Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emelett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció (Faktortér). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altere. A V tér U szerinti* ***faktortere*** *vagy* ***hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \tag{2.1}$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \tag{2.2}$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. *Ha V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, akkor $\forall v, v' \in V$-re*

$$v + U = v' + U \qquad \Leftrightarrow \qquad v - v' \in U. \tag{2.3}$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha "$v - v' \in U$" feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$
$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

  leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \tag{2.4}$$
$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \tag{2.5}$$

  melyek jól definiáltak.

- *A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér.*

- *π_U az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \qquad (v \in V)$$

  módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\overline{v} := v + U \qquad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w} \qquad (v, w \in V)$$
$$\alpha\overline{v} = \overline{\alpha v} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szürjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \tag{2.6}$$

Ha egy $v \in V$ elemet egy $u \in U$ elemmel eltolunk ($U \subset V$ altér), akkor a V/U faktortérbeli π_U általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az U altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $F : V \to W$ egy lineáris leképezés, $U \subset V$ egy altér amire $U \subset \operatorname{Ker} F$. Ekkor egyértelműen létezik $F' : V/U \to W$ amivel $F = F' \circ \pi_U$. Emellett*

- $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} F'$, *illetve F' pontosan akkor szürjektív, amikor F is,*
- $\operatorname{Ker} F' = (\operatorname{Ker} F)/U$, *illetve F' pontosan akkor injektív, amikor $U = \operatorname{Ker} F$.*

*F'-t az **F által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.*

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

2.1.4. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, $W \subset V$ pedig az U komplemens altere (tehát $V = W \oplus U$). Ekkor a π_U kanonikus leképezés leszűkítése W-re*

$$\pi_{|_U} : W \longrightarrow V/U, \ \pi_{|_U}(w) = w + U$$

izomorfia, azaz $W \cong V/U$.

2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek.

2.2.1. Definíció (Kompakt operátor). *$A : X \to Y$ operátor **kompakt**, ha bármely $U \subset X$ korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz $\overline{A[U]} \subset Y$ kompakt, valamint ha A korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]*

A továbbiakban az $X \to Y$ közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát $K(X, Y)$-al, $X = Y$ esetén $K(X)$-szel jelöljük, ez zárt alteret alkot $L(X, Y)$-ban.

2.2.2. Definíció. *$A \in L(X,Y)$ operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ($\dim \operatorname{Im} A < \infty$). A véges rangú operátorok halmazát $K_{fin}(X,Y)$-al rövidítjük. [2, 3]*

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetőek véges rangú operátorokkal:

2.2.1. Tétel. *Ha Y-ban van Schauder-bázis, akkor $A \in L(X,Y)$ pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz $K(X,Y) = \overline{K_{fin}(X,Y)}$. [3]*

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy L^p-terekben ($p \geq 1$).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

2.2.2. Tétel. *Legyenek $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek, $A \in L(X,Y)$, ekkor*

$$A \in K(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha A^* adjungált operátora kompakt. [2, 4]

2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operárokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek.

2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor). *$T \in L(X,Y)$ **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:*

- $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$,
- *$T[X]$ zárt Y-ban,*
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$.

*Ekkor a T operátor **indexe** $\operatorname{ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$, T **cokernele** $\operatorname{coker} T := Y/T[X]$ (azaz Y-ban a T képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója** $\operatorname{codim} T := \dim \operatorname{coker} T$. [1, 3, 4, 5]*

Az X és Y közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(X, Y)$-al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel (T képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

2.3.1. Tétel. *Legyenek $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(Z, \|.\|_Z)$ Banach-terek, ekkor:*

- *$A \in \mathcal{F}(X, Y)$ és $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$, ekkor $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$ és $\operatorname{ind}(B \circ A) = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A$,*
- *$A \in \mathcal{F}(X, Y)$, ekkor $A^* \in \mathcal{F}(X^*, Y^*)$ és $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$,*
- *$\mathcal{F}(X, Y)$ nyílt részhalmaza L(X, Y)-nak, és az $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \to \mathbb{Z}$ függvény lokálisan konstans.*

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

2.3.2. Tétel. *$T \in L(X, Y)$ bijektív, $K \in L(X, Y)$ kompakt, ekkor $T + K$ Fredholm-operátor és $\operatorname{ind}(T + K) = 0$. Ennek speciális esete amikor $(X, \|.\|_X) = (Y, \|.\|_Y)$ és T az identitás X-en. [3, 5]*

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

2.3.3. Tétel. *$K \in K(X, Y)$ és $F \in \mathcal{F}(X, Y)$ esetén $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$, valamint $\operatorname{ind}(K + F) = \operatorname{ind} F$. [3]*

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

2.3.4. Tétel. *$T \in L(X, Y)$ pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik $B \in L(Y, X)$, $K_X \in K(X)$, $K_Y \in K(Y)$ úgy, hogy*

$$BT = I_{|_X} + K_X, TB = I_{|_Y} + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(Z, \|.\|_Z)$ a következők során Banach-terek.

2.4.1. Definíció. *$F : X \times Y \to Z$ **Fréchet-differenciálható** X-ben az (u_0, v_0) pontban, ha létezik $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$ úgy, hogy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel). *$F : X \times Y \to Z$ folytonos, $(u_0, v_0) \in X \times Y$, $F(u_0, v_0) = 0$, $(D_x F)(u_0, v_0)$ bijektív és folytonos. Ekkor létezik (u_0, v_0)-nak olyan $U \times V \subset X \times Y$ környezete és $G : V \to U$ függvény, amivel $G(v_0) = u_0$ és*

$$F(G(v), v) = 0 \qquad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden $U \times V$-beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer

A Ljapunov-Schmidt-módszer célja, hogy egy végtelen-dimenziós feladatot egy jobban kezelhető, véges dimenziós feladatra redukáljunk.

Először is nézzük meg az általános esetet ([7]). $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(\Lambda, \|.\|_\Lambda)$ legyenek Banach-terek (Λ a paramétertér szerepét tölti be), 0-val pedig értelemszerűen a megfelelő tér nullelemét jelöljük.

Legyen $F : X \to Z$ egy korlátos lineáris operátor, $N : X \times \Lambda \to Z$ pedig egy folytonosan (Fréchet-)differenciálható leképezés úgy, hogy

$$N(0,0) = 0,$$
$$(D_x N)(0,0) = 0.$$

Keressük $x \in X$-ben az alábbi egyenlet nemtriviális ($\lambda \neq 0$) megoldásait:

$$Fx = N(x, \lambda). \tag{3.1}$$

Ha $D_x F(0)$ izomorfizmus X és Z között, akkor $A(x,\lambda) := Fx - N(x,\lambda)$ jelöléssel

$$A(0,0) = 0,$$

$$D_x A(0,0) = D_x F(0) \in L(X,Z) \text{ folytonos bijekció,}$$

így alkalmazható az implicit függvény tétel, ami megad egy $f : V \to U$ folytonos függvényt ($U \times V \subset X \times \Lambda$ a $(0,0)$ egy nyílt környezete), amivel

$$f(0) = 0,$$

$$0 = A(f(\lambda), \lambda) = F(f(\lambda)) - N(f(\lambda), \lambda) \qquad (\lambda \in V),$$

és így

$$F(f(\lambda)) = N(f(\lambda), \lambda) \qquad (\lambda \in V),$$

ami megoldja az eredeti egyenletünket a $(0, 0)$ egy környezetében.

A Ljapunov-Schmidt-módszer bizonyos feltételek mellett megoldja a feladatot abban az esetben, ha $D_x F(0)$ nem izomorfizmus.

Irodalomjegyzék

[1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.

[2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.

[3] TODO, *Notex on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.

[4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.

[5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.

[6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapnov-Schmidt*. TODO, TODO.

[7] TODO, *TODO 8.6 The Liapunov-Schmidt Method*. TODO, TODO.