

EÖTVÖS LORÁND TUDOMÁNYEGYETEM
INFORMATIKAI KAR

Lipták Bence

A LJAPUNOV-SCHMIDT-MÓDSZER

MSc diplomamunka

Modellalkotó informatikus szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor
Numerikus Analízis Tanszék



Budapest, 2018.

Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kovács Sándor tanár úrnak a segítségét, munkáját és végtelen türelmét, ami nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Budapest, 2018 ősz

Lipták Bence

Tartalomjegyzék

1. Funkcionálanalitikai segédeszközök	3
1.1. Faktorterek, direkt kiegészítők	3
1.2. Lineáris operátorok	6
1.3. Kompakt operátorok	18
1.4. Fredholm-operátorok	19
1.5. Az implicit függvényre vonatkozó tétel	22
2. Bifurkációk	25
3. A Ljapunov-Schmidt-redukció	29
4. Alkalmazások	32
4.1. Egy elsőrendű peremérték-feladat	32
4.2. Egy n -edrendű peremérték-feladat	35
5. A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer	45
5.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására	52
5.2. Példa a numerikus alkalmazásra	57

1. fejezet

Funkcionálanalitikai segédeszközök

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a funkcionálanalízis azon fogalmait, ill. tételeit, amelyekre a későbbiekben hivatkozunk, ill. amelyeket a Ljapunov-Schmidt-módszer tárgyalása folyamán felhasználunk. Ha mást nem írunk, akkor a továbbiakban legyen \mathcal{X} és \mathcal{Y} egy-egy a \mathbb{K} testre vonatkozó vektortér. A jelölés-, ill. szimbólumrendszert illetően alapvetően a [6] jegyzetre támaszkodunk.

1.1. Faktorterek, direkt kiegészítők

Adott \mathcal{H} halmaz, ill. $\sim \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ekvivalencia esetében a

$$[x] := \{y \in \mathcal{H} : x \sim y\}$$

szimbólum jelöli az $x \in \mathcal{H}$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztályt,

$$\mathcal{H}/\sim := \{[x] \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : x \in \mathcal{H}\}$$

a \sim -ekvivalenciaosztályok halmazát.

Ha \mathcal{X} vektortér a \mathbb{K} testre vonatkozóan, $A, B \subset \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A + B := \{a + b \in \mathcal{X} : a \in A, b \in B\}, \quad \{a\} + B =: a + B \quad (a \in \mathcal{X}),$$

$$\alpha A := \{\alpha a \in \mathcal{X} : a \in A\}.$$

1.1.1. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{A} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \quad \text{és} \quad r := (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

akkor

$$r + \mathcal{A} = \{r + u : u \in \mathcal{A}\} = \{(x + a, y + 0) : x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : x \in \mathbb{R}\},$$

azaz $r + \mathcal{A}$ nem más mint az y abszcisszájú vízszintes egyenes.

Adott \mathcal{X} vektortér, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér és $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ esetén az

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} =: \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

komplexusösszeget **direktösszegnek**, a \mathcal{B} alteret pedig az \mathcal{A} altér **direkt kiegészítőjének** nevezzük, ha $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$ teljesül. Könnyen belátható, hogy

$$x \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \iff \exists u \in \mathcal{A}, v \in \mathcal{B} : x = u + v,$$

Ha \mathcal{A} altér az \mathcal{X} vektortérben, akkor az

$$x \sim y \iff x - y \in \mathcal{A} \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

reláció \mathcal{X} -beli ekvivalencia, és az $x \in \mathcal{X}$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztályra

$$[x] = \{u \in \mathcal{X} : x - u \in \mathcal{A}\} = \{x + y \in \mathcal{X} : y \in \mathcal{A}\} = x + \mathcal{A}.$$

A \sim -ekvivalenciaosztályok halmazára \mathcal{X}/\sim helyett gyakran az \mathcal{X}/\mathcal{A} jelölés használatos. Így

$$\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{x + \mathcal{A} : x \in \mathcal{X}\}.$$

Mivel bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x, y, u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$(x \sim y \wedge u \sim v) \implies x + u \sim y + v, \quad x \sim y \implies \lambda x \sim \lambda y,$$

ezért az

$$[x] + [y] := [x + y] \quad (x, y \in \mathcal{X}), \quad \lambda \cdot [x] := [\lambda \cdot x] \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in \mathcal{X})$$

műveletekkel \mathcal{X}/\mathcal{A} halmaz vektortér, amelyet az \mathcal{X} vektortér \mathcal{A} altere szerinti **faktortérnek** vagy **hányadosterének** nevezünk. Az \mathcal{X}/\mathcal{A} -beli nullvektor: $[0] = \mathcal{A}$.

1.1.2. példa. Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2 \quad \text{és} \quad \mathcal{A} := \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\},$$

akkor

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{A} = \{r + \mathcal{A} : r \in \mathbb{R}^2\},$$

azaz \mathbb{R}^2/\mathcal{A} nem más mint az \mathbb{R}^2 -beli vízszintes egyenesek halmaza.

1.1.3. példa. Világos, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$, akkor

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{X} : \int_0^1 f = 0 \right\}$$

altér \mathcal{X} -ben. Ha

$$e : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad e(x) := 1,$$

akkor $([e])$ bázisa \mathcal{X}/\mathcal{A} -nak, hiszen

- $\int_0^1 1 \, dx = 1 \neq 0$ következtében $e \notin \mathcal{A}$, tehát $[e] \neq [0]$, így $([e])$ lineárisan független.
- ha

$$f \in \mathcal{X} \quad \text{és} \quad \lambda := \int_0^1 f,$$

akkor

$$\int_0^1 (f - \lambda e) = \int_0^1 f(x) \, dx - \lambda \int_0^1 1 \, dx = \int_0^1 f(x) \, dx - \lambda = 0$$

következtében

$$f - \lambda e \in \mathcal{A}, \quad \text{azaz} \quad [f] = \lambda[e].$$

Adott \mathcal{X} vektortér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetében \mathcal{A} kodimenziója a

$$(\text{codim}(\mathcal{A}) :=) \text{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}} := \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A})$$

(kibővített értelemben vett) szám. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér az \mathcal{A} direkt kiegészítője: $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$, akkor $\text{codim}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{B})$.

Belátható, hogy

- ha $\mathcal{A} = \mathcal{X}$, akkor $\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{0\}$, így $\text{codim}(\mathcal{X}) = 0$.
- a következő három állítás egyenértékű:
 1. $\text{codim}(\mathcal{A}) = 1$.
 2. alkalmas $v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

3. tetszőleges $v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A}$ esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v.$$

1.1.1. tétel. Ha \mathcal{A} altér az \mathcal{X} vektortérben, amelynek a \mathcal{B} vektorrendszer egy bázisa, akkor \mathcal{X} -ben van olyan \mathcal{C} bázis, hogy \mathcal{B} részrendszere \mathcal{C} -nek és

$$\{x + \mathcal{A} : x \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{B}\}$$

bázisa az \mathcal{X}/\mathcal{A} faktortérnek.

Az iménti tétel következménye az

1.1.1. állítás. Ha \mathcal{A} altér az \mathcal{X} vektortérben, akkor

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}) + \operatorname{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}}.$$

1.1.2. tétel. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér. Ekkor a $|||\cdot||| : \mathcal{X}/\mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$|||[x]||| := d(x, \mathcal{A}) := \inf \{\|x - y\| \in \mathbb{R} : y \in \mathcal{A}\} = \inf \{\|z\| \in \mathbb{R} : z \in [x]\}$$

leképezés norma, továbbá, ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{X}/\mathcal{A}, |||\cdot|||)$ is Banach-tér.

1.2. Lineáris operátorok

A lineáris operátorok, ill. az $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ esetben lineáris funkcionálok terének jelölésére az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} : A \text{ lineáris}\},$$

ill. az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} : A \text{ lineáris}\}$$

szimbólumot használjuk, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük. Sok esetben – különösen fizikai alkalmazásokban – szokás az

$$\mathcal{X}^+ := \operatorname{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$$

teret **lineáris formák** vagy **kovektorok** tereként emlegetni, \mathcal{X} elemeire a „ket-vektor”, \mathcal{X}^+ elemeire pedig a „bra-vektor” elnevezést használni, és tetszőleges $f \in \mathcal{X}^+$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén az $f(x)$ helyettesítési értéket az $\langle f, x \rangle$, ill. $\langle f|x \rangle$ („bracket”) jelsorozattal jelölni:

$$\langle f, x \rangle := \langle f|x \rangle := f(x) \quad (x \in \mathcal{X}).$$

Az \mathcal{X}^+ teret szokás az \mathcal{X} tér **algebrai duálisának** nevezni. Ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in \mathcal{Y} : u \in \mathcal{D}(A)\},$$

ill. az

$$\mathcal{N}(A) := A^{-1}[\{0\}] = \{u \in \mathcal{D}(A) : Au = 0 \in \mathcal{Y}\}$$

altérket az A operátor (funkcionál) **képterének**, ill. **magterének** nevezzük.

1.2.1. megjegyzés. Világos, hogy, ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$A \text{ izomorfizmus} \iff \mathcal{N}(A) = \{0\} \text{ és } \mathcal{R}(A) = \mathcal{Y} \ (\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A) = \{0\})/,$$

azaz

$$A \text{ izomorfizmus} \iff \dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A)).$$

A lineáris algebrából közismert az alábbi

1.2.1. tétel. Ha \mathcal{X} véges dimenziós vektortér, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, akkor igaz az

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) \iff \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$$

ekvivalencia.

1.2.2. tétel. (Dimenziótétel.) Ha \mathcal{X} véges dimenziós vektortér, \mathcal{Y} pedig (nem feltétlenül véges dimenziós) vektortér, továbbá $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{X}).$$

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és $A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ operátor esetén értelmezzük az

$$\|A\| := \| \|A\| \| := \inf \{K \in [0, +\infty] : \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}} \ (x \in \mathcal{D}(A))\} \quad / \inf \emptyset := +\infty /$$

(kibővített értelemben) valós számot. Az A operátor **korlátos**, ha $\|A\| < +\infty$. A korlátos, lineáris operátorok halmazának jelölésére az

$$L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) : A \text{ korlátos}\},$$

ill. az

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : A \text{ korlátos}\}$$

szimbólumokat fogjuk használni, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et $L(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük:

$$L(\mathcal{X}) := L(\mathcal{X}, \mathcal{X}).$$

Ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\|A\| = \sup \{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : x \in \mathcal{X}, \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}.$$

1.2.1. példa.

1. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor az I identikus operátorra

$$I \in L(\mathcal{X}) \quad \text{és} \quad \|I\| = 1$$

teljesül.

2. Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (L^2[0, \pi], \|\cdot\|_{L^2}),$$

akkor az

$$A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad Au := -u'' \quad (u \in \mathfrak{C}^2[0, \pi] : u(0) = u(\pi) = 0)$$

operátor nem korlátos, ui. ha

$$\varphi_n : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi_n(t) := \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi/2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\|A\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\pi n^2 \sin^2(nt) dt} = n^2 \|\varphi_n\| \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy az $\mathcal{N}(A)$ magtér zárt altér \mathcal{X} -nek.

Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ egy kodimenziós zárt altér, akkor alkalmas $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionálra

$$\mathcal{A} = \mathcal{N}(f) := \{x \in \mathcal{X} : \langle f, x \rangle = 0\},$$

hiszen a feltételek következtében

$$v \in \mathcal{X} \setminus \mathcal{A} \quad \implies \quad \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v : a \in \mathcal{A}, \lambda \in \mathbb{R}\},$$

így az

$$f(x) = f(a + \lambda v) := \lambda \quad (x \in \mathcal{X})$$

választással a kívánt funkcionálhoz jutunk (vö. [5], 131. old.)

1.2.1. definíció. Adott \mathcal{X} lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operátor

1. **idempotens**, ha $A^2 := A \circ A = A$;
2. **projekció**, ha alkalmas az $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{X}$ feltételnek eleget tévő $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ altér esetén

$$Ax := u \quad (\exists | u \in \mathcal{U}, v \in \mathcal{V} : x = u + v).$$

Az A (lineáris) operátort szokás az U altérre való, V altér menti, vagy V altérrel párhuzamos irányú **vetítő operátornak** is nevezni.

1.2.2. példa. Az $I : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, Ix := x$ identikus operátor projekció.

1.2.3. példa. A $\mathcal{O} : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, Ix := 0$ zérusoperátor projekció.

1.2.4. példa. Ha $p \in [1, +\infty)$, és $\mathcal{X} := l_p$, akkor az

$$A : l_p \rightarrow l_p, \quad Au := (u_1, \dots, u_n, 0, \dots)$$

operátor projekció.

1.2.5. példa. Ha $d \in \mathbb{N}$, és $\mathcal{X} := \mathbb{K}^{d \times d}$, akkor az

$$AM := \frac{1}{2}(M + M^T) \quad (M \in \mathcal{X})$$

operátor projekció.

1.2.6. példa. Ha valamely $0 < a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{X} := \{f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{K} : f \in \mathfrak{C}\},$$

akkor az

$$(Af)(x) := \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) \quad (f \in \mathcal{X}, x \in [-a, a])$$

operátor projekció. Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ páratlan}\} \quad \text{és az} \quad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ páros}\}$$

alterekre

$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$$

teljesül, hiszen

$$f(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)) + \frac{1}{2}(f(x) - f(-x)) \quad (x \in [-a, a]).$$

Projekciók jellemzésére szolgál a következő állítás.

1.2.3. tétel. Legyen \mathcal{X} lineáris tér. Az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operátor pontosan akkor projekció, ha idempotens, továbbá ez utóbbi esetben

1. $\mathcal{N}(I - A) = \mathcal{R}(A)$ és $\mathcal{R}(I - A) = \mathcal{N}(A)$.
2. $\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, pontosabban bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén

$$x = u + v, \quad u \in \mathcal{N}(A), \quad v \in \mathcal{R}(A) \quad \Longleftrightarrow \quad u = (I - A)x, \quad v = Ax.$$

3. Az $I - A$ operátor projekció: az $\mathcal{N}(A)$ altérre való $\mathcal{R}(A)$ -val párhuzamos vetítés.
4. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $\mathcal{X} = U \oplus V$, úgy az U altérre való A projekció pontosan akkor lesz korlátos, ha U és V zárt altér \mathcal{X} -ben.

1.2.7. példa. Ha

$$\mathcal{X} := L^2([0,1] \times [0,1]),$$

akkor az

$$(Af)(x, y) := \frac{1}{2} (f(x, y) - f(y, x)) \quad (f \in \mathcal{X}, (x, y) \in [0,1] \times [0,1])$$

operátor projekció, ui. bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén

$$\begin{aligned} (A^2 f)(x, y) &= (A(Af))(x, y) = \frac{1}{2} \{ (Af)(x, y) - (Af)(y, x) \} = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{f(x, y) - f(y, x)}{2} - \frac{f(y, x) - f(x, y)}{2} \right\} = \\ &= \frac{1}{4} (2f(x, y) - 2f(y, x)) = (Af)(x, y). \end{aligned}$$

Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ szimmetrikus}\}, \quad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} : f \text{ antiszimmetrikus}\}$$

alterekre $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$ teljesül, hiszen bármely $(x, y) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén

$$f(x, y) = \frac{1}{2} (f(x, y) + f(y, x)) + \frac{1}{2} (f(x, y) - f(y, x)).$$

Az $\mathcal{X}^* := L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ szimbólum jelöli az \mathcal{X} -en értelmezett korlátos, lineáris funkcionálok összességét, az $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ normált teret az \mathcal{X} vektortér, ill. az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér

(topológiai) duálisának (duális terének vagy konjugált terének) nevezzük. Az egyszerűség kedvéért $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ helyett gyakran csak \mathcal{X}^* -ot írunk. Az \mathcal{X}^* altere \mathcal{X}^+ -nek és

$$\dim(\mathcal{X}) < \infty \quad \implies \quad \mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^*.$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér, akkor \mathcal{X} és \mathcal{Y} azonosítható duálisukkal, és $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nem más mint a skaláris szorzat.

1.2.2. definíció. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, valamint $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Azt mondjuk, hogy $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ **nyílt**, ill. **zárt operátor**, ha bármely $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ nyílt, ill. zárt halmaz esetén az $A[\mathcal{H}] \subset \mathcal{Y}$ képhalmaz nyílt, ill. zárt.

1.2.4. tétel. (Nyílt leképezések tétele.) Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, akkor tetszőleges $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor esetében egyenértékűek az alábbi állítások.

- (1) Az A operátor szűrjektív.
- (2) Az A operátor nyílt.

Az iménti tétel következményeként kapjuk az alábbi igen fontos állítást.

1.2.5. tétel. (Banach-féle homeomorfia-tétel.) Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, továbbá az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor bijektív, akkor $A^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, azaz minden, Banach-teret Banach-térbe képező korlátos lineáris bijekció inverze is korlátos.

Operátorok folytonossága sok esetben gráfjuk zártságára vezethető vissza.

1.2.6. tétel. (Zárt gráfra vonatkozó tétel.) Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek és az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor esetén, ha

- (1) $\mathcal{D}(A)$ zárt $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ -ben/ és
 - (2) $\Gamma(A)$ zárt $(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot, \cdot)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}})$ -ban/,
- akkor A folytonos, ahol

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : x \in \mathcal{D}(A)\}$$

és

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \|x\|_{\mathcal{X}}^p + \|y\|_{\mathcal{Y}}^p \quad (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}, p \in [1, +\infty))$$

vagy

$$\|(x, y)\|_{\mathcal{X} \times \mathcal{Y}} := \max\{\|x\|_{\mathcal{X}}, \|y\|_{\mathcal{Y}}\} \quad (x \in \mathcal{X}, y \in \mathcal{Y}).$$

Bármely normált tér egy alterén értelmezett korlátos, lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a norma megtartásával. Erről szól a

1.2.7. tétel. (Hahn-Banach-tétel.) Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{A}^*$ esetén van olyan $F \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$(1) f \subset F, \quad \text{azaz} \quad F(u) = f(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \quad \text{és} \quad (2) \|F\| = \|f\|.$$

Következésképpen

- az $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ operátortér pontosan akkor Banach-tér, ha $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is Banach-tér. Így a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ tér teljessége miatt az $(L(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ tér is teljes, azaz Banach-tér (vö. [6], 578. old. és 624. old).
- ha $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor bármely $0 \neq u \in \mathcal{X}$ vektorhoz van olyan $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, amelyre

$$\|f\| = 1 \quad \text{and} \quad f(u) = \|u\|$$

(vö. [15], 449. old.)

- bármely véges lineárisan független $\{u_1, \dots, u_d\} \subset \mathcal{X}$ rendszerhez létezik $\{f_1, \dots, f_d\} \subset \mathcal{X}^*$ funkcionálok olyan rendszere, hogy

$$\{f_i, u_i\} \quad (i \in \{1, \dots, d\})$$

biortogonális rendszer:

$$\langle f_i, u_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (i, j \in \{1, \dots, d\}),$$

továbbá az

$$Ax := \sum_{k=1}^d \langle f_k, x \rangle u_k \quad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos projekció a $\text{span}\{u_1, \dots, u_d\}$ altérre (vö. [6], 622. old.).

1.2.3. definíció. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, ill. $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}^*$ alterek. Az

$$\mathcal{A}^\perp := \{f \in \mathcal{X}^* : f(u) = 0 \ (u \in \mathcal{A})\} = \{f \in \mathcal{X}^* : \langle f, u \rangle = 0 \ (u \in \mathcal{A})\},$$

ill. a

$$\mathcal{B}_\perp := \{u \in \mathcal{X} : f(u) = 0 \ (f \in \mathcal{B})\} = \{u \in \mathcal{X} : \langle f, u \rangle = 0 \ (f \in \mathcal{B})\}$$

altereket az \mathcal{A} , ill. a \mathcal{B} altér **annihilátorának** nevezzük.

Világos, hogy

1. \mathcal{A}^\perp , ill. \mathcal{B}_\perp zárt altere \mathcal{X}^* -nak, ill. \mathcal{X} -nek.
2. ha \mathcal{X} véges-dimenziós, akkor

$$\dim(\mathcal{A}^\perp) = \dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{A}).$$

1.2.8. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, akkor a

$$\varphi : \mathcal{A}^\perp \rightarrow (\mathcal{X}/\mathcal{A})^*, \quad \varphi(f)([x]) := f(x) \quad (f \in \mathcal{A}^\perp, [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{A}),$$

ill. a

$$\psi : \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp \rightarrow \mathcal{A}^*, \quad \psi([f]) := f|_{\mathcal{Y}} \quad ([f] \in \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp)$$

leképezések izometrikus izomorfizmusok.

1.2.9. tétel. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az

$$A^*f := f \circ A \quad (f \in \mathcal{Y}^*)$$

operátorra

$$A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*), \quad \text{továbbá} \quad \|A^*\|_{L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)} = \|A\|_{L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})}.$$

Az 1.2.9. tételbeli A^* operátort az A operátor duálisának nevezzük. A fenti jelölésekkel tehát tehát $A^* : \mathcal{Y}^* \rightarrow \mathcal{X}^*$ pontosan akkor **duális operátora** A -nak, ha

$$\langle f, Ax \rangle = f(Ax) = (A^*(f))(x) = \langle A^*f, x \rangle \quad (x \in \mathcal{X}, f \in \mathcal{Y}^*).$$

1.2.8. példa. Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_{12}, \|\cdot\|_{l_{12}}) \quad \text{és} \quad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (l_3, \|\cdot\|_{l_3}),$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad A(x_n) := \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}} \right)$$

operátor duálisa az

$$A^*f = \left(\frac{f_n}{\sqrt{n}} \right) \quad (f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*)$$

operátor, ahol

$$\mathcal{X}^* = l_{12/11} \quad \text{és} \quad \mathcal{Y}^* = l_{3/2},$$

hiszen bármely

$$f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*$$

esetén

$$A^*f(g) = f(Ag) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{g_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{n}} g_n \quad (g \in \mathcal{X}).$$

Az alábbi két példában legyen

$$p \in [1, +\infty), \quad q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & (p \neq 1), \\ +\infty & (p = 1). \end{cases}$$

1.2.9. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := l_p$, és B , ill. J jelöli **balra**, ill. a **jobbra való eltolás** operátorát:

$$B : l_p \rightarrow l_p, \quad Bu := (u_{n+1}), \quad J : l_p \rightarrow l_p, \quad Ju := (u_{n-1}),$$

akkor $B, J \in L(\mathcal{X})$, ui. B , ill. J triviálisan lineáris, továbbá

$$\|Bu\|_{l_p} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

ill.

$$\|Ju\|_{l_p} = \left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p \right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

és bármely

$$v \in \mathcal{X}^* = l_q$$

esetén

$$B^*v(u) = v(Bu) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot u_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1} \cdot u_n \quad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$B^*v = (0, v_1, v_2, \dots) = Jv \quad (v \in l_q).$$

1.2.10. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := L^p[0,1]$, továbbá $\varphi \in L^\infty[0,1]$, úgy az

$$A_p u := \varphi u \quad (u \in L^p[0,1])$$

operátor triviálisan lineáris, ill. duálisa az A_q operátor, hiszen bármely $u \in L^p[0,1]$ és $v \in L^q[0,1]$ esetén

$$(A_p^* v)(u) = \int_0^1 (A_p u) v = \int_0^1 \varphi u v = \int_0^1 u (A_q v) = (A_q v)(u).$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor nyilvánvalóan $\mathcal{N}(A)$ és $\mathcal{R}(A)$ altér \mathcal{X} -ben, ill. \mathcal{Y} -ban továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ esetén $\mathcal{N}(A)$ zárt altér (vö. pl. [6]). Az $\mathcal{R}(A)$ altér azonban nem mindig zárt altere \mathcal{Y} -nak. Az

$$A : l_\infty \rightarrow l_\infty, \quad Au := \left(\frac{u_n}{n} \right)$$

operátor esetében

- bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ill. $(u_n), (v_n) \in l_\infty$ esetén

$$A(\alpha(u_n) + \beta(v_n)) = \left(\frac{\alpha u_n + \beta v_n}{n} \right) = \alpha \left(\frac{u_n}{n} \right) + \beta \left(\frac{v_n}{n} \right) = \alpha A(u_n) + \beta A(v_n),$$

azaz A lineáris;

- tetszőleges $u \in l_\infty$ sorozatra

$$\|Au\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} \left| \frac{u_n}{n} \right| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty,$$

tehát A korlátos és így folytonos is: $A \in L(l_\infty)$ (következésképpen $\mathcal{N}(A)$ zárt);

- ha

$$u_n := (1, \dots, n, 0, \dots, 0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $(u_n) \in L_\infty$ és a

$$v_n := (1, \dots, 1, 0, \dots, 0, \dots) \quad (n \in \mathbb{N})$$

vektorral $A(u_n) = (v_n)$. Ennélfogva $(v_n) \in \mathcal{R}(A)$ és

$$v_n \longrightarrow v := (1, \dots, 1, \dots) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Így $v \notin \mathcal{R}(A)$, hiszen $u := A^{-1}v = (1, \dots, n, \dots) \notin l_\infty$.

Igaz viszont a következő

1.2.1. tétel. Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér. Ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

1. $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ és $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A^*)^\perp$;
2. ha $\mathcal{R}(A)$ zárt altere \mathcal{Y} -nak, akkor még

$$\dim((\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A))^*) = \dim(\mathcal{R}(A)^\perp) = \dim(\mathcal{N}(A^*))$$

is igaz.

Biz.

1. Világos, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén igaz az

$$f \in \mathcal{R}(A)^\perp \iff f(Ax) = A^*f(x) = 0 \iff A^*f = 0 \iff f \in \mathcal{N}(A^*).$$

Továbbá

- $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{N}(A^*)^\perp$, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$, ill. $v := Au \in \mathcal{R}(A)$ esetén, ha $f \in \mathcal{N}(A^*)$, akkor

$$f(v) = f(Au) = (A^*f)(u) = 0,$$

ahonnan $v \in \mathcal{N}(A^*)^\perp$ következik;

- $\overline{\mathcal{R}(A)} \supset \mathcal{N}(A^*)^\perp$, hiszen $U := \overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{Y}$ zárt altér, ennél fogva (vö. Hahn-Banach-tétel egyik következménye) bármely $v \notin U$ esetén van olyan $f \in \mathcal{Y}^*$ funkcionál, hogy $f(v) \neq 0$ ($v \in \mathcal{Y}^*$). Így tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ vektorra

$$(A^*f)(x) = f(Ax) = 0,$$

azaz $f \in \mathcal{N}(A^*)$. Világos, hogy $f \notin \mathcal{N}(A^*)^\perp$, hiszen ellenkező esetben $f(v) = 0$ lenne. Mindez azt jelenti, hogy $v \notin U$, ahonnan $v \notin \mathcal{N}(A^*)^\perp$ és így

$$\mathcal{N}(A^*)^\perp \subset U = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

következik.

2. Az előző állítás következménye. ■

Az 1.2.1. tételbeli állítás következményeként elmondható, hogy ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zárt képterű operátor, úgy valamely $Au = v$ egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha igaz az

$$A^*f = 0 \quad \implies \quad f(v) = 0$$

implikáció.

1.2.4. definíció. Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátort **véges rangúnak** nevezünk, ha $\mathcal{R}(A)$ képtere véges dimenziós. Ha A véges rangú, akkor a $\dim(\mathcal{R}(A))$ számot az A operátor **rangjának** nevezzük.

1.2.11. példa. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és $f \in \mathcal{X}^*$, ill. $y \in \mathcal{Y}$, akkor az

$$f \otimes y : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad (f \otimes y)(x) := \langle f, x \rangle y$$

operátor nyilván véges rangú: $\dim(\mathcal{R}(f \otimes y)) = 1$.

Nem nehéz belátni, hogy ha az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátor esetén \mathcal{X} vagy \mathcal{Y} véges dimenziós, akkor A véges rangú.

Lineáris algebrai megfontolásokra támaszkodva elmondható, hogy egy vektortér minden alterének van direkt kiegészítője. Sőt, ha \mathcal{X} Hilbert-tér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor

$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{A}^\perp.$$

Az ortogonális kiegészítő zárt altér, továbbá $(\mathcal{A}^\perp)^\perp = \overline{\mathcal{A}}$. Ha \mathcal{X} Banach-tér, akkor bármely zárt $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ alterének van ugyan direkt kiegészítője, azonban ez a kiegészítő altér nem feltétlenül zárt. Így pl. a $c_0 \subset l_\infty$ alterének nincsen zárt direkt kiegészítője l_∞ -ben, ill. a

$$\mathfrak{C}[0,1] \subset L^\infty[0,1]$$

alternek sincsen zárt direkt kiegészítője (vö. pl. [19, 11]).

1.2.2. tétel. Legyen \mathcal{X} Banach-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ pedig véges dimenziós altér: $\dim(\mathcal{A}) < \infty$. Ekkor \mathcal{A} -nak van \mathcal{X} -beli zárt direkt kiegészítője, azaz alkalmas zárt $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

teljesül.

Biz. Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ véges dimenziós, ezért alkalmas $d \in \mathbb{N}$ esetén \mathcal{A} -ban van d -elemű bázis: b_1, \dots, b_d . Így alkalmas $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ esetén

$$u = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_d b_d.$$

Jelölje f_1, \dots, f_d a megfelelő Auerbach-bázist (vö. [10], 70. old.), azaz legyen $\{f_1, \dots, f_d\} \subset \mathcal{A}^*$ olyan, amelyre

$$f_k(b_l) = \delta_{kl} \quad (k, l \in \{1, \dots, d\},$$

ahol \mathcal{A}^* jelöli az \mathcal{A} altér duálisát. Ekkor (vö. Hahn-Banach-tétel harmadik következménye) alkalmas f_1, \dots, f_d (\mathcal{X}^* -beli) funkcionálok esetén az

$$Ax := \sum_{k=1}^d \langle f_k, x \rangle u_k \quad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos projekció. Ha most $\mathcal{B} := \mathcal{N}(A)$, akkor A folytonossága következtében \mathcal{B} zárt altér \mathcal{X} -ben, továbbá $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, hiszen ellenkező esetben valamely $v \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ esetén $v \neq 0$, ahonnan

$$v \in \mathcal{B} = \mathcal{N}(A),$$

azaz $A(v) = 0$ következik, ez pedig $v \in \mathcal{X}$ miatt azt jelenti, hogy

$$0 = A(v) = vz,$$

ami ellentmond annak, hogy $v \neq 0$. Mivel bármely $u \in \mathcal{B}$ esetén $Au \in \mathcal{B}$, ill.

$$A(u - Pu) = Au - A^2u = Au - Au = 0$$

következtében $u - Au \in \mathcal{B}$, ezért

$$u = (u - Au) + Au$$

a kívánt felbontás. ■

Ha tehát az \mathcal{X} Banach-tér, ill. $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér esetén $\text{codim}(\mathcal{A}) < +\infty$, akkor \mathcal{A} -nak van \mathcal{X} -beli zárt direkt kiegészítője, ui. ha a $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altérre $\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, akkor

$$\dim(\mathcal{B}) = \text{codim}(\mathcal{A}) < +\infty,$$

így \mathcal{B} zárt \mathcal{X} -ben.

1.3. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek.

1.3.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetén az $A \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operátort **kompaktnak** nevezzük, ha bármely $H \subset \mathcal{X}$ korlátos halmaz $A[H] \subset \mathcal{Y}$ képe prekompakt halmaz. Ha az A operátor még folytonos is, akkor A -t **teljesen folytonosnak** nevezzük.

1.3.1. példa. A

$$B : l_2 \rightarrow l_2, \quad Bu := (u_{n+1})$$

operátor nem kompakt, ui. az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j \in \mathbb{N}} \in l_2 \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, és az (Ae_n) sorozatnak nincsen Cauchy-féle, így konvergens részsorozata, hiszen

$$Ae_n = e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{és így} \quad \|Ae_m - Ae_n\|_2 = 2 \quad (m \neq n).$$

A kompakt, lineáris $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ operátorok halmazának jelölésére a

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : A \text{ kompakt}\}$$

szimbólumot használjuk, az $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetben $K(\mathcal{X}, \mathcal{X})$ -et pedig $K(\mathcal{X})$ -szel rövidítjük. Belátható (vö. [6], 788. old), hogy $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, továbbá (vö. [6], 790. old.), hogy minden véges rangú operátor kompakt.

Belátható (vö. [6], 790-793. old.), hogy minden véges rangú, folytonos lineáris operátor kompakt, továbbá ha valamely korlátos lineáris operátor tetszőleges pontossággal közelíthető véges rangú operátorokkal az indukált operátornormában, akkor a szóban forgó operátor kompakt.

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok duálisával kapcsolatban.

1.3.1. tétel. (Schauder). Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ekkor

$$A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \quad \Longleftrightarrow \quad A^* \in K(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha az A^* duális operátor kompakt.

Biz. Vö. [6], 799-801. old. ■

1.4. Fredholm-operátorok

Ismeretes, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, úgy az A (lineáris) operátor pontosan akkor izomorfizmus, ha injektív és szürjektív, azaz ha

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \quad \text{és} \quad A[\mathcal{X}] = \mathcal{Y}$$

teljesül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}] = \{0\}$. Így az A lineáris operátor izomorfiája azzal egyenértékű, hogy

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \dim(\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}]).$$

1.4.1. definíció. Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér esetén azt mondjuk

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Fredholm-operátor (jelben $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$), ha

$$n := \dim \mathcal{N}(A) = \dim A^{-1}[\{0\}] < +\infty \quad \text{és} \quad r := \text{codim } \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{Y}/A[\mathcal{X}] < +\infty,$$

továbbá az $n - r$ számot az A **indexének** nevezzük: $\text{ind}(A) := n - r$.

1.4.1. példa. Ha \mathcal{X} és \mathcal{Y} véges dimenziós: $\dim \mathcal{X} =: m \in \mathbb{N}$, $\dim \mathcal{Y} =: n \in \mathbb{N}$, akkor $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ $(m - n)$ -indexű Fredholm-operátor, ui.

$$\begin{aligned} \text{ind}(A) &= \dim \mathcal{N}(A) - \text{codim } \mathcal{R}(A) = \\ &= (\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{R}(A)) - (\dim \mathcal{Y} - \dim \mathcal{R}(A)) = \\ &= \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{Y} = m - n. \end{aligned}$$

1.4.2. példa. A balra való eltolás

$$B : l_{\infty} \rightarrow l_{\infty}, \quad (Bu)_n := u_{n+1}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(B) = e_1 \quad \text{and} \quad \mathcal{R}(B) = l_{\infty}$$

ennélfogva $\dim \mathcal{N}(B) = 1$, $\text{codim } \mathcal{R}(B) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\text{ind}(B) = 1$.

1.4.3. példa. A jobbra való eltolás

$$J : l_\infty \rightarrow l_\infty, \quad (Ju)_n := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ u_{n-1} & (n > 0) \end{cases}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(J) = \{0\} \quad \text{és} \quad \text{codim } \mathcal{R}(J) = \dim \mathcal{N}(B) = 1$$

és így

$$\text{ind}(J) = -1$$

$\mathcal{R}(J)$ zárt, hiszen tartalmaz minden olyan $v = (v_1, v_2, v_2, \dots) \in l_\infty$ sorozatot, amelyre $v_1 = 0$.

1.4.4. példa. Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}^1[a, b]$ és $\mathcal{Y} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$, ill.

$$\|u\|_{\mathcal{X}} := \max \{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\} \quad (u \in \mathcal{X}) \quad \text{és} \quad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty,$$

akkor az

$$Au := u' \quad (x \in \mathcal{X}).$$

operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \quad \text{ind}(A) = 1,$$

hiszen

- bármely $v \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ esetén az $u' = v$ egyenletnek van $\mathfrak{C}_{\mathbb{R}}^1[a, b]$ -ban megoldása:

$$u(x) = \int_a^x v(t) dt \quad (t \in [a, b])$$

így $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$, ahonnan $\text{codim } \mathcal{R}(A) = 0$ következik;

- továbbá $v = 0$ esetén $u = \text{const}$, és így

$$\dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

Belátható (vö. [20], 366-367. old.), hogy a Fredholm-operátorok rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.

1. Ha $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\text{ind}(A) = 0$, továbbá $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, akkor A **invertálható**, azaz

$$A \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \exists T^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})\}.$$

2. Bármely $A \in \mathcal{K}(X)$ operátorra $I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ és $\text{ind}(A - I) = 0$.

3. Ha $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}$ zárt altér / A folytonossága következtében $\mathcal{N}(A)$ is zárt/, akkor alkalmas $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ zárt alterekkel

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0 \quad \text{és} \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$

továbbá

$$\dim(\mathcal{Y}_0) = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \quad \text{és} \quad \text{codim}(\mathcal{X}_0) = \dim(\mathcal{N}(A)) < +\infty.$$

4. Ha $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az A^* duális operátorra is $A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$, továbbá

$$\dim \mathcal{N}(A^*) = \text{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \quad \text{és} \quad \text{codim} \mathcal{R}(A^*) = \dim \mathcal{N}(A) < +\infty.$$

5. Az $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pontosan akkor bijektív, ha $\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$. Így a Banach-féle homeomorfia-tétel következményeként tetszőleges $b \in \mathcal{Y}$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha $\text{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$ teljesül.

A fenti $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, ill. $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ zárt alterek menti

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(A), \quad \text{ill.} \quad Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(A)$$

folytonos projekciók és a kiegészítő alterek az alábbi módon konstruálhatók meg (vö. [20], 369. old.). Válasszunk egy-egy bázist $\mathcal{N}(A)$ -ban és $\mathcal{N}(A^*)$ -ban:

$$\{x_1, \dots, x_n\} \subset \mathcal{N}(A), \quad \{g_1, \dots, g_m\} \subset \mathcal{N}(A^*),$$

majd legyenek

$$f_1, \dots, f_n \in \mathcal{X}^* \quad \text{és} \quad y_1, \dots, y_m \in \mathcal{Y}$$

olyan funkcionálok, amelyekre

$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}) \quad \text{és} \quad \langle g_i, y_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \dots, m\})$$

teljesül. Ez a korábban említettek szerint megtehető. Így az

$$\{f_j, x_j\}, \quad \text{ill.} \quad \{g_j, y_j\}$$

biortogonális rendszerekkel a

$$Px := \sum_{k=1}^n \langle f_k, x \rangle x_k \quad (x \in \mathcal{X}) \quad \text{és a} \quad Qy := y - \sum_{l=1}^m \langle g_l, y \rangle y_l \quad (y \in \mathcal{Y})$$

operátorok olyan projekciók, amelyek folytonosak (vö. zárt gráfra vonatkozó tétel), továbbá

1. $I - P$ az \mathcal{X} -ről az $\mathcal{X}_0 = (I - P)[\mathcal{X}]$ altérre
2. $I - Q$ pedig \mathcal{Y} -ről az $\mathcal{Y}_0 = (I - Q)[\mathcal{Y}]$ altérre

való projekció.

1.5. Az implicit függvényre vonatkozó tétel

A továbbiakban legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $\Omega \subset \mathcal{X}$, és $\Lambda \subset \mathbb{R}$ egy-egy nyílt halmaz.

1.5.1. tétel. Ha $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ és $z_0 \in \mathcal{Y}$, továbbá az $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$ leképezés teljesíti az

$$(i) \quad F(x_0, \lambda_0) = z_0 \quad \text{és} \quad (ii) \quad \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

feltételeket, akkor alkalmas $\exists \delta > 0$ esetén van olyan

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \rightarrow K_\varepsilon(x_0) \quad / \phi \in \mathfrak{C}^k /$$

leképezés (**implicit függvény**), amelyre

- $\phi(\lambda_0) = x_0$,
- a $K_\varepsilon(x_0) \times K_\delta(\lambda_0)$ környezetben $F(x, \lambda) = z_0 \iff x = \phi(\lambda)$,
- $\phi'(\lambda_0) = -(\partial_1 F(x_0, \lambda_0))^{-1} \circ \partial_2 F(x_0, \lambda_0)$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel „konstruktív”, ui. a

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \rightarrow K_\varepsilon(x_0)$$

függvény a következő numerikus (módosított Newton-) módszer eredményeként adódik (vö. [5], 523. old., [20], 151. old.):

$$\begin{aligned} \phi_1(\lambda) &:= x_0, & \phi_{n+1}(\lambda) &:= \phi_n(\lambda) - [\partial_1 F(\phi_n, \lambda_0)]^{-1} \circ \{F(\phi_n(\lambda), \lambda) - z_0\} \\ & & (n \in \mathbb{N}; \lambda \in K_\delta(\lambda_0)). \end{aligned}$$

1.5.1. példa. Ha $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F_1(x, \lambda) := x^2 - \lambda, \quad F_2(x, \lambda) := x^2 - \lambda^2, \quad F_3(x, \lambda) := x^3 - \lambda.$$

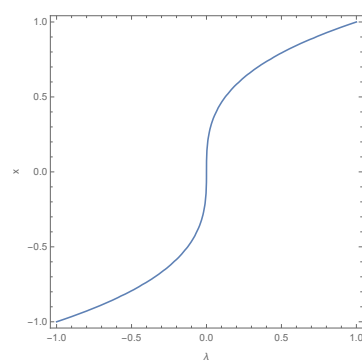
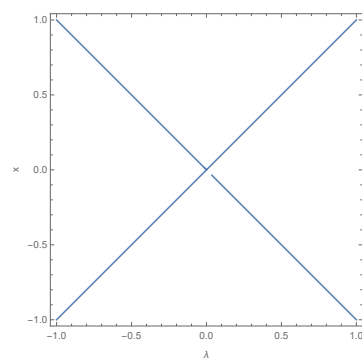
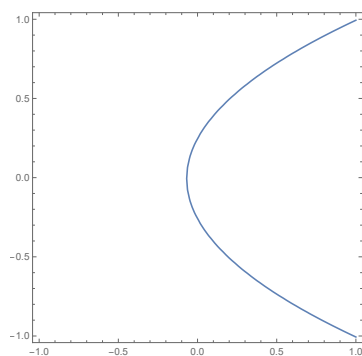
akkor

$$F_n(0,0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 F_n(0,0) = 0,$$

következésképpen nem teljesül az 1.5.1. tételben a (ii) feltétel (vö. (1.5.1) ábra). Nem csoda, hogy az

$$F_n(x, \lambda) = 0$$

egyenletből nem fejezhető ki x a λ (sima) függvényeként.

1.5.1. ábra. Az $F_n^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^2$ ösképek alakja.

Előfordulhat, hogy

$$\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

de a $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor szürjektív. Ebben az esetben az implicit függvényre vonatkozó tétel alábbi variánsa igazolható.

1.5.1. tétel. Legyen $k \in \mathbb{N}$ $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$, $z_0 \in \mathcal{Y}$. Ha az $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$ függvényre

(i) $F(x_0, \lambda_0) = z_0$ és

(ii) $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ szürjektív úgy, hogy alkalmas $P \in L(\mathcal{X})$ projekcióval

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) \quad \text{és} \quad \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)),$$

akkor alkalmas $\rho > 0$ szám, ill.

$$U := K(x_0) \subset \mathcal{R}(P) \quad \text{és} \quad V := K(z_0) \subset \mathcal{N}(P)$$

környezetek esetén pontosan egy olyan

$$\phi : U \times K_\rho(\lambda_0) \rightarrow V, \quad \phi \in \mathfrak{C}^k$$

függvény van, amelyre

$$F(x_0 + \xi + \phi(\xi, \lambda), \lambda) = z_0 \quad ((\xi, \lambda) \in U \times K_\rho(\lambda_0))$$

teljesül.

Biz. Legyen $\mathcal{X} =: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R}(P) \quad \text{és} \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(P).$$

Ekkor az

$$L := \partial_1 F(x_0, \lambda_0)|_{\mathcal{X}_2} : \mathcal{X}_2 \rightarrow \mathcal{Y}$$

operátor bijektív, ui. ha valamely $\eta \in \mathcal{X}_2$ vektorra $L\eta = 0$, akkor $\eta \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)) = \mathcal{X}_1$, ennél fogva $\eta = 0$. Legyen most

$$G(\eta, \xi, \lambda) := F(x_0 + \xi + \eta, \lambda) \quad (\xi \in \mathcal{X}_1, \eta \in \mathcal{X}_2 : x_0 + \xi + \eta \in \Omega, \lambda \in \Lambda).$$

Ekkor

$$G(0, 0, \lambda_0) = z_0 \quad \text{és} \quad \partial_1 G(0, 0, \lambda) = \partial_1 F(x_0, \lambda)|_{\mathcal{X}_2} = L \in GL(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}),$$

következésképpen G -re teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó tétel feltételei: a

$$G(\eta, \xi, \lambda) = z_0$$

egyenletből az első változó kifejezhető a második, ill. a harmadik változó függvényeként:

$\eta = \phi(\xi, \lambda)$. ■

2. fejezet

Bifurkációk

Ebben a bevezetjük a bifurkáció fogalmát, majd példákon keresztül szemléltetünk néhány egyszerűbb esetet.

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek esetén legyen $\emptyset \neq \Omega \subset \mathcal{X}$ és $\emptyset \neq \Lambda \subset \mathbb{R}$ az $x_0 \in \mathcal{X}$ és a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ egy-egy környezete, majd tegyük fel, hogy az

$$F : \Omega \times \Lambda \rightarrow \mathcal{Y}, \quad F \in \mathfrak{C}^2$$

leképezésre

$$F(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{2.0.1}$$

teljesül. Feladatunk az (x_0, λ_0) pont egy környezetében az

$$S := F^{-1}[\{0\}] = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda : F(x, \lambda) = 0\},$$

megoldáshalmaz vizsgálata, ill. a λ **paramétertől** függő

$$S_\lambda := \{x \in \mathcal{X} : (x, \lambda) \in S\} \tag{2.0.2}$$

halmaz szerkezetének feltárása.

2.0.1. definíció. Azt mondjuk, hogy a (x_0, λ_0) pár **bifurkációs pont**, ill. λ_0 **kritikus érték**, amelynél **bifurkáció lép fel**, ha (x_0, λ_0) tetszőleges környezetében az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{2.0.3}$$

egyenlet megoldható, pontosabban alkalmas

$$(u_n, \lambda_n), (v_n, \lambda_n) \in \Omega \times \Lambda \quad (u_n \neq v_n) \quad (n \in \mathbb{N}) :$$

sorozatra

$$F(u_n, \lambda_n) = 0 = F(v_n, \lambda_n) \quad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n, \lambda_n) = (x_0, \lambda_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n, \lambda_n).$$

2.0.2. példa. A $(0,0)$ pár az

$$F_{\pm} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\pm}(x, \lambda) := \pm x^2 + \lambda.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **nyereg-csomó-bifurkáció**). A $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétertől függően a szub-, ill. a szuperkritikus esetben a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda}, \sqrt{-\lambda}\} & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda = 0), \\ \emptyset & (\lambda > 0); \end{cases} \quad \text{ill.} \quad S_{\lambda} = \begin{cases} \emptyset & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda = 0), \\ \{-\sqrt{\lambda}, \sqrt{\lambda}\} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

2.0.3. példa. A $(0,1)$ pár az

$$F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F(x, \lambda) := \lambda x(1 - x) - x.$$

leképezés bifurkációs pontja (**transzkritikus bifurkáció**). A $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \in \{0; 1\}), \\ \{0, 1 - \frac{1}{\lambda}\} & (\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0; 1\}). \end{cases}$$

2.0.4. példa. A $(0,0)$ pár az

$$F_{\pm} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad F_{\pm}(x, \lambda) := \lambda x \pm x^3.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **vasvilla-bifurkáció**). A $\lambda \in \mathbb{R}$ paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_{\lambda} = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda}, 0, \sqrt{-\lambda}\} & (\lambda < 0), \\ \{0\} & (\lambda \geq 0), \end{cases} \quad \text{ill.} \quad S_{\lambda} = \begin{cases} \{0\} & (\lambda \leq 0), \\ \{-\sqrt{\lambda}, 0, \sqrt{\lambda}\} & (\lambda > 0). \end{cases}$$

2.0.5. példa. Ha

$$A \in L(\mathcal{X}), \quad \mu \in \mathbb{R} : \quad \mathcal{N}(A - \mu I) \neq \{0\},$$

akkor a $(0, \mu)$ pár az

$$F(x, \lambda) := Ax - \lambda x \quad ((x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda),$$

leképezés bifurkációs pontja, hiszen bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u \in \mathcal{X}$, $\|u\| = \varepsilon$ vektor, amelyre $Au = \mu u$ (**lineáris sajátérték-feladat**).

2.0.6. példa. Ha valamely az (x, y) -síkon lévő L hosszúságú **rugalmas szál** egyik végét rögzítjük az origóban, a másik vége szabadon mozoghat, és az x -tengely mentén hat rá erő, akkor a rugalmas szál mozgását leíró peremérték-feladat a következő

$$\vartheta''(s) + \lambda \sin(\vartheta(s)) = 0 \quad (s \in [0, L]), \quad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0,$$

ahol $\vartheta(s)$ jelöli a szál és az x -tengely közötti szöget az $(x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$ pontban. A $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$ egyszerűsítő feltevéssel lineáris peremérték-feladatot kapunk:

$$\vartheta''(s) + \lambda \vartheta(s) = 0 \quad (s \in [0, L]), \quad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0.$$

Látható, hogy az iménti peremérték-feladat

$$\vartheta(s) := 0 \quad (s \in [0, L])$$

triviális megoldásából a λ paraméter változásával végtelen sok megoldás „bifurkálódik”:

$$\vartheta_n(s) := \gamma \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \quad \left(n \in \mathbb{N}_0, 0 \neq \gamma \in \mathbb{R}, \lambda_n := \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \right).$$

A rugalmas szálra vonatkozó feladat absztrakt megfogalmazása a következő. Határozzuk meg az

$$F(\vartheta, \lambda) = 0$$

egyenlet bifurkációs pontjait, ahol

$$F : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad F(\vartheta, \lambda) := \vartheta'' + \lambda \sin(\vartheta),$$

ill.

$$\mathcal{X} := \{ \vartheta \in \mathcal{C}^2[0, L] : \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0 \}, \quad \|\vartheta\|_{\mathcal{X}} := \max \{ \|\vartheta\|_{\infty}, \|\vartheta'\|_{\infty}, \|\vartheta''\|_{\infty} \}$$

és

$$\mathcal{Y} := \mathcal{C}[0, L], \quad \|\vartheta\|_{\mathcal{Y}} := \|\vartheta\|_{\infty}.$$

Az alábbiakban a bifurkáció fellépésének szükséges feltételét fogalmazzuk meg.

2.0.2. tétel. Ha az $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek, akkor F első változó szerinti Fréchet-driváltja nem invertálható: $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

Biz. H $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$ nem invertálható operátor (nincs folytonos inverze), akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében bármely $\lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda$ esetén az x kifejezhető λ függvényeként, azaz (x_0, λ_0) nem lehet bifurkációs pont. ■

2.0.7. példa. (Lineáris sajátérték-feladat). Ha $A \in L(\mathcal{X})$ és $F(x, \lambda) := Ax - \lambda x$, akkor – mint ahogy azt fentebb láttuk – az A operátor tetszőleges sajátértéke esetén a $(0, \mu)$ pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek. Nem csoda tehát, hogy

$$\partial_1 F(0, \mu) = A - \mu I \notin GL(\mathcal{X}).$$

2.0.8. példa. (Nemlineáris sajátérték-feladat). Legyen $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $0 \in \Omega$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathcal{X})$ függvényre $f(0) = 0$. Ekkor az

$$f(x) = \mu x$$

nemlineáris sajátérték-feladat az

$$F(x, \lambda) := f(x) - \lambda x$$

leképezés segítségével írható le. Világos, hogy a $(0, \mu)$ pár megoldása az $f(x) - \lambda x = 0$ egyenletnek. Ha $(0, \mu)$ bifurkációs pont, akkor a fentiekből $\mu \in \sigma(f'(0))$ következik, hiszen

$$\partial_1 F(0, \mu) = f'(0) - \mu I.$$

Megjegyezzük, hogy a $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$ operátor nem invertálható volta még nem elégséges a bifurkáció fellépéséhez, mint ahogy azt az alábbi példa is mutatja.

2.0.9. példa. Ha $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} := \mathbb{R}^2$, továbbá

$$F(x, y, \lambda) := (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3)),$$

akkor

$$\partial_{(x,y)} F(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

A $(0,0,1)$ pár nem bifurkációs pontja F -nek, ui. az

$$(0,0) = F(x, y, \lambda) = (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3))$$

egyenlőség első komponensét y -nal, a másodikat $(-x)$ -szel szorozva azt kapjuk, hogy

$$(0,0) = (xy - \lambda(yx - y^4), -xy + \lambda(yx + x^4)).$$

Az iménti két egyenlőség összeadásával $0 = \lambda(x^4 + y^4)$ adódik, ami azt jelenti, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $F(x, y, \lambda) = (0,0)$, azaz $(x, y) = (0,0)$.

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-redukció

Ebben a fejezetben egy olyan módszert mutatunk be, amelynek segítségével egy végtelen dimenziós feladatát véges dimenziósra tudunk redukálni. A „lényeges” koordinátákra való vetítéssel vezetjük vissza a (2.0.3) végtelen dimenziós egyenletrendszert véges dimenziós egyenletrendszerre, az ún. **bifurkációs egyenletre**.

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek esetén legyen

$$A := \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

ill. tegyük fel, hogy a (2.0.3) egyenletnek van triviális megoldása, azaz (2.0.1) teljesül. Világos, hogy ha A invertálható operátor, akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel alkalmazásával a (2.0.3) egyenletet meg tudjuk oldani: az (2.0.3) egyenletnek az (x_0, λ_0) pont egy környezetében van nemtriviális megoldása. Igen gyakori azonban az az eset, amikor az A operátor nem invertálható. Ekkor, mint ahogy a következőkben látni fogjuk, néhány változótól eltekintve a megoldás nem reménytelen.

Mivel A Fredholm-operátor, ezért \mathcal{X} és \mathcal{Y} felbontható direkt kiegészítő alterekre:

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$

ahol a $P \in L(\mathcal{X})$, $Q \in L(\mathcal{Y})$ ún. **Ljapunov-Schmidt-projekciókra**

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(A) \quad \text{és} \quad Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(A),$$

ill. alkalmas

$$x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}; \quad y_1, \dots, y_m \in \mathcal{Y}$$

lineárisan független vektorok esetén

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\} \quad \text{és} \quad (I - Q)[\mathcal{Y}] = \text{span}\{y_1, \dots, y_m\}.$$

3.0.3. tétel. Tetszőleges $x \in \Omega$ vektornak a fenti projekciókkal való

$$x = x_0 + v + w$$

felbontása esetén, ahol $v \in \mathcal{N}(A)$ és $w \in \mathcal{X}_0$ a (2.0.3) egyenlet egyenértékű a

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0 \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0. \quad (3.0.1)$$

egyenletekből álló rendszerrel.

Biz.

1. lépés Világos, hogy a (2.0.3), azaz az $F(x, \lambda) = 0$ egyenlet következménye

$$Q \circ F(x, \lambda) = 0 \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x, \lambda) = 0.$$

2. lépés Ha pedig (3.0.1) teljesül, akkor nyilvánvalóan

$$(I - Q) \circ F(x, \lambda) = Q \circ F(x, \lambda)$$

is igaz, így

$$Q \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{R}(A), \quad \text{és} \quad (I - Q) \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{Y}_0,$$

ahonnan $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{Y}_0 = \{0\}$ figyelembe vételével $F(x, \lambda) = 0$ következik. ■

Így a (2.0.3) egyenlet helyett külön-külön kell megoldanunk a végtelen dimenziós

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0,$$

ill. a véges dimenziós

$$(I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0$$

egyenletet. A fenti dimenzió végtelen, illetve véges voltát az indokolja, hogy a $v \in \mathcal{N}(A)$ vektor „végesen generált”, a $w \in \mathcal{X}_0$ vektor pedig nem. Jelölje $U \subset \mathbb{R}^n$ halmaz a 0 egy környezetét, ekkor a 1.5.1. tételt a

$$G : \mathcal{N}(A) \times U \times \Lambda \rightarrow \mathcal{R}(Q), \quad G(w, s, \lambda) := Q \circ F \left(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + w, \lambda \right),$$

függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q)).$$

Ennélfogva

$$w = \phi(s, \lambda),$$

ahol a

$$\phi : S \times \Lambda_0 \rightarrow \mathcal{X}_0 \quad \text{függvényre} \quad \phi(0, \lambda_0) = 0$$

és

$$Q \circ F \left(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) = 0 \quad ((s, \lambda) \in S \times \Lambda_0),$$

ahol $S \subset \mathbb{R}^n$, ill. $\Lambda_0 \subset \Lambda$ egy-egy, a 0-t, ill. λ_0 -at tartalmazó konvex, nyílt halmaz.

3.0.4. tétel. A fenti ϕ függvényre $\partial_1 \phi(0, \lambda_0) = 0$ teljesül.

Biz. Ha deriváljuk az

$$Q \circ F \left(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az s_k változók szerint, akkor $s = 0$ -t, ill. $\lambda = \lambda_0$ -t helyettesítve az $x_k \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0))$ vektorral azt kapjuk, hogy

$$0 = Q \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0)[x_k + \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0)] = Q \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0).$$

Így $A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q))$ következtében

$$\partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0) = 0 \quad (k \in \{1, \dots, n\}),$$

ennél fogva $\partial_1 \phi(0, \lambda_0) = 0$. ■

Így tehát a (2.0.3) egyenlet helyett egy m egyenletből álló

$$f(s, \lambda) = 0, \tag{3.0.2}$$

rendszert, ún. **bifurkációs egyenletet** kell megoldanunk, ahol az n -, pontosabban $(n + 1)$ -változós f függvényre

$$f = (f_1, \dots, f_m), \quad f_l : S \times \Lambda_0 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_l \in \mathfrak{C}^k \quad (l \in \{1, \dots, m\})$$

és

$$\sum_{l=1}^m f_l(s, \lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right)$$

teljesül. Világos, hogy ez a függvény deriválható, továbbá igaz a

3.0.5. tétel. A bifurkációs egyenletet definiáló f függvényre $\partial_1 f(0, \lambda_0) = 0$ teljesül.

Biz. Ha deriváljuk a

$$\sum_{l=1}^m f_l(s, \lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az s_k változók szerint, akkot $s = 0$ -t, ill. $\lambda = \lambda_0$ -t helyettesítve tetszőleges $k \in \{1, \dots, n\}$ esetén azt kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^m \partial_{s_k} f_l(s, \lambda) y_l = (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0)[x_k + \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0)] = \\ &= (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) x_k + (I - Q) \circ \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \partial_{s_k} \phi(0, \lambda_0) = \\ &= 0 + 0 = 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4. fejezet

Alkalmazások

Az alábbiakban a Ljapunov-Schmidt-módszert fogjuk használni peremérték-feladatok megoldhatóságának vizsgálatára.

4.1. Egy elsőrendű peremérték-feladat

Ebben a pontban adott $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$f := (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvény esetén az

$$\dot{x}(t) = \lambda f(t, x(t)) \quad (t \in (0, 1)), \quad x(0) = x(1) \quad (4.1.1)$$

peremérték-feladat megoldhatóságának vizsgálatával foglalkozunk: feltételeket adunk meg a peremérték-feladat megoldhatóságára.

4.1.1. tétel. Tegyük fel, hogy f folytonos

$$\partial_j f_i \in \mathfrak{C} \quad (i, j \in \{1, \dots, n\}),$$

továbbá valamely $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\int_0^1 f(s, v) \, ds = 0, \quad \det \left[\int_0^1 \partial_j f_i(s, v) \, ds \right] \neq 0 \quad (i \in \{1, \dots, n\}),$$

teljesül. Ekkor alkalmas $\delta > 0$ számra és

$$\Phi : [0, 1] \times (-\delta, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

differenciálható függvényre $\Phi(\cdot, 0) = v$, és a $\Phi(\cdot, \lambda)$ függvény megoldása a (4.1.1) peremérték-feladatnak.

Biz. Világos, hogy ha $\lambda := 0$, akkor a (4.1.1) peremérték-feladatnak van (triviális) megoldása,

hiszen bármely $c \in \mathbb{R}^n$ esetén a

$$\varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(t) := c$$

függvény megoldás. Legyen most

$$\mathcal{X} := \{x \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}^n) : x(0) = x(1)\} \quad \text{és} \quad \mathcal{Y} := \{y \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^n) : y(0) = 0\},$$

majd értelmezzük az $L : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$, ill. $N : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ lineáris, ill. nemlineáris operátorokat az alábbi módon:

$$(Lu)(t) := u(t) - u(0) \quad (u \in \mathcal{X}, t \in [0,1]), \quad (Nu)(t) := \int_0^t f(s, u(s)) \, ds \quad (u \in \mathcal{X}, t \in [0,1]).$$

Látható, hogy valamely $\phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény pontosan akkor lesz a (4.1.1) peremértékfeladat megoldása, ha megoldása az

$$F(x, \lambda) := Lx - N(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

egyenletnek. Mivel az L operátor lineáris, és folytonos, ezért deriválható (vö. [1], 1. fejezet), továbbá Fréchet-deriváltjára

$$dL(x)h = Lh \quad (h \in \mathcal{X}).$$

Az N nemlineáris operátor is Fréchet-differenciálható, és deriváltjára

$$(dN(x)h)(t) = \int_0^t \partial_2 f(s, x(s))h(s) \, ds \quad (h \in \mathcal{X}, t \in [0,1]).$$

Így a

$$\partial_1 F(c, 0)h = Lh$$

operátor nem injektív és

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L) = \text{span} \{ \alpha : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n, \alpha \text{ állandófüggvény} \},$$

sőt

$$\mathcal{Y}_1 := \mathcal{R}(L) := \{y \in \mathcal{Y} : y(0) = y(1) = 0\}.$$

A

$$(Px)(t) := x(0), \quad (x \in \mathcal{X}, t \in [0,1]), \quad (Qy)(t) := y(t) - ty(1) \quad (y \in \mathcal{Y}, t \in [0,1])$$

folytonos projekciókkal az \mathcal{X} és \mathcal{Y} tér alterek direkt összegére bomlik:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2,$$

ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{N}(P) = \{x \in \mathcal{X} : x(0) = 0\}, \quad \mathcal{X}_2 := \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(L),$$

ill.

$$\mathcal{Y} := \mathcal{R}(Q) := \mathcal{R}(L), \quad \mathcal{Y}_2 := \mathcal{N}(Q) = \{y \in \mathcal{Y} : y(t) = \alpha t, \alpha \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ennélfogva L Fredholm-operátor, hiszen

$$\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathcal{X}_2 = n \quad \text{és} \quad \text{codim } \mathcal{R}(L) = \dim \mathcal{Y}_2 = n,$$

így

$$\text{ind}(L) = \dim \mathcal{N}(L) - \text{codim } \mathcal{R}(L) = n - n = 0.$$

Alkalmazható tehát Ljapunov-Schmidt-módszer. A (4.1.2) egyenlet tehát pontosan akkor megoldható, ha az

$$x = x_1 + b \quad (x_1 \in \mathcal{X}_1, b \in \mathcal{X}_2)$$

vektorokkal az

$$F_1(x_1, b, \lambda) := QL(x_1 + b) - \lambda QN(x_1 + b) = QLx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0,$$

$$F_2(x_1, b, \lambda) := (I - Q)L(x_1 + b) - \lambda(I - Q)N(x_1 + b) = 0$$

egyenletekből álló rendszer megoldható. Mivel $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{Y}_1$ és így $QLx_1 = Lx_1$, ezért

$$(I - Q)L(x_1 + b) = (I - Q)Lx_1 = Lx_1 - QLx_1 = 0.$$

Ennélfogva a (4.1.2) egyenlet az alábbi egyenletekből álló rendszerrel egyenértékű:

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, b, \lambda) &:= Lx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0, \\ F_2(x_1, b, \lambda) &:= (I - Q)N(x_1 + b) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Látható, hogy bármely $h \in \mathcal{X}_1$ esetén

$$F_1(0, b, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 F_1(0, b, 0) = Lh.$$

Ennélfogva az $\partial_1 F_1 : \mathcal{X}_1 \rightarrow \mathcal{Y}_1$ lineáris, folytonos és bijektív leképezés. Így (vö. nyílt leképezések tétele) $(\partial_1 F_1)^{-1}$ folytonos. Az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében tehát a $(b, 0) \in \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R}$ pont egy környezetében a F_1 első változója kifejezhető a második, és a harmadik változó függvényeként: alkalmas $\phi \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ függvényre

$$x_1 = \phi(b, \lambda)$$

teljesül. Ezen kívül még az is igaz, hogy

$$\phi(b, 0) = 0 \quad \text{és} \quad \partial_1 \phi(b, 0) = 0.$$

Ez azt jelenti, a megoldhatóság vizsgálata a

$$H(b, \lambda) := (I - Q)N(\phi(b, \lambda) + b) = 0$$

egyenlet az első változójának a többi változó függvényében való kifejezhetőségét jelenti. Mivel

$$\dim \mathcal{X}_2 = \dim \mathcal{Y}_2 = n < +\infty \quad \text{és} \quad H : \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

ezért az implicit függvényre vonatkozó tétel ismét alkalmazható. Ez persze olyan $v \in \mathcal{X}_2$ meglétét tételezi fel, amelyre

$$(I - Q)N(v) = t \int_0^1 f(s, v) \, ds = 0, \quad \text{azaz} \quad \int_0^1 f(s, v) \, ds = 0$$

és amelyre a

$$(I - Q)dN(v)d = t \left(\int_0^1 \partial_2 f(s, v) \, ds \right) d = ta$$

tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható d -re. Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\int_0^1 \partial_2 f(s, v) \, ds$$

mátrix invertálható. ■

4.2. Egy n -edrendű peremérték-feladat

Legyen

$$n, N \in \mathbb{N}, \quad B := [b_{ij}] \in \{1, \dots, N\} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}, \quad g, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathfrak{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Az alábbiakban az

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = g(y(t)) \quad (t \in [0, 1]), \quad (4.2.1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \dots + \sum_{j=1}^n b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (4.2.2)$$

n -edrendű, nemlineáris peremérték-feladat megoldhatóságát vizsgáljuk, ahol

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$$

(vö. [14]). Feltesszük, hogy g Lipschitz-folytonos, valamint

$$a_0(t) \neq 0 \quad (t \in [0, 1]),$$

továbbá

$$g(+\infty) := \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) \in \mathbb{R}, \quad \text{és} \quad g(-\infty) := \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) \in \mathbb{R}.$$

A vizsgálat során fontos szerepet fog játszani a

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0 \quad (t \in [0, 1]) \quad (4.2.3)$$

homogén egyenlet a (4.2.2) peremfeltételekkel. Első lépésként fogalmazzuk át a feladatot: a magasabbrendű egyenlet írjuk át elsőrendű egyenletrendszerre. Az

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} \quad A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

továbbá az

$$f(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(y) \end{bmatrix}, \quad \text{ill.} \quad B_k = \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \dots & b_{1n}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \dots & b_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \dots & b_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

jelölések bevezetésével a (4.2.3), ill. a (4.2.3) egyenlet a (4.2.2) peremértékfeltétellel következő:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) \quad (t \in [0,1]), \quad (4.2.4)$$

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (t \in [0,1]), \quad (4.2.5)$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0. \quad (4.2.6)$$

Legyen Φ a homogén egyenlet alaplátrixa, azaz

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (t \in [0,1]), \quad \Phi(0) = I,$$

ahol I jelöli az $N \times N$ méretű egységmatrixot. Ezt felhasználva még legyen

$$D := B_0 + B_1\Phi(t_1) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1).$$

Emellett még szükséges az inhomogén, lineáris egyenlet vizsgálata:

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t) \quad (t \in [0,1]). \quad (4.2.7)$$

Az állandók variálásának módszerét használva látható, hogy valamely $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény pontosan akkor lesz (4.2.7)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldása, ha

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \quad (t \in [0,1]),$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0.$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1) \left(x(0) + \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) + \dots + \\
&\quad + B_N\Phi(t_{N-1}) \left(x(0) + \int_0^{t_{N-1}} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) + \\
&\quad + B_N\Phi(1) \left(x(0) + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_N\Phi(1)x(0) + \\
&\quad + B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds.
\end{aligned}$$

Mivel

$$Dx(0) = B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0),$$

ezért az előbbi átrendezve

$$Dx(0) = - \left(B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right)$$

adódik. Tehát a

$$B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds$$

vektor benne van a D mátrix képterében. Mivel $\mathcal{R}(D) \perp \mathcal{N}(D^T)$, ezért ha $p \in \mathcal{N}(D^T)$, akkor

$$0 = p^T \left(B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds + \dots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s) \, ds \right).$$

Ezután megvizsgáljuk a (4.2.5)-(4.2.6) feladatot. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$x(t) = \Phi(t)x(0) \quad (t \in [0,1]),$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0$$

teljesül. A második egyenlet a következő alakba írható:

$$\begin{aligned} 0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \dots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0) = \\ &= Dx(0). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy x pontosan akkor megoldása a homogén peremfeladatnak, ha $x(0) \in \mathcal{N}(D)$. Ebből az is kiderült, hogy a megoldástér ugyanannyi dimenziós, mint $\mathcal{N}(D)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\dim \mathcal{N}(D) = 1$, $\hat{p} \in \mathcal{N}(D)$, $\|\hat{p}\| = 1$, majd legyen

$$u(t) := \Phi(t)\hat{p} \quad (t \in [0,1]).$$

Hogy alkalmazhassuk a Ljapunov-Schmidt-módszert, értelmezzük az alábbi operátorokat. Legyen

$$N : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \rightarrow (L^2[0,1], \mathbb{R}^n), \quad Nx := f \circ x,$$

továbbá

$$L : \mathcal{D}(L) \rightarrow (L^2[0,1], \mathbb{R}^n), \quad Lx := x' - Ax$$

ahol

$$(L^2[0,1], \mathbb{R}^n) := \{\phi \in L^2[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n\}$$

és

$$\mathcal{D}(L) := \left\{ \phi : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n : \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi' \in L^2[0,1], \sum_{k=1}^N B_k \phi(t_k) = 0 \right\}.$$

Látható, hogy az N operátor az f függvény korlátossága következtében folytonos, továbbá az L operátor \mathcal{D} értelmezési tartományában azok a függvények vannak, amelyek kielégítik a (4.2.6) peremfeltételt. Valamely $x : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényre pontosan akkor teljesül (4.2.4), ha

$$Lx = Nx. \quad (4.2.8)$$

Amennyiben L invertálható, akkor x -re az $x = L^{-1}Nx$ fixpont-egyenletet kapjuk. Tegyük fel, hogy L nem invertálható: $\mathcal{N}(L) \neq \{0\}$. Erre fogjuk a Ljapunov-Schmidt-módszert alkalmazni. Alkalmasan választott

$$Q : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{R}(L), \quad \text{és} \quad P : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{N}(L)$$

projekciók bevezetésével az A Q segítségével felírjuk a (4.2.8) operátoregyenlettel egyenértékű

$$QLx = Lx = QNx, \quad (4.2.9)$$

$$(I - Q)Lx = 0 = (I - Q)Nx \quad (4.2.10)$$

egyenletekből álló rendszert. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L), \quad \mathcal{X}_1 := \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{X}_2^\perp,$$

amivel

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2.$$

Mivel

$$\mathcal{N}(L|_{\mathcal{X}_1}) = \{0\},$$

így $L|_{\mathcal{X}_1}$ invertálható, legyen

$$M := (L|_{\mathcal{X}_1})^{-1}.$$

Értelemszerűen

$$LMh = h \quad (h \in \mathcal{R}(L)) \quad \text{és} \quad MLx = (I - P)x \quad (x \in \mathcal{D}(L)).$$

Bontsuk fel $x \in \mathcal{D}(L)$ -et az \mathcal{X}_1 és \mathcal{X}_2 alterek mentén:

$$x = \tilde{x} + \bar{x} \quad (\tilde{x} \in \mathcal{X}_1, \bar{x} \in \mathcal{X}_2).$$

Jól látható, hogy

$$Px = \bar{x}, \quad (I - P)x = \tilde{x},$$

valamint

$$ML\tilde{x} = \tilde{x}. \tag{4.2.11}$$

Ezt a (4.2.9) egyenletbe behelyettesítve és M -et alkalmazva mindkét oldalra jutunk az

$$\tilde{x} = MQN(\tilde{x} + \bar{x}), \quad 0 = (I - Q)N(\tilde{x} + \bar{x})$$

egyenletekből álló rendszerhez, amiből az első egyenlet a fixpont feladat, de a cikket követve viszont már más megközelítéssel fogjuk megoldani az egyenletrendszert.

Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben. A korábbi levezetésünkéből és L definíciójából következik, hogy $x \in \mathcal{X}_2$ pontosan akkor, ha

$$x(t) = \Phi(t)\hat{p} \quad (t \in [0, 1])$$

(ami egybevág u -nak a definíciójával, tehát $u \in \mathcal{X}_2$).

Konstruáljunk meg egy

$$\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

függvényt úgy, hogy az ő merőleges kiegészítője \mathcal{X}_2 legyen. Legyen

$$p \in \mathcal{N}(D^T) \setminus \{0\},$$

majd legyen

$$\psi(t) := \begin{cases} [(B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p & (t \in (t_{N-1}, 1]), \\ [(B_{N-1} \Phi(t_{N-1}) + B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p & (t \in (t_{N-2}, t_{N-1}]), \\ \vdots \\ [(B_2 \Phi(t_2) + \dots + B_{N-1} \Phi(t_{N-1}) + B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p & (t \in (t_1, t_2]), \\ [(B_1 \Phi(t_1) + B_2 \Phi(t_2) + \dots + B_{N-1} \Phi(t_{N-1}) + B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p & (t \in [0, t_1]). \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy

$$\psi(t) = 0 \quad (t \in [0, 1])$$

lehetséges-e. Először nézzük meg, hogy $(t_{N-1}, 1]$ intervallumon ez mit jelentene:

$$0 = \psi(t) = [B_N \Phi(1) \Phi^{-1}(t)]^T p = \Phi^{-T}(t) \Phi^T(1) B_N^T p,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $p \in \mathcal{N}(B_N^T)$. Ezt feltéve és továbbhaladva, $(t_{N-2}, t_{N-1}]$ intervallumon nézzük:

$$\begin{aligned} 0 = \psi(t) &= [(B_{N-1} \Phi(t_{N-1}) + B_N \Phi(1)) \Phi^{-1}(t)]^T p = \\ &= \Phi^{-T}(t) (B_{N-1}^T \Phi^T(t_{N-1}) + \Phi^T(1) B_N^T) p = \Phi^{-T}(t) \Phi^T(t_{N-1}) B_{N-1}^T p, \end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha $p \in \mathcal{N}(B_{N-1}^T)$. Ezt ismét feltételezve és $i = N - 3, \dots, 1$ tovább folytatva azt kapjuk, hogy ha

$$\psi(t) = 0 \quad (t \in [0, 1]),$$

abból az következik, hogy

$$p \in \mathcal{N}(B_i^T).$$

A továbbiakban feltesszük, hogy

$$\bigcap_{i=1}^N \mathcal{N}(B_i^T) = \{0\},$$

így ψ nem az azonosan 0 függvény, valamint $p \in \mathcal{N}(D^T)$ -at úgy választjuk, hogy $\|\psi\|_{L^2} = 1$ teljesüljön.

Belátható, hogy $\mathcal{R}(L) = \psi^\perp$. Ennek segítségével írjuk fel az Q projekciót:

$$(Qx)(t) = x(t) - \psi(t) \int_0^1 \psi^T(s) x(s) ds = x(t) - \psi(t) \langle x, \psi \rangle_{L^2} \quad (t \in [0, 1]).$$

Értelemszerűen

$$QLx = Lx \quad (x \in \mathcal{D}(L)).$$

Írjuk fel a P projekciót is integrál segítségével:

$$(Px)(t) = u(t) \int_0^1 u^T(s)x(s) ds = u(t)\langle x, u \rangle_{L^2} \quad (t \in [0,1]),$$

ahol u volt az a vektor, ami kifeszíti \mathcal{X}_2 -öt. Így bármely $x \in (L^2[0,1], \mathbb{R}^n)$ -re

$$Px = \bar{x} = \alpha u$$

, ahol α megfelelő (x -től függő) valós szám.

Írjuk fel x -et az $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ felbontásával és helyettesítsük be a (4.2.11) azonosságot, a (4.2.9) levetített feladatot, illetve a \mathcal{X}_2 -öt kifeszítő u -t:

$$x = \bar{x} + \tilde{x} = \bar{x} + ML\tilde{x} = \bar{x} + MLx = \bar{x} + MQNx = \alpha u + MQNx.$$

A (4.2.9) egyenlet azt is jelenti, hogy $N(x) \in \mathcal{R}(L)$, és mivel ψ ortogonális $\mathcal{R}(L)$ -re, ezért pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \langle Nx, \psi \rangle = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $u(t)$ első komponensét jelöljük $s(t)$ -vel,
- $MQN(x)$ első komponensét jelöljük $w(x)$ -szel,
- $\psi(t)$ n . komponensét jelöljük $v(t)$ -vel.

Mivel f az a függvény, aminek az első $n - 1$ komponense azonosan 0, az n -edik komponense pedig $f_n(x) = g(x_1)$, emellett x_1 felírható

$$x_1(t) = \alpha s(t) + w(x(t)) \quad (t \in [0,1])$$

alakban, így az integrál átalakítható:

$$0 = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt = \int_0^1 v(t)g(x_1(t)) dt = \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt.$$

Mivel a $\{t \in [0,1] : s(t) = 0\}$ halmaz nullmértékű, ezért az integrál felbontható:

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt = \int_{\{s(t)>0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt + \int_{\{s(t)<0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt.$$

M , E és g korlátossága miatt w is korlátos, így az $\alpha \rightarrow \pm\infty$ határesetben az egyenlet a következő alakú:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt = g(\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(-\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_1,$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt = g(-\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_2.$$

Tegyük fel, hogy

$$J_2 < 0 < J_1$$

($J_1 < 0 < J_2$ esetén hasonlóan járhatunk el, de $J_1 \cdot J_2 < 0$ szükséges). Így létezik α_0 , amivel

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt > 0 \quad (\alpha \geq \alpha_0), \quad (4.2.12)$$

$$(4.2.13)$$

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt < 0 \quad (\alpha \leq -\alpha_0).$$

Definiáljuk az alábbi operátorokat:

$$H_1 : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n),$$

$$H_1(x, \alpha) := \alpha u + MQN(x),$$

$$H_2 : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$H_2(x, \alpha) := \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt,$$

$$H : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R},$$

$$H(x, \alpha) := (H_1(x, \alpha), H_2(x, \alpha)).$$

Ezt megint nem értem. HOgy jönnek ide az alábbiak?

Ezzel a szétválasztással $\bar{x} = \alpha u$, azaz x -nek az \mathcal{X}_2 irányú komponensét az α reprezentálja. $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ -en a norma amit használunk

$$\|(x, \alpha)\| := \max\{\|x\|_{L^2}, |\alpha|\}.$$

Jól látható, hogy az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldhatósága a H fix-pontjának létezésével hozható összefüggésbe.

Legyen

$$r := \sup\{|g(t)| \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\} \quad \text{és} \quad m := \sup\{|v(t)| \in \mathbb{R} : t \in [0,1]\}.$$

Ekkor

$$\left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq rm.$$

Válasszunk α_0 -át úgy, hogy (4.2.12) egyenletek teljesüljenek és $\alpha_0 > rm$, legyen

$$\delta := \alpha_0 + rm.$$

Az u , g és ME korlátossága miatt ha $|\alpha| \leq \delta$ és $x \in L^2[0,1]$, akkor

$$\|H_1(x, \alpha)\| = \|\alpha u + MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQ\|\|g(x_1)\| \leq b_1$$

megfelelő b_1 választásával. Legyen

$$\mathcal{B} = \{(x, \alpha) \in L^2[0,1] \times \mathbb{R} : \|x\| \leq b_1 \text{ és } |\alpha| \leq \delta\},$$

így \mathcal{B} egy zárt, korlátos, konvex halmaz. A cél megmutatni, hogy H a \mathcal{B} halmazt önmagába képezi. $\|H_1(x, \alpha)\| \leq b_1$ -et az előbb beláttuk, nézzük $\|H_2(x, \alpha)\| \leq \delta$ -t.

Először legyen $\alpha_0 \leq \alpha \leq \delta$, a feltételünk miatt

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt > 0,$$

így

$$H_2(x, \alpha) = \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \geq \alpha_0 - rm > 0,$$

ennéfogva

$$H_2(x, \alpha) \in [0, \alpha_0 - rm] \subset [-\delta, \delta].$$

Ha $0 \leq \alpha < \alpha_0$, akkor

$$\begin{aligned} |H_2(x, \alpha)| &= \left| \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq \\ &\leq |\alpha| + \left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt \right| \leq \alpha_0 + rm = \delta, \end{aligned}$$

így $H_2(x, \alpha) \in [-\delta, \delta]$, tehát ha $0 \leq \alpha \leq \delta$ és $x \in L^2[0,1]$, akkor $H(x, \alpha) \in \mathcal{B}$. Analóg módon belátható, hogy ha $-\delta \leq \alpha \leq 0$, akkor ugyanez fenn áll.

Így tehát $H(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. H kompaktsága következik MQN kompaktságából, és így a Schauder fixpont-tétel értelmében H -nak van fixpontja \mathcal{B} -ben, tehát van olyan

$$(x_0, \alpha_0) \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R},$$

amivel

$$x_0 = \alpha_0 u + MQN(x_0),$$

$$\alpha_0 = \alpha_0 - \int_0^1 v(t)g(\alpha_0 s(t) + w(x_0(t))) dt$$

teljesül, tehát az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremfeladat megoldható, és $x_0 + \alpha_0 u$ egy megoldása.

5. fejezet

A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt-módszernek egy numerikus módszerként történő felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [16] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x), \quad (x \in [a, b]), \quad (5.0.1)$$

ahol L az úgynevezett Sturm-Liouville-operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol

$$p(x) > 0, \quad w(x) > 0 \quad (x \in [a, b]),$$

p, q, w adott analitikus függvények, valamint u -ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0, \quad \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0.$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen L -ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [8]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.

Emellett feltesszük a következőket:

- \mathcal{X} valós, szeparábilis Hilbert-tér, $L \in \mathcal{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{X})$ lineáris operátor, $N \in \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ nemlineáris operátor,
- L zárt leképezés önadjungált, $\mathcal{D}(L)$ sűrű \mathcal{X} -ben, $\mathcal{N}(L) = p > 0$ véges,
- L -nek a sajátértékei

$$\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}, \quad \lambda_i \leq \lambda_{i+1} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty,$$

és a hozzájuk tartozó Φ_1, Φ_2, \dots sajátfüggvények \mathcal{X} -ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a tulajdonságokat a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,

- létezik egy $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ altér, ami egy μ normával teljes, $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X}'$, minden $x \in \mathcal{D}(L)$ esetén a Φ_i -szerinti Fourier-sora $(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k)$ μ -ben konvergál x -hez és

$$\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2,$$

valamint létezik $\alpha > 0$, amivel $x \in \mathcal{X}'$ esetén $\|x\|_S \leq \alpha\mu(x)$ (tehát μ α -szorosára felső becslése az eredeti normának, és μ -beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),

- $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{X}'$ és altér \mathcal{X}' -ben, $\mathcal{D}(N)$ zárt μ szerint,
- bármely $R > 0$ -hoz létezik $\beta_R > 0, b_R > 0$, amelyekkel azon $x, y \in \mathcal{D}(N)$ -ekre, amelyekre $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$ teljesül,

$$\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R \mu(x - y) \quad \text{és} \quad \mu(Nx) \leq b_R,$$

tehát tetszőleges μ -szerinti gömb N -szerinti képe korlátos (μ normában), valamint ezen gömbbeli elemek környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (5.0.1) egyenlet megoldásait s

$$\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N)$$

halmazban keressük. Legyen $m \geq p$ és

$$S_m := \text{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}, \quad S_0 := \{0\},$$

azaz S_m az első m sajátfüggvény által kifeszített altér, $S_m \subset \mathcal{D}(L)$. Definiáljuk a következő operátorokat, amennyiben

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \quad (u \in S) :$$

$$P_m u := \sum_{k=1}^m \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k,$$

tehát P_m az S_m -re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k.$$

H_m $\mathcal{D}(L)$ -be képez (mivel $\Phi_k \in \mathcal{D}(L)$ ($k = 0, \dots, m+1, \dots$)), lássuk be róla, hogy lineáris ($x, y \in \mathcal{X}, \alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
 H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x + y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\langle \alpha x, \Phi_k \rangle + \langle y, \Phi_k \rangle) \Phi_k = \\
 &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
 &= \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
 &= \alpha H_m x + H_m y.
 \end{aligned}$$

H_m az L egy leszűkítésének inverze, pontosabban

$$H_m = (L|_{S_m^\perp})^{-1},$$

értelemszerűen

$$S_m^\perp = \text{span}\{\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots\},$$

így a linearitás miatt elég Φ_n -re nézni ($n > m$):

$$LH_m \Phi_n = L \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) = L \left(\frac{1}{\lambda_n} \Phi_n \right) = \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \Phi_n = \Phi_n.$$

$$H_m L u = (I - P_m) u,$$

ahol I az identitás operátor, ezt szintén elég Φ_n -re vizsgálni ($n \in \mathbb{N}$):

$$H_m L \Phi_n = H_m(\lambda_n \Phi_n) = \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k = \begin{cases} \mathbf{0}, & (n \leq m), \\ \Phi_n, & (n \geq m+1). \end{cases}$$

H_m \mathcal{X} -szerinti normája $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$, ehhez felhasználjuk, hogy L sajátértékei növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy $\|I - P_m\| \leq 1$ az ortogonális projekció tulajdonsága miatt:

$$\|H_m u\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|(I - P_m) u\| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \cdot \|u\|$$

és $u = \Phi_{m+1}$ esetén teljesül az egyenlőség:

$$\|H_m \Phi_{m+1}\| = \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_{m+1}, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| = \left\| \frac{1}{\lambda_{m+1}} \Phi_{m+1} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\Phi_{m+1}\|.$$

Még nézzük meg H_m μ -szerinti normáját:

$$\mu(H_m) \leq \alpha \sigma(m),$$

ahol

$$\sigma(m) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right)^2 \right)^{1/2} :$$

$$\begin{aligned} \mu(H_m u) &= \mu \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \mu(\Phi_k) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}, \langle u, \Phi_k \rangle \right)_{l_2} \right| \leq \left\| \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right\|_{l_2} \cdot \|\langle u, \Phi_k \rangle\|_{l_2} = \\ &= \sigma(m) \|u\| \leq \sigma(m) \alpha \mu(u) \end{aligned}$$

ahol $(\cdot, \cdot)_{l_2}$ az l_2 -beli skaláris szorzást jelöli. A levezetés során alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-egyenlőtlenséget és a Parseval-egyenlőséget. Ebből az is következik, hogy

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0.$$

A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, így

$$\mathcal{R}(H_m) \subset \mathcal{D}(N) \quad \text{és} \quad S_m \subset \mathcal{D}(N),$$

hogy a P_m és a H_m alkalmazása után tudjuk az N -et is még alkalmazni.

Tegyük fel, hogy

$$\bar{u} \in \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{D}(L)$$

megoldása az (5.0.1) egyenletnek, tehát

$$L\bar{u} = N\bar{u}. \tag{5.0.2}$$

Erre először alkalmazzuk H_m -et:

$$H_m L \bar{u} = H_m N \bar{u}, \quad (5.0.3)$$

$$(I - P_m) \bar{u} = H_m N \bar{u}, \quad (5.0.4)$$

$$\bar{u} = P_m \bar{u} + H_m N \bar{u}, \quad (5.0.5)$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (5.0.2)-re P_m -et:

$$P_m(L \bar{u} - N \bar{u}) = 0, \quad (5.0.6)$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan

$$\bar{u} \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N),$$

ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (5.0.1) feladatnak.

Legyenek $a > 0, b > 0$ valós számok, és legyen u_0 egy közelítő megoldása az

$$Lu = Nu$$

egyenletnek úgy, hogy létezik $u^* \in S_m$ ($u^* = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k$ valamely a_k számokra, $k = 1, \dots, m$), amivel $\mu(u^* - u_0) \leq a$. Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \mathcal{D}(N) \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \leq b\},$$

tehát $S_{u^*}^b$ azon u -kat tartalmazza, melyek S_m -re levetítve u^* -ba esnek, és u^* -tól μ -szerinti távolságuk legfeljebb b . Ezen elemek μ -normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$T_{u^*}^b : S_{u^*}^b \rightarrow \mathcal{X}, \quad T_{u^*}^b(u) := u^* + H_m N u.$$

Lássuk be $T_{u^*}^b$ -ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen $x, y \in S_{u^*}^b$:

$$\mu(T_{u^*}^b(x) - T_{u^*}^b(y)) = \mu((u^* + H_m N x) - (u^* + H_m N y)) =$$

$$= \mu(H_m(Nx - Ny)) \leq$$

$$\leq \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \leq$$

$$\leq \mu(H_m)\beta_R\mu(x - y),$$

ahol

$$R = \mu(u^*) + b,$$

tehát u^* -től és b -től függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján β_R egy R -től függő konstans. Mivel

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0,$$

ezért elég nagy m esetén

$$\mu(H_m)\beta_R < 1.$$

Annak, hogy

$$\mathcal{R}(T_{u^*}^b) \subset S_{u^*}^b$$

(tehát lehet $T_{u^*}^b$ -t iteratíván alkalmazni) elégséges feltétele, hogy

$$\mu(H_m)^2 \mu(L) b_R \leq b,$$

ami kellően nagy m -re szintén teljesül. Tehát ha m elég nagy, akkor $T_{u^*}^b$ kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az u^* -tól függő fixpontot jelöljük $y(u^*)$ -al, és asszociált elemnek nevezzük. $y(u^*)$ -ról könnyen belátható, hogy megoldása az (5.0.5) egyenletnek.

Vezessük be a

$$c_k := \langle u^*, \Phi_k \rangle \quad (k = 1, \dots, m)$$

jelölést, amivel

$$u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k.$$

Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz $y(u^*)$ megoldása a (5.0.6) bifurkációs egyenletnek:

$$0 = P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_mLy(u^*) - P_mNy(u^*),$$

$$P_mLy(u^*) = P_mL(u^* + H_mNy(u^*)) = P_mLu^* + P_mLH_mNy(u^*) =$$

$$= P_mL\left(\sum_{k=1}^m c_k \Phi_k\right) + P_mL \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \Phi_k =$$

$$= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + P_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k \Phi_k =$$

$$= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k P_m \Phi_k = P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right),$$

tehát

$$0 = P_m \left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*) \right),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k \right\rangle \quad (k = 1, \dots, m), \text{ azaz} \quad (5.0.7)$$

$$0 = \langle c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k \rangle \quad (k = 1, \dots, m), \text{ vagy} \quad (5.0.8)$$

$$0 = \langle \lambda_k u^* - Ny(u^*), \Phi_k \rangle \quad (k = 1, \dots, m). \quad (5.0.9)$$

Ez utóbbi egy m -változós (c_k ($k = 1, \dots, m$) számok meghatározzák u^* -ot), m egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha a, b, m elég nagyok, akkor az eredeti (5.0.1) egyenletnek \bar{u} pontosan akkor megoldása, ha az (5.0.9) egyenletnek u^* megoldása és $\bar{u} = y(u^*)$.

Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük. Legyen $N \geq m$. Az $Lu = Nu$ feladat megoldásait

$$u = \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k + \sum_{k=m+1}^N c_k \Phi_k$$

alakban keressük, tehát N növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a műveletigény rovására). H_m -en is hasonlóképpen módosítunk:

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^N \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő L -hez Φ_k ($k = 1, \dots, N$) sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti

$$u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$$

kiinduló értéket.

3. Állítsuk elő $y(u^*)$ -ot a fixpontiterációval:

$$y_0 := u^*, \quad y_{i+1} := u^* + H_m N y_i, \quad (i = 1, \dots, S).$$

4. Oldjuk meg az

$$Lu^* = P_m N y_{S+1}$$

egyenletet u^* -ra, például Newton-módszerrel.

5. Az így kapott u^* -ból kiindulva ismétljük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük (amit $Lu^* - Nu^*$ normájával lehet jellemezni).

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor m növelése szükséges lehet (ami miatt N -et is lehet, hogy növelni kell).

A peremfeltételeket u -ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a Φ_k sajátfüggvényekre, így az $\tilde{\Phi}$ lineáris kombinációjukkal előálló függvényre is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

5.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az L alakjára vonatkozó megkötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [8] és [17] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.

Legyen L egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a $(-1, 1)$. A peremfeltételeink a következők:

$$\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0, \quad \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0.$$

Ha L -nek λ sajátértéke, v pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $Lv = \lambda v$, azaz

$$\begin{aligned} \frac{1}{w}(-(pv')' + qv) &= \lambda v, \\ -pv'' - p'v' + qv &= \lambda wv. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Jelöljük T_n -el a $(-1, 1)$ -en értelmezett Csebisev-polinomokat:

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)) \quad (x \in (-1, 1)).$$

Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak a

$$(-1, 1) \ni x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük:

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (x \in (-1, 1)).$$

A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol

$$\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N] \quad \text{és} \quad \mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \dots, T_N(x)]^T,$$

így az együtthatók a vektora egyértelműen meghatározza a v függvényt.

Mivel L -nek szüksége van v deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^N a_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^N b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t} \quad (5.1.2)$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a $\theta := \arccos x$ jelölést (amivel $\sin \theta = \sqrt{1 - x^2}$). Így tetszőleges $x \in (-1, 1)$ esetén

$$T_n(x) = \cos(n\theta),$$

$$T'_n(x) = \sin(n\theta) n \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) = \sin((n+1)\theta) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) = \sin((n-1)\theta) \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) = \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1 - x^2}},$$

$$\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) = 2 \cos(n\theta) \sin \theta = 2T_n(x) \sqrt{1 - x^2},$$

$$\frac{1}{n+1} T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1} T'_{n-1}(x) = 2T_n(x).$$

Ez működik $n \geq 2$ esetén, kis n -ekre pedig egyszerű a dolog:

$$T'_0(x) = 0,$$

$$T'_1(x) = 1 = T_0(x),$$

$$T'_2(x) = 4x = 4T_1(x).$$

Helyettesítsük be (5.1.2)-be a $T_k(x)$ -ek helyére az így kapott képleteket:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{n=0}^N b_n T_n = b_0 T_1' + \frac{b_1}{4} T_2' + \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n+1)} T_{n+1}' - \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n-1)} T_{n-1}' = \\ &= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T_1' + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T_n' + \frac{b_{N-1}}{2N} T_N' + \frac{b_N}{2(N+1)} T_{N+1}'. \end{aligned}$$

Így már látható az összefüggés a_n és b_n között:

$$b_N = 0,$$

$$b_{N-1} = 2Na_N,$$

$$b_{n-1} = b_{n+1} + 2na_n \quad (n = N-1, \dots, 2),$$

$$b_0 = \frac{b_2}{2} + a_1.$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ egyenletet ($k, l = 0, \dots, N$):

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & (k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan}), \\ 2l, & (l \geq k \geq 1 \text{ és } l+k \text{ páratlan}), \\ 0, & (\text{különben}), \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T \mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az x -szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$xv(x) = \sum_{k=0}^N a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$xT_0(x) = T_1(x)$$

$$xT_n(x) = \frac{1}{2}(T_{n+1} + T_{n-1}) \quad (n \geq 1)$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$c_0 = \frac{a_1}{2},$$

$$c_1 = a_0 + \frac{a_2}{2},$$

$$c_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n = 2, \dots, N-1),$$

$$c_N \approx \frac{a_{N-1}}{2}.$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a $M\mathbf{a} \approx \mathbf{c}$ szorzást ($k, l = 0, \dots, N$):

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & ((k, l) = (1, 0)), \\ \frac{1}{2}l, & (l \geq 2 \text{ és } |k - l| = 1), \\ 0, & (\text{különben}), \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx \mathbf{c}^T \mathbf{t} \approx (M\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezenfelül, ha f analitikus függvény, akkor

$$f(x)v(x) \approx (f(M)\mathbf{c})^T \mathbf{t}.$$

Ezek segítségével írjuk fel az (5.1.1) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrixműveletként:

$$\hat{L}\mathbf{a} := \left(-p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M) \right) \mathbf{a}.$$

A (5.1.1) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig $\lambda w(M)\mathbf{a}$, jelölésként $\mathbf{B} := w(M)$. Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy \mathbf{t} egy vektorértékű függvény, $[a, b] = [-1, 1]$, és ennek az intervallumnak a végpontjain

$$T_n(-1) = (-1)^n, \quad \text{ill.} \quad T_n(1) = 1.$$

Legyen

$$h_1^T = \alpha_{11}(\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{t}(-1))^T \hat{D}, \quad h_2^T = \alpha_{21}(\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{t}(1))^T \hat{D}$$

amivel (ismét a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ jelölést alkalmazva)

$$h_1^T \mathbf{a} = \alpha_{11}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(-1))^T = \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1),$$

$$h_2^T \mathbf{a} = \alpha_{21}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(1))^T = \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1).$$

Legyen

$$H = (h_1, h_2)^T,$$

így a peremfeltétel megfogalmazható

$$H\mathbf{a} = \mathbf{0}$$

formában.

Legyen \hat{A} az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy \hat{L} utolsó két sorát elhagyjuk (tehát $(N-1 \times N+1)$ -es mátrix), és állítsuk elő \hat{B} -t ugyanígy \mathbf{B} -ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix} \mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{a}.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha $\mathbf{0}$ helyett $\frac{1}{\lambda_*}H$ -t használunk, ahol λ_* egy nagy szám, ami nem sajátértéke L -nek. Így a jobb oldal

$$\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$$

mátrixának nincsenek csupa 0 sorai.

Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a $[-1, 1]$, hanem valamely $[a, b]$ intervallum, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni:

$$D := \frac{1}{\alpha} \hat{D},$$

ahol α az intervallum középpontja ($\alpha = \frac{b-a}{2}$).

5.2. Példa a numerikus alkalmazásra

Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [16] cikkhez készült MATLAB csomagot.

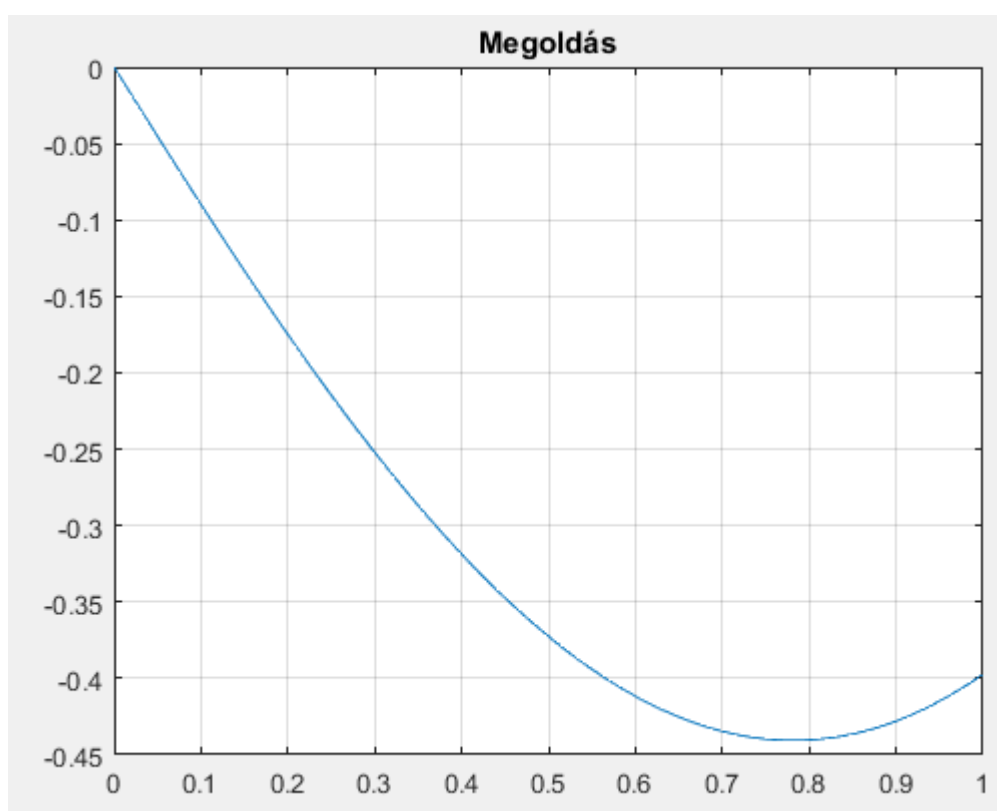
Tekintsük az

$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x} \quad (x \in [0, 1])$$

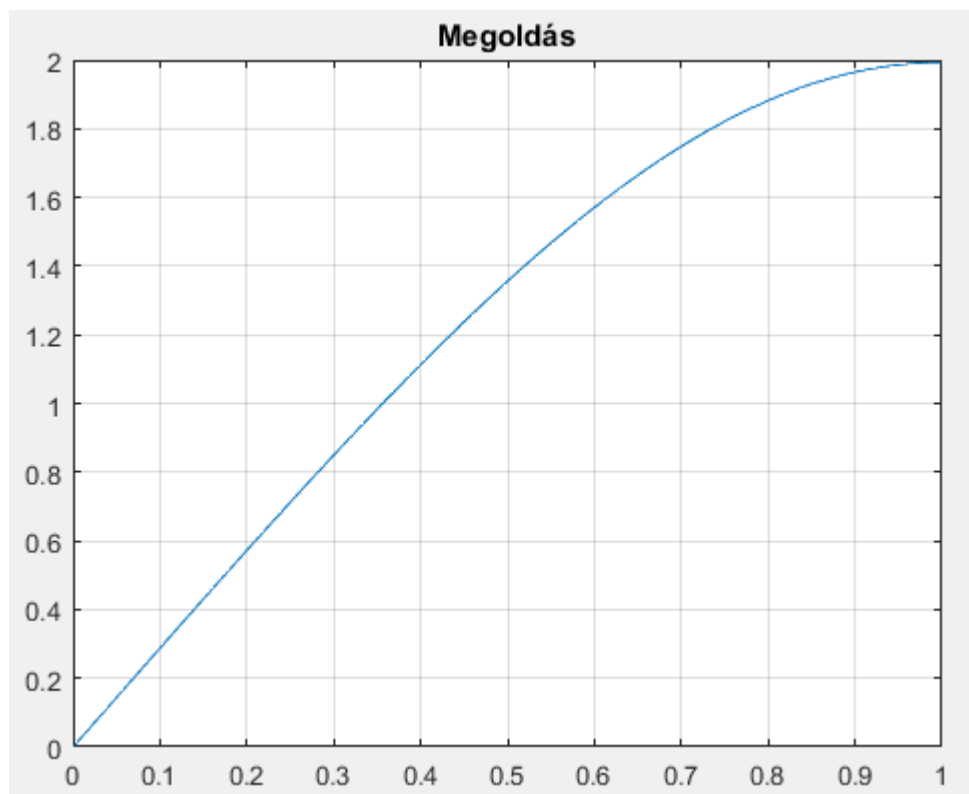
egyenletet a

$$u(0) = 0, \quad u(1) + u'(1) = 0$$

peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb 10^{-5} hibát megengedve:



Ehhez az $m = 0$ választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltételen, és az intervallum jobb oldalán a $u'(1) = 0$ feltételt követeljük meg, akkor $m = 0$ esetén nincs konvergencia, és még $m = 1$ esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A `cinit = [1]` paraméterrel, azaz a Φ_1 komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:



Irodalomjegyzék

- [1] **Ambrosetti, A.; Prodi, G.:** *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.
- [2] **Chow, S. N.; Hale, J. K.:** *Methods of bifurcation theory*, Pitman Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 251, Springer, Berlin etc., 1996.
- [3] **Farkas, M.:** *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.
- [4] **Hirzebruch, F.; Scharlau, W.:** *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1971.
- [5] **Kolmogorov, A. N.; Fomin, Sz. V.:** *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- [6] **Kovács, S.:** *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013.
ISBN: 978-963-284-445-9
- [7] **Kovács, S.:** *Abstract bifurcations*, Miklós Farkas Seminar on Applied Analysis, Budapest University of Technology, 22 February 2018.
- [8] **Liefvendahl, M.:** *A Chebyshev Tau Spectral Method for the Calculation of Eigenvalues and Pseudospectra*, Technical Report, TRITA-NA-0125, KTH, Stockholm, 2001.
- [9] **Marx, B.; Vogt, W.:** *Dynamische Systeme - Theorie und Numerik*, Spektrum, 2011.
- [10] **Meise, R.; Vogt, D.:** *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, 1992.
- [11] **Pelczynski, A.; Sudakov, V. N.:** *Remark on noncomplemented subspaces of the spacem(S)*, Colloq. Math. **9** (1962), 85–88.
- [12] **Pötzsche, C.:** *Bifurcation theory*, Lecture Notes, SS 2010, TU München, 2011.
- [13] **Rodriguez, J.; Kobylus Abernathy, Kristen:** *On the solvability of nonlinear boundary value problems*, Differential Equations and Applications **1**(2) (2010), 487–499.

- [14] **Rodriguez, J.; Taylor, P.:** *Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **68**(11) (2008), 3465–3474.
- [15] **Simon, P.:** *A funkcionálanalízis alapjai*, ELTE Eötvös Kiadó, 2017.
- [16] **Trif, D.:** *The Lyapunov-Schmidt method for two-point boundary value problems*, Fixed Point Theory **6**(1) (2005), 119–132.
- [17] **Trif, D.:** *LISC - A Matlab package for linear differential problems*, Romai Journal **1** (2006), 203–208.
- [18] **Werner, D.:** *Funktionalanalysis*, Springer, 2011.
- [19] **Whitley, R. J.:** *Projecting m onto c_0* , Amer. Math. Monthly **73** (1966), 285–286.
- [20] **Zeidler, E.:** *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I.*, Springer, 1986.

Lipták Bence,
programtervező informatikus szakos egyetemi hallgató
Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar,
1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,
padsoldier@gmail.com