A Ljapunov-Schmidt-módszer

Lipták Bence Gábor

ELTE prog. inf. MSc, modellalkotó szakirány

padsoldier@gmail.com

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

2019. január 18.

Motiváció I.

Legyenek $\mathcal{X} \subset \mathcal{Y}$ Banach-terek, tekintsünk egy

$$L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad N : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$$

$$Lu = Nu$$

alakú operátor-egyenletet.

- Ha L injektív, akkor átfogalmazhatjuk

  $$u = L^{-1} N u$$

  alakra. Ha L^{-1} folytonos és L^{-1} vagy N kompakt, akkor létezik u fixpont.
- Ha L nem invertálható, akkor más megközelítésre van szükség.

Motiváció II.

Tekintsük az

$$F(x, \lambda) = 0 \qquad (x \in \mathcal{X}, \lambda \in \mathbb{R})$$

egyenletet, aminek van (x_0, λ_0) megoldása:

$$F(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Keressük az egyes λ értékekhez tartozó x megoldásokat.

Ez az előbbi feladat általánosítása: $F := L - N$.

Definíció: Fredholm-operátorok

Definíció

$L \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ Fredholm-operátor, ha

- $\dim \mathcal{N}(L) < +\infty$, és
- $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) = \dim(\mathcal{Y}/L[\mathcal{X}]) < +\infty$

Vegyük továbbá az alábbi projekciókat:

$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{N}(L),$$
$$Q : \mathcal{Y} \to \mathcal{R}(L).$$

A Ljapunov-Schmidt-módszer I.

Tekintsük az

$$F \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{Y}, \qquad F(x, \lambda) = 0$$

egyenletet ($\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ Banach-terek), aminek ismert (x_0, λ_0) megoldása.

Legyen

$$L := \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Fredholm-operátor.

Legyen

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(L) \oplus \mathcal{X}_0, \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(L),$$

és a lineárisan független $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}$ elemekkel

$$\mathcal{N}(L) = \text{span}\{x_1, \ldots, x_n\}.$$

A Ljapunov-Schmidt-módszer II.

A Ljapunov-Schmidt-projekciókat felhasználva és $x = x_0 + v + w$ felbontást bevezetve (ahol $v \in \mathcal{N}(L)$, $w \in \mathcal{X}_0$) kapjuk az alábbi, az eredetivel ekvivalens egyenletrendszert:

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0,$$
$$(I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0.$$

Legyen

$$G \in \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathcal{R}(L),$$
$$G(w, s, \lambda) := Q \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + w, \lambda).$$

amire

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = L|_{\mathcal{X}_0}.$$

A Ljapunov-Schmidt-módszer III.

Mivel

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = L|_{\mathcal{X}_0},$$

invertálható, így G-re alkalmazható az implicit függvény tétel, így a $(0, \lambda_0)$ egy környezetében

$$w = \phi(s, \lambda), \quad \phi(0, \lambda_0) = 0,$$

$$G(\phi(s, \lambda), s, \lambda) = Q \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda) = 0.$$

Így már csak az

$$(I - Q) \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda) = 0$$

egyenletet kell megoldani, ami véges dimenzión értelmezett $(s_1, \ldots, s_n, \lambda \in \mathbb{R})$, és véges dimezióba képez.

Alkalmazások: Elsőrendű peremérték-feladat

Legyen $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$,

$$f := (f_1, \dots, f_n) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

esetén tekintsük az

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \lambda f(t, x(t)) \quad (t \in (0,1)), \\ x(0) &= x(1) \end{aligned}$$

peremérték feladatot.
A módszer segítségével feltételt adhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságára $\lambda \in (-\delta, \delta)$ esetén.

Legyen $n, N \in \mathbb{N}$. Tekintsük az alábbi feladatot:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = g(y(t)), \qquad (t \in [0,1]),$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \ldots +$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n),$$

ahol $g, a_0, \ldots a_{n-1} \in \mathfrak{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $b_{ij}(k) \in \mathbb{R}$ $(i, j = 1, \ldots, n,\ k = 1, \ldots, N)$, illetve $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$.

A módszer segítségével feltételeket adhatunk a feladat megoldhatóságára.

A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer I.

Keressük az

$$Lu = Nu$$

feladat megoldásait numerikusan, ahol L lineáris, zárt és önadjungált, N pedig nemlineáris operátor. Rögzítsünk $m \leq M \in \mathbb{N}$ számokat.
L sajátfüggvényei: $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, sajátérték $(\lambda_1, \ldots)$ szerint növekvően.
Ha $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k$, akkor legyen

$$P_m u := \sum_{k=1}^{m} \langle u, \Phi_k \rangle, \Phi_k$$

és

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{M} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle, \Phi_k.$$

A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer II.

Ezekkel előállítjuk a kisegítő egyenletünket:

$$u = P_m u + H_m N u,$$

és a bifurkációs egyenletünket:

$$P_m(Lu - Nu) = 0.$$

A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer III.

Vegyünk egy

$$u^* = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k$$

kiinduló értéket, és állítsuk elő az ehhez tartozó, az

$$y = P_m y + H_m N y$$

kisegítő egyenletet megoldó $y(u^*)$-ot fixpontiterációval:

$$y_0 := u^*; \qquad y_{i+1} := u^* + H_m N y_i.$$

Majd oldjuk meg az (m-dimenziós)

$$Lu^* = P_m N y$$

egyenletet u^*-ra, és ezt kiinduló értéknek véve ismételjük a lépéseket.

Csebisev-Tau-módszer I.

Ha L úgynevezett Sturm-Liouville-operátor

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

akkor a Csebisev-Tau-módszerrel állíthatjuk elő a sajátfüggvényeit Csebisev-polinomok véges lineáris kombinációjaként.

$$u(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x).$$

Ekkor u-t meghatározza az $\mathbf{a} := [a_0, \ldots, a_N]$ együtthatóvektor.

Csebisev-Tau-módszer II.

Az ilyen együtthatóvektorokhoz megadható $\hat{D}$ mátrix, ami a deriválást közelíti:

$$u \sim \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad u' \sim \hat{D}\mathbf{a}$$

illetve M mátrix, amivel analitikus függvénnyel való szorzást tudunk közelíteni:

$$u \sim \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f \cdot u \sim f(M)\mathbf{a}.$$

Ezekkel felírhatjuk a sajátfüggvény egyenletünket általánosított sajátérték feladatként, ahol az együtthatóvektor a sajátfüggvény, és arra megoldva megkapjuk a sajátfüggvényeket.

Főbb hivatkozások

- **Kovács, S.**: *Abstract bifurcations*, Miklós Farkas Seminar on Applied Analysis, Budapest University of Technology, 22 February 2018.
- **Pötzsche, C.**: *Bifurcation theory*, Lecture Notes, SS 2010, TU München, 2011.
- **Rodriguez, J.**; **Taylor, P.**: *Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **68**(11) (2008), 3465–3474.
- **Trif, D.**: *The Lyapunov-Schmidt method for two-point boundary value problems*, Fixed Point Theory **6**(1) (2005), 119–132.
- **Liefvendahl, M.**: *A Chebyshev Tau Spectral Method for the Calculation of Eigenvalues and Pseudospectra*, Technical Report, TRITA-NA-0125, KTH, Stockholm, 2001.

Köszönöm a figyelmet.