Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar
Numerikus Analízis Tanszék

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emellett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció (Faktortér). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altere. A V tér U szerinti **faktortere** vagy **hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \tag{2.1}$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \tag{2.2}$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. *Ha V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, akkor $\forall v, v' \in V$-re*

$$v + U = v' + U \qquad \Leftrightarrow \qquad v - v' \in U. \tag{2.3}$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha "$v - v' \in U$" feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$
$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

  leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \tag{2.4}$$
$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \tag{2.5}$$

  melyek jól definiáltak.

- *A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér.*

- *π_U az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \qquad (v \in V)$$

  módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\overline{v} := v + U \qquad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\overline{v} + \overline{w} = \overline{v + w} \qquad (v, w \in V)$$
$$\alpha\overline{v} = \overline{\alpha v} \qquad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szürjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \tag{2.6}$$

Ha egy $v \in V$ elemet egy $u \in U$ elemmel eltolunk ($U \subset V$ altér), akkor a V/U faktortérbeli π_U általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az U altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre). *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $F : V \to W$ egy lineáris leképezés, $U \subset V$ egy altér amire $U \subset \operatorname{Ker} F$. Ekkor egyértelműen létezik $F' : V/U \to W$ amivel $F = F' \circ \pi_U$. Emellett*

- $\operatorname{Im} F = \operatorname{Im} F'$, *illetve F' pontosan akkor szürjektív, amikor F is,*
- $\operatorname{Ker} F' = (\operatorname{Ker} F)/U$, *illetve F' pontosan akkor injektív, amikor $U = \operatorname{Ker} F$.*

*F'-t az **F által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.*

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

2.1.4. Tétel. *Legyen V egy $\mathbb{K}$ feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, $W \subset V$ pedig az U komplemens altere (tehát $V = W \oplus U$). Ekkor a π_U kanonikus leképezés leszűkítése W-re*

$$\pi_{|_U} : W \longrightarrow V/U,\ \pi_{|_U}(w) = w + U$$

izomorfia, azaz $W \cong V/U$.

2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ normált terek.

2.2.1. Definíció (Kompakt operátor). *$A : X \to Y$ operátor **kompakt**, ha bármely $U \subset X$ korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz $\overline{A[U]} \subset Y$ kompakt, valamint ha A korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]*

A továbbiakban az $X \to Y$ közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát $K(X,Y)$-al, $X = Y$ esetén $K(X)$-szel jelöljük, ez zárt alteret alkot $L(X,Y)$-ban.

2.2.2. Definíció. *$A \in L(X,Y)$ operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ($\dim \operatorname{Im} A < \infty$). A véges rangú operátorok halmazát $K_{fin}(X,Y)$-al rövidítjük. [2, 3]*

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetőek véges rangú operátorokkal:

2.2.1. Tétel. *Ha Y-ban van Schauder-bázis, akkor $A \in L(X,Y)$ pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz $K(X,Y) = \overline{K_{fin}(X,Y)}$. [3]*

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy L^p-terekben ($p \geq 1$).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

2.2.2. Tétel. *Legyenek $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek, $A \in L(X,Y)$, ekkor*

$$A \in K(X,Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha A^* adjungált operátora kompakt. [2, 4]

2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operárokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban $(X, \|.\|_X)$ és $(Y, \|.\|_Y)$ Banach-terek.

2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor). *$T \in L(X,Y)$ **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:*

- $\dim \operatorname{Ker} T < \infty$,
- *$T[X]$ zárt Y-ban,*
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$.

*Ekkor a T operátor **indexe** $\operatorname{ind} T := \dim \operatorname{Ker} T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$, T **cokernele** $\operatorname{coker} T := Y/T[X]$ (azaz Y-ban a T képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója** $\operatorname{codim} T := \dim \operatorname{coker} T$. [1, 3, 4, 5]*

Az X és Y közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(X,Y)$-al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel (T képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

2.3.1. Tétel. *Legyenek $(X,\|.\|_X)$, $(Y,\|.\|_Y)$ és $(Z,\|.\|_Z)$ Banach-terek, ekkor:*

- $A \in \mathcal{F}(X,Y)$ *és* $B \in \mathcal{F}(Y,Z)$, *ekkor* $B \circ A \in \mathcal{F}(X,Z)$ *és* $\operatorname{ind}(B \circ A) = \operatorname{ind} B + \operatorname{ind} A$,
- $A \in \mathcal{F}(X,Y)$, *ekkor* $A^* \in \mathcal{F}(X^*,Y^*)$ *és* $\operatorname{ind} A^* = -\operatorname{ind} A$,
- $\mathcal{F}(X,Y)$ *nyílt részhalmaza L(X, Y)-nak, és az* $\operatorname{ind} : \mathcal{F}(X,Y) \to \mathbb{Z}$ *függvény lokálisan konstans.*

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

2.3.2. Tétel. $T \in L(X,Y)$ *bijektív,* $K \in L(X,Y)$ *kompakt, ekkor* $T+K$ *Fredholm-operátor és* $\operatorname{ind}(T+K) = 0$. *Ennek speciális esete amikor* $(X,\|.\|_X) = (Y,\|.\|_Y)$ *és T az identitás X-en. [3, 5]*

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

2.3.3. Tétel. $K \in K(X,Y)$ *és* $F \in \mathcal{F}(X,Y)$ *esetén* $K+F \in \mathcal{F}(X,Y)$, *valamint* $\operatorname{ind}(K+F) = \operatorname{ind} F$. *[3]*

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

2.3.4. Tétel. $T \in L(X,Y)$ *pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik* $B \in L(Y,X)$, $K_X \in K(X)$, $K_Y \in K(Y)$ *úgy, hogy*

$$BT = I_{|_X} + K_X, TB = I_{|_Y} + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára. $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(Z, \|.\|_Z)$ a következők során Banach-terek.

2.4.1. Definíció. *$F : X \times Y \to Z$ **Fréchet-differenciálható** X-ben az (u_0, v_0) pontban, ha létezik $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$ úgy, hogy*

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben). *$F : X \times Y \to Z$ folytonos, $(u_0, v_0) \in X \times Y$, $F(u_0, v_0) = 0$, $(D_x F)(u_0, v_0)$ bijektív és folytonos. Ekkor létezik (u_0, v_0)-nak olyan $U \times V \subset X \times Y$ környezete és $G : V \to U$ függvény, amivel $G(v_0) = u_0$ és*

$$F(G(v), v) = 0 \qquad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden $U \times V$-beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező $D_x F$ függvényeket lineáris homeomorfizmusnak nevezzük:

2.4.2. Definíció. *Az A leképezés **lineáris homeomorfizmus**, ha folytonos, bijektív és az inverze is folytonos.*

Az inverz folytonossága pedig a Banach-féle inverz tételből (vagy Banach-féle homeomorfiatételből) következik:

2.4.2. Tétel. *$A \in L(X, Y)$ Banach-terek közötti bijektív operátor, ekkor $A^{-1} \in L(Y, X)$. ([2] 6.1.4)*

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

3.1. A Ljapunov-Schmidt-redukció

A Ljapunov-Schmidt-módszer célja, hogy egy végtelen-dimenziós feladatot egy jobban kezelhető, véges dimenziós feladatra redukáljunk.

Először is nézzük meg az általános esetet ([7, 8]). $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ és $(\Lambda, \|.\|_\Lambda)$ legyenek Banach-terek (Λ a paramétertér szerepét tölti be), 0-val pedig értelemszerűen a megfelelő tér nullelemét jelöljük.

Legyen $F : X \times \Lambda \to Z$ egy korlátos, p-szer folytonosan differenciálható operátor ($p \geq 1$) úgy, hogy

$$F(x_0, \lambda_0) = 0,$$

ahol $(x_0, \lambda_0) \in X \times \Lambda$. Keressük az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{3.1}$$

egyenlet olyan megoldásait (x_0, λ_0) környezetében, amikre $x \neq x_0$.

Először tegyük fel, hogy $D_x F(x_0, \lambda_0)$ izomorfizmus. Ekkor alkalmazható az implicit függvény tétel, azaz létezik $U \times V \subset X \times \Lambda$ és $f : V \to U$, amivel

$$\begin{aligned} f(\lambda_0) &= x_0, \\ F(f(\lambda), \lambda) &= 0 \qquad (\lambda \in V), \end{aligned}$$

és $U \times V$-ben minden megoldás előáll ebben az alakban.

A Ljapunov-Schmidt-módszer bizonyos feltételek mellett megoldja a feladatot abban az esetben, ha $D_xF(x_0,\lambda_0)$ nem izomorfizmus, tételezzük tehát ezt fel. A továbbiakban a $D_xF(x_0,\lambda_0)$ operátort rövidítve, D_xF-el jelöljük (ami egy $L(X,Z)$ függvény).

Legyen $K := \operatorname{Ker} D_xF$ és $R := \operatorname{Im} D_xF$, és tekintsük a hozzájuk tartozó kiegészítő altereket:

$$X = K \oplus W,$$
$$Z = R \oplus S.$$

Tegyük fel, hogy K és S véges dimenziósak, azaz D_xF Fredholm-operátor, ekkor létezik megfelelő W és S, melyek zártak ([2] 4.5.9). Tekintsük $D_xF_{|_W} : W \to R$ függvényt, ez bijekció és R zárt, ezért létezik $D_xF_{|_W}$-nek folytonos inverze.

Bontsuk fel minden $x \in X$-et fel K mentén egyértelműen (x_0 esetén külön jelölve a kapott részeket):

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2 & &(x_1 \in K, x_2 \in W), \\ x_0 &= x_1^{(0)} + x_2^{(0)} & &(x_1^{(0)} \in K, x_2^{(0)} \in W), \end{aligned}$$

Legyen $P_R : Z \to R$ projekciós operátor R-re. Alkalmazzuk P_R-t és $(I - P_R)$-t az eredeti (3.1) feladatra, kiegészítve az x szétválasztásával:

$$P_RF(x_1, x_2, \lambda) := P_RF(x_1 + x_2, \lambda) = 0,$$
$$(I - P_R)F(x_1, x_2, \lambda) := (I - P_R)F(x_1 + x_2, \lambda) = 0,$$

ahol így

$$P_RF : K \times W \times \Lambda \to R,$$
$$(I - P_R)F : K \times W \times \Lambda \to S,$$

az elsőt kissé átrendezve

$$P_RF : W \times (K \times \Lambda) \to R,$$

alakot kapunk, amire a $D_xF_{|_W}$ invertálhatósága (és az inverz folytonossága) lehetővé teszi az implicit függvény tétel alkalmazását, amivel kapunk egy $x_2 : \Theta \times \Gamma \to W$

függvényt (alkalmas $\Theta \subset K$ és $\Gamma \subset \Lambda$ halmazokkal $x_1^{(0)}$ és λ_0 környezetében), amivel

$$\begin{aligned} x_2 &:= x_2(x_1, \lambda) \qquad (x_1 \in \Theta, \lambda \in \Gamma), \\ x_2^{(0)} &= x_2(x_1^{(0)}, \lambda_0), \\ P_R F(x_1 &+ x_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \end{aligned}$$

teljesül, így már csak

$$(I - P_R)F(x_1 + x_2(x_1, \lambda), \lambda) = 0 \tag{3.2}$$

egyenletet kell megoldani, ami így $\Theta \times \Gamma \subset K \times \Lambda$ halmazon értelmezett, S-beli értékeket vesz fel.

Ha még azt is feltesszük, hogy Λ véges dimenziós, akkor $\dim K < \infty$ és $\dim S < \infty$ miatt kapunk egy véges sok egyenletből álló egyenletrendszert véges sok ismeretlennel, amit már például a „szokásos” implicit függvény tétellel megkísérelhetünk megoldani.

Az eredeti 3.1 feladat például akkor állhat elő, ha van $A : X \to Z$ korlátos lineáris operátorunk, $N : X \times Y \to Z$ folytonosan differenciálható leképezésünk (ami nem feltétlenül lineáris) és az

$$Ax = N(x, \lambda)$$

egyenlet nemtriviális $x \in X$ megoldásait keressük ([7]).

3.2. Alkalmazás: Hopf-bifurkáció

A következőkben az úgynevezett Hopf-bifurkáció-tételt vizsgáljuk, ami időfüggetlen, egy paramétertől függő differenciálegyenlet-rendszerek nemtriviális periodikus megoldásainak a létezéséhez ad meg feltételeket. Ennek során fel fogjuk használni az előző fejezetben tárgyalt Ljapunov-Schmidt-módszert. [8]

Legyen $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ kétszer folytonosan differenciálható leképezés, melyre

$$f(0, \alpha) = 0 \qquad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

A vizsgálandó differenciálegyenlet-rendszer, melynek $u \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ megoldásait keressük a következő:

$$\frac{du}{dt} + f(u, \alpha) = 0. \tag{3.3}$$

Tegyük fel, hogy f-re teljesülnek az alábbiak:

- valamilyen $\alpha = \alpha_0$ érték esetén $i = \sqrt{-1}$ és $-i$ sajátértékei $D_u f(0, \alpha_0)$-nak, és $\pm ki$ $(k = 0, 2, 3, \dots)$ nem sajátértékek;

- α_0 egy környezetében van a sajátértékeknek és sajátvektoroknak egy-egy görbéje (β illetve a), amivel

$$D_u f(0,\alpha_0)a(\alpha) = \beta(\alpha)a(\alpha), \tag{3.4}$$
$$a(\alpha_0) \neq 0, \tag{3.5}$$
$$\beta(\alpha_0) = i, \tag{3.6}$$
$$\Re(\frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha_0)) \neq 0. \tag{3.7}$$

A célunk az, hogy találjunk olyan $\eta > 0$ számot illetve egy

$$(u,\rho,\alpha) : (-\eta,\eta) \to C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

folytonosan differenciálható függvényt, amivel $(u(s),\rho(s),\alpha(s))$ megoldja a (3.3) egyenlet egy általánosítását:

$$\frac{du}{dt} + \rho f(u,\alpha) = 0 \tag{3.8}$$

nemtriviális módon ($u(0) \neq 0$ ha $s \neq 0$),

$$\rho(0) = 1,\ \alpha(0) = \alpha_0,\ u(0) = 0,$$

és ezen felül minden megoldás $(0,1,\alpha_0)$ közelében valamely $s \in (-\eta,\eta)$ esetén előálljon (u-beli fáziseltolástól eltekintve).

Vegyük észre, hogy ha $u(t)$ megoldása (3.3)-nek $2\pi\rho$ periódussal, akkor $u(\rho t)$ 2π-periódusú megoldása (3.8)-nak.

Legyenek $X = C^1_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ és $Y = C_{2\pi}(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$ Banach-terek a „szokásos” normákkal. Definiáljunk egy $F : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to Y$ operátort a következő módon:

$$(u,\rho,\alpha) \mapsto \frac{du}{dt} + \rho f(u,\alpha),$$

ami így kétszer folytonosan differenciálható, és keressük az

$$F(u,\rho,\alpha) = 0 \tag{3.9}$$

megoldásait, amikor ρ közel van 1-hez, α közel van α_0-hoz és $u \neq 0$. Látható, hogy

$$F(0,\rho,\alpha) = 0 \qquad (\rho \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}).$$

Vegyük észre, hogy

$$\phi_0(t) = \Re(e^{it}a(\alpha_0)),$$
$$\phi_1(t) = \Im(e^{it}a(\alpha_0))$$

függvények 2π-periodikus megoldásai az

$$\frac{du}{dt} + D_u f(0, \alpha_0)u = 0 \tag{3.10}$$

egyenletnek, és ezek a függvények kifeszítik $D_u F(0, 1, \alpha_0)$ magterét:

$$\operatorname{Ker} D_u F(0, 1, \alpha_0) = \operatorname{span}\{\phi_0, \phi_1 = \phi_0'\} \subset X.$$

A differenciálegyenletek elméletéből következik, hogy $\operatorname{Im} D_u F(0, 1, \alpha_0) \subset Y$ zárt és

$$\operatorname{Im} D_u F(0, 1, \alpha_0) = \{g \in Y : \langle g, \psi_i \rangle = 0, i = 0, 1\},$$

ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ az L^2-beli skaláris szorzás, $\{\psi_0, \psi_1\}$ pedig $\operatorname{Ker}\{-u' + D_u f^T(0, \alpha_0)u\}$ bázisa, ami az $u' + D_u f(0, \alpha_0)u$ adjungált operátora. Emellett $\psi_1 = \psi_0'$ és $\langle \phi_i, \psi_j \rangle = \delta_{ij}$ Kronecker-deltával egyenlő. Ebből következik, hogy $D_u F : X \to Y$ Fredholm-operátor aminek a magtere és a kokernele is 2 dimenziójú.

Így alkalmazhatjuk a Ljapunov-Schmidt-módszert:

$$X = V \oplus W,$$
$$Y = Z \oplus T,$$

ahol $V = \operatorname{Ker} D_u F$ és $T = \operatorname{Im} D_u F$. U legyen a $(0, 1, \alpha_0, 0) \in V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, és G legyen U-n értelmezve a következő módon:

$$G(v, \rho, \alpha, s) = \begin{cases} \frac{1}{s} F(s(\phi_0 + v), \rho, \alpha), & s \neq 0, \\ D_u F(0, \rho, \alpha)(\phi_0 + v), & s = 0. \end{cases}$$

Ekkor a megoldandó egyenletünk

$$G(v, \rho, \alpha, s) = 0 \tag{3.11}$$

alakban van, amit v, ρ, α-ra kellene megoldani s függvényében $0 \in \mathbb{R}$ egy környezetében. G folytonosan differenciálható, és

$$G(v, \rho, \alpha, 0) = D_u F(0, \rho, \alpha)(\phi_0 + v) = (\phi_0 + v)' + \rho D_u f(0, \alpha)(\phi_0 + v),$$

illetve

$$G(0, \rho, \alpha, 0) = \phi_0' + \rho D_u f(0, \alpha)\phi_0. \tag{3.12}$$

Az implicit függvény tétel alkalmazásához arra van szükségünk, hogy a $(v, \rho, \alpha) \mapsto G(v, \rho, \alpha, s)$ leképezés $(0, 1, \alpha_0, 0)$-ban vett deriváltja folytonos és bijektív leképezése $V \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$-nak Y-ra.

Vegyük az előbbi egyenlet Taylor-sorba fejtését $(0, 1, \alpha_0)$ körül (rögzített $s \in \mathbb{R}$ esetén):

$$\begin{aligned} G(v, \rho, \alpha, s) =& G(0, 1, \alpha_0, s) + D_\rho G(0, 1, \alpha_0, s)(\rho - 1) \\ & + D_\alpha G(0, 1, \alpha_0, s)(\alpha - \alpha_0) + D_v G(0, 1, \alpha_0, s)v + \dots, \end{aligned}$$

amit $s = 0$-ban kiértékelünk:

$$\begin{aligned} D_{v,\rho,\alpha} G(0, 1, \alpha_0, 0)(v, \rho - 1, \alpha - \alpha_0) =& D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) \\ & + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) \\ & + (v' + D_u f(0, \alpha_0)v). \end{aligned}$$

Ebből az utóbbi

$$v \mapsto v' + D_u f(0, \alpha_0)v$$

lineáris homeomorfizmus V-ből T-re (folytonos bijekció), így elég az egyenlet maradékáról

$$(\rho, \alpha) \mapsto D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0)$$

belátni hogy pontosan akkor képez T-be, ha $\rho = 1$ és $\alpha = \alpha_0$, valamint minden $\psi \in Z$-re egyértelműen létezik (ρ, α) amivel

$$D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) = \psi.$$

T-t korábban felírtuk mint $\{\psi_0, \psi_1\}$-re ortogonális függvények halmaza, így

$$D_u f(0, \alpha_0)\phi_0(\rho - 1) + D_{u\alpha} f(0, \alpha_0)\phi_0(\alpha - \alpha_0) \in T$$

pontosan akkor teljesül, ha

$$\langle D_u f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_i\rangle(\rho-1) + \langle D_{u\alpha} f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_i\rangle(\alpha-\alpha_0) = 0 \qquad (i=0,1).$$

Mivel $D_u f(0,\alpha_0)\phi_0 = \phi_1$ és $\langle \phi_i, \psi_j\rangle = \delta_{ij}$, ezért az alábbi két egyenletet kapjuk (ahol $(\rho-1)$ és $(\alpha-\alpha_0)$ az ismeretlenek)

$$\begin{aligned} \langle D_{u\alpha} f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_0\rangle(\alpha-\alpha_0) &= 0 \\ (\rho-1) + \langle D_{u\alpha} f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_1\rangle(\alpha-\alpha_0) &= 0, \end{aligned}$$

aminek pontosan

$$\langle D_{u\alpha} f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_0\rangle \neq 0$$

esetén van csak a triviális megoldása (amikor is $\rho = 1$ és $\alpha = \alpha_0$), ami kiszámítható, hogy

$$\langle D_{u\alpha} f(0,\alpha_0)\phi_0, \psi_0\rangle = \Re(\frac{d\beta}{d\alpha}(\alpha_0)) \neq 0$$

a kezdeti kikötéseink miatt teljesül.

Vizsgáljunk meg példát, amint az előbbi levezetés alkalmazható. Vegyünk a

$$x'' + x - \alpha(1-x^2)x' = 0 \tag{3.13}$$

differenciálegyenlet-rendszert. Alakítsuk át

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

alakra, amiből az eredeti egyenlet

$$u' + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

formában adódik. Így

$$f(u,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ u_1^2 u_2 \end{pmatrix}$$

illetve

$$D_u f(0,\alpha) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\alpha \end{pmatrix},$$

aminek sajátértékei kielégítik az

$$\beta(\alpha + \beta) + 1 = 0$$

egyenletet. Legyen $\alpha_0 = 0$, így $\beta(0) = \pm i$ és $\beta' = -\frac{1}{2}$ az $\alpha = 0$ esetben, tehát a tételünk értelmében van $\eta > 0$ és $\alpha(s)$, $\rho(s)$ $(s \in (-\eta, \eta))$ amire $\alpha(0) = 0$, $\rho(0) = 1$ és $s \neq 0$ esetén van nemtriviális $x(s)$ megoldása a feladatunknak $2\pi\rho(s)$ periódussal.

3.3. Alkalmazás: Nemlineáris peremérték feladat

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos aminek létezik határértéke $\pm\infty$-ben. Legyen $g : C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ nemlineáris folytonos (a függvények terén a $\|.\|_\infty$ normát tekintve). Vizsgáljuk az alábbi alakú differenciálegyenleteket:

$$y^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = f(y(t)) + (gy)(t), \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{3.14}$$

a következő peremfeltételekkel:

$$\begin{aligned}
b_{11}y(0) + \cdots + b_{1n}y^{(n-1)}(0) + d_{11}y(1) + \quad & \cdots + d_{1n}y^{(n-1)}(1) = 0, \\
b_{21}y(0) + \cdots + b_{2n}y^{(n-1)}(0) + d_{21}y(1) + \quad & \cdots + d_{2n}y^{(n-1)}(1) = 0, \\
\vdots \qquad & \\
b_{n1}y(0) + \cdots + b_{nn}y^{(n-1)}(0) + d_{n1}y(1) + \quad & \cdots + d_{nn}y^{(n-1)}(1) = 0.
\end{aligned}$$

Tételezzük fel, hogy a homogén egyenletnek

$$y^{(n)}(t) + \cdots + a_1(t)y'(t) + a_0(t)y(t) = 0,$$

a megoldásai egy dimenziós alteret alkotnak. A továbbiakban [9] mintájára megadunk feltételeket az inhomogén egyenlet megoldásának létezéséhez a Ljapunov-Schmidt-módszer felhasználásával.

Először is alakítsuk át az egyenletet egyenletrendszerré:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_n(t) & -a_{n-1}(t) & -a_{n-2}(t) & \ldots & -a_1(t) \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

és a peremfeltételek:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ezzel a jelöléssel a feladat a következő alakú:

$$x'(t) = A(t)x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x_1(t)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x_1(t)) \end{pmatrix}, \qquad 0 \leq t \leq 1, \tag{3.15}$$

amire a

$$Bx(0) + Dx(1) = 0 \tag{3.16}$$

peremfeltételnek kell teljesülnie. Az f függvény határértékeit jelöljük

$$f(\infty) := lim_{s\to\infty} f(s),$$
$$f(-\infty) := lim_{s\to-\infty} f(s),$$

módon, és ezekről tegyük fel, hogy végesek. Mivel az így kapott differenciálegyenlet-rendszer n-dimenziós, megadunk a lehetséges megoldások $C([0,1],\mathbb{R}^n)$ terén egy normát a következő módon:

$$\|\phi\|_\infty := \sup\{\|\phi(t)\|_2 : 0 \leq t \leq 1\},$$

ahol $\|.\|_2$ az euklideszi norma $\mathbb{R}^n$-en.

Tegyük fel, hogy létezik $M > 0$ amivel bármely $\psi \in C([0,1],\mathbb{R})$-re teljesül

$$\sup\{|g(\psi(t))| : 0 \leq t \leq 1\} \leq M < \infty.$$

Jelöljük a peremfeltételt kielégítő függvények terét X-el:

$$X := \{x \in C([0,1], \mathbb{R}^n) : Bx(0) + Dx(1) = 0\}$$

valamint adjunk meg $F, G : X \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ operátorokat a következő módon:

$$(Fx)(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x_1(t)) \end{pmatrix}, \qquad (Gx)(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ g(x_1(t)) \end{pmatrix}.$$

Látható, hogy F és G folytonosak, valamint $\sup\{\|F(x)\|_\infty : x \in X\}$ és $\sup\{\|G(x)\|_\infty : x \in X\}$ is véges.

Legyen $\operatorname{Dom} L := C^1([0,1], \mathbb{R}^n) \cap X$, és legyen $L : \operatorname{Dom} L \to C([0,1], \mathbb{R}^n)$ az alábbi operátor:

$$(Lx)(t) := x'(t) - A(t)x(t).$$

Ezek segítségével az eredeti feladatot a következő formában írhatjuk fel:

$$Lx = F(x) + G(x). \tag{3.17}$$

Mivel a homogén egyenlet megoldásainak tulajdonságai szerepet játszhatnak az inhomogén egyenlet megoldhatóságában, először vizsgáljuk az $Lx = 0$ homogén egyenletet.

Legyen $\Gamma(t)$ az $x'(t) = A(t)x(t)$ egyenlet alapmátrixa.

$$\begin{aligned}
&Lx = 0 \\
\Leftrightarrow &x'(t) - A(t)x(t) = 0 \text{ és } Bx(0) + Dx(1) = 0 \\
\Leftrightarrow &x(t) = \Gamma(t)C \text{ valamely } C\text{-re és } B\Gamma(0)C + D\Gamma(1)C = 0 \\
\Leftrightarrow &B + D\Gamma(1)C = 0 \\
\Leftrightarrow &C \in \operatorname{Ker}(B + D\Gamma(1)),
\end{aligned}$$

azaz a homogén megoldások előállnak $x(t) = \Gamma(t)C$ alakban, ahol $C \in \operatorname{Ker}(B + D\Gamma(1))$. Ebből az is látszik, hogy $\dim \operatorname{Ker} L = \dim \operatorname{Ker}(B + D\Gamma(1))$.

Az állandók variálásának módszerével az $x'(t) = A(t)x(t) + h(t)$ inhomogén egyenlet megoldásai előállnak

$$x(t) = \Gamma(t)x(0) + \Gamma(t)\int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds$$

alakban. Ez és a peremfeltételek együtt pontosan akkor teljesülnek, ha

$$Bx(0) + D(\Gamma(1)x(0) + \Gamma(1)\int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds) = 0,$$

pontosan akkor, ha

$$(B + D(\Gamma(1))x(0) = -D\Gamma(1)\int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds,$$

amiből megkaptuk x(0) értékét. Ezekből az is következik, hogy L pontosan akkor bijektív, ha $(B + D\Gamma(1))$ invertálható. Ebben az esetben nem szükséges a Ljapunov-Schmidt-módszer alkalmazása, ezért tegyük fel hogy $\operatorname{Ker} L = 1$.

Az előbbiek alapján $h \in \operatorname{Im} L$ pontosan akkor, ha valamely $x_0 \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$(B + D\Gamma(1))x_0 = -D\Gamma(1)\int_0^1 \Gamma^{-1}(s)h(s)ds,$$

ami pontosan akkor, ha

$$\int_0^1 D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(s)h(s)ds \in \operatorname{Im}(B + D\Gamma(1)).$$

Az $\operatorname{Im}(B+D\Gamma(1)) = (\ker(B+D\Gamma(1))^T)^\perp$ összefüggés miatt $h \in \operatorname{Im} L$ pontosan akkor, ha

$$W^T\int_0^1 D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(s)h(s) = 0,$$

ahol $W \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix, aminek az oszlopai a $\operatorname{Ker}(B + D\Gamma(1))^T$ egy bázisát alkotják. Legyen $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ úgy

$$\Psi^T(t) = W^T D\Gamma(1)\Gamma^{-1}(t),$$

ezzel a jelöléssel $Lx = h$ pontosan akkor, ha $\int_0^1 \Psi^T(t)h(t)dt = 0$. Legyenek P : $\operatorname{Dom} L \to \operatorname{Ker} L$ és $E : C([0,1],\mathbb{R}^n) \to \operatorname{Im} L$ projekciók, ezek segítségével írjuk fel a már ismert felbontásokat:

$$\operatorname{Dom} L = \operatorname{Ker} L \oplus \operatorname{Im}(I - P),$$
$$C([0,1],\mathbb{R}^n) = \operatorname{Im} L \oplus \operatorname{Im}(I - E).$$

Legyen $\Phi(t) := \Gamma(t)V$, ahol $V \in \mathbb{R}^n$ a bázisa $\mathrm{Ker}(B + D\Gamma(1))$-nek. Legyenek

$$C_1 := \int_0^1 \Phi^T(t)\Phi(t)dt,$$
$$C_2 := \int_0^1 \Psi^T(t)\Psi(t)dt.$$

Lássuk be, hogy C_1 invertálható, valamint C_2 invertálható akkor, ha $[B : D]$ teljes rangú.

C_1-hez tegyük fel, hogy $C_1 a = 0$, és legyen $q(t) := \Phi(t)a$. Így

$$a^T C_1 a = \int_0^1 q^T(t)q(t)dt = 0,$$

amitől $q(t) = 0$ minden $t \in [0,1]$-re, így $a = 0$, mivel $\Phi(t)$ nem konstans 0.

C_2-höz elég az, hogy $\Psi^T(t)$ oszlopai (amiket $\Psi_j^T(t)$-vel jelölünk) lineárisan függetlenek. Mivel $[B : D]$ teljes rangú, $a \in \mathrm{Ker}\, B^T \cap \mathrm{Ker}\, D^T$-ből következik $a = 0$. Így

$$c_1\Psi_1^T(t) + c_2\Psi_2^T(t) = 0$$

pontosan akkor, ha $(c_1, c_2)D = 0$, azaz ha $(c_1, c_2)^T \in \mathrm{Ker}\, D^T$. Mivel $(c_1, c_2)^T \in \mathrm{Ker}(B + D\Gamma(1))^T$ és $(c_1, c_2)^T \in \mathrm{Ker}\, B^T$, ezért $(c_1, c_2)^T = (0, 0)$, azaz C_2 invertálható.

Így a projekciókat alkalmazva eredeti egyenlet helyett a következőket kapjuk:

$$(I - E)x(t) = \Psi(t)C_2^{-1}\int_0^1 \Psi^T(s)x(s)ds,$$
$$Px(t) = \Phi(t)C_1^{-1}\int_0^1 \Phi^T(s)x(s)ds.$$

Vezessük be a következő jelölést: $M := (L_{|\mathrm{Im}(I-P)})^{-1}$, ezzel $\mathrm{Im}\, M = \mathrm{Im}\, L$, $MLx = (I - P)x$, és M kompakt. A projekciók segítségével $Lx = F(x) + G(x)$ pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} E(Lx - (F(x) + G(x))) = 0 \\ (I - E)(Lx - (F(x) + G(x))) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} Lx = E(F(x) + G(x)) \\ (I - E)(F(x) + G(x)) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} (I-P)x = ME(F(x)+G(x)) \\ (I-E)(F(x)+G(x)) = 0, \end{cases}$$

ami pontosan akkor, ha

$$\begin{cases} x = Px + ME(F(x)+G(x)) \\ (I-E)(F(Px+ME(F(x)+G(x))) + G(Px+ME(F(x)+G(x)))) = 0, \end{cases}$$

Irodalomjegyzék

[1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.

[2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.

[3] TODO, *Notex on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.

[4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.

[5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.

[6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapnov-Schmidt*. TODO, TODO.

[7] TODO, *TODO 8.6 The Liapunov-Schmidt Method*. TODO, TODO.

[8] TODO, *TODO Chapter II / Chapter X*. TODO, TODO.

[9] J. Rodríguez and K. Kobylus Abernathy, „On the solvability of nonlinear boundary value problems," vol. 2, pp. 487–499, 01 2010.