

# A Ljapunov-Schmidt-módszer

**Dr. Kovács Sándor**  
Adjunktus

**Lipták Bence Gábor**  
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Funkcionálanalízis kiegészítés</b>	<b>3</b>
2.1. Faktorterek . . . . .	3
2.2. Kompakt operátorok . . . . .	6
2.3. Fredholm-operátorok . . . . .	6
2.4. Implicit függvény tétel . . . . .	8
<b>3. A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai</b>	<b>10</b>
3.1. Többpontos peremérték feladat közönséges nemlineáris differenciálegyen- letre . . . . .	11
<b>4. A Ljapunov-Schmidt-módszer mint numerikus módszer</b>	<b>20</b>
4.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására . . . . .	26
4.2. Példa a numerikus alkalmazásra . . . . .	31

# 1. fejezet

## Bevezetés

## 2. fejezet

# Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük szükségünk van a Fredholm-operátorok fogalmára, amihez elengedhetetlenek a faktorterek és a kompakt operátorok. A módszerhez emellett még az implicit függvény tétel (Banach-terekben) is szükséges.

TODO jelölések szekció:  $\text{Lin op}$ ,  $\text{korl Lin op}$  halmazai, esetleg skaláris szorzás jelölése, ha kell

TODO ebből mi maradjon meg? - kinek a szintjére kell belőni a részletességet, szükséges-e az, hogy pl egy évfolyamtárs megérthesse belőle az egészet? faktortér def talán szükséges, Fredholm-op valószínűleg, Frechét-differenciálás és implicit fv tétel szintén

### 2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

**2.1.1. Definíció (Faktortér).** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  pedig egy altér. A  $V$  tér  $U$  szerinti **faktortere** vagy **hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A

következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az  $U$  altér között mi az összefüggés.

**2.1.1. Állítás.** *Ha  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altére, akkor  $\forall v, v' \in V$ -re*

$$v + U = v' + U \quad \Leftrightarrow \quad v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt  $V$  elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a  $V/U$  faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

**2.1.1. Tétel.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altére, ekkor*

- *Megadunk*

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

*leképezéseket a következő módon*

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

*melyek jól definiáltak.*

- *A  $V/U$  faktortér ezekkel a műveletekkel egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér.*
- *$\pi_U$  az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet*

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

*módon definiálunk lineáris operátor  $V$  és  $V/U$  között.*

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített  $U \subset V$  esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\begin{aligned}\bar{v} + \bar{w} &= \overline{v + w} & (v, w \in V) \\ \alpha \bar{v} &= \overline{\alpha v} & (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).\end{aligned}$$

Még fontos észrevétel, hogy a  $\pi_U$  leképezés magtere pontosan az  $U$  halmaz, valamint az operátor szűrjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

**2.1.2. Tétel.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, ekkor*

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

Ha egy  $v \in V$  elemet egy  $u \in U$  elemmel eltolunk ( $U \subset V$  altér), akkor a  $V/U$  faktortérbeli  $\pi_U$  általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az  $U$  altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

**2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre).** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $F : V \rightarrow W$  egy lineáris leképezés,  $U \subset V$  egy altér amire  $U \subset \text{Ker } F$ . Ekkor egyértelműen létezik  $F' : V/U \rightarrow W$  amivel  $F = F' \circ \pi_U$ . Emellett*

- $\text{Im } F = \text{Im } F'$ , illetve  $F'$  pontosan akkor szűrjektív, amikor  $F$  is,
- $\text{Ker } F' = (\text{Ker } F)/U$ , illetve  $F'$  pontosan akkor injektív, amikor  $U = \text{Ker } F$ .

$F'$ -t az  **$F$  által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

**2.1.4. Tétel.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere,  $W \subset V$  pedig az  $U$  komplement altere (tehát  $V = W \oplus U$ ). Ekkor a  $\pi_U$  kanonikus leképezés leszűkítése  $W$ -re*

$$\pi|_W : W \longrightarrow V/U, \quad \pi|_W(w) = w + U$$

*izomorfia, azaz  $W \cong V/U$ .*

## 2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált terek.

**2.2.1. Definíció (Kompakt operátor).**  $A : X \rightarrow Y$  operátor **kompakt**, ha bármely  $U \subset X$  korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz  $\overline{A[U]} \subset Y$  kompakt, valamint ha  $A$  korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]

A továbbiakban az  $X \rightarrow Y$  közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát  $K(X, Y)$ -al,  $X = Y$  esetén  $K(X)$ -szel jelöljük, ez zárt alteret alkot  $L(X, Y)$ -ban.

**2.2.2. Definíció.**  $A \in L(X, Y)$  operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ( $\dim \operatorname{Im} A < \infty$ ). A véges rangú operátorok halmazát  $K_{fin}(X, Y)$ -al rövidítjük. [2, 3]

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetők véges rangú operátorokkal:

**2.2.1. Tétel.** Ha  $Y$ -ban van Schauder-bázis, akkor  $A \in L(X, Y)$  pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz  $K(X, Y) = \overline{K_{fin}(X, Y)}$ . [3]

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy  $L^p$ -terekben ( $p \geq 1$ ).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

**2.2.2. Tétel.** Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek,  $A \in L(X, Y)$ , ekkor

$$A \in K(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

azaz  $A$  pontosan akkor kompakt, ha  $A^*$  adjungált operátora kompakt. [2, 4]

## 2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operátorokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek.

**2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor).**  $T \in L(X, Y)$  **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\dim \text{Ker } T < \infty$ ,
- $T[X]$  zárt  $Y$ -ban,
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$ .

Ekkor a  $T$  operátor **indexe**  $\text{ind } T := \dim \text{Ker } T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$ ,  $T$  **cokernel**  $\text{coker } T := Y/T[X]$  (azaz  $Y$ -ban a  $T$  képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója**  $\text{codim } T := \dim \text{coker } T$ . [1, 3, 4, 5]

Az  $X$  és  $Y$  közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban  $\mathcal{F}(X, Y)$ -al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel ( $T$  képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

**2.3.1. Tétel.** Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  Banach-terek, ekkor:

- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$  és  $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$ , ekkor  $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$  és  $\text{ind}(B \circ A) = \text{ind } B + \text{ind } A$ ,
- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ , ekkor  $A^* \in \mathcal{F}(X^*, Y^*)$  és  $\text{ind } A^* = -\text{ind } A$ ,
- $\mathcal{F}(X, Y)$  nyílt részhalmaza  $L(X, Y)$ -nak, és az  $\text{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény lokálisan konstans.

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

**2.3.2. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  bijektív,  $K \in L(X, Y)$  kompakt, ekkor  $T + K$  Fredholm-operátor és  $\text{ind}(T + K) = 0$ . Ennek speciális esete amikor  $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $T$  az identitás  $X$ -en. [3, 5]

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:



**2.3.3. Tétel.**  $K \in K(X, Y)$  és  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  esetén  $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$ , valamint  $\text{ind}(K + F) = \text{ind } F$ . [3]

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

**2.3.4. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik  $B \in L(Y, X)$ ,  $K_X \in K(X)$ ,  $K_Y \in K(Y)$  úgy, hogy

$$BT = I|_X + K_X, TB = I|_Y + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]

## 2.4. Implicit függvény tétel

A módszer használata során az eredmény eléréséhez szükségünk lesz az implicit függvény tételre Banach-terekben, illetve ahhoz kötődően a Fréchet-derivált fogalmára.  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  a következők során Banach-terek.

**2.4.1. Definíció.**  $F : X \times Y \rightarrow Z$  **Fréchet-differenciálható**  $X$ -ben az  $(u_0, v_0)$  pontban, ha létezik  $(D_x F)(u_0, v_0) \in L(X, Z)$  úgy, hogy

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(u_0 + h, v_0) - F(u_0, v_0) - (D_x F)(u_0, v_0)h\|_Z}{\|h\|_X} = 0.$$

Látható, hogy egy ponthoz tartozó derivált (a valós, többdimenziós esethez hasonlóan) egy függvény.

**2.4.1. Tétel (Implicit függvény tétel Banach-terekben).**  $F : X \times Y \rightarrow Z$  folytonos,  $(u_0, v_0) \in X \times Y$ ,  $F(u_0, v_0) = 0$ ,  $(D_x F)(u_0, v_0)$  bijektív és folytonos. Ekkor létezik  $(u_0, v_0)$ -nak olyan  $U \times V \subset X \times Y$  környezete és  $G : V \rightarrow U$  függvény, amivel  $G(v_0) = u_0$  és

$$F(G(v), v) = 0 \quad (\forall v \in V).$$

Ezen felül minden  $U \times V$ -beli megoldás ebben a formában áll elő. [6]

Az ilyen tulajdonságokkal rendelkező  $D_x F$  függvényeket lineáris homeomorfizmusnak nevezzük:

**2.4.2. Definíció.** Az  $A$  leképezés **lineáris homeomorfizmus**, ha folytonos, bijektív és az inverze is folytonos.

Az inverz folytonossága pedig a Banach-féle inverz tételből (vagy Banach-féle homeomorfia-tételből) következik:

**2.4.2. Tétel.**  $A \in L(X, Y)$  Banach-terek közötti bijektív operátor, ekkor  $A^{-1} \in L(Y, X)$ . ([2] 6.1.4)

## 3. fejezet

# A Ljapunov-Schmidt-módszer és alkalmazásai

Szemléltessük a módszer lényegét az alábbi feladaton keresztül. Legyen  $L : X \rightarrow Y$  Fredholm-operátor (tehát korlátos és lineáris),  $N : X \rightarrow Y$  nemlineáris, korlátos operátor. Megoldandó a következő egyenlet:

$$Lu = Nu.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$K := \text{Ker } L,$$

$$R := \text{Im } L.$$

Ezek kiegészítő altereit jelöljük a következő módon:  $X = K \oplus W$ ,  $Y = R \oplus Z$ . A Fredholm-operátor tulajdonságaiból következik, hogy  $\dim K < \infty$  és  $\dim Z < \infty$ . Vezessük be az alábbi projekciókat:

$$P : X \rightarrow K,$$

$$Q : Y \rightarrow R.$$

Írjuk fel az eredeti  $Lu = Nu$  egyenletet felbontva  $R$  és  $Z$ -beli komponensekre:

$$QLu = Lu = QNu,$$

$$(I - Q)Lu = 0 = (I - Q)Nu.$$

Bontsuk fel  $u \in X$ -et  $K$  és  $W$  mentén:  $u = \tilde{u} + \bar{u}$ , ahol  $\tilde{u} \in W$  és  $\bar{u} \in K$ , és az előbbi egyenletrendszerbe helyettesítsük be  $u$  felbontását:

$$\begin{aligned} L(\tilde{u} + \bar{u}) &= L\tilde{u} = QN(\tilde{u} + \bar{u}), \\ 0 &= (I - Q)N(\tilde{u} + \bar{u}). \end{aligned}$$

Mivel  $\mathcal{N}(L|_W) = \{0\}$ , ezért  $L$ -nek a  $W$ -re leszűkítése invertálható, így legyen  $M := (L|_W)^{-1}$ , értelemszerűen  $\tilde{u} = ML\tilde{u}$ . Alkalmazzuk  $M$ -et az első egyenletre:

$$\tilde{u} = MQN(\tilde{u} + \bar{u}).$$

Mivel  $M$  kompakt és  $QN$  korlátos, ezért  $MQN$  kompakt, tehát a Schauder-fixpont-tétel értelmében bármely  $\bar{u}$ -hoz létezik  $\tilde{u}(\bar{u})$  fixpont, amivel

$$\tilde{u}(\bar{u}) = MQN(\tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u})$$

teljesül. Ezt a második egyenletbe behelyettesítve kapunk egy

$$0 = (I - Q)N(\tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u})$$

egyenletet. Mivel  $\bar{u} \in K$  és  $\dim K < \infty$ , valamint  $\text{Im}(I - Q) = Z$  és  $\dim Z < \infty$ , így ez egy véges dimenzióan értelmezett, véges dimenziós értékészletű egyenletrendszer, ami már könnyebben megoldható  $\bar{u}$ -ra, és a fixpont-feladattal összevetve előáll az eredeti  $Lu = Nu$  probléma megoldása  $u = \tilde{u}(\bar{u}) + \bar{u}$  alakban.

### 3.1. Többpontos peremérték feladat közös nemlineáris differenciálegyenletre

Mutassuk be a Ljapunov-Schmidt módszer egy alkalmazását [7] alapján. A feladat egy  $n$ -edrendű, nemlineáris differenciálegyenlet megoldása, homogén peremfeltétellel:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)y(t) = g(y(t)) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.1)$$

$$\sum_{j=1}^n b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \cdots + \sum_{j=1}^n b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \quad (i = 1, \dots, n) \quad (3.2)$$

ahol  $b_{ij}$  valós számok,  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$  rögzítettek. Feltesszük, hogy  $g$  és  $a_0, \dots, a_{n-1}$  valósak, folytonosak, a teljes  $\mathbb{R}$ -en értelmezettek,  $g$  Lipschitz-folytonos, valamint  $a_0(t) \neq 0$  ( $0 \leq t \leq 1$ ). Azt is feltesszük, hogy  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t)$  és  $\lim_{t \rightarrow -\infty} g(t)$  létezik és véges, ezeket  $g(\infty)$ -nel illetve  $g(-\infty)$ -nel fogjuk jelölni.

A vizsgálat során fontos szerepet fog játszani a homogén probléma megoldása:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0y(t) = 0 \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.3)$$

Első lépésként fogalmazzuk át a problémát, a magasabbrendű egyenlet helyett kezeljük egyenletrendszert. Ehhez vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

$$f(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(y) \end{bmatrix}$$

$$B_k = \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \dots & b_{1n}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \dots & b_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \dots & b_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

Így a differenciálegyenletet felírhatjuk

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.4)$$

alakban, a homogén egyenletet

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (0 \leq t \leq 1) \quad (3.5)$$

alakban, a peremfeltételt pedig

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0 \quad (3.6)$$

formában. Legyen  $\Phi$  a homogén egyenlet alaprendszere (azaz  $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$  ( $0 \leq t \leq 1$ )), és  $\Phi(0) = I$  (ahol  $I$  az  $N \times N$  méretű egységmátrix). Ezt felhasználva még legyen

$$D = B_0 + B_1\Phi(t_1) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1).$$

Emellett még szükséges az inhomogén, lineáris egyenlet vizsgálata:

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t) \quad (0 \leq t \leq 1). \quad (3.7)$$

Az állandók variálásával (3.7)-(3.6)-nak  $x$  megoldása pontosan akkor, ha

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \quad \text{és}$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0.$$

Ha a második egyenletben  $x$ -be behelyettesítünk az első egyenletből, akkor

$$\begin{aligned} 0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1) \left( x(0) + \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) + \cdots + \\ &+ B_N\Phi(t_{N-1}) \left( x(0) + \int_0^{t_{N-1}} \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) + B_N\Phi(1) \left( x(0) + \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_N\Phi(1)x(0) + \\ &+ B_1\Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N\Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds. \end{aligned}$$

Mivel

$$Dx(0) = B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0),$$

ezért az előbbi átrendezve

$$Dx(0) = - \left( B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right).$$

Tehát

$$B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds$$

benne van  $D$  képterében. Mivel  $\text{Im } D \perp \text{Ker } D^T$ , ezért ha  $p \in \text{Ker } D^T$ , akkor

$$0 = p^T \left( B_1 \Phi(t_1) \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)ds + \cdots + B_N \Phi(1) \int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)ds \right).$$

Ezután vizsgáljuk meg (3.5)-(3.6) feladatot, ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t)x(0) && \text{és} \\ B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) &= 0 \end{aligned}$$

A második egyenlet átírható

$$\begin{aligned} 0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \cdots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\ &= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \cdots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0) = \\ &= Dx(0) \end{aligned}$$

alakra, tehát  $x$  pontosan akkor megoldása a homogén peremfeladatnak, ha  $x(0) \in \text{Ker } D$ . Ebből az is kiderült, hogy a megoldástér ugyanannyi dimenziós, mint  $\text{Ker } D$ . A továbbiakban feltesszük, hogy  $\dim \text{Ker } D = 1$ ,  $\hat{p} \in \text{Ker } D$ ,  $\|\hat{p}\| = 1$ , és legyen  $u(t) := \Phi(t)\hat{p}$ .

Definiáljunk operátorokat, legyen  $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$  az  $L^2[0, 1]$ -ből  $\mathbb{R}^n$ -be képező függvények halmaza,  $N : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ :  $(Nx)(t) := f(x(t))$ .  $N$ -ről látható, hogy  $f$  folytonossága miatt ő is folytonos. Legyen  $L : \text{Dom } L \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ , ahol

$$\text{Dom } L = \left\{ \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n : \phi \text{ abszolút folytonos, } \phi' \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n), \sum_{k=1}^N B_k \phi(t_k) = 0 \right\}$$

és  $(Lx)(t) := x'(t) - A(t)x(t)$ . Tehát  $L$  értelmezési tartományában azok a függvények vannak, amelyek kielégítik a (3.6) peremfeltételt, valamint a (3.4) differenciálegyenletnek megfelel az

$$Lx = Nx \tag{3.8}$$

egyenlet. Ha  $L$  invertálható, akkor  $x = L^{-1}Nx$  fixpont megoldása az egyenletnek. Tegyük fel, hogy  $L$  nem invertálható, tehát  $\text{Ker } L \neq \{0\}$ . Erre fogjuk a Ljapunov-Schmidt módszer megközelítését alkalmazni.

Definiáljunk két projekciós operátort,  $\text{Im } L$ -re és  $\text{Ker } L$ -re:

$$Q : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Im } L,$$

$$P : (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \rightarrow \text{Ker } L.$$

A  $Q$  segítségével felírjuk az  $Lx = Nx$ -el ekvivalens két egyenletet:

$$QLx = Lx = QNx, \text{ és} \quad (3.9)$$

$$(I - Q)Lx = 0 = (I - Q)Nx. \quad (3.10)$$

Ha ismét  $M$ -el jelöljük  $(L|_W)^{-1}$ -et, és bevezetjük az  $x = \tilde{x} + \bar{x}$  felbontást ( $\tilde{x} \in (\text{Ker } L)^\perp$ ,  $\bar{x} \in \text{Ker } L$ ), akkor ismét eljutunk az

$$x = \bar{x} + MQN(\tilde{x} + \bar{x})$$

egyenlethez, amit viszont már más megközelítéssel fogunk megoldani.

Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben. A korábbi levezetésünkéből és  $L$  definíciójából következik, hogy  $x \in \text{Ker } L$  pontosan akkor, ha  $x(t) = \Phi(t)\hat{p}$  (ami egybevág  $u$ -nak a definíciójával, tehát  $u \in \text{Ker } L$ ).

Konstruáljunk meg egy  $\psi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$  függvényt úgy, hogy az  $\hat{o}$  merőleges kiegészítője  $\text{Im } L$  legyen. Legyen  $p \in \text{Ker}(D^T) \setminus \{0\}$ , és legyen

$$\psi(t) = \begin{cases} [(B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-1}, 1] \\ [(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-2}, t_{N-1}] \\ \vdots \\ [(B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in (t_1, t_2] \\ [(B_1\Phi(t_1) + B_2\Phi(t_2) + \dots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p & \text{ha } t \in [0, t_1]. \end{cases}$$

Ellenőrizzük, hogy  $\psi(t) = 0$  ( $t \in [0, 1]$ ) lehetséges-e. Először nézzük meg, hogy  $(t_{N-1}, 1]$  intervallumon ez mit jelentene:

$$0 = \psi(t) = [B_N\Phi(1)\Phi^{-1}(t)]^T p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(1)B_N^T p,$$



ami pontosan akkor teljesül, ha  $p \in \text{Ker } B_N^T$ . Ezt feltéve és továbbhaladva,  $(t_{N-2}, t_{N-1}]$  intervallumon nézzük:

$$\begin{aligned} 0 = \psi(t) &= [(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\Phi^{-1}(t)]^T p = \\ &= \Phi^{-T}(t) (B_{N-1}^T\Phi^T(t_{N-1}) + \Phi^T(1)B_N^T) p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(t_{N-1})B_{N-1}^T p, \end{aligned}$$

ami akkor teljesül, ha  $p \in \text{Ker } B_{N-1}^T$ . Ezt ismét feltételezve és  $i = N-3, \dots, 1$  tovább folytatva azt kapjuk, hogy ha  $\psi(t) = 0$  ( $t \in [0, 1]$ ), abból az következik, hogy  $p \in \text{Ker } B_i^T$ . A továbbiakban feltesszük, hogy  $\cap_{i=1}^N \text{Ker } B_i^T = \{\mathbf{0}\}$ , így  $\psi$  nem az azonosan  $\mathbf{0}$  függvény, valamint hogy  $p \in \text{Ker}(D^T)$ -at úgy választjuk, hogy  $\|\psi\|_{L^2} = 1$ . Belátható, hogy  $\text{Im } L = \psi^\perp$ . Ennek segítségével írjuk fel az  $Q$  projekciót:

$$(Qx)(t) = x(t) - \psi(t) \int_0^1 \psi^T(s)x(s)ds = x(t) - \psi(t)\langle x, \psi \rangle_{L^2}.$$

Értelemszerűen  $QLx = Lx$  ( $x \in \text{Dom } L$ ).

Írjuk fel a  $P$  projekciót is integrál segítségével:

$$(Px)(t) = u(t) \int_0^1 u^T(s)x(s)ds = u(t)\langle x, u \rangle_{L^2},$$

ahol  $u$  volt az a vektor, ami kifeszíti  $\text{Ker } L$ -et. Így bármely  $x \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n)$ -re  $Px = \bar{x} = \alpha u$ , ahol  $\alpha$  megfelelő ( $x$ -től függő) valós szám.

Magától értetődő, hogy ha  $L$ -et leszűkítjük  $\text{Dom } L \cap (\text{Ker } L)^\perp$ -re, akkor az bijekció  $\text{Dom } L \cap (\text{Ker } L)^\perp$  és  $\text{Im } L$  között. Ennek az inverzét jelöltük  $M$ -el:

$$\begin{aligned} LMh &= h & (h \in \text{Im } L) \\ MLx &= (I - P)x & (x \in \text{Dom } L). \end{aligned}$$

Írjuk fel  $x$ -et a  $P$  projekció segítségével, és helyettesítsük be a (3.10) levetített feladatot, illetve a  $\text{Ker } L$ -et kifeszítő  $u$ -t:

$$x = Px + (I - P)x = Px + MLx = Px + MQNx = \alpha u + MQNx.$$

A korábbi jelölésünkkel  $\bar{x} = Px$  és  $\tilde{x} = (I - P)x$ .

A (3.9) egyenlet azt jelenti, hogy  $N(x) \in \text{Im } L$ , és mivel  $\psi$  ortogonális  $\text{Im } L$ -re, ezért

pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \langle Nx, \psi \rangle = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $u(t)$  első komponensét jelöljük  $s(t)$ -vel,
- $MQN(x)$  első komponensét jelöljük  $w(x)$ -szel,
- $\psi(t)$   $n$ . komponensét jelöljük  $v(t)$ -vel.

Mivel  $f$  az a függvény, aminek az első  $n-1$  komponense azonosan 0, az  $n$ . komponense pedig  $f_n(x) = g(x_1)$ , emellett  $x_1$  felírható  $x_1(t) = \alpha s(t) + w(x(t))$  alakban, így az integrál átalakítható:

$$0 = \int_0^1 (f(x(t)))^T \psi(t) dt = \int_0^1 v(t)g(x_1(t)) dt = \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt.$$

Mivel  $\{t : s(t) = 0\}$  0-mértékű, ezért az integrál felbontható:

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt = \int_{\{s(t)>0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt + \int_{\{s(t)<0\}} v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt$$

$M$ ,  $E$  és  $g$  korlátossága miatt  $w$  is korlátos, írjuk fel  $\alpha \rightarrow \pm\infty$  esetén az egyenletet:

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &= g(\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(-\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_1 \\ \lim_{\alpha \rightarrow -\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &= g(-\infty) \int_{s(t)>0} v(t) dt + g(\infty) \int_{s(t)<0} v(t) dt =: J_2. \end{aligned}$$

Tegyük fel, hogy  $J_2 < 0 < J_1$  ( $J_1 < 0 < J_2$  esetén analóg módon folytatható, de  $J_1 J_2 < 0$  szükséges). Így létezik  $\alpha_0$ , amivel

$$\begin{aligned} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &> 0 && \text{ha } \alpha \geq \alpha_0, \\ \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t))) dt &< 0 && \text{ha } \alpha \leq -\alpha_0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Definiáljuk az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned}
H_1 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \\
H_1(x, \alpha) &:= \alpha u + MQN(x) \\
H_2 &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\
H_2(x, \alpha) &:= \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \\
H &: (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \rightarrow (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \\
H(x, \alpha) &:= (H_1(x, \alpha), H_2(x, \alpha)).
\end{aligned}$$

Ezzel a szétválasztással  $\bar{x} = \alpha u$ , azaz  $x$ -nek a  $\text{Ker } L$  irányú komponensét az  $\alpha$  reprezentálja.  $(L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ -en a norma amit használunk  $\|(x, \alpha)\| := \max\{\|x\|_{L^2}, |\alpha|\}$ . Jól látható, hogy az eredeti (3.4)-(3.6) peremfeladat megoldhatósága a  $H$  fixpontjának létezésével hozható összefüggésbe.

Legyen  $r := \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(t)|$ ,  $m := \sup_{t \in [0, 1]} |v(t)|$ . Ezekből következik, hogy

$$\left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq rm.$$

Válasszunk  $\alpha_0$ -át úgy, hogy (3.11) egyenletek teljesüljenek és  $\alpha_0 > rm$ , legyen  $\delta := \alpha_0 + rm$ .  $u$ ,  $g$  és  $ME$  korlátossága miatt ha  $|\alpha| \leq \delta$  és  $x \in L^2[0, 1]$ , akkor

$$\|H_1(x, \alpha)\| = \|\alpha u + MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQ\| |g(x_1)| \leq b_1$$

megfelelő  $b_1$  választásával. Legyen

$$\mathcal{B} = \{(x, \alpha) \in L^2[0, 1] \times \mathbb{R} : \|x\| \leq b_1 \text{ és } |\alpha| \leq \delta\},$$

így  $\mathcal{B}$  egy zárt, korlátos, konvex halmaz. A cél megmutatni, hogy  $H$  a  $\mathcal{B}$  halmazt önmagába képezi.  $\|H_1(x, \alpha)\| \leq b_1$ -et az előbb beláttuk, nézzük  $\|H_2(x, \alpha)\| \leq \delta$ -t.

Először legyen  $\alpha_0 \leq \alpha \leq \delta$ , a feltételünk miatt

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt > 0,$$

így

$$H_2(x, \alpha) = \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \geq \alpha_0 - rm > 0,$$

így  $H_2(x, \alpha) \in [0, \alpha_0 - rm] \subset [-\delta, \delta]$ .

Ha  $0 \leq \alpha < \alpha_0$ , akkor

$$\begin{aligned} |H_2(x, \alpha)| &= \left| \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq \\ &\leq |\alpha| + \left| \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))dt \right| \leq \alpha_0 + rm = \delta, \end{aligned}$$

így  $H_2(x, \alpha) \in [-\delta, \delta]$ , tehát ha  $0 \leq \alpha \leq \delta$  és  $x \in L^2[0, 1]$ , akkor  $H(x, \alpha) \in \mathcal{B}$ . Analóg módon belátható, hogy ha  $-\delta \leq \alpha \leq 0$ , akkor ugyanez fenn áll.

Így tehát  $H(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$ .  $H$  kompaktsága következik  $MQN$  kompaktságából, és így a Schauder fixpont-tétel értelmében  $H$ -nak van fixpontja  $\mathcal{B}$ -ben, tehát van  $(x_0, \alpha_0) \in (L^2[0, 1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$ , amivel

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 u + MQN(x_0), \text{ és} \\ \alpha_0 &= \alpha_0 - \int_0^1 v(t)g(\alpha_0 s(t) + w(x_0(t)))dt \end{aligned}$$

teljesül, tehát az eredeti (3.4)-(3.6) peremfeladat megoldható, és  $x_0 + \alpha_0 u$  egy megoldása.

## 4. fejezet

# A Ljapunov-Schmidt-módszer mint numerikus módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt módszernek egy numerikus módszerkénti felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [8] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x), \quad x \in [a, b] \quad (4.1)$$

ahol  $L$  úgynevezett Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol  $p(x) > 0, w(x) > 0$  ( $x \in [a, b]$ ),  $p, q, w$  adott analitikus függvények, valamint  $u$ -ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) &= 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) &= 0. \end{aligned}$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen  $L$ -ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [9]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.

Emellett feltesszük a következőket:

- $S$  valós, szeparábilis Hilbert-tér,  $L : \text{Dom } L \subset S \rightarrow S$  lineáris operátor,  $N : \text{Dom } N \subset S \rightarrow S$  nemlineáris operátor,
- $L$  zárt leképezés (amivel ekvivalens [2]:  $x_n \rightarrow x$  és  $Lx_n \rightarrow y$ -ből következik hogy

$x \in \text{Dom } L$  és  $Lx = y$ ), önadjungált,  $\text{Dom } L$  sűrű  $S$ -ben,  $\text{Ker } L = p > 0$  véges,

- $L$ -nek a sajátértékei  $\lambda_1 = \dots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}$ ,  $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$ ,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = \infty$ , és a hozzájuk tartozó  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$  sajátfüggvények  $S$ -ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a tulajdonságokat a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,
- létezik egy  $S' \subset S$  altér, ami egy  $\mu$  normával teljes,  $\text{Dom } L \subset S'$ , minden  $x \in \text{Dom } L$  esetén a  $\Phi_i$ -szerinti Fourier-sora  $(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k)$   $\mu$ -ben konvergál  $x$ -hez és  $\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2$ , valamint létezik  $\alpha > 0$ , amivel  $x \in S'$  esetén  $\|x\|_S \leq \alpha \mu(x)$  (tehát  $\mu$   $\alpha$ -szorosa felső becslése az eredeti normának, és  $\mu$ -beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),
- $\text{Dom } L \cap \text{Dom } N \neq \emptyset$ ,  $\text{Dom } N \subset S'$  és altér  $S'$ -ben,  $\text{Dom } N$  zárt  $\mu$  szerint,
- bármely  $R > 0$ -hoz létezik  $\beta_R > 0, b_R > 0$ , amelyekkel azon  $x, y \in \text{Dom } N$ -ekre, amelyekre  $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$  teljesül,  $\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R \mu(x - y)$  és  $\mu(Nx) \leq b_R$ , tehát tetszőleges  $\mu$ -szerinti gömb  $N$ -szerinti képe korlátos ( $\mu$  normával), valamint ezen gömbbeli elemek környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (4.1) egyenlet megoldásait  $\text{Dom } L \cap \text{Dom } N$ -ben keressük. Legyen  $m \geq p$  és

$$S_m := \text{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}, \quad S_0 := \{0\},$$

azaz  $S_m$  az első  $m$  sajátfüggvény által kifeszített altér,  $S_m \subset \text{Dom } L$ . Defináljuk a következő operátorokat, amennyiben  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k$  ( $u \in S$ ):

$$P_m u := \sum_{k=1}^m \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k,$$

tehát  $P_m$  az  $S_m$ -re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k.$$

$H_m$  Dom  $L$ -be képez (mivel  $\Phi_k \in \text{Dom } L$  ( $k = 0, \dots, m+1, \dots$ )), lássuk be róla, hogy lineáris ( $x, y \in S$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ ):

$$\begin{aligned}
H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x + y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} (\langle \alpha x, \Phi_k \rangle + \langle y, \Phi_k \rangle) \Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \alpha x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \alpha \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle x, \Phi_k \rangle \Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle y, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \alpha H_m x + H_m y.
\end{aligned}$$

$H_m$  az  $L$  egy leszűkítésének inverze, pontosabban  $H_m = (L|_{S_m^\perp})^{-1}$ , értelemszerűen  $S_m^\perp = \text{span}\{\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots\}$ , így a linearitás miatt elég  $\Phi_n$ -ra nézni ( $n > m$ ):

$$\begin{aligned}
LH_m \Phi_n &= L \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) = \\
&= L \left( \frac{1}{\lambda_n} \Phi_n \right) = \frac{1}{\lambda_n} \lambda_n \Phi_n = \Phi_n.
\end{aligned}$$

$H_m L u = (I - P_m)u$ , ahol  $I$  az identitás operátor, ezt szintén elég  $\Phi_n$ -re vizsgálni ( $n = 1, 2, \dots$ ):

$$\begin{aligned}
H_m L \Phi_n &= H_m(\lambda_n \Phi_n) = \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_n, \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{ha } n \leq m \\ \Phi_n, & \text{ha } n \geq m+1. \end{cases}
\end{aligned}$$

$H_m$   $S$ -szerinti normája  $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$ , ehhez felhasználjuk, hogy  $L$  sajátértékei növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy  $\|I - P_m\| \leq 1$  az ortogonális projekció

tulajdonsága miatt:

$$\begin{aligned}\|H_m u\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| \leq \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|(I - P_m)u\| \leq \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|u\|\end{aligned}$$

és  $u = \Phi_{m+1}$  esetén teljesül az egyenlőség:

$$\begin{aligned}\|H_m \Phi_{m+1}\| &= \left\| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle \Phi_{m+1}, \Phi_k \rangle \Phi_k \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\lambda_{m+1}} \Phi_{m+1} \right\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}} \|\Phi_{m+1}\|.\end{aligned}$$

Még nézzük meg  $H_m$   $\mu$ -szerinti normáját:  $\mu(H_m) \leq \alpha \sigma(m)$ , ahol  $\sigma(m) = \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \left( \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right)^2 \right)^{1/2}$ :

$$\begin{aligned}\mu(H_m u) &= \mu \left( \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k \right) \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \mu(\Phi_k) \right| = \left| \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle \right| \leq \\ &\leq \left| \left( \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}, \langle u, \Phi_k \rangle \right)_{l_2} \right| \leq \left\| \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k} \right\|_{l_2} \|\langle u, \Phi_k \rangle\|_{l_2} = \\ &= \sigma(m) \|u\| \leq \sigma(m) \alpha \mu(u)\end{aligned}$$

ahol  $(\cdot, \cdot)_{l_2}$  az  $l_2$ -beli skaláris szorzást jelöli. A levezetés során alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-egyenlőtlenséget és a Parseval-egyenlőséget. Ebből az is következik, hogy  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$ . A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, így  $\text{Im } H_m \subset \text{Dom } N$  és  $S_m \subset \text{Dom } N$ , hogy a  $P_m$  és a  $H_m$  alkalmazása után tudjuk az  $N$ -et is még alkalmazni.

Tegyük fel, hogy  $\bar{u} \in \text{Dom } N \cap \text{Dom } L$  megoldása az (4.1) egyenletnek, tehát

$$L\bar{u} = N\bar{u}. \quad (4.2)$$



Erre először alkalmazzuk  $H_m$ -et:

$$\begin{aligned} H_m L\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ (I - P_m)\bar{u} &= H_m N\bar{u}, \\ \bar{u} &= P_m \bar{u} + H_m N\bar{u}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (4.2)-re  $P_m$ -et:

$$P_m(L\bar{u} - N\bar{u}) = 0, \tag{4.4}$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan  $\bar{u} \in \text{Dom } L \cap \text{Dom } N$ , ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (4.1) feladatnak.

Legyenek  $a > 0, b > 0$  valós számok, és legyen  $u_0$  egy közelítő megoldása az  $Lu = Nu$  egyenletnek úgy, hogy létezik  $u^* \in S_m$  ( $u^* = \sum_{k=1}^m a_k \Phi_k$  valamely  $a_k$  számokra,  $k = 1, \dots, m$ ), amivel  $\mu(u^* - u_0) \leq a$ . Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \text{Dom } N \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \leq b\},$$

tehát  $S_{u^*}^b$  azon  $u$ -kat tartalmazza, melyek  $S_m$ -re levetítve  $u^*$ -ba esnek, és  $u^*$ -tól  $\mu$ -szerinti távolságuk legfeljebb  $b$ . Ezen elemek  $\mu$ -normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \leq \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$\begin{aligned} T_{u^*}^b : S_{u^*}^b &\rightarrow S, \\ T_{u^*}^b(u) &:= u^* + H_m N u. \end{aligned}$$

Lássuk be  $T_{u^*}^b$ -ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen  $x, y \in S_{u^*}^b$ :

$$\begin{aligned} \mu(T_{u^*}^b(x) - T_{u^*}^b(y)) &= \mu((u^* + H_m N x) - (u^* + H_m N y)) = \\ &= \mu(H_m(Nx - Ny)) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \leq \\ &\leq \mu(H_m)\beta_R\mu(x - y), \end{aligned}$$

ahol  $R = \mu(u^*) + b$ , tehát  $u^*$ -tól és  $b$ -től függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján  $\beta_R$  egy  $R$ -től függő konstans. Mivel  $\lim_{m \rightarrow \infty} \mu(H_m) = 0$ , ezért elég nagy  $m$  esetén

$\mu(H_m)\beta_R < 1$ . Annak, hogy  $\text{Im } T_{u^*}^b \subset S_{u^*}^b$  (tehát lehet  $T_{u^*}^b$ -t iteratíván alkalmazni) elégséges feltétele, hogy  $\mu(H_m)^2\mu(L)b_R \leq b$ , ami kellően nagy  $m$ -re szintén teljesül. Tehát ha  $m$  elég nagy, akkor  $T_{u^*}^b$  kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az  $u^*$ -tól függő fixpontot jelöljük  $y(u^*)$ -al, és asszociált elemnek nevezzük.  $y(u^*)$ -ról könnyen belátható, hogy megoldása az (4.3) egyenletnek. Vezessük be a  $c_k := \langle u^*, \Phi_k \rangle$  ( $k = 1, \dots, m$ ) jelölést, amivel  $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$ . Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz  $y(u^*)$  megoldása a (4.4) bifurkációs egyenletnek?

$$\begin{aligned}
0 &= P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_mLy(u^*) - P_mNy(u^*), \\
P_mLy(u^*) &= P_mL(u^* + H_mNy(u^*)) = P_mLu^* + P_mLH_mNy(u^*) = \\
&= P_mL\left(\sum_{k=1}^m c_k \Phi_k\right) + P_mL \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + P_m \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right) + \sum_{k=m+1}^{\infty} \langle Ny(u^*), \Phi_k \rangle \lambda_k P_m \Phi_k = \\
&= P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k\right),
\end{aligned}$$

tehát

$$0 = P_m\left(\sum_{k=1}^m c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*)\right),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$\begin{aligned}
0 &= \left\langle \sum_{j=1}^m c_j \lambda_j \Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k \right\rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ azaz} \\
0 &= \langle c_k \lambda_k \Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m), \text{ vagy} \\
0 &= \langle \lambda_k u^* - Ny(u^*), \Phi_k \rangle & (k = 1, \dots, m). \quad (4.5)
\end{aligned}$$

Ez utóbbi egy  $m$ -változós ( $c_k$  ( $k = 1, \dots, m$ ) számok meghatározzák  $u^*$ -ot),  $m$  egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha  $a, b, m$  elég nagyok, akkor az eredeti (4.1) egyenletnek  $\bar{u}$  pontosan akkor megoldása, ha az (4.5) egyenletnek  $u^*$  megoldása és  $\bar{u} = y(u^*)$ .

Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük.

Legyen  $N \geq m$ . Az  $Lu = Nu$  feladat megoldásait

$$u = \sum_{k=1}^N c_k \Phi_k = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k + \sum_{k=m+1}^N c_k \Phi_k$$

alakban keressük, tehát  $N$  növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a művelet-igény rovására).  $H_m$ -en is hasonlóképpen módosítunk:

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^N \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő  $L$ -hez  $\Phi_k (k = 1, \dots, N)$  sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti  $u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$  kiinduló értéket.
3. Állítsuk elő  $y(u^*)$ -ot a fixpontiterációval:  $y_0 := u^*$ ,  $y_{i+1} := u^* + H_m N y_i$ , ( $i = 1, \dots, S$ ).
4. Oldjuk meg az  $Lu^* = P_m N y_{S+1}$  egyenletet  $u^*$ -ra, például Newton-módszerrel.
5. Az így kapott  $u^*$ -ból kiindulva ismételjük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük (amit  $Lu^* - Nu^*$  normájával lehet jellemezni).

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor  $m$  növelése szükséges lehet (ami miatt  $N$ -et is lehet, hogy növelni kell).

A peremfeltételeket  $u$ -ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a  $\Phi_k$  sajátfüggvényekre, így az  $\tilde{o}$  lineáris kombinációjukkal előálló függvényre is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

## 4.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az  $L$  alakjára vonatkozó megkötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [9] és [10] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak

az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.

Legyen  $L$  egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a  $(-1, 1)$ . A peremfeltételeink a következők:

$$\begin{aligned}\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) &= 0, \\ \alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) &= 0.\end{aligned}$$

Ha  $L$ -nek  $\lambda$  sajátértéke,  $v$  pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor  $Lv = \lambda v$ , azaz

$$\begin{aligned}\frac{1}{w}(-(pv')' + qv) &= \lambda v, \\ -pv'' - p'v' + qv &= \lambda wv.\end{aligned}\tag{4.6}$$

Jelöljük  $T_n(x)$ -el a  $(-1, 1)$ -en értelmezett Csebisev-polinomokat:  $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ . Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak az  $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük ( $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$ ). A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol  $\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \dots, a_N]$  és  $\mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \dots, T_N(x)]^T$ , így az együtthatók  $\mathbf{a}$  vektora egyértelműen meghatározza a  $v(x)$  függvényt.

Mivel  $L$ -nek szüksége van  $v$  deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^N a_k T'_k(x) = \sum_{k=0}^N b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t}\tag{4.7}$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a  $\theta := \arccos x$  jelölést (amivel  $\sin \theta =$

$$\sqrt{1-x^2}).$$

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\theta) \\
T'_n(x) &= \sin(n\theta)n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) &= \sin((n+1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \sin((n-1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}} \\
\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\sin\theta = 2T_n(x)\sqrt{1-x^2} \\
\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) - \frac{1}{n-1}T'_{n-1}(x) &= 2T_n(x)
\end{aligned}$$

Ez működik  $n \geq 2$  esetén, kis  $n$ -ekre pedig egyszerű a dolog:

$$\begin{aligned}
T'_0(x) &= 0, \\
T'_1(x) &= 1 = T_0(x), \\
T'_2(x) &= 4x = 4T_1(x).
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be (4.7)-be a  $T_k(x)$ -ek helyére az így kapott képleteket:

$$\begin{aligned}
v' &= \sum_{n=0}^N b_n T_n = b_0 T'_1 + \frac{b_1}{4} T'_2 + \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n+1)} T'_{n+1} - \sum_{n=2}^N \frac{b_n}{2(n-1)} T'_{n-1} = \\
&= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T'_1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T'_n + \frac{b_{N-1}}{2N} T'_N + \frac{b_N}{2(N+1)} T'_{N+1}.
\end{aligned}$$

Így már látható az összefüggés  $a_n$  és  $b_n$  között:

$$\begin{aligned}
b_N &= 0 \\
b_{N-1} &= 2Na_N \\
b_{n-1} &= b_{n+1} + 2na_n \quad (n = N-1, \dots, 2) \\
b_0 &= \frac{b_2}{2} + a_1.
\end{aligned}$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a  $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  egyenletet ( $k, l = 0, \dots, N$ ):

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan} \\ 2l, & \text{ha } l \geq k \geq 1 \text{ és } l + k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T \mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az  $x$ -szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$xv(x) = \sum_{k=0}^N a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^N c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$\begin{aligned} xT_0(x) &= T_1(x) \\ xT_n(x) &= \frac{1}{2} (T_{n+1} + T_{n-1}) \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_1}{2} \\ c_1 &= a_0 + \frac{a_2}{2} \\ c_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad (n = 2, \dots, N-1) \\ c_N &\approx \frac{a_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a  $M\mathbf{a} \approx \mathbf{c}$  szorzást ( $k, l = 0, \dots, N$ ):

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k, l) = (1, 0) \\ \frac{1}{2}l, & \text{ha } l \geq 2 \text{ és } |k - l| = 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx \mathbf{c}^T \mathbf{t} \approx (M\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezenfelül, ha  $f$  analitikus függvény, akkor  $f(x)v(x) \approx (f(M)\mathbf{c})^T \mathbf{t}$ .

Ezek segítségével írjuk fel az (4.6) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrixműveletként:

$$\hat{L}\mathbf{a} := \left( -p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M) \right) \mathbf{a}.$$

A (4.6) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig  $\lambda w(M)\mathbf{a}$ , jelölésként  $\mathbf{B} := w(M)$ . Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy  $\mathbf{t}$  egy vektorértékű függvény,  $[a, b] = [-1, 1]$ , és ennek az intervallumnak a végpontjain  $T_n(-1) = (-1)^n$ ,  $T_n(1) = 1$ . Legyen

$$\begin{aligned} h_1^T &= \alpha_{11}(\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{t}(-1))^T \hat{D}, \\ h_2^T &= \alpha_{21}(\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{t}(1))^T \hat{D} \end{aligned}$$

amivel (ismét a  $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$  jelölést alkalmazva)

$$\begin{aligned} h_1^T \mathbf{a} &= \alpha_{11}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(-1))^T = \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1), \\ h_2^T \mathbf{a} &= \alpha_{21}(\mathbf{a}^T \mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{b}^T \mathbf{t}(1))^T = \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1). \end{aligned}$$

Legyen  $H = (h_1, h_2)^T$ , így a peremfeltétel megfogalmazható  $H\mathbf{a} = \mathbf{0}$  formában.

Legyen  $\hat{A}$  az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy  $\hat{L}$  utolsó két sorát elhagyjuk (tehát  $N-1 \times N+1$  mátrix), és állítsuk elő  $\hat{B}$ -t ugyanígy  $\mathbf{B}$ -ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix} \mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \mathbf{a}.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha  $\mathbf{0}$  helyett  $\frac{1}{\lambda_*}H$ -t használunk, ahol  $\lambda_*$  egy nagy szám, ami nem sajátértéke  $L$ -nek. Így a jobb oldal mátrixának  $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$  nincsenek csupa 0 sorai.

Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a  $[-1, 1]$ , hanem valamely  $[a, b]$  intervallum, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni:  $D := \frac{1}{\alpha}\hat{D}$ , ahol  $\alpha$  az intervallum középpontja ( $\alpha = \frac{b-a}{2}$ ).

## 4.2. Példa a numerikus alkalmazásra

Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [8] cikkhez készült MATLAB csomagot.

Tekintsük az

$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x}$$

egyenletet a  $[0, 1]$  intervallumon a

$$u(0) = 0$$

$$u(1) + u'(1) = 0$$

peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb  $10^{-5}$  hibát megengedve:

Ehhez az  $m = 0$  választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltételen, és az intervallum jobb oldalán a

$$u'(1) = 0$$

feltételt követeljük meg, akkor  $m = 0$  esetén nincs konvergencia, és még  $m = 1$  esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A `cinit = [1]` paraméterrel, azaz a  $\Phi_1$  komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:



# Irodalomjegyzék

- [1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.
- [2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.
- [3] TODO, *Notes on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.
- [4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.
- [5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.
- [6] TODO, *TODO Implicit Functions and Lyapunov-Schmidt*. TODO, TODO.
- [7] P. T. Jesús Rodríguez, „Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations,” vol. 68, pp. 3465–3474, 2008.
- [8] D. Trif, „The lyapunov-schmidt method for two-point boundary value problems,” vol. 6, pp. 119–132, 2005.
- [9] M. Liefvendahl, „A chebyshev tau spectral method for the calculation of eigenvalues and pseudospectra,”
- [10] D. Trif, „Lisc - a matlab package for linear differential problems,” vol. 2, pp. 203–208, 2006.