleteket:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{n=0}^N b_n T_n = b_0 T_1' + \frac{b_1}{4} T_2' + \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n+1)} T_{n+1}' - \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n-1)} T_{n-1}' = \\ &= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T_1' + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T_n' + \frac{b_{N-1}}{2N} T_N' + \frac{b_N}{2(N+1)} T_{N+1}'. \end{aligned}$$

Így már látható az összefüggés  $a_n$  és  $b_n$  között:

$$\begin{aligned} b_N &= 0 \\ b_{N-1} &= 2Na_N \\ b_{n-1} &= b_{n+1} + 2na_n \quad (n = N-1, \dots, 2) \\ b_0 &= \frac{b_2}{2} + a_1. \end{aligned}$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a  $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  egyenletet ( $k, l = 0, \dots, N$ ):

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan} \\ 2l, & \text{ha } l \geq k \geq 1 \text{ és } l+k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T \mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az  $x$ -szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$xv(x) = \sum_{k=0}^N a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$\begin{aligned} xT_0(x) &= T_1(x) \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2} (T_{n+1} + T_{n-1}) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_1}{2} \\ c_1 &= a_0 + \frac{a_2}{2} \\ c_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n = 2, \dots, N-1) \\ c_N &\approx \frac{a_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a  $Ma \approx c$  szorzást ( $k, l = 0, \dots, N$ ):

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k, l) = (1, 0) \\ \frac{1}{2}l, & \text{ha } l \geq 2 \text{ és } |k - l| = 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx c^T t \approx (Ma)^T t.$$

Ezenfelül, ha  $f$  analitikus függvény, akkor  $f(x)v(x) \approx (f(M)c)^T t$ .

Ezek segítségével írjuk fel az (5.1.1) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrixműveletként:

$$\hat{L}a := \left( -p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M) \right) a.$$

A (5.1.1) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig  $\lambda w(M)a$ , jelölésként  $B := w(M)$ . Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy  $t$  egy vektorértékű függvény,  $[a, b] = [-1, 1]$ , és ennek az intervallumnak a végpontjain  $T_n(-1) = (-1)^n$ ,  $T_n(1) = 1$ . Legyen

$$\begin{aligned} h_1^T &= \alpha_{11}(t(-1))^T + \alpha_{12}(t(-1))^T \hat{D}, \\ h_2^T &= \alpha_{21}(t(1))^T + \alpha_{22}(t(1))^T \hat{D} \end{aligned}$$

amivel (ismét a  $\hat{D}a = b$  jelölést alkalmazva)

$$\begin{aligned} h_1^T a &= \alpha_{11}(a^T t(-1))^T + \alpha_{12}(b^T t(-1))^T = \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1), \\ h_2^T a &= \alpha_{21}(a^T t(1))^T + \alpha_{22}(b^T t(1))^T = \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1). \end{aligned}$$

Legyen  $H = (h_1, h_2)^T$ , így a peremfeltétel megfogalmazható  $Ha = 0$  formában.

Legyen  $\hat{A}$  az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy  $\hat{L}$  utolsó két sorát elhagyjuk (tehát  $N - 1 \times N + 1$  mátrix), és állítsuk elő  $\hat{B}$ -t ugyanígy  $B$ -ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix} a = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ 0 \end{pmatrix} a.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha  $0$  helyett  $\frac{1}{\lambda_*}H$ -t használunk, ahol  $\lambda_*$  egy nagy szám, ami nem sajátértéke  $L$ -nek. Így a jobb oldal mátrixának  $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$  nincsenek csupa  $0$  sorai.

Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a  $[-1, 1]$ , hanem valamely  $[a, b]$  intervallum, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni:  $D := \frac{1}{\alpha}\hat{D}$ , ahol  $\alpha$  az intervallum középpontja ( $\alpha = \frac{b-a}{2}$ ).

## 5.2. Példa a numerikus alkalmazásra

Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [16] cikkhez készült MATLAB csomagot.

Tekintsük az

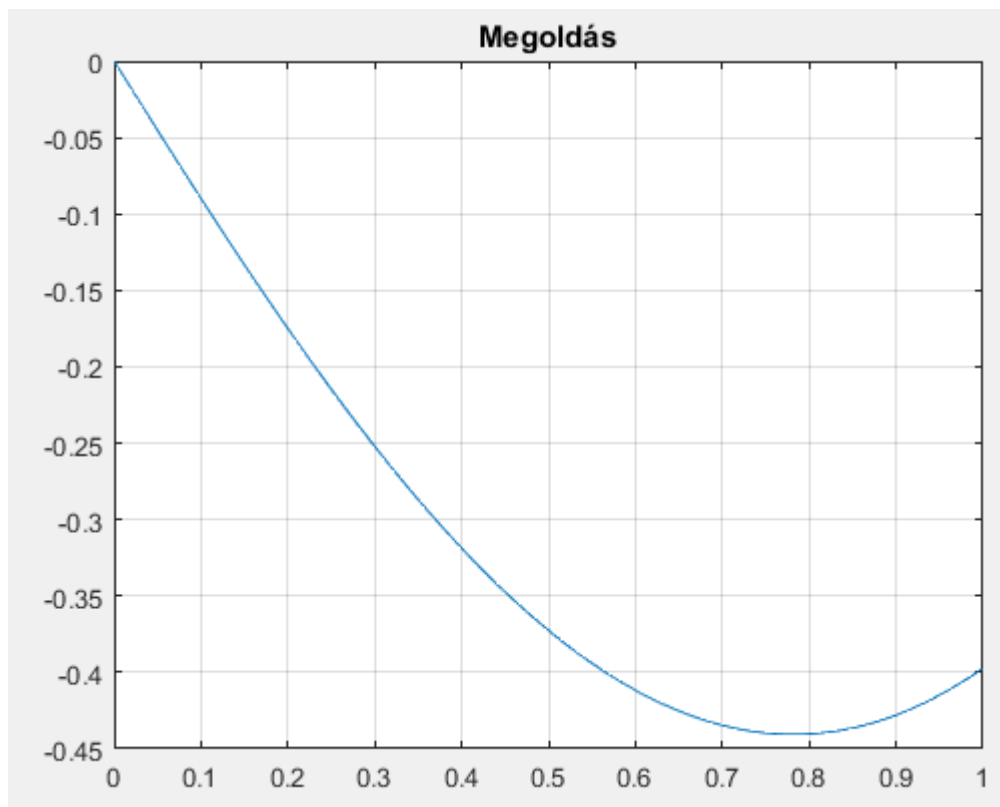
$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x}$$

egyenletet a  $[0, 1]$  intervallumon a

$$u(0) = 0$$

$$u(1) + u'(1) = 0$$

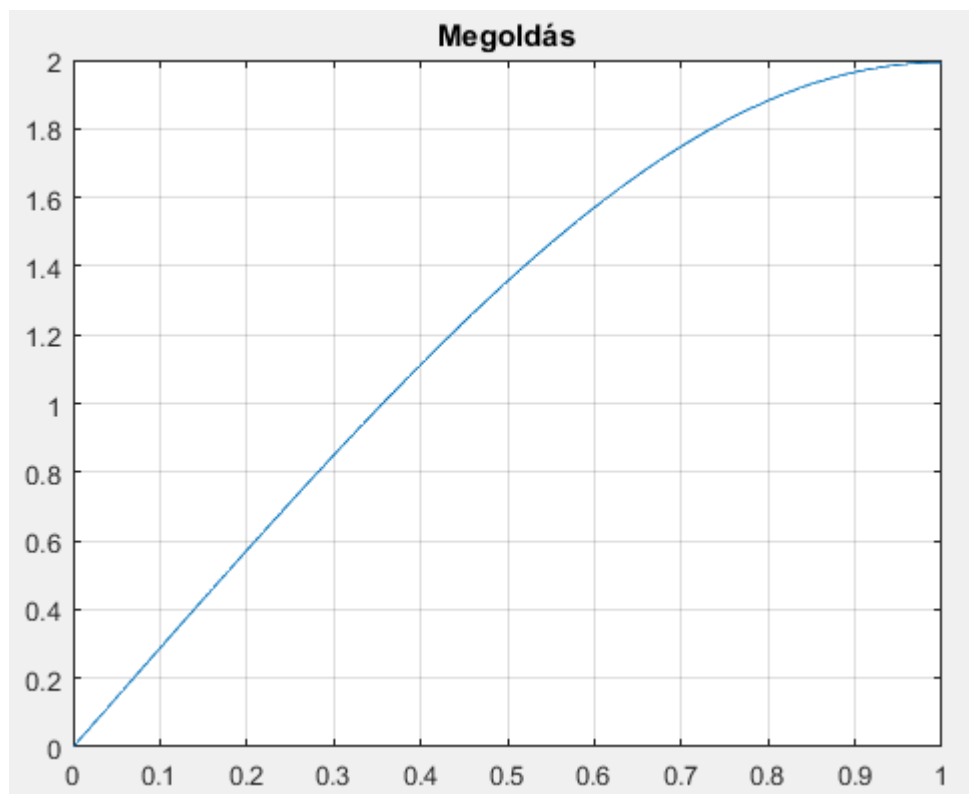
peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb  $10^{-5}$  hibát megengedve:



Ehhez az  $m = 0$  választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltétel, és az intervallum jobb oldalán a

$$u'(1) = 0$$

feltételt követeljük meg, akkor  $m = 0$  esetén nincs konvergencia, és még  $m = 1$  esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A `cinit = [1]` paraméterrel, azaz a  $\Phi_1$  komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:



# Irodalomjegyzék

- [1] **Ambrosetti, A.; Prodi, G.:** *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [2] **Chow, S. N.; Hale, J. K.:** *Methods of bifurcation theory*, Pitman Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 251, Springer, Berlin etc., 1996.
- [3] **Farkas, M.:** *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.
- [4] **Hirzebruch, F.; Scharlau, W.:** *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1971.
- [5] **Kolmogorov, A. N.; Fomin, Sz. V.:** *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [6] **Kovács, S.:** *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013.  
ISBN: 978-963-284-445-9
- [7] **Kovács, S.:** *Abstract bifurcations*, Miklós Farkas Seminar on Applied Analysis, Budapest University of Technology, 22 February 2018.
- [8] **Liefvendahl, M.:** *A Chebyshev Tau Spectral Method for the Calculation of Eigenvalues and Pseudospectra*, Technical Report, TRITA-NA-0125, KTH, Stockholm, 2001.
- [9] **Marx, B.; Vogt, W.:** *Dynamische Systeme - Theorie und Numerik*, Spektrum, 2011.
- [10] **Meise, R.; Vogt, D.:** *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, 1992.
- [11] **Pelczynski, A.; Sudakov, V. N.:** *Remark on noncomplemented subspaces of the spacem( $S$ )*, Colloq. Math. **9** (1962), 85–88.
- [12] **Pötzsche, C.:** *Bifurcation theory*, Lecture Notes, SS 2010, TU München, 2011.
- [13] **Rodriguez, J.; Kobylus Abernathy, Kristen:** *On the solvability of nonlinear boundary value problems*, Differential Equations and Applications **1**(2) (2010), 487–499.

- [14] **Rodriguez, J.; Taylor, P.:** *Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **68**(11) (2008), 3465–3474.
- [15] **Simon, P.:** *A funkcionálanalízis alapjai*, ELTE Eötvös Kiadó, 2017.
- [16] **Trif, D.:** *The Lyapunov-Schmidt method for two-point boundary value problems*, Fixed Point Theory **6**(1) (2005), 119–132.
- [17] **Trif, D.:** *LISC - A Matlab package for linear differential problems*, Romai Journal **1** (2006), 203–208.
- [18] **Werner, D.:** *Funktionalanalýsis*, Springer, 2011.
- [19] **Whitley, R. J.:** *Projecting  $m$  onto  $c_0$* , Amer. Math. Monthly **73** (1966), 285–286.
- [20] **Zeidler, E.:** *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I.*, Springer, 1986.



**Lipták Bence,**  
**programtervező informatikus szakos egyetemi hallgató**  
**Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar,**  
**1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,**  
**padsoldier@gmail.com**