



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Informatikai Kar  
Numerikus Analízis Tanszék

---

# A Ljapunov-Schmidt-módszer

**Dr. Kovács Sándor**  
Adjunktus

**Lipták Bence Gábor**  
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Funkcionálanalízis kiegészítés</b>	<b>3</b>
2.1. Faktorterek . . . . .	3
2.2. Kompakt operátorok . . . . .	5
2.3. Fredholm-operátorok . . . . .	6
2.4. Implicit függvény tétel . . . . .	8
<b>3. A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai</b>	<b>9</b>
3.1. A Ljapunov-Schmidt-redukció . . . . .	9
3.2. Alkalmazás: Hopf-bifurkáció . . . . .	11
3.3. Alkalmazás: Nemlineáris peremérték feladat . . . . .	16

# 1. fejezet

## Bevezetés

## 2. fejezet

# Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emellett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

### 2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

**2.1.1. Definíció (Faktortér).** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  pedig egy altere. A  $V$  tér  $U$  szerinti **faktortere** vagy **hányadostere**

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az  $U$  altér között mi az összefüggés.

**2.1.1. Állítás.** Ha  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, akkor  $\forall v, v' \in V$ -re

$$v + U = v' + U \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt  $V$  elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a  $V/U$  faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

**2.1.1. Tétel.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

*leképezéseket a következő módon*

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

*melyek jól definiáltak.*

- *A  $V/U$  faktortér ezekkel a műveletekkel egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér.*
- *$\pi_U$  az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

*módon definiálunk lineáris operátor  $V$  és  $V/U$  között.*

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített  $U \subset V$  esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w} \quad (v, w \in V)$$

$$\alpha \bar{v} = \overline{\alpha v} \quad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a  $\pi_U$  leképezés magtere pontosan az  $U$  halmaz, valamint az operátor szűrjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

**2.1.2. Tétel.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altér, ekkor

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

Ha egy  $v \in V$  elemet egy  $u \in U$  elemmel eltolunk ( $U \subset V$  altér), akkor a  $V/U$  faktortérbeli  $\pi_U$  általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az  $U$  altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

**2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre).** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $F : V \rightarrow W$  egy lineáris leképezés,  $U \subset V$  egy altér amire  $U \subset \text{Ker } F$ . Ekkor egyértelműen létezik  $F' : V/U \rightarrow W$  amivel  $F = F' \circ \pi_U$ . Emellett

- $\text{Im } F = \text{Im } F'$ , illetve  $F'$  pontosan akkor szürjektív, amikor  $F$  is,
- $\text{Ker } F' = (\text{Ker } F)/U$ , illetve  $F'$  pontosan akkor injektív, amikor  $U = \text{Ker } F$ .

$F'$ -t az  **$F$  által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

**2.1.4. Tétel.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altér,  $W \subset V$  pedig az  $U$  komplement altér (tehát  $V = W \oplus U$ ). Ekkor a  $\pi_U$  kanonikus leképezés leszűkítése  $W$ -re

$$\pi|_W : W \longrightarrow V/U, \quad \pi|_W(w) = w + U$$

izomorfia, azaz  $W \cong V/U$ .

## 2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált terek.

**2.2.1. Definíció (Kompakt operátor).**  $A : X \rightarrow Y$  operátor **kompakt**, ha bármely  $U \subset X$  korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz  $\overline{A[U]} \subset Y$  kompakt, valamint ha  $A$  korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]

A továbbiakban az  $X \rightarrow Y$  közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát  $K(X, Y)$ -al,  $X = Y$  esetén  $K(X)$ -szel jelöljük, ez zárt alteret alkot  $L(X, Y)$ -ban.

**2.2.2. Definíció.**  $A \in L(X, Y)$  operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ( $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ ). A véges rangú operátorok halmazát  $K_{fin}(X, Y)$ -al rövidítjük. [2, 3]

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetők véges rangú operátorokkal:

**2.2.1. Tétel.** Ha  $Y$ -ban van Schauder-bázis, akkor  $A \in L(X, Y)$  pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz  $K(X, Y) = \overline{K_{fin}(X, Y)}$ . [3]

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy  $L^p$ -terekben ( $p \geq 1$ ).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

**2.2.2. Tétel.** Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek,  $A \in L(X, Y)$ , ekkor

$$A \in K(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz  $A$  pontosan akkor kompakt, ha  $A^*$  adjungált operátora kompakt. [2, 4]

## 2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operátorokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek.

**2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor).**  $T \in L(X, Y)$  **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$ ,
- $T[X]$  zárt  $Y$ -ban,
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$ .

Ekkor a  $T$  operátor **indexe**  $\operatorname{ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$ ,  $T$  **cokernelle**  $\operatorname{coker} T := Y/T[X]$  (azaz  $Y$ -ban a  $T$  képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója**  $\operatorname{codim} T := \dim \operatorname{coker} T$ . [1, 3, 4, 5]

Az  $X$  és  $Y$  közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban  $\mathcal{F}(X, Y)$ -al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel ( $T$  képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

**2.3.1. Tétel.** *Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  Banach-terek, ekkor:*

- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$  és  $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$ , ekkor  $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$  és  $\text{ind}(B \circ A) = \text{ind } B + \text{ind } A$ ,
- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ , ekkor  $A^* \in \mathcal{F}(X^*, Y^*)$  és  $\text{ind } A^* = -\text{ind } A$ ,
- $\mathcal{F}(X, Y)$  nyílt részhalmaza  $L(X, Y)$ -nak, és az  $\text{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény lokálisan konstans.

*Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]*

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

**2.3.2. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  bijektív,  $K \in L(X, Y)$  kompakt, ekkor  $T + K$  Fredholm-operátor és  $\text{ind}(T + K) = 0$ . Ennek speciális esete amikor  $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $T$  az identitás  $X$ -en. [3, 5]

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

**2.3.3. Tétel.**  $K \in K(X, Y)$  és  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  esetén  $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$ , valamint  $\text{ind}(K + F) = \text{ind } F$ . [3]

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

**2.3.4. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik  $B \in L(Y, X)$ ,  $K_X \in K(X)$ ,  $K_Y \in K(Y)$  úgy, hogy

$$BT = I|_X + K_X, TB = I|_Y + K_Y.$$

*Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]*



## 2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára.  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  a következők során Banach-terek.

**2.4.1. Definíció.**  $F : X \times Y \rightarrow Z$  **Fréchet-differenciálható**  $X$ -ben az  $(u_0, v_0)$  pontban, ha létezik  $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$  úgy, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

**2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben).**  $F : X \times Y \rightarrow Z$  folytonos,  $(u_0, v_0) \in X \times Y$ ,  $F(u_0, v_0) = 0$ ,  $(D_x F)(u_0, v_0)$  bijektív és folytonos. Ekkor létezik  $(u_0, v_0)$ -nak olyan  $U \times V \subset X \times Y$  környezete és  $G : V \rightarrow U$  függvény, amivel  $G(v_0) = u_0$  és

$$F(G(v), v) = 0 \quad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden  $U \times V$ -beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező  $D_x F$  függvényeket lineáris homeomorfizmusnak nevezzük:

**2.4.2. Definíció.** Az  $A$  leképezés **lineáris homeomorfizmus**, ha folytonos, bijektív és az inverze is folytonos.

Az inverz folytonossága pedig a Banach-féle inverz tételből (vagy Banach-féle homeomorfia-tételből) következik:

**2.4.2. Tétel.**  $A \in L(X, Y)$  Banach-terek közötti bijektív operátor, ekkor  $A^{-1} \in L(Y, X)$ . ([2] 6.1.4)

## 3. fejezet

# A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

### 3.1. A Ljapunov-Schmidt-redukció

A Ljapunov-Schmidt-módszer célja, hogy egy végtelen-dimenziós feladatot egy jobban kezelhető, véges dimenziós feladatra redukáljunk.

Először is nézzük meg az általános esetet ([7, 8]).  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(\Lambda, \|\cdot\|_\Lambda)$  legyenek Banach-terek ( $\Lambda$  a paramétertér szerepét tölti be), 0-val pedig értelemszerűen a megfelelő tér nullelemét jelöljük.

Legyen  $F : X \times \Lambda \rightarrow Z$  egy korlátos,  $p$ -szer folytonosan differenciálható operátor ( $p \geq 1$ ) úgy, hogy

$$F(x_0, \lambda_0) = 0,$$

ahol  $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$ . Keressük az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{3.1}$$

egyenlet olyan megoldásait  $(x_0, \lambda_0)$  környezetében, amikre  $x \neq x_0$ .

Először tegyük fel, hogy  $D_x F(x_0, \lambda_0)$  izomorfizmus. Ekkor alkalmazható az implicit függvény tétel, azaz létezik  $U \times V \subset X \times \Lambda$  és  $f : V \rightarrow U$ , amivel

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= x_0, \\ F(f(\lambda), \lambda) &= 0 \quad (\lambda \in V), \end{aligned}$$

és  $U \times V$ -ben minden megoldás előáll ebben az alakban.

A Ljapunov-Schmidt-módszer bizonyos feltételek mellett megoldja a feladatot ab-

ban az esetben, ha  $D_x F(x_0, \lambda_0)$  nem izomorfizmus, tételezzük tehát ezt fel. A továbbiakban a  $D_x F(x_0, \lambda_0)$  operátort rövidítve,  $D_x F$ -el jelöljük (ami egy  $L(X, Z)$  függvény).

Legyen  $K := \text{Ker } D_x F$  és  $R := \text{Im } D_x F$ , és tekintsük a hozzájuk tartozó kiegészítő altereket:

$$\begin{aligned} X &= K \oplus W, \\ Z &= R \oplus S. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy  $K$  és  $S$  véges dimenziósak, azaz  $D_x F$  Fredholm-operátor, ekkor létezik megfelelő  $W$  és  $S$ , melyek zártak ([2] 4.5.9). Tekintsük  $D_x F|_W : W \rightarrow R$  függvényt, ez bijekció és  $R$  zárt, ezért létezik  $D_x F|_W$ -nek folytonos inverze.

Bontsuk fel minden  $x \in X$ -et fel  $K$  mentén egyértelműen ( $x_0$  esetén külön jelölve a kapott részeket):

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 & (x_1 \in K, x_2 \in W), \\ x_0 &= x_1^{(0)} + x_2^{(0)} & (x_1^{(0)} \in K, x_2^{(0)} \in W), \end{aligned}$$

Legyen  $P_R : Z \rightarrow R$  projekciós operátor  $R$ -re. Alkalmazzuk  $P_R$ -t és  $(I - P_R)$ -t az eredeti (3.1) feladatra, kiegészítve az  $x$  szétválasztásával:

$$\begin{aligned} P_R F(x_1, x_2, \lambda) &:= P_R F(x_1 + x_2, \lambda) = 0, \\ (I - P_R) F(x_1, x_2, \lambda) &:= (I - P_R) F(x_1 + x_2, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

ahol így

$$\begin{aligned} P_R F &: K \times W \times \Lambda \rightarrow R, \\ (I - P_R) F &: K \times W \times \Lambda \rightarrow S, \end{aligned}$$

az első kissé átrendezve

$$P_R F : W \times (K \times \Lambda) \rightarrow R,$$

alakot kapunk, amire a  $D_x F|_W$  invertálhatósága (és az inverz folytonossága) lehetővé teszi az implicit függvény tétel alkalmazását, amivel kapunk egy  $x_2 : \Theta \times \Gamma \rightarrow W$

függvényt (alkalmas  $\Theta \subset K$  és  $\Gamma \subset \Lambda$  halmazokkal  $x_1^{(0)}$  és  $\lambda_0$  környezetében), amivel

$$\begin{aligned} x_2 &:= x_2(x_1, \lambda) & (x_1 \in \Theta, \lambda \in \Gamma), \\ x_2^{(0)} &= x_2(x_1^{(0)}, \lambda_0), \\ P_R F(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

teljesül, így már csak

$$(I - P_R)F(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \quad (3.2)$$

egyenletet kell megoldani, ami így  $\Theta \times \Gamma \subset K \times \Lambda$  halmazon értelmezett,  $S$ -beli értékeket vesz fel.

Ha még azt is feltesszük, hogy  $\Lambda$  véges dimenziós, akkor  $\dim K < \infty$  és  $\dim S < \infty$  miatt kapunk egy véges sok egyenletből álló egyenletrendszert véges sok ismeretlennel, amit már például a „szokásos” implicit függvény tétellel megkísérelhetünk megoldani.

Az eredeti 3.1 feladat például akkor állhat elő, ha van  $A : X \rightarrow Z$  korlátos lineáris operátorunk,  $N : X \times Y \rightarrow Z$  folytonosan differenciálható leképezésünk (ami nem feltétlenül lineáris) és az

$$Ax = N(x, \lambda)$$

egyenlet nemtriviális  $x \in X$  megoldásait keressük ([7]).

## 3.2. Alkalmazás: Hopf-bifurkáció

A következőkben az úgynevezett Hopf-bifurkáció-tételt vizsgáljuk, ami időfüggetlen, egy paramétertől függő differenciálegyenlet-rendszerek nemtriviális periodikus megoldásainak a létezéséhez ad meg feltételeket. Ennek során fel fogjuk használni az előző fejezetben tárgyalt Ljapunov-Schmidt-módszert. [8]

Legyen  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  kétszer folytonosan differenciálható leképezés, melyre

$$f(0, \alpha) = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

A vizsgálandó differenciálegyenlet-rendszer, melynek  $u \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  megoldásait keressük a következő:

$$\frac{du}{dt} + f(u, \alpha) = 0. \quad (3.3)$$

Tegyük fel, hogy  $f$ -re teljesülnek az alábbiak:

- valamilyen  $\alpha = \alpha_0$  érték esetén  $i = \sqrt{-1}$  és  $-i$  sajátértékei  $D_u f(0, \alpha_0)$ -nak, és  $\pm ki$  ( $k = 0, 2, 3, \dots$ ) nem sajátértékek;

- $\alpha_0$  egy környezetében van a sajátértékeknek és sajátvektoroknak egy-egy görbéje ( $\beta$  illetve  $a$ ), amivel

$$D_u f(0, \alpha_0) a(\alpha) = \beta(\alpha) a(\alpha), \quad (3.4)$$

$$a(\alpha_0) \neq 0, \quad (3.5)$$

$$\beta(\alpha_0) = i, \quad (3.6)$$

$$\Re\left(\frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha_0)\right) \neq 0. \quad (3.7)$$

A célunk az, hogy találjunk olyan  $\eta > 0$  számot illetve egy

$$(u, \rho, \alpha) : (-\eta, \eta) \rightarrow C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

folytonosan differenciálható függvényt, amivel  $(u(s), \rho(s), \alpha(s))$  megoldja a (3.3) egyenlet egy általánosítását:

$$\frac{du}{dt} + \rho f(u, \alpha) = 0 \quad (3.8)$$

nemtriviális módon ( $u(0) \neq 0$  ha  $s \neq 0$ ),

$$\rho(0) = 1, \alpha(0) = \alpha_0, u(0) = 0,$$

és ezen felül minden megoldás  $(0, 1, \alpha_0)$  közelében valamely  $s \in (-\eta, \eta)$  esetén előálljon ( $u$ -beli fáziseltolástól eltekintve).

Vegyük észre, hogy ha  $u(t)$  megoldása (3.3)-nek  $2\pi\rho$  periódussal, akkor  $u(\rho t)$   $2\pi$ -periódusú megoldása (3.8)-nak.

Legyenek  $X = C_{2\pi}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  és  $Y = C_{2\pi}(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$  Banach-terek a „szokásos” normákkal. Definiáljunk egy  $F : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow Y$  operátort a következő módon:

$$(u, \rho, \alpha) \mapsto \frac{du}{dt} + \rho f(u, \alpha),$$

ami így kétszer folytonosan differenciálható, és keressük az

$$F(u, \rho, \alpha) = 0 \quad (3.9)$$

megoldásait, amikor  $\rho$  közel van 1-hez,  $\alpha$  közel van  $\alpha_0$ -hoz és  $u \neq 0$ . Látható, hogy

$$F(0, \rho, \alpha) = 0 \quad (\rho \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}\phi_0(t) &= \Re(e^{it}a(\alpha_0)), \\ \phi_1(t) &= \Im(e^{it}a(\alpha_0))\end{aligned}$$

függvények  $2\pi$ -periodikus megoldásai az

$$\frac{du}{dt} + D_u f(0, \alpha_0)u = 0 \quad (3.10)$$

egyenletnek, és ezek a függvények kifeszítik  $D_u F(0, 1, \alpha_0)$  magterét:

$$\text{Ker } D_u F(0, 1, \alpha_0) = \text{span}\{\phi_0, \phi_1 = \phi_0'\} \subset X.$$

A differenciálegyenletek elméletéből következik, hogy  $\text{Im } D_u F(0, 1, \alpha_0) \subset Y$  zárt és

$$\text{Im } D_u F(0, 1, \alpha_0) = \{g \in Y : \langle g, \psi_i \rangle = 0, i = 0, 1\},$$

ahol  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  az  $L^2$ -beli skaláris szorzás,  $\{\psi_0, \psi_1\}$  pedig  $\text{Ker}\{-u' + D_u f^T(0, \alpha_0)u\}$  bázisa, ami az  $u' + D_u f(0, \alpha_0)u$  adjungált operátora. Emellett  $\psi_1 = \psi_0'$  és  $\langle \phi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$  Kronecker-deltával egyenlő. Ebből következik, hogy  $D_u F : X \rightarrow Y$  Fredholm-operátor aminek a magtere és a kokernele is 2 dimenziójú.

Így alkalmazhatjuk a Ljapunov-Schmidt-módszert:

$$\begin{aligned}X &= V \oplus W, \\ Y &= Z \oplus T,\end{aligned}$$

ahol  $V = \text{Ker } D_u F$  és  $T = \text{Im } D_u F$ .  $U$  legyen a  $(0, 1, \alpha_0, 0) \in V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , és  $G$  legyen  $U$ -n értelmezve a következő módon:

$$G(v, \rho, \alpha, s) = \begin{cases} \frac{1}{s}F(s(\phi_0 + v), \rho, \alpha), & s \neq 0, \\ D_u F(0, \rho, \alpha)(\phi_0 + v), & s = 0. \end{cases}$$

Ekkor a megoldandó egyenletünk

$$G(v, \rho, \alpha, s) = 0 \quad (3.11)$$

alakban van, amit  $v, \rho, \alpha$ -ra kellene megoldani  $s$  függvényében  $0 \in \mathbb{R}$  egy környezeté-

ben.  $G$  folytonosan differenciálható, és

$$G(v, \rho, \alpha, 0) = D_u F(0, \rho, \alpha)(\phi_0 + v) = (\phi_0 + v)' + \rho D_u f(0, \alpha)(\phi_0 + v),$$

illetve

$$G(0, \rho, \alpha, 0) = \phi_0' + \rho D_u f(0, \alpha)\phi_0. \quad (3.12)$$

Az implicit függvény tétel alkalmazásához arra van szükségünk, hogy a  $(v, \rho, \alpha) \mapsto G(v, \rho, \alpha, s)$  leképezés  $(0, 1, \alpha_0, 0)$ -ban vett deriváltja folytonos és bijektív leképezése  $V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ -nak  $Y$ -ra.

Vegyük az előbbi egyenlet Taylor-sorba fejtését  $(0, 1, \alpha_0)$  körül (rögzített  $s \in \mathbb{R}$  esetén):

$$\begin{aligned} G(v, \rho, \alpha, s) = & G(0, 1, \alpha_0, s) + D_\rho G(0, 1, \alpha_0, s)(\rho - 1) \\ & + D_\alpha G(0, 1, \alpha_0, s)(\alpha - \alpha_0) + D_v G(0, 1, \alpha_0, s)v + \dots, \end{aligned}$$

amit  $s = 0$ -ban kiértékelünk:

$$\begin{aligned} D_{v, \rho, \alpha} G(0, 1, \alpha_0, 0)(v, \rho - 1, \alpha - \alpha_0) = & D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) \\ & + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) \\ & + (v' + D_u f(0, \alpha_0)v). \end{aligned}$$

Ebből az utóbbi

$$v \mapsto v' + D_u f(0, \alpha_0)v$$

lineáris homeomorfizmus  $V$ -ből  $T$ -re (folytonos bijekció), így elég az egyenlet maradéktól

$$(\rho, \alpha) \mapsto D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0)$$

belátni hogy pontosan akkor képez  $T$ -be, ha  $\rho = 1$  és  $\alpha = \alpha_0$ , valamint minden  $\psi \in Z$ -re egyértelműen létezik  $(\rho, \alpha)$  amivel

$$D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) = \psi.$$

$T$ -t korábban felírtuk mint  $\{\psi_0, \psi_1\}$ -re ortogonális függvények halmaza, így

$$D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) \in T$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\langle D_u f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_i \rangle (\rho - 1) + \langle D_{u\alpha} f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_i \rangle (\alpha - \alpha_0) = 0 \quad (i = 0, 1).$$

Mivel  $D_u f(0, \alpha_0) \phi_0 = \phi_1$  és  $\langle \phi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ , ezért az alábbi két egyenletet kapjuk (ahol  $(\rho - 1)$  és  $(\alpha - \alpha_0)$  az ismeretlenek)

$$\begin{aligned} \langle D_{u\alpha} f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_0 \rangle (\alpha - \alpha_0) &= 0 \\ (\rho - 1) + \langle D_{u\alpha} f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_1 \rangle (\alpha - \alpha_0) &= 0, \end{aligned}$$

aminek pontosan

$$\langle D_{u\alpha} f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_0 \rangle \neq 0$$

esetén van csak a triviális megoldása (amikor is  $\rho = 1$  és  $\alpha = \alpha_0$ ), ami kiszámítható, hogy

$$\langle D_{u\alpha} f(0, \alpha_0) \phi_0, \psi_0 \rangle = \Re\left(\frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha_0)\right) \neq 0$$

a kezdeti kikötéseink miatt teljesül.

Vizsgáljunk meg példát, amint az előbbi levezetés alkalmazható. Vegyünk a

$$x'' + x - \alpha(1 - x^2)x' = 0 \tag{3.13}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Alakítsuk át

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

alakra, amiből az eredeti egyenlet

$$u' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formában adódik. Így

$$f(u, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} u + \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix}$$

illetve

$$D_u f(0, \alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$



aminek sajátértékei kielégítik az

$$\beta(\alpha + \beta) + 1 = 0$$

egyenletet. Legyen  $\alpha_0 = 0$ , így  $\beta(0) = \pm i$  és  $\beta' = -\frac{1}{2}$  az  $\alpha = 0$  esetben, tehát a tételünk értelmében van  $\eta > 0$  és  $\alpha(s), \rho(s)$  ( $s \in (-\eta, \eta)$ ) amire  $\alpha(0) = 0, \rho(0) = 1$  és  $s \neq 0$  esetén van nemtriviális  $x(s)$  megoldása a feladatunknak  $2\pi\rho(s)$  periódussal.

### 3.3. Alkalmazás: Nemlineáris peremérték feladat

Legyen  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  folytonos aminek létezik határértéke  $\pm\infty$ -ben. Legyen  $g : C([0, 1], \mathbb{R}) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R})$  nemlineáris folytonos (a függvények terén a  $\|\cdot\|_\infty$  normát tekintve). Vizsgáljuk az alábbi alakú differenciálegyenleteket:

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(y(t)) + (gy)(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.14)$$

a következő peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned} b_{11}y(0) + \dots + b_{1n}y^{(n-1)}(0) + d_{11}y(1) + \dots + d_{1n}y^{(n-1)}(1) &= 0, \\ b_{21}y(0) + \dots + b_{2n}y^{(n-1)}(0) + d_{21}y(1) + \dots + d_{2n}y^{(n-1)}(1) &= 0, \\ \vdots & \\ b_{n1}y(0) + \dots + b_{nn}y^{(n-1)}(0) + d_{n1}y(1) + \dots + d_{nn}y^{(n-1)}(1) &= 0. \end{aligned}$$

Tételezzük fel, hogy a homogén egyenletnek

$$y^{(n)}(t) + \dots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0,$$

a megoldásai egy dimenziós alteret alkotnak. A továbbiakban [9] mintájára megadunk feltételeket az inhomogén egyenlet megoldásának létezéséhez a Ljapunov-Schmidt-módszer felhasználásával.

Először is alakítsuk át az egyenletet egyenletrendszeré:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \dots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

és a peremfeltételek:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a feladat a következő alakú:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x_1(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x_1(t)) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.15)$$

amire a

$$Bx(0) + Dx(1) = 0 \quad (3.16)$$

peremfeltételnek kell teljesülnie. Az  $f$  függvény határértékeit jelöljük

$$f(\infty) := \lim_{s \rightarrow \infty} f(s), \\ f(-\infty) := \lim_{s \rightarrow -\infty} f(s),$$

módon, és ezekről tegyük fel, hogy végesek. Mivel az így kapott differenciálegyenlet-rendszer  $n$ -dimenziós, megadunk a lehetséges megoldások  $C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  terén egy normát a következő módon:

$$\|\phi\|_\infty := \sup\{\|\phi(t)\|_2 : 0 \leq t \leq 1\},$$

ahol  $\|\cdot\|_2$  az euklideszi norma  $\mathbb{R}^n$ -en.

Tegyük fel, hogy létezik  $M > 0$  amivel bármely  $\psi \in C([0, 1], \mathbb{R})$ -re teljesül

$$\sup\{|g(\psi(t))| : 0 \leq t \leq 1\} \leq M < \infty.$$

Jelöljük a peremfeltételt kielégítő függvények terét  $X$ -el:

$$X := \{x \in C([0, 1], \mathbb{R}^n) : Bx(0) + Dx(1) = 0\}$$

valamint adjunk meg  $F, G : X \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  operátorokat a következő módon:

$$(Fx)(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x_1(t)) \end{pmatrix}, \quad (Gx)(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy  $F$  és  $G$  folytonosak, valamint  $\sup\{\|F(x)\|_\infty : x \in X\}$  és  $\sup\{\|G(x)\|_\infty : x \in X\}$  is véges.

Legyen  $\text{Dom } L := C^1([0, 1], \mathbb{R}^n) \cap X$ , és legyen  $L : \text{Dom } L \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n)$  az alábbi operátor:

$$(Lx)(t) := x'(t) - A(t)x(t).$$

Ezek segítségével az eredeti feladatot a következő formában írhatjuk fel:

$$Lx = F(x) + G(x). \quad (3.17)$$

Mivel a homogén egyenlet megoldásainak tulajdonságai szerepet játszhatnak az inhomogén egyenlet megoldhatóságában, először vizsgáljuk az  $Lx = 0$  homogén egyenletet.

Legyen  $\Gamma(t)$  az  $x'(t) = A(t)x(t)$  egyenlet alaplátrixa.

$$\begin{aligned} Lx &= 0 \\ \Leftrightarrow x'(t) - A(t)x(t) &= 0 \text{ és } Bx(0) + Dx(1) = 0 \\ \Leftrightarrow x(t) &= \Gamma(t)C \text{ valamely } C\text{-re és } B\Gamma(0)C + D\Gamma(1)C = 0 \\ \Leftrightarrow B + D\Gamma(1)C &= 0 \\ \Leftrightarrow C &\in \text{Ker}(B + D\Gamma(1)), \end{aligned}$$

azaz a homogén megoldások előállnak  $x(t) = \Gamma(t)C$  alakban, ahol  $C \in \text{Ker}(B + D\Gamma(1))$ . Ebből az is látszik, hogy  $\dim \text{Ker } L = \dim \text{Ker}(B + D\Gamma(1))$ .

Az állandók variálásának módszerével az  $x'(t) = A(t)x(t) + h(t)$  inhomogén egyen-

let megoldásai előállnak

$$x(t) = \Gamma(t)x(0) + \Gamma(t) \int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds$$

alakban. Ez és a peremfeltételek együtt pontosan akkor teljesülnek, ha

$$Bx(0) + D(\Gamma(1)x(0) + \Gamma(1) \int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds) = 0,$$

pontosan akkor, ha

$$(B + D(\Gamma(1))x(0) = -D\Gamma(1) \int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds,$$

amiből megkaptuk  $x(0)$  értékét. Ezekből az is következik, hogy  $L$  pontosan akkor bijektív, ha  $(B + D\Gamma(1))$  invertálható. Ebben az esetben nem szükséges a Ljapunov-Schmidt-módszer alkalmazása, ezért tegyük fel hogy  $\text{Ker } L = 1$ .

Az előbbiek alapján  $h \in \text{Im } L$  pontosan akkor, ha valamely  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  esetén

$$(B + D\Gamma(1))x_0 = -D\Gamma(1) \int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds,$$

ami pontosan akkor, ha

$$\int_0^1 D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(s)h(s)ds \in \text{Im}(B + D\Gamma(1)).$$

Az  $\text{Im}(B + D\Gamma(1)) = (\text{ker}(B + D\Gamma(1))^T)^\perp$  összefüggés miatt  $h \in \text{Im } L$  pontosan akkor, ha

$$W^T \int_0^1 D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(s)h(s)ds = 0,$$

ahol  $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$  mátrix, aminek az oszlopai a  $\text{Ker}(B + D\Gamma(1))^T$  egy bázisát alkotják. Legyen  $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  úgy

$$\Psi^T(t) = W^T D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(t),$$

ezzel a jelöléssel  $Lx = h$  pontosan akkor, ha  $\int_0^1 \Psi^T(t)h(t)dt = 0$ . Legyenek  $P : \text{Dom } L \rightarrow \text{Ker } L$  és  $E : C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Im } L$  projekciók, ezek segítségével írjuk fel a már ismert felbontásokat:

$$\text{Dom } L = \text{Ker } L \oplus \text{Im}(I - P),$$

$$C([0, 1], \mathbb{R}^n) = \text{Im } L \oplus \text{Im}(I - E).$$

Legyen  $\Phi(t) := \Gamma(t)V$ , ahol  $V \in \mathbb{R}^n$  a bázisa  $\text{Ker}(B + D\Gamma(1))$ -nek. Legyenek

$$C_1 := \int_0^1 \Phi^T(t)\Phi(t)dt,$$

$$C_2 := \int_0^1 \Psi^T(t)\Psi(t)dt.$$

Lássuk be, hogy  $C_1$  invertálható, valamint  $C_2$  invertálható akkor, ha  $[B : D]$  teljes rangú.

$C_1$ -hez tegyük fel, hogy  $C_1 a = 0$ , és legyen  $q(t) := \Phi(t)a$ . Így

$$a^T C_1 a = \int_0^1 q^T(t)q(t)dt = 0,$$

amitől  $q(t) = 0$  minden  $t \in [0, 1]$ -re, így  $a = 0$ , mivel  $\Phi(t)$  nem konstans 0.

$C_2$ -höz elég az, hogy  $\Psi^T(t)$  oszlopai (amiket  $\Psi_j^T(t)$ -vel jelölünk) lineárisan függetlenek. Mivel  $[B : D]$  teljes rangú,  $a \in \text{Ker } B^T \cap \text{Ker } D^T$ -ből következik  $a = 0$ . Így

$$c_1 \Psi_1^T(t) + c_2 \Psi_2^T(t) = 0$$

pontosan akkor, ha  $(c_1, c_2)D = 0$ , azaz ha  $(c_1, c_2)^T \in \text{Ker } D^T$ . Mivel  $(c_1, c_2)^T \in \text{Ker}(B + D\Gamma(1))^T$  és  $(c_1, c_2)^T \in \text{Ker } B^T$ , ezért  $(c_1, c_2)^T = (0, 0)$ , azaz  $C_2$  invertálható.

Így a projekciókat alkalmazva eredeti egyenlet helyett a következőket kapjuk:

$$(I - E)x(t) = \Psi(t)C_2^{-1} \int_0^1 \Psi^T(s)x(s)ds,$$

$$Px(t) = \Phi(t)C_1^{-1} \int_0^1 \Phi^T(s)x(s)ds.$$

Vezessük be a következő jelölést:  $M := (L|_{\text{Im}(I-P)})^{-1}$ , ezzel  $\text{Im } M = \text{Im } L$ ,  $MLx = (I - P)x$ , és  $M$  kompakt. A projekciók segítségével  $Lx = F(x) + G(x)$  pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} E(Lx - (F(x) + G(x))) = 0 \\ (I - E)(Lx - (F(x) + G(x))) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} Lx = E(F(x) + G(x)) \\ (I - E)(F(x) + G(x)) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} (I - P)x = ME(F(x) + G(x)) \\ (I - E)(F(x) + G(x)) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} x = Px + ME(F(x) + G(x)) \\ (I - E)(F(Px + ME(F(x) + G(x))) + G(Px + ME(F(x) + G(x)))) = 0. \end{cases}$$

Ez utóbbi jelölést a  $\Phi$  és a  $\Psi$  segítségével felírhatjuk a következő módon:

$$\begin{cases} x = \alpha\Phi(t) + ME(F(x) + G(x)) \\ 0 = \int_0^1 \Psi_2(t)f(\alpha\Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t))dt + \\ \quad + \int_0^1 \Psi_2(t)g(\alpha\Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t))dt, \end{cases}$$

ahol  $\Phi_i, \Psi_i, (ME(F(x) + G(x)))_i$  a megfelelő függvény  $i$ -edik komponense.

Legyen  $J_1$  és  $J_2$  úgy, hogy

$$\begin{aligned} J_1 &= f(\infty) \int_{\{t \in [0,1]: \Phi_1(t) > 0\}} \Psi_2(t)dt + f(-\infty) \int_{\{t \in [0,1]: \Phi_1(t) < 0\}} \Psi_2(t)dt, \\ J_2 &= f(-\infty) \int_{\{t \in [0,1]: \Phi_1(t) > 0\}} \Psi_2(t)dt + f(\infty) \int_{\{t \in [0,1]: \Phi_1(t) < 0\}} \Psi_2(t)dt. \end{aligned}$$

Ezekről tegyük fel, hogy ellenkező előjelűek, azaz  $J_1 J_2 < 0$ , az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy  $J_2 < 0 < J_1$ , legyen  $J := \min\{|J_1|, |J_2|\}$ , és tegyük fel  $g$ -ről hogy

$$\sup\{\|g(w)\|_\infty : w \in C([0, 1], \mathbb{R})\} \leq J.$$

Azt állítjuk, hogy ezen és a korábban tett feltételek mellett megoldható az inhomogén nemlineáris differenciálegyenlet.

Először adjunk meg  $H_1, H_2, H$  leképezéseket

$$\begin{aligned} H_1 &: \mathbb{R} \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow C([0, 1], \mathbb{R}^n), \\ H_2 &: \mathbb{R} \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}, \\ H &: \mathbb{R} \times C([0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R} \times C([0, 1], \mathbb{R}^n). \end{aligned}$$

az alábbi módokon:

$$\begin{aligned}
H_1(\alpha, x) &= \alpha \Phi(t) + ME(F(x) + G(x)), \\
H_2(\alpha, x) &= \alpha - \left( \int_0^1 \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt \right. \\
&\quad \left. + \int_0^1 \Psi_2(t) g(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt \right), \\
H(\alpha, x) &= (H_1(\alpha, x), H_2(\alpha, x)).
\end{aligned}$$

Mivel  $\{t : \Phi_1(t) = 0\}$  0 Lebesgue-mértékű ( $\Phi$  egy nem nulla mátrixfüggvény és egy nem nulla vektor szorzata), a  $H_2$ -ben szereplő első integrál két részre bontható:

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt = \\
&= \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) > 0\}} \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt + \\
&+ \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) < 0\}} \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt.
\end{aligned}$$

Mivel  $ME(F + G)$  korlátos, a kettébontott összegben  $\alpha \rightarrow \infty$  esetén kiemelhető  $f(\pm\infty)$ :

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^1 \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt = \\
&= f(\infty) \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) > 0\}} \Psi_2(t) dt + f(-\infty) \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) < 0\}} \Psi_2(t) dt = J_1,
\end{aligned}$$

illetve ehhez hasonlóan

$$\begin{aligned}
&\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_0^1 \Psi_2(t) f(\alpha \Phi_1(t) + (ME(F(x) + G(x)))_1(t)) dt = \\
&= f(-\infty) \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) > 0\}} \Psi_2(t) dt + f(\infty) \int_{\{t \in [0,1] : \Phi_1(t) < 0\}} \Psi_2(t) dt = J_2.
\end{aligned}$$

# Irodalomjegyzék

- [1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.
- [2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.
- [3] TODO, *Notes on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.
- [4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.
- [5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.
- [6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapunov-Schmidt*. TODO, TODO.
- [7] TODO, *TODO 8.6 The Liapunov-Schmidt Method*. TODO, TODO.
- [8] TODO, *TODO Chapter II / Chapter X*. TODO, TODO.
- [9] J. Rodríguez and K. Kobylus Abernathy, „On the solvability of nonlinear boundary value problems,” vol. 2, pp. 487–499, 01 2010.