



Eötvös Loránd Tudományegyetem  
Informatikai Kar  
Numerikus Analízis Tanszék

---

# A Ljapunov-Schmidt-módszer

**Dr. Kovács Sándor**  
Adjunktus

**Lipták Bence Gábor**  
Programtervező Informatikus MSc

Budapest, 2018.

# Tartalomjegyzék

<b>1. Bevezetés</b>	<b>2</b>
<b>2. Funkcionálanalízis kiegészítés</b>	<b>3</b>
2.1. Faktorterek . . . . .	3
2.2. Kompakt operátorok . . . . .	5
2.3. Fredholm-operátorok . . . . .	6
<b>3. A Ljapunov-Schmidt-módszer</b>	<b>8</b>

# 1. fejezet

## Bevezetés

## 2. fejezet

# Funkcionálanalízis kiegészítés

Ahhoz, hogy a Ljapunov-Schmidt-módszert ismertethessük, szükségünk van a faktorterek és a Fredholm-operátorok fogalmaira.

### 2.1. Faktorterek

Először is ismertessük a faktorterek definícióját, és az alkalmazásunk szempontjából fontos tulajdonságait, a [1] könyv 4.2 fejezete alapján, ahol a bizonyítások is megtalálhatóak.

**2.1.1. Definíció (Faktortér).** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  pedig egy altere. A  $V$  tér  $U$  szerinti **faktortere** vagy **hányadostere***

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}, \quad (2.1)$$

ahol

$$v + U := \{v + u \mid u \in U\}. \quad (2.2)$$

Így egy lineáris térben egy altér segítségével definiáltunk egy halmazrendszert. A következő állítással megfogalmazzuk, hogy a kapott halmazok és az  $U$  altér között mi az összefüggés.

**2.1.1. Állítás.** *Ha  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, akkor  $\forall v, v' \in V$ -re*

$$v + U = v' + U \Leftrightarrow v - v' \in U. \quad (2.3)$$

Ennek segítségével belátható, hogy ha " $v - v' \in U$ " feltétellel definiálunk egy relációt  $V$  elemein, akkor az egy ekvivalenciareláció és az ekvivalenciaosztályok pedig a  $V/U$  faktortér elemei. Ezután definiáljunk műveleteket a faktortéren.

**2.1.1. Tétel.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, ekkor

- Megadunk

$$V/U \times V/U \longrightarrow V/U$$

$$\mathbb{K} \times V/U \longrightarrow V/U$$

leképezéseket a következő módon

$$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U \quad (2.4)$$

$$\alpha(v + U) := \alpha v + U \quad (2.5)$$

melyek jól definiáltak.

- A  $V/U$  faktortér ezekkel a műveletekkel egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér.
- $\pi_U$  az úgynevezett **kanonikus leképezés**, melyet

$$\pi_U(v) := v + U \quad (v \in V)$$

módon definiálunk lineáris operátor  $V$  és  $V/U$  között.

A faktortér konstrukciója nagyon hasonlít az egész számok körében létesített maradékosztályokra, és rögzített  $U \subset V$  esetén ugyanaz a jelölés is alkalmazható:

$$\bar{v} := v + U \quad (v \in V),$$

ezzel a jelöléssel a műveletek:

$$\bar{v} + \bar{w} = \overline{v + w} \quad (v, w \in V)$$

$$\alpha \bar{v} = \overline{\alpha v} \quad (\alpha \in \mathbb{K}, v \in V).$$

Még fontos észrevétel, hogy a  $\pi_U$  leképezés magtere pontosan az  $U$  halmaz, valamint az operátor szűrjektív is, amiből kapunk a faktortér dimenziójára egy összefüggést:

**2.1.2. Tétel.** Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere, ekkor

$$\dim V/U + \dim U = \dim V. \quad (2.6)$$

Ha egy  $v \in V$  elemet egy  $u \in U$  elemmel eltolunk ( $U \subset V$  altér), akkor a  $V/U$  faktortérbeli  $\pi_U$  általi képe változatlan, ez a konstrukció alkalmas arra, hogy olyan függvényeket vizsgáljunk, amiknek az értéke az  $U$  altéren konstans, speciális esetben 0. Az ilyen leképezésekről szól a következő tétel:

**2.1.3. Tétel (Homomorfiatétel vektorterekre).** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $F : V \rightarrow W$  egy lineáris leképezés,  $U \subset V$  egy altér amire  $U \subset \text{Ker } F$ . Ekkor egyértelműen létezik  $F' : V/U \rightarrow W$  amivel  $F = F' \circ \pi_U$ . Emellett*

- $\text{Im } F = \text{Im } F'$ , illetve  $F'$  pontosan akkor szürjektív, amikor  $F$  is,
- $\text{Ker } F' = (\text{Ker } F)/U$ , illetve  $F'$  pontosan akkor injektív, amikor  $U = \text{Ker } F$ .

$F'$ -t az  **$F$  által indukált homomorfizmusnak** nevezzük.

A faktortérnek van egy hasznos tulajdonsága, amivel nem halmazrendszerként, hanem altérként lehet kezelni.

**2.1.4. Tétel.** *Legyen  $V$  egy  $\mathbb{K}$  feletti lineáris tér,  $U \subset V$  egy altere,  $W \subset V$  pedig az  $U$  komplemente (tehát  $V = W \oplus U$ ). Ekkor a  $\pi_U$  kanonikus leképezés leszűkítése  $W$ -re*

$$W \longrightarrow V/U, w \longrightarrow w + U$$

*izomorfia, azaz  $W \cong V/U$ .*

## 2.2. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  normált terek.

**2.2.1. Definíció (Kompakt operátor).**  $A : X \rightarrow Y$  operátor **kompakt**, ha bármely  $U \subset X$  korlátos halmaznak a képe prekompakt, azaz  $\overline{A[U]} \subset Y$  kompakt, valamint ha  $A$  korlátos, akkor **teljesen folytonosnak** is nevezzük. [2]

A továbbiakban az  $X \rightarrow Y$  közötti kompakt és lineáris operátorok halmazát  $K(X, Y)$ -al,  $X = Y$  esetén  $K(X)$ -szel jelöljük, ez zárt alteret alkot  $L(X, Y)$ -ban.

**2.2.2. Definíció.**  $A \in L(X, Y)$  operátor **véges rangú**, ha a képtere véges dimenziós ( $\dim \text{Im } A < \infty$ ). A véges rangú operátorok halmazát  $K_{fin}(X, Y)$ -al rövidítjük. [2, 3]

Belátható ([2]), hogy minden véges rangú operátor kompakt (és így a jelölés indokolt).

A kompakt operátorok bizonyos esetekben közelíthetők véges rangú operátorokkal:

**2.2.1. Tétel.** *Ha  $Y$ -ban van Schauder-bázis, akkor  $A \in L(X, Y)$  pontosan akkor kompakt, ha határértéke véges rangú operátorok valamely sorozatának, azaz  $K(X, Y) = \overline{K_{fin}(X, Y)}$ . [3]*

Ezek a feltételek teljesülnek például szeparábilis Hilbert-terekben vagy  $L^p$ -terekben ( $p \geq 1$ ).

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok adjungáltjával kapcsolatban:

**2.2.2. Tétel.** *Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek,  $A \in L(X, Y)$ , ekkor*

$$A \in K(X, Y) \Leftrightarrow A^* \in K(Y^*, X^*),$$

*azaz  $A$  pontosan akkor kompakt, ha  $A^*$  adjungált operátora kompakt. [2, 4]*

## 2.3. Fredholm-operátorok

Végül beszéljünk a Fredholm-operátorokról és lehetőségekről az előállításukra. A továbbiakban  $(X, \|\cdot\|_X)$  és  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  Banach-terek.

**2.3.1. Definíció (Fredholm-operátor).**  $T \in L(X, Y)$  **Fredholm-operátor**, ha az alábbiak teljesülnek:

- $\dim \text{Ker } T < \infty$ ,
- $T[X]$  zárt  $Y$ -ban,
- $\dim(Y/T[X]) < \infty$ .

Ekkor a  $T$  operátor **indexe**  $\text{ind } T := \dim \text{Ker } T - \dim(Y/T[X]) \in \mathbb{Z}$ ,  $T$  **cokernelle**  $\text{coker } T := Y/T[X]$  (azaz  $Y$ -ban a  $T$  képtere szerinti faktortér), valamint a cokernel dimenziója az operátor **kodimenziója**  $\text{codim } T := \dim \text{coker } T$ . [1, 3, 4, 5]

Az  $X$  és  $Y$  közötti Fredholm-operátorok halmazát a továbbiakban  $\mathcal{F}(X, Y)$ -al jelöljük. Belátható, hogy a második feltétel ( $T$  képterének a zártsága) a másik kettőből következik [4, 5].

Most nézzük meg, hogy bizonyos függvény műveletek hatására változik-e a Fredholm-tulajdonság.

**2.3.1. Tétel.** Legyenek  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $(Z, \|\cdot\|_Z)$  Banach-terek, ekkor:

- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$  és  $B \in \mathcal{F}(Y, Z)$ , ekkor  $B \circ A \in \mathcal{F}(X, Z)$  és  $\text{ind}(B \circ A) = \text{ind } B + \text{ind } A$ ,
- $A \in \mathcal{F}(X, Y)$ , ekkor  $A^* \in \mathcal{F}(Y^*, X^*)$  és  $\text{ind } A^* = -\text{ind } A$ ,
- $\mathcal{F}(X, Y)$  nyílt részhalmaza  $L(X, Y)$ -nak, és az  $\text{ind} : \mathcal{F}(X, Y) \rightarrow \mathbb{Z}$  függvény lokálisan konstans.

Tehát Fredholm-operátorok kompozíciója Fredholm-operátor, valamint Fredholm-operátor adjungáltja is Fredholm-operátor. [3, 5]

Korábban említettük a kompakt operátorok és a Fredholm-operátorok kapcsolatát, erről szól a következő állítás.

**2.3.2. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  bijektív,  $K \in L(X, Y)$  kompakt, ekkor  $T + K$  Fredholm-operátor és  $\text{ind}(T + K) = 0$ . Ennek speciális esete amikor  $(X, \|\cdot\|_X) = (Y, \|\cdot\|_Y)$  és  $T$  az identitás  $X$ -en. [3, 5]

Amennyiben ilyen módon kaptunk egy Fredholm-operátort, akkor ahhoz (a kompakt operátorok altér-tulajdonságából kifolyólag) egy kompakt operátort hozzáadva is Fredholm-operátort kapunk, ez igaz tetszőleges konstrukció esetén is:

**2.3.3. Tétel.**  $K \in K(X, Y)$  és  $F \in \mathcal{F}(X, Y)$  esetén  $K + F \in \mathcal{F}(X, Y)$ , valamint  $\text{ind}(K + F) = \text{ind } F$ . [3]

Mivel a Fredholm-operátoroknál nem feltétel, hogy a magterük csak a tér nullelemét tartalmazza, ezért általában nem invertálhatóak, de egy hasonló tulajdonságot megadhatunk:

**2.3.4. Tétel.**  $T \in L(X, Y)$  pontosan akkor Fredholm-operátor, ha létezik  $B \in L(Y, X)$ ,  $K_X \in K(X)$ ,  $K_Y \in K(Y)$  úgy, hogy

$$BT = I|_X + K_X, TB = I|_Y + K_Y.$$

Azaz a Fredholm-tulajdonság lényegében az invertálhatóság modulo kompakt operátort jelenti. [3, 5]



## 3. fejezet

### A Ljapunov-Schmidt-módszer

# Irodalomjegyzék

- [1] R. Scharlau, *TODO*. TODO, 2006 (?)TODO.
- [2] K. Sándor, *Funkcionálanalízis feladatokban*. TODO, 2013.
- [3] TODO, *Notes on Fredholm (and compact) operators*. TODO, 2009.
- [4] TODO, *TODO lectures16and17*. TODO, TODO.
- [5] C. Frantzen, *Diffun2, Fredholm Operators (?)TODO*. TODO, 2012.