



Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Funkcionálanalízis kiegészítés	3
2.1. Faktorterek	3
2.2. Kompakt operátorok	5
2.3. Fredholm-operátorok	6
2.4. Implicit függvény tétel	8
3. A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai	9
3.1. A Ljapunov-Schmidt-redukció	9

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emelett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció (Faktortér). Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altere. A V tér U szerinti **faktortere** vagy **hányadostere**

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. Ha V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, akkor $\forall v, v' \in V$ -re

$$v + U = v' + U \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

melyek jól definiáltak.

- *A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy \mathbb{K} feletti lineáris tér.*
- *π_U az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w} \quad (v, w \in V)$$

$$\alpha \bar{v} = \overline{\alpha v} \quad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szűrjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altér, ekkor

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

Ha egy $v \in V$ elemet egy $u \in U$ elemmel eltolunk ($U \subset V$ altér), akkor a V/U faktortérbeli π_U általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az U altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

2.1.3. Tétel (Homomorfia-tétel vektorterekre). Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $F : V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés, $U \subset V$ egy altér amire $U \subset \text{Ker } F$. Ekkor egyértelműen létezik $F' : V/U \rightarrow W$ amivel $F = F' \circ \pi_U$. Emellett

- $\text{Im } F = \text{Im } F'$, illetve F' pontosan akkor szürjektív, amikor F is,
- $\text{Ker } F' = (\text{Ker } F)/U$, illetve F' pontosan akkor injektív, amikor $U = \text{Ker } F$.

F' -t az **F által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

2.1.4. Tétel. Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altér, $W \subset V$ pedig az U komplement altér (tehát $V = W \oplus U$). Ekkor a π_U kanonikus leképezés leszűkítése W -re

$$\pi|_W : W \longrightarrow V/U, \quad \pi|_W(w) = w + U$$

izomorfia, azaz $W \cong V/U$.

2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek.

2.2.1. Definíció (Kompakt operátor). $A : X \rightarrow Y$ operátor **kompakt**, ha bármely $U \subset X$ korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz $\overline{A[U]} \subset Y$ kompakt, valamint ha A korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]

A továbbiakban az $X \rightarrow Y$ közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát $K(X, Y)$ -al, $X = Y$ esetén $K(X)$ -szel jelöljük, ez zárt alteret alkot $L(X, Y)$ -ban.

2.2.2. Definíció. $A \in L(X, Y)$ operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ($\dim \operatorname{Im} A < \infty$). A véges rangú operátorok halmazát $K_{fin}(X, Y)$ -al rövidítjük. [2, 3]

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetők véges rangú operátorokkal:

2.2.1. Tétel. Ha Y -ban van Schauder-bázis, akkor $A \in L(X, Y)$ pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz $K(X, Y) = \overline{K_{fin}(X, Y)}$. [3]

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy L^p -terekben ($p \geq 1$).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

2.2.2. Tétel. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek, $A \in L(X, Y)$, ekkor

$$A \in K(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha A^* adjungált operátora kompakt. [2, 4]

2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operátorokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek.

2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor). $T \in L(X, Y)$ **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$,
- $T[X]$ zárt Y -ban,
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$.

Ekkor a T operátor **indexe** $\operatorname{ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$, T **cokernelle** $\operatorname{coker} T := Y/T[X]$ (azaz Y -ban a T képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója** $\operatorname{codim} T := \dim \operatorname{coker} T$. [1, 3, 4, 5]

Az X és Y közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(X, Y)$ -al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel (T képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

2.3.1. Tétel. *Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ és $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-terek, ekkor:*

- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ és $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$, ekkor $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$ és $\text{ind}(B \circ A) = \text{ind } B + \text{ind } A$,
- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, ekkor $A^* \in \mathcal{F}(X^*, Y^*)$ és $\text{ind } A^* = -\text{ind } A$,
- $\mathcal{F}(X, Y)$ nyílt részhalmaza $L(X, Y)$ -nak, és az $\text{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény lokálisan konstans.

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

2.3.2. Tétel. $T \in L(X, Y)$ bijektív, $K \in L(X, Y)$ kompakt, ekkor $T + K$ Fredholm-operátor és $\text{ind}(T + K) = 0$. Ennek speciális esete amikor $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$ és T az identitás X -en. [3, 5]

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

2.3.3. Tétel. $K \in K(X, Y)$ és $F \in \mathcal{F}(X, Y)$ esetén $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$, valamint $\text{ind}(K + F) = \text{ind } F$. [3]

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

2.3.4. Tétel. $T \in L(X, Y)$ pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik $B \in L(Y, X)$, $K_X \in K(X)$, $K_Y \in K(Y)$ úgy, hogy

$$BT = I_{|X} + K_X, TB = I_{|Y} + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára. $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ és $(Z, \|\cdot\|_Z)$ a következők során Banach-terek.

2.4.1. Definíció. $F : X \times Y \rightarrow Z$ **Fréchet-differenciálható** X -ben az (u_0, v_0) pontban, ha létezik $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$ úgy, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben). $F : X \times Y \rightarrow Z$ folytonos, $(u_0, v_0) \in X \times Y$, $F(u_0, v_0) = 0$, $(D_x F)(u_0, v_0)$ bijektív és folytonos. Ekkor létezik (u_0, v_0) -nak olyan $U \times V \subset X \times Y$ környezete és $G : V \rightarrow U$ függvény, amivel $G(v_0) = u_0$ és

$$F(G(v), v) = 0 \quad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden $U \times V$ -beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

3.1. A Ljapunov-Schmidt-redukció

A Ljapunov-Schmidt-módszer célja, hogy egy végtelen-dimenziós feladatot egy jobban kezelhető, véges dimenziós feladatra redukáljunk.

Először is nézzük meg az általános esetet ([7, 8]). $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ és $(\Lambda, \|\cdot\|_\Lambda)$ legyenek Banach-terek (Λ a paraméterter szerepét tölti be), 0-val pedig értelemszerűen a megfelelő tér nullelemét jelöljük.

Legyen $F : X \times \Lambda \rightarrow Z$ egy korlátos, p -szer folytonosan differenciálható operátor ($p \geq 1$) úgy, hogy

$$F(x_0, \lambda_0) = 0,$$

ahol $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$. Keressük az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{3.1}$$

egyenlet olyan megoldásait (x_0, λ_0) környezetében, amikre $x \neq x_0$.

Először tegyük fel, hogy $D_x F(x_0, \lambda_0)$ izomorfizmus. Ekkor alkalmazható az implicit függvény tétel, azaz létezik $U \times V \subset X \times \Lambda$ és $f : V \rightarrow U$, amivel

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= x_0, \\ F(f(\lambda), \lambda) &= 0 \quad (\lambda \in V), \end{aligned}$$

és $U \times V$ -ben minden megoldás előáll ebben az alakban.

A Ljapunov-Schmidt-módszer bizonyos feltételek mellett megoldja a feladatot ab-

ban az esetben, ha $D_x F(x_0, \lambda_0)$ nem izomorfizmus, tételezzük tehát ezt fel. A továbbiakban a $D_x F(x_0, \lambda_0)$ operátort rövidítve, $D_x F$ -el jelöljük (ami egy $L(X, Z)$ függvény).

Legyen $K := \text{Ker } D_x F$ és $R := \text{Im } D_x F$, és tekintsük a hozzájuk tartozó kiegészítő altereket:

$$\begin{aligned} X &= K \oplus W, \\ Z &= R \oplus S. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy K és S véges dimenziósak, azaz $D_x F$ Fredholm-operátor, ekkor létezik megfelelő W és S , melyek zártak ([2] 4.5.9). Tekintsük $D_x F|_W : W \rightarrow R$ függvényt, ez bijekció és R zárt, ezért létezik $D_x F|_W$ -nek folytonos inverze.

Bontsuk fel minden $x \in X$ -et fel K mentén egyértelműen (x_0 esetén külön jelölve a kapott részeket):

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 & (x_1 \in K, x_2 \in W), \\ x_0 &= x_1^{(0)} + x_2^{(0)} & (x_1^{(0)} \in K, x_2^{(0)} \in W), \end{aligned}$$

Legyen $P_R : Z \rightarrow R$ projekciós operátor R -re. Alkalmazzuk P_R -t és $(I - P_R)$ -t az eredeti (3.1) feladatra, kiegészítve az x szétválasztásával:

$$\begin{aligned} P_R F(x_1, x_2, \lambda) &:= P_R F(x_1 + x_2, \lambda) = 0, \\ (I - P_R) F(x_1, x_2, \lambda) &:= (I - P_R) F(x_1 + x_2, \lambda) = 0, \end{aligned}$$

ahol így

$$\begin{aligned} P_R F &: K \times W \times \Lambda \rightarrow R, \\ (I - P_R) F &: K \times W \times \Lambda \rightarrow S, \end{aligned}$$

az első kissé átrendezve

$$P_R F : W \times (K \times \Lambda) \rightarrow R,$$

alakot kapunk, amire a $D_x F|_W$ invertálhatósága (és az inverz folytonossága) lehetővé teszi az implicit függvény tétel alkalmazását, amivel kapunk egy $x_2 : \Theta \times \Gamma \rightarrow W$

függvényt (alkalmas $\Theta \subset K$ és $\Gamma \subset \Lambda$ halmazokkal $x_1^{(0)}$ és λ_0 környezetében), amivel

$$\begin{aligned} x_2 &:= x_2(x_1, \lambda) & (x_1 \in \Theta, \lambda \in \Gamma), \\ x_2^{(0)} &= x_2(x_1^{(0)}, \lambda_0), \\ P_R F(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

teljesül, így már csak

$$(I - P_R)F(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \tag{3.2}$$

egyenletet kell megoldani, ami így $\Theta \times \Gamma \subset K \times \Lambda$ halmazon értelmezett, S -beli értékeket vesz fel.

Ha még azt is feltesszük, hogy Λ véges dimenziós, akkor $\dim K < \infty$ és $\dim S < \infty$ miatt kapunk egy véges sok egyenletből álló egyenletrendszert véges sok ismeretlennel, amit már például a „szokásos” implicit függvény tétellel megkísérelhetünk megoldani.

Az eredeti 3.1 feladat például akkor állhat elő, ha van $A : X \rightarrow Z$ korlátos lineáris operátorunk, $N : X \times Y \rightarrow Z$ folytonosan differenciálható leképezésünk (ami nem feltétlenül lineáris) és az

$$Ax = N(x, \lambda)$$

egyenlet nemtriviális $x \in X$ megoldásait keressük ([7]).

Irodalomjegyzék

- [1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.
- [2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.
- [3] TODO, *Notes on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.
- [4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.
- [5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.
- [6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapunov-Schmidt*. TODO, TODO.
- [7] TODO, *TODO 8.6 The Liapunov-Schmidt Method*. TODO, TODO.
- [8] TODO, *TODO Chapter II / Chapter X*. TODO, TODO.