

A Ljapunov-Schmidt-módszer

Dr. Kovács Sándor
Adjunktus

Lipták Bence Gábor
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

Tartalomjegyzék

1. Bevezetés	2
2. Funkcionálanalízis kiegészítés	3
2.1. Faktorterek	3
2.2. Kompakt operátorok	6
2.3. Fredholm-operátorok	6
2.4. Implicit függvény tétel	8
3. A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai	10
3.1. Többspontos peremérték feladat közönséges nemlineáris differenciálegyen- letre	11
4. A Ljapunov-Schmidt-módszer mint numerikus módszer	20
4.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására	26
4.2. Példa a numerikus alkalmazásra	31

1. fejezet

Bevezetés

2. fejezet

Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emellett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

TODO jelölések szekció: Lin op , korl Lin op halmazai, esetleg skaláris szorzás jelölése, ha kell

TODO ebből mi maradjon meg? - kinek a szintjére kell belőni a részletességet, szükséges-e az, hogy pl egy évfolyamtárs megérthesse belőle az egészet? faktortér def talán szükséges, Fredholm-op valószínűleg, Frechét-differenciálás és implicit fv tétel szintén

2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

2.1.1. Definíció (Faktortér). *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ pedig egy altér. A V tér U szerinti **faktortere** vagy **hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A

következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az U altér között mi az összefüggés.

2.1.1. Állítás. *Ha V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altére, akkor $\forall v, v' \in V$ -re*

$$v + U = v' + U \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt V elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a V/U faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

2.1.1. Tétel. *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altére, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

melyek jól definiáltak.

- *A V/U faktortér ezekkel a műveletekkel egy \mathbb{K} feletti lineáris tér.*
- *π_U az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

módon definiálunk lineáris operátor V és V/U között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített $U \subset V$ esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= \overline{v + w} & (v, w \in V) \\ \alpha \bar{v} &= \overline{\alpha v} & (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).\end{aligned}$$

Még fontos észrevétel, hogy a π_U leképezés magtere pontosan az U halmaz, valamint az operátor szűrjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

2.1.2. Tétel. *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, ekkor*

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

Ha egy $v \in V$ elemet egy $u \in U$ elemmel eltolunk ($U \subset V$ altér), akkor a V/U faktortérbeli π_U általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az U altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre). *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $F : V \rightarrow W$ egy lineáris leképezés, $U \subset V$ egy altér amire $U \subset \text{Ker } F$. Ekkor egyértelműen létezik $F' : V/U \rightarrow W$ amivel $F = F' \circ \pi_U$. Emellett*

- $\text{Im } F = \text{Im } F'$, illetve F' pontosan akkor szűrjektív, amikor F is,
- $\text{Ker } F' = (\text{Ker } F)/U$, illetve F' pontosan akkor injektív, amikor $U = \text{Ker } F$.

F' -t az **F által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

2.1.4. Tétel. *Legyen V egy \mathbb{K} feletti lineáris tér, $U \subset V$ egy altere, $W \subset V$ pedig az U komplementum altere (tehát $V = W \oplus U$). Ekkor a π_U kanonikus leképezés leszűkítése W -re*

$$\pi|_W : W \longrightarrow V/U, \quad \pi|_W(w) = w + U$$

izomorfia, azaz $W \cong V/U$.

2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek.

2.2.1. Definíció (Kompakt operátor). $A : X \rightarrow Y$ operátor **kompakt**, ha bármely $U \subset X$ korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz $\overline{A[U]} \subset Y$ kompakt, valamint ha A korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]

A továbbiakban az $X \rightarrow Y$ közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát $K(X, Y)$ -al, $X = Y$ esetén $K(X)$ -szel jelöljük, ez zárt alteret alkot $L(X, Y)$ -ban.

2.2.2. Definíció. $A \in L(X, Y)$ operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ($\dim \operatorname{Im} A < \infty$). A véges rangú operátorok halmazát $K_{fin}(X, Y)$ -al rövidítjük. [2, 3]

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetők véges rangú operátorokkal:

2.2.1. Tétel. Ha Y -ban van Schauder-bázis, akkor $A \in L(X, Y)$ pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz $K(X, Y) = \overline{K_{fin}(X, Y)}$. [3]

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy L^p -terekben ($p \geq 1$).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

2.2.2. Tétel. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek, $A \in L(X, Y)$, ekkor

$$A \in K(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha A^* adjungált operátora kompakt. [2, 4]

2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operátorokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek.

2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor). $T \in L(X, Y)$ **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\dim \text{Ker } T < \infty$,
- $T[X]$ zárt Y -ban,
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$.

Ekkor a T operátor **indexe** $\text{ind } T := \dim \text{Ker } T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$, T **cokernel** $\text{coker } T := Y/T[X]$ (azaz Y -ban a T képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója** $\text{codim } T := \dim \text{coker } T$. [1, 3, 4, 5]

Az X és Y közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban $\mathcal{F}(X, Y)$ -al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel (T képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

2.3.1. Tétel. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ és $(Z, \|\cdot\|_Z)$ Banach-terek, ekkor:

- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ és $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$, ekkor $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$ és $\text{ind}(B \circ A) = \text{ind } B + \text{ind } A$,
- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$, ekkor $A^* \in \mathcal{F}(X^*, Y^*)$ és $\text{ind } A^* = -\text{ind } A$,
- $\mathcal{F}(X, Y)$ nyílt részhalmaza $L(X, Y)$ -nak, és az $\text{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$ függvény lokálisan konstans.

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

2.3.2. Tétel. $T \in L(X, Y)$ bijektív, $K \in L(X, Y)$ kompakt, ekkor $T + K$ Fredholm-operátor és $\text{ind}(T + K) = 0$. Ennek speciális esete amikor $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$ és T az identitás X -en. [3, 5]

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

2.3.3. Tétel. $K \in K(X, Y)$ és $F \in \mathcal{F}(X, Y)$ esetén $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$, valamint $\text{ind}(K + F) = \text{ind } F$. [3]

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

2.3.4. Tétel. $T \in L(X, Y)$ pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik $B \in L(Y, X)$, $K_X \in K(X)$, $K_Y \in K(Y)$ úgy, hogy

$$BT = I|_X + K_X, TB = I|_Y + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára. $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ és $(Z, \|\cdot\|_Z)$ a következők során Banach-terek.

2.4.1. Definíció. $F : X \times Y \rightarrow Z$ **Fréchet-differenciálható** X -ben az (u_0, v_0) pontban, ha létezik $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$ úgy, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben). $F : X \times Y \rightarrow Z$ folytonos, $(u_0, v_0) \in X \times Y$, $F(u_0, v_0) = 0$, $(D_x F)(u_0, v_0)$ bijektív és folytonos. Ekkor létezik (u_0, v_0) -nak olyan $U \times V \subset X \times Y$ környezete és $G : V \rightarrow U$ függvény, amivel $G(v_0) = u_0$ és

$$F(G(v), v) = 0 \quad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden $U \times V$ -beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező $D_x F$ függvényeket lineáris homeomorfizmusnak nevezzük:

2.4.2. Definíció. Az A leképezés **lineáris homeomorfizmus**, ha folytonos, bijektív és az inverze is folytonos.

Az inverz folytonossága pedig a Banach-féle inverz tételből (vagy Banach-féle homeomorfia-tételből) következik:

2.4.2. Tétel. $A \in L(X, Y)$ Banach-terek közötti bijektív operátor, ekkor $A^{-1} \in L(Y, X)$. ([2] 6.1.4)

3. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

Szemléltessük a módszer lényegét az alábbi feladaton keresztül. Legyen $L : X \rightarrow Y$ Fredholm-operátor (tehát korlátos és lineáris), $N : X \rightarrow Y$ nemlineáris, korlátos operátor. Megoldandó a következő egyenlet:

$$Lu = Nu.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$K := \text{Ker } L,$$

$$R := \text{Im } L.$$

Ezek kiegészítő altereit jelöljük a következő módon: $X = K \oplus W$, $Y = R \oplus Z$. A Fredholm-operátor tulajdonságaiból következik, hogy $\dim K < \infty$ és $\dim Z < \infty$. Vezessük be az alábbi projekciókat:

$$P : X \rightarrow K,$$

$$Q : Y \rightarrow R.$$

Írjuk fel az eredeti $Lu = Nu$ egyenletet felbontva R és Z -beli komponensekre:

$$QLu = Lu = QNu,$$

$$(I - Q)Lu = 0 = (I - Q)Nu.$$

Bontsuk fel $u \in X$ -et K és W mentén: $u = \tilde{u} + \bar{u}$, ahol $\tilde{u} \in W$ és $\bar{u} \in K$, és az előbbi egyenletrendszerbe helyettesítsük be u felbontását:

$$\begin{aligned} L(\tilde{u} + \bar{u}) &= L\tilde{u} = QN(\tilde{u} + \bar{u}), \\ 0 &= (I - Q)N(\tilde{u} + \bar{u}). \end{aligned}$$

Mivel $\mathcal{N}(L|_W) = \{0\}$, ezért L -nek a W -re leszűkítése invertálható, így legyen $M := (L|_W)^{-1}$, értelemszerűen $\tilde{u} = ML\tilde{u}$. Alkalmazzuk M -et az első egyenletre:

$$\tilde{u} = MQN(\tilde{u} + \bar{u}).$$

Mivel M kompakt és QN korlátos, ezért MQN kompakt, tehát a Schauder-fixpont-tétel értelmében bármely \bar{u} -hoz létezik $\tilde{u}(\bar{u})$ fixpont, amivel

$$\tilde{u}(\bar{u}) = MQN(\tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u})$$

teljesül. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve kapunk egy

$$0 = (I - Q)N(\tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u})$$

egyenletet. Mivel $\bar{u} \in K$ és $\dim K < \infty$, valamint $\text{Im}(I - Q) = Z$ és $\dim Z < \infty$, így ez egy véges dimenzióan értelmezett, véges dimenziós értékészletű egyenletrendszer, ami már könnyebben megoldható \bar{u} -ra, és a fixpont-feladattal összevetve előáll az eredeti $Lu = Nu$ probléma megoldása $u = \tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u}$ alakban.

3.1. Többpontos peremérték feladat közös nemlineáris differenciálegyenletre

Mutassuk be a Ljapunov-Schmidt módszer egy alkalmazását [7] alapján. A feladat egy n -edrendű, nemlineáris differenciálegyenlet megoldása, homogén peremfeltéttel:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = g(y(t)) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \cdots + \sum_{j=1}^n b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

ahol b_{ij} valós számok, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ rögzítettek. Feltesszük, hogy g és a_0, \dots, a_{n-1} valósak, folytonosak, a teljes \mathbb{R} -en értelmezettek, g Lipschitz-folytonos, valamint $a_0(t) \neq 0$ ($0 \leq t \leq 1$). Azt is feltesszük, hogy $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$ és $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)$ létezik és véges, ezeket $g(\infty)$ -nel illetve $g(-\infty)$ -nel fogjuk jelölni.

A vizsgálat során fontos szerepet fog játszani a homogén probléma megoldása:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.3)$$

Első lépésként fogalmazzuk át a problémát, a magasabbrendű egyenlet helyett kezeljük egyenletrendszert. Ehhez vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(y) \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \dots & b_{1n}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \dots & b_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \dots & b_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

Így a differenciálegyenletet felírhatjuk

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.4)$$

alakban, a homogén egyenletet

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.5)$$

alakban, a peremfeltételt pedig

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0 \quad (3.6)$$

formában. Legyen Φ a homogén egyenlet alaprendszere (azaz $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ ($0 \leq t \leq 1$)), és $\Phi(0) = I$ (ahol I az $N \times N$ méretű egységmátrix). Ezt felhasználva még legyen

$$D = B_0 + B_1\Phi(t_1) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1).$$

Emellett még szükséges az inhomogén, lineáris egyenlet vizsgálata:

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.7)$$

Az állandók variálásával (3.7)-(3.6)-nak x megoldása pontosan akkor, ha

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \quad \text{és}$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0.$$

Ha a második egyenletben x -be behelyettesítünk az első egyenletből, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1) \left(x(0) + \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) + \cdots + \\ &+ B_N\Phi(t_{N-1}) \left(x(0) + \int_0^{t_{N-1}} \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) + B_N\Phi(1) \left(x(0) + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_N\Phi(1)x(0) + \\ &+ B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Mivel

$$Dx(0) = B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0),$$

ezért az előbbi átrendezve

$$Dx(0) = - \left(B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right).$$

Tehát

$$B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds$$

benne van D képterében. Mivel $\text{Im } D \perp \text{Ker } D^T$, ezért ha $p \in \text{Ker } D^T$, akkor

$$0 = p^T \left(B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right).$$

Ezután vizsgáljuk meg (3.5)-(3.6) feladatot, ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) && \text{és} \\ B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenlet átírható

$$\begin{aligned} 0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0) = \\ &= Dx(0) \end{aligned}$$

alakra, tehát x pontosan akkor megoldása a homogén peremfeladatnak, ha $x(0) \in \text{Ker } D$. Ebből az is kiderült, hogy a megoldástér ugyanannyi dimenziós, mint $\text{Ker } D$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\dim \text{Ker } D = 1$, $\hat{p} \in \text{Ker } D$, $\|\hat{p}\| = 1$, és legyen $u(t) := \Phi(t)\hat{p}$.

Definiáljunk operátorokat, legyen $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ az $L^2[0, 1]$ -ből \mathbb{R}^n -be képező függvények halmaza, $N : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$: $(Nx)(t) := f(x(t))$. N -ről látható, hogy f folytonossága miatt ő is folytonos. Legyen $L : \text{Dom } L \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$, ahol

$$\text{Dom } L = \left\{ \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi' \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n), \sum_{k=1}^N B_k \phi(t_k) = 0 \right\}$$

és $(Lx)(t) := x'(t) - A(t)x(t)$. Tehát L értelmezési tartományában azok a függvények vannak, amelyek kielégítik a (3.6) peremfeltételt, valamint a (3.4) differenciálegyenletnek megfelel az

$$Lx = Nx \tag{3.8}$$

egyenlet. Ha L invertálható, akkor $x = L^{-1}Nx$ fixpont megoldása az egyenletnek. Tegyük fel, hogy L nem invertálható, tehát $\text{Ker } L \neq \{0\}$. Erre fogjuk a Ljapunov-Schmidt módszer megközelítését alkalmazni.

Definiáljunk két projekciós operátort, $\text{Im } L$ -re és $\text{Ker } L$ -re:

$$Q : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Im } L,$$

$$P : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ker } L.$$

A Q segítségével felírjuk az $Lx = Nx$ -el ekvivalens két egyenletet:

$$QLx = Lx = QNx, \text{ és} \quad (3.9)$$

$$(I - Q)Lx = 0 = (I - Q)Nx. \quad (3.10)$$

Ha ismét M -el jelöljük $(L|_W)^{-1}$ -et, és bevezetjük az $x = \tilde{x} + \bar{x}$ felbontást ($\tilde{x} \in (\text{Ker } L)^\perp$, $\bar{x} \in \text{Ker } L$), akkor ismét eljutunk az

$$x = \bar{x} + MQN(\tilde{x} + \bar{x})$$

egyenlethez, amit viszont már más megközelítéssel fogunk megoldani.

Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben. A korábbi levezetésünkéből és L definíciójából következik, hogy $x \in \text{Ker } L$ pontosan akkor, ha $x(t) = \Phi(t)\hat{p}$ (ami egybevág u -nak a definíciójával, tehát $u \in \text{Ker } L$).

Konstruáljunk meg egy $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ függvényt úgy, hogy az ő merőleges kiegészítője $\text{Im } L$ legyen. Legyen $p \in \text{Ker}(D^T) \setminus \{0\}$, és legyen

$$\psi(t) = \begin{cases} [(B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-1}, 1] \\ [(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-2}, t_{N-1}] \\ \vdots \\ [(B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_1, t_2] \\ [(B_1\Phi(t_1) + B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in [0, t_1]. \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy $\psi(t) = 0$ ($t \in [0, 1]$) lehetséges-e. Először nézzük meg, hogy $(t_{N-1}, 1]$ intervallumon ez mit jelentene:

$$0 = \psi(t) = [B_N\Phi(1)\Phi^{-1}(t)]^T p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(1)B_N^T p,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $p \in \text{Ker } B_N^T$. Ezt feltéve és továbbhaladva, $(t_{N-2}, t_{N-1}]$ intervallumon nézzük:

$$\begin{aligned} 0 = \psi(t) &= [(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p = \\ &= \Phi^{-T}(t) (B_{N-1}^T\Phi^T(t_{N-1}) + \Phi^T(1)B_N^T) p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(t_{N-1})B_{N-1}^T p, \end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha $p \in \text{Ker } B_{N-1}^T$. Ezt ismét feltételezve és $i = N-3, \dots, 1$ tovább folytatva azt kapjuk, hogy ha $\psi(t) = 0$ ($t \in [0, 1]$), abból az következik, hogy $p \in \text{Ker } B_i^T$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\cap_{i=1}^N \text{Ker } B_i^T = \{\mathbf{0}\}$, így ψ nem az azonosan $\mathbf{0}$ függvény, valamint hogy $p \in \text{Ker}(D^T)$ -at úgy választjuk, hogy $\|\psi\|_{L^2} = 1$. Belátható, hogy $\text{Im } L = \psi^\perp$. Ennek segítségével írjuk fel az Q projekciót:

$$(Qx)(t) = x(t) - \psi(t) \int_0^1 \psi^T(s)x(s)ds = x(t) - \psi(t)\langle x, \psi \rangle_{L^2}.$$

Értelemszerűen $QLx = Lx$ ($x \in \text{Dom } L$).

Írjuk fel a P projekciót is integrál segítségével:

$$(Px)(t) = u(t) \int_0^1 u^T(s)x(s)ds = u(t)\langle x, u \rangle_{L^2},$$

ahol u volt az a vektor, ami kifeszíti $\text{Ker } L$ -et. Így bármely $x \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ -re $Px = \bar{x} = \alpha u$, ahol α megfelelő (x -től függő) valós szám.

Magától értetődő, hogy ha L -et leszűkítjük $\text{Dom } L \cap (\text{Ker } L)^\perp$ -re, akkor az bijekció $\text{Dom } L \cap (\text{Ker } L)^\perp$ és $\text{Im } L$ között. Ennek az inverzét jelöltük M -el:

$$\begin{aligned} LMh &= h & (h \in \text{Im } L) \\ MLx &= (I - P)x & (x \in \text{Dom } L). \end{aligned}$$

Írjuk fel x -et a P projekció segítségével, és helyettesítsük be a (3.10) levetített feladatot, illetve a $\text{Ker } L$ -et kifeszítő u -t:

$$x = Px + (I - P)x = Px + MLx = Px + MQNx = \alpha u + MQNx.$$

A korábbi jelölésünkkel $\bar{x} = Px$ és $\tilde{x} = (I - P)x$.

A (3.9) egyenlet azt jelenti, hogy $N(x) \in \text{Im } L$, és mivel ψ ortogonális $\text{Im } L$ -re, ezért

pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \langle Nx, \psi \rangle = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $u(t)$ első komponensét jelöljük $s(t)$ -vel,
- $MQN(x)$ első komponensét jelöljük $w(x)$ -szel,
- $\psi(t)$ n . komponensét jelöljük $v(t)$ -vel.

Mivel f az a függvény, aminek az első $n-1$ komponense azonosan 0, az n . komponense pedig $f_n(x) = g(x_1)$, emellett x_1 felírható $x_1(t) = \alpha s(t) + w(x(t))$ alakban, így az integrál átalakítható:

$$0 = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt = \int_0^1 v(t)g(x_1(t))dt = \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt.$$

Mivel $\{t : s(t) = 0\}$ 0-mértékű, ezért az integrál felbontható:

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt = \int_{\{s(t)>0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt + \int_{\{s(t)<0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt$$

M , E és g korlátossága miatt w is korlátos, írjuk fel $\alpha \rightarrow \pm\infty$ esetén az egyenletet:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt &= g(\infty) \int_{s(t)>0} v(t)dt + g(-\infty) \int_{s(t)<0} v(t)dt =: J_1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt &= g(-\infty) \int_{s(t)>0} v(t)dt + g(\infty) \int_{s(t)<0} v(t)dt =: J_2. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy $J_2 < 0 < J_1$ ($J_1 < 0 < J_2$ esetén analóg módon folytatható, de $J_1 J_2 < 0$ szükséges). Így létezik α_0 , amivel

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt &> 0 && \text{ha } \alpha \geq \alpha_0, \\ \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt &< 0 && \text{ha } \alpha \leq -\alpha_0. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Definiáljuk az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned}
H_1 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \\
H_1(x, \alpha) &:= \alpha u + MQN(x) \\
H_2 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
H_2(x, \alpha) &:= \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \\
H &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \\
H(x, \alpha) &:= (H_1(x, \alpha), H_2(x, \alpha)).
\end{aligned}$$

Ezzel a szétválasztással $\bar{x} = \alpha u$, azaz x -nek a $\text{Ker } L$ irányú komponensét az α reprezentálja. $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ -en a norma amit használunk $\|(x, \alpha)\| := \max\{\|x\|_{L^2}, |\alpha|\}$. Jól látható, hogy az eredeti (3.4)-(3.6) peremfeladat megoldhatósága a H fixpontjának létezésével hozható összefüggésbe.

Legyen $r := \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$, $m := \sup_{t \in [0, 1]} |v(t)|$. Ezekből következik, hogy

$$\left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq rm.$$

Válasszunk α_0 -át úgy, hogy (3.11) egyenletek teljesüljenek és $\alpha_0 > rm$, legyen $\delta := \alpha_0 + rm$. u , g és ME korlátossága miatt ha $|\alpha| \leq \delta$ és $x \in L^2[0, 1]$, akkor

$$\|H_1(x, \alpha)\| = \|\alpha u + MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQ\| \|g(x_1)\| \leq b_1$$

megfelelő b_1 választásával. Legyen

$$\mathcal{B} = \{(x, \alpha) \in L^2[0, 1] \times \mathbb{R} : \|x\| \leq b_1 \text{ és } |\alpha| \leq \delta\},$$

így \mathcal{B} egy zárt, korlátos, konvex halmaz. A cél megmutatni, hogy H a \mathcal{B} halmazt önmagába képezi. $\|H_1(x, \alpha)\| \leq b_1$ -et az előbb beláttuk, nézzük $\|H_2(x, \alpha)\| \leq \delta$ -t.

Először legyen $\alpha_0 \leq \alpha \leq \delta$, a feltételünk miatt

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt > 0,$$

így

$$H_2(x, \alpha) = \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \geq \alpha_0 - rm > 0,$$

így $H_2(x, \alpha) \in [0, \alpha_0 - rm] \subset [-\delta, \delta]$.

Ha $0 \leq \alpha < \alpha_0$, akkor

$$\begin{aligned} |H_2(x, \alpha)| &= \left| \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq \\ &\leq |\alpha| + \left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq \alpha_0 + rm = \delta, \end{aligned}$$

így $H_2(x, \alpha) \in [-\delta, \delta]$, tehát ha $0 \leq \alpha \leq \delta$ és $x \in L^2[0, 1]$, akkor $H(x, \alpha) \in \mathcal{B}$. Analóg módon belátható, hogy ha $-\delta \leq \alpha \leq 0$, akkor ugyanez fenn áll.

Így tehát $H(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. H kompaktsága következik MQN kompaktságából, és így a Schauder fixpont-tétel értelmében H -nak van fixpontja \mathcal{B} -ben, tehát van $(x_0, \alpha_0) \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$, amivel

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 u + MQN(x_0), \text{ és} \\ \alpha_0 &= \alpha_0 - \int_0^1 v(t)g(\alpha_0 s(t) + w(x_0(t)))dt \end{aligned}$$

teljesül, tehát az eredeti (3.4)-(3.6) peremfeladat megoldható, és $x_0 + \alpha_0 u$ egy megoldása.

4. fejezet

A Ljapunov-Schmidt-módszer mint numerikus módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt módszernek egy numerikus módszerkénti felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [8] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.1)$$

ahol L úgynevezett Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol $p(x) > 0, w(x) > 0$ ($x \in [a, b]$), p, q, w adott analitikus függvények, valamint u -ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) &= 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen L -ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [9]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.

Emellett feltesszük a következőket:

- S valós, szeparábilis Hilbert-tér, $L : \text{Dom } L \subset S \rightarrow S$ lineáris operátor, $N : \text{Dom } N \subset S \rightarrow S$ nemlineáris operátor,
- L zárt leképezés (amivel ekvivalens [2]: $x_n \rightarrow x$ és $Lx_n \rightarrow y$ -ből következik hogy

$x \in \text{Dom } L$ és $Lx = y$), önadjungált, $\text{Dom } L$ sűrű S -ben, $\text{Ker } L = p > 0$ véges,

- L -nek a sajátértékei $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}$, $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$, és a hozzájuk tartozó Φ_1, Φ_2, \dots sajátfüggvények S -ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a tulajdonságokat a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,
- létezik egy $S' \subset S$ altér, ami egy μ normával teljes, $\text{Dom } L \subset S'$, minden $x \in \text{Dom } L$ esetén a Φ_i -szerinti Fourier-sora $(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k)$ μ -ben konvergál x -hez és $\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2$, valamint létezik $\alpha > 0$, amivel $x \in S'$ esetén $\|x\|_S \leq \alpha \mu(x)$ (tehát μ α -szorosa felső becslése az eredeti normának, és μ -beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),
- $\text{Dom } L \cap \text{Dom } N \neq \emptyset$, $\text{Dom } N \subset S'$ és altér S' -ben, $\text{Dom } N$ zárt μ szerint,
- bármely $R > 0$ -hoz létezik $\beta_R > 0, b_R > 0$, amelyekkel azon $x, y \in \text{Dom } N$ -ekre, amelyekre $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$ teljesül, $\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R \mu(x - y)$ és $\mu(Nx) \leq b_R$, tehát tetszőleges μ -szerinti gömb N -szerinti képe korlátos (μ normával), valamint ezen gömbbeli elemek környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (4.1) egyenlet megoldásait $\text{Dom } L \cap \text{Dom } N$ -ben keressük. Legyen $m \geq p$ és

$$S_m := \text{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}, \quad S_0 := \{0\},$$

azaz S_m az első m sajátfüggvény által kifeszített altér, $S_m \subset \text{Dom } L$. Defináljuk a következő operátorokat, amennyiben $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k$ ($u \in S$):

$$P_m u := \sum_{k=1}^m \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k,$$

tehát P_m az S_m -re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k.$$

H_m Dom L -be képez (mivel $\Phi_k \in \text{Dom } L$ ($k = 0, \dots, m+1, \dots$)), lássuk be róla, hogy lineáris ($x, y \in S$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x + y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\langle \alpha x, \Phi_k \rangle + \langle y, \Phi_k \rangle) \Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \alpha H_m x + H_m y.
\end{aligned}$$

H_m az L egy leszűkítésének inverze, pontosabban $H_m = (L|_{S_m^\perp})^{-1}$, értelemszerűen $S_m^\perp = \text{span}\{\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots\}$, így a linearitás miatt elég Φ_n -ra nézni ($n > m$):

$$\begin{aligned}
LH_m \Phi_n &= L \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) = \\
&= L \left(\frac{1}{\lambda_n} \Phi_n \right) = \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \Phi_n = \Phi_n.
\end{aligned}$$

$H_m L u = (I - P_m)u$, ahol I az identitás operátor, ezt szintén elég Φ_n -re vizsgálni ($n = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned}
H_m L \Phi_n &= H_m(\lambda_n \Phi_n) = \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \begin{cases} 0, & \text{ha } n \leq m \\ \Phi_n, & \text{ha } n \geq m+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

H_m S -szerinti normája $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$, ehhez felhasználjuk, hogy L sajátértékei növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy $\|I - P_m\| \leq 1$ az ortogonális projekció

tulajdonsága miatt:

$$\begin{aligned}\|H_m u\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|(I - P_m)u\| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|u\|\end{aligned}$$

és $u = \Phi_{m+1}$ esetén teljesül az egyenlőség:

$$\begin{aligned}\|H_m \Phi_{m+1}\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_{m+1}, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda_{m+1}} \Phi_{m+1} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\Phi_{m+1}\|.\end{aligned}$$

Még nézzük meg H_m μ -szerinti normáját: $\mu(H_m) \leq \alpha \sigma(m)$, ahol $\sigma(m) = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right)^2 \right)^{1/2}$:

$$\begin{aligned}\mu(H_m u) &= \mu \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \mu(\Phi_k) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \right| \leq \\ &\leq \left| \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}, \langle u, \Phi_k \rangle \right)_{l_2} \right| \leq \left\| \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right\|_{l_2} \|\langle u, \Phi_k \rangle\|_{l_2} = \\ &= \sigma(m) \|u\| \leq \sigma(m) \alpha \mu(u)\end{aligned}$$

ahol $(\cdot, \cdot)_{l_2}$ az l_2 -beli skaláris szorzást jelöli. A levezetés során alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-egyenlőtlenséget és a Parseval-egyenlőséget. Ebből az is következik, hogy $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$. A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, így $\text{Im } H_m \subset \text{Dom } N$ és $S_m \subset \text{Dom } N$, hogy a P_m és a H_m alkalmazása után tudjuk az N -et is még alkalmazni.

Tegyük fel, hogy $\bar{u} \in \text{Dom } N \cap \text{Dom } L$ megoldása az (4.1) egyenletnek, tehát

$$L\bar{u} = N\bar{u}. \quad (4.2)$$

Erre először alkalmazzuk H_m -et:

$$\begin{aligned} H_m L\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ (I - P_m)\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ \bar{u} &= P_m \bar{u} + H_m N\bar{u}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (4.2)-re P_m -et:

$$P_m(L\bar{u} - N\bar{u}) = 0, \tag{4.4}$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan $\bar{u} \in \text{Dom } L \cap \text{Dom } N$, ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (4.1) feladatnak.

Legyenek $a > 0, b > 0$ valós számok, és legyen u_0 egy közelítő megoldása az $Lu = Nu$ egyenletnek úgy, hogy létezik $u^* \in S_m$ ($u^* = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k$ valamely a_k számokra, $k = 1, \dots, m$), amivel $\mu(u^* - u_0) \leq a$. Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \text{Dom } N \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \leq b\},$$

tehát $S_{u^*}^b$ azon u -kat tartalmazza, melyek S_m -re levetítve u^* -ba esnek, és u^* -tól μ -szerinti távolságuk legfeljebb b . Ezen elemek μ -normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$\begin{aligned} T_{u^*}^b : S_{u^*}^b &\rightarrow S, \\ T_{u^*}^b(u) &:= u^* + H_m N u. \end{aligned}$$

Lássuk be $T_{u^*}^b$ -ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen $x, y \in S_{u^*}^b$:

$$\begin{aligned} \mu(T_{u^*}^b(x) - T_{u^*}^b(y)) &= \mu((u^* + H_m N x) - (u^* + H_m N y)) = \\ &= \mu(H_m(Nx - Ny)) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\beta_R\mu(x - y), \end{aligned}$$

ahol $R = \mu(u^*) + b$, tehát u^* -tól és b -től függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján β_R egy R -től függő konstans. Mivel $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$, ezért elég nagy m esetén

$\mu(H_m)\beta_R < 1$. Annak, hogy $\text{Im } T_{u^*}^b \subset S_{u^*}^b$ (tehát lehet $T_{u^*}^b$ -t iteratíván alkalmazni) elégséges feltétele, hogy $\mu(H_m)^2\mu(L)b_R \leq b$, ami kellően nagy m -re szintén teljesül. Tehát ha m elég nagy, akkor $T_{u^*}^b$ kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az u^* -tól függő fixpontot jelöljük $y(u^*)$ -al, és asszociált elemnek nevezzük. $y(u^*)$ -ról könnyen belátható, hogy megoldása az (4.3) egyenletnek. Vezessük be a $c_k := \langle u^*, \Phi_k \rangle$ ($k = 1, \dots, m$) jelölést, amivel $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$. Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz $y(u^*)$ megoldása a (4.4) bifurkációs egyenletnek?

$$\begin{aligned}
0 &= P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_mLy(u^*) - P_mNy(u^*), \\
P_mLy(u^*) &= P_mL(u^* + H_mNy(u^*)) = P_mLu^* + P_mLH_mNy(u^*) = \\
&= P_mL\left(\sum_{k=1}^m c_k \Phi_k\right) + P_mL \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + P_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k P_m \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right),
\end{aligned}$$

tehát

$$0 = P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*)\right),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k \right\rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ azaz} \\
0 &= \langle c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ vagy} \\
0 &= \langle \lambda_k u^* - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m). \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egy m -változós (c_k ($k = 1, \dots, m$) számok meghatározzák u^* -ot), m egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha a, b, m elég nagyok, akkor az eredeti (4.1) egyenletnek \bar{u} pontosan akkor megoldása, ha az (4.5) egyenletnek u^* megoldása és $\bar{u} = y(u^*)$.

Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük.

Legyen $N \geq m$. Az $Lu = Nu$ feladat megoldásait

$$u = \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k + \sum_{k=m+1}^N c_k \Phi_k$$

alakban keressük, tehát N növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a művelet-igény rovására). H_m -en is hasonlóképpen módosítunk:

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^N \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő L -hez $\Phi_k (k = 1, \dots, N)$ sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$ kiinduló értéket.
3. Állítsuk elő $y(u^*)$ -ot a fixpontiterációval: $y_0 := u^*$, $y_{i+1} := u^* + H_m N y_i$, ($i = 1, \dots, S$).
4. Oldjuk meg az $Lu^* = P_m N y_{S+1}$ egyenletet u^* -ra, például Newton-módszerrel.
5. Az így kapott u^* -ból kiindulva ismételjük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük (amit $Lu^* - Nu^*$ normájával lehet jellemezni).

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor m növelése szükséges lehet (ami miatt N -et is lehet, hogy növelni kell).

A peremfeltételeket u -ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a Φ_k sajátfüggvényekre, így az \tilde{o} lineáris kombinációjukkal előálló függvényre is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

4.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az L alakjára vonatkozó megkötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [9] és [10] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak

az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.

Legyen L egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a $(-1, 1)$. A peremfeltételeink a következők:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) &= 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) &= 0.\end{aligned}$$

Ha L -nek λ sajátértéke, v pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $Lv = \lambda v$, azaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(-(pv')' + qv) &= \lambda v, \\ -pv'' - p'v' + qv &= \lambda wv.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Jelöljük $T_n(x)$ -el a $(-1, 1)$ -en értelmezett Csebisev-polinomokat: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük ($T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$). A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N]$ és $\mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \dots, T_N(x)]^T$, így az együtthatók \mathbf{a} vektora egyértelműen meghatározza a $v(x)$ függvényt.

Mivel L -nek szüksége van v deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^N a_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^N b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t}\tag{4.7}$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a $\theta := \arccos x$ jelölést (amivel $\sin \theta =$

$$\sqrt{1-x^2}).$$

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \cos(n\theta) \\ T'_n(x) &= \sin(n\theta)n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) &= \sin((n+1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \sin((n-1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}} \\ \sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\sin\theta = 2T_n(x)\sqrt{1-x^2} \\ \frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= 2T_n(x) \end{aligned}$$

Ez működik $n \geq 2$ esetén, kis n -ekre pedig egyszerű a dolog:

$$\begin{aligned} T'_0(x) &= 0, \\ T'_1(x) &= 1 = T_0(x), \\ T'_2(x) &= 4x = 4T_1(x). \end{aligned}$$

Helyettesítsük be (4.7)-be a $T_k(x)$ -ek helyére az így kapott képleteket:

$$\begin{aligned} v' &= \sum_{n=0}^N b_n T_n = b_0 T'_1 + \frac{b_1}{4} T'_2 + \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n+1)} T'_{n+1} - \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n-1)} T'_{n-1} = \\ &= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T'_1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T'_n + \frac{b_{N-1}}{2N} T'_N + \frac{b_N}{2(N+1)} T'_{N+1}. \end{aligned}$$

Így már látható az összefüggés a_n és b_n között:

$$\begin{aligned} b_N &= 0 \\ b_{N-1} &= 2Na_N \\ b_{n-1} &= b_{n+1} + 2na_n \quad (n = N-1, \dots, 2) \\ b_0 &= \frac{b_2}{2} + a_1. \end{aligned}$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ egyenletet ($k, l = 0, \dots, N$):

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan} \\ 2l, & \text{ha } l \geq k \geq 1 \text{ és } l + k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T \mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az x -szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$xv(x) = \sum_{k=0}^N a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$\begin{aligned} xT_0(x) &= T_1(x) \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2} (T_{n+1} + T_{n-1}) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_1}{2} \\ c_1 &= a_0 + \frac{a_2}{2} \\ c_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n = 2, \dots, N-1) \\ c_N &\approx \frac{a_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a $M\mathbf{a} \approx \mathbf{c}$ szorzást ($k, l = 0, \dots, N$):

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k, l) = (1, 0) \\ \frac{1}{2}l, & \text{ha } l \geq 2 \text{ és } |k - l| = 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx \mathbf{c}^T \mathbf{t} \approx (M\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezenfelül, ha f analitikus függvény, akkor $f(x)v(x) \approx (f(M)\mathbf{c})^T \mathbf{t}$.

Ezek segítségével írjuk fel az (4.6) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrixműveletként:

$$\hat{L}\mathbf{a} := \left(-p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M) \right) \mathbf{a}.$$

A (4.6) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig $\lambda w(M)\mathbf{a}$, jelölésként $\mathbf{B} := w(M)$. Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy \mathbf{t} egy vektorértékű függvény, $[a, b] = [-1, 1]$, és ennek az intervallumnak a végpontjain $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_n(1) = 1$. Legyen

$$\begin{aligned} h_1^T &= \alpha_{11}(\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{t}(-1))^T \hat{D}, \\ h_2^T &= \alpha_{21}(\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{t}(1))^T \hat{D} \end{aligned}$$

amivel (ismét a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ jelölést alkalmazva)

$$\begin{aligned} h_1^T \mathbf{a} &= \alpha_{11}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(-1))^T = \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1), \\ h_2^T \mathbf{a} &= \alpha_{21}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(1))^T = \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1). \end{aligned}$$

Legyen $H = (h_1, h_2)^T$, így a peremfeltétel megfogalmazható $H\mathbf{a} = \mathbf{0}$ formában.

Legyen \hat{A} az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy \hat{L} utolsó két sorát elhagyjuk (tehát $N-1 \times N+1$ mátrix), és állítsuk elő \hat{B} -t ugyanígy \mathbf{B} -ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix} \mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{a}.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha $\mathbf{0}$ helyett $\frac{1}{\lambda_*}H$ -t használunk, ahol λ_* egy nagy szám, ami nem sajátértéke L -nek. Így a jobb oldal mátrixának $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$ nincsenek csupa 0 sorai.

Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a $[-1, 1]$, hanem valamely $[a, b]$ intervallum, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni: $D := \frac{1}{\alpha}\hat{D}$, ahol α az intervallum középpontja ($\alpha = \frac{b-a}{2}$).

4.2. Példa a numerikus alkalmazásra

Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [8] cikkhez készült MATLAB csomagot.

Tekintsük az

$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x}$$

egyenletet a $[0, 1]$ intervallumon a

$$u(0) = 0$$

$$u(1) + u'(1) = 0$$

peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb 10^{-5} hibát megengedve:

Ehhez az $m = 0$ választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltételen, és az intervallum jobb oldalán a

$$u'(1) = 0$$

feltételt követeljük meg, akkor $m = 0$ esetén nincs konvergencia, és még $m = 1$ esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A `cinit = [1]` paraméterrel, azaz a Φ_1 komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:

Irodalomjegyzék

- [1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.
- [2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.
- [3] TODO, *Notes on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.
- [4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.
- [5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.
- [6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapunov-Schmidt*. TODO, TODO.
- [7] P. T. Jesús Rodriguez, „Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations,” vol. 68, pp. 3465–3474, 2008.
- [8] D. Trif, „The lyapunov-schmidt method for two-point boundary value problems,” vol. 6, pp. 119–132, 2005.
- [9] M. Liefvendahl, „A chebyshev tau spectral method for the calculation of eigenvalues and pseudospectra,”
- [10] D. Trif, „Lisc - a matlab package for linear differential problems,” vol. 2, pp. 203–208, 2006.