Eötvös Loránd Tudományegyetem
Informatikai Kar

Lipták Bence

# A Ljapunov-Schmidt-módszer

MSc diplomamunka

Modellalkotó informatikus szakirány

Témavezető:

Dr. Kovács Sándor
Numerikus Analízis Tanszék

Budapest, 2018.

# Köszönetnyilvánítás

Szeretném megköszönni témavezetőmnek, Kovács Sándor tanár úrnak a segítségét, munkáját és végtelen türelmét, ami nélkül ez a dolgozat nem jöhetett volna létre.

Budapest, 2018 ősz

*Lipták Bence*

# Tartalomjegyzék

# 1. fejezet

# Funkcionálanalitikai segédeszközök

Ebben a fejezetben összefoglaljuk a funkcionálanalízis azon fogalmait, ill. tételeit, amelyekre a későbbiekben hivatkozunk, ill. amelyeket a Ljapunov-Schmidt-módszer tárgyalása folyamán felhasználunk. Ha mást nem írunk, akkor a továbbiakban legyen $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ egy-egy a $\mathbb{K}$ testre vonatkozó vektortér. A jelölés-, ill. szimbólumrendszert illetően alapvetően a [6] jegyzetre támaszkodunk.

## 1.1. Faktorterek, direkt kiegészítők

Adott $\mathcal{H}$ halmaz, ill. $\sim \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ ekvivalencia esetében a

$$[x] := \{y \in \mathcal{H} : \; x \sim y\}$$

szimbólum jelöli az $x \in \mathcal{H}$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztályt,

$$\mathcal{H}/\sim := \{[x] \in \mathcal{P}(\mathcal{H}) : \; x \in \mathcal{H}\}$$

a $\sim$-ekvivalenciaosztályok halmazát.

Ha $\mathcal{X}$ vektortér a $\mathbb{K}$ testre vonatkozóan, $A, B \subset \mathcal{X}$ és $\alpha \in \mathbb{K}$, akkor

$$A + B := \{a + b \in \mathcal{X} : \; a \in A, \, b \in B\}, \qquad \{a\} + B =: a + B \quad (a \in \mathcal{X}),$$

$$\alpha A := \{\alpha a \in \mathcal{X} : \; a \in A\}.$$

**1.1.1. példa.** Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2, \qquad \mathcal{A} := \{(a,0) : \; a \in \mathbb{R}\} \qquad \text{és} \qquad r := (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

akkor

$$r + \mathcal{A} = \{r + u : \; u \in \mathcal{A}\} = \{(x + a, y + 0) : \; x \in \mathbb{R}\} = \{(x, y) : \; x \in \mathbb{R}\},$$

azaz $r + \mathcal{A}$ nem más mint az $y$ abszcisszájú vízszintes egyenes.

Adott $\mathcal{X}$ vektortér, $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér és $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{0\}$ esetén az

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} =: \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

komplexusösszeget **direktösszeg**nek, a $\mathcal{B}$ alteret pedig az $\mathcal{A}$ altér **direkt kiegészítő**jének nevezzük, ha $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$ teljesül. Könnyen belátható, hogy

$$x \in \mathcal{A} \oplus \mathcal{B} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \exists |\, u \in \mathcal{A},\ v \in \mathcal{B}: \ x = u + v,$$

Ha $\mathcal{A}$ altér az $\mathcal{X}$ vektortérben, akkor az

$$x \sim y \qquad :\Longleftrightarrow \qquad x - y \in \mathcal{A} \quad (x, y \in \mathcal{X})$$

reláció $\mathcal{X}$-beli ekvivalencia, és az $x \in \mathcal{X}$ elemhez tartozó ekvivalenciaosztályra

$$[x] = \{u \in \mathcal{X} : \ x - u \in \mathcal{A}\} = \{x + y \in \mathcal{X} : \ y \in \mathcal{A}\} = x + \mathcal{A}.$$

A $\sim$-ekvivalenciaosztályok halmazára $\mathcal{X}/\sim$ helyett gyakran az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ jelölés használatos. Így

$$\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{x + \mathcal{A} : \ x \in \mathcal{X}\}.$$

Mivel bármely $\lambda \in \mathbb{K}$ és $x, y, u, v \in \mathcal{X}$ esetén

$$(x \sim y \ \wedge \ u \sim v) \quad \Longrightarrow \quad x + u \sim y + v, \qquad x \sim y \quad \Longrightarrow \quad \lambda x \sim \lambda y,$$

ezért az

$$[x] + [y] := [x + y] \quad (x, y \in \mathcal{X}), \qquad \lambda \cdot [x] := [\lambda \cdot x] \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in \mathcal{X})$$

műveletekkel $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ halmaz vektortér, amelyet az $\mathcal{X}$ vektortér $\mathcal{A}$ altere szerinti **faktorteré**nek vagy **hányadoster**ének nevezünk. Az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$-beli nullvektor: $[0] = \mathcal{A}$.

**1.1.2. példa.** Ha

$$\mathcal{X} := \mathbb{R}^2 \qquad \text{és} \qquad \mathcal{A} := \{(a,0) : \ a \in \mathbb{R}\},$$

akkor

$$\mathbb{R}^2/\mathcal{A} = \left\{r + \mathcal{A} : \ r \in \mathbb{R}^2\right\},$$

azaz $\mathbb{R}^2/\mathcal{A}$ nem más mint az $\mathbb{R}^2$-beli vízszintes egyenesek halmaza.

**1.1.3. példa.** Világos, hogy ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[0,1]$, akkor

$$\mathcal{A} := \left\{ f \in \mathcal{X} : \int_0^1 f = 0 \right\}$$

altér $\mathcal{X}$-ben. Ha

$$e : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad e(x) := 1,$$

akkor $([e])$ bázisa $\mathcal{X}/\mathcal{A}$-nak, hiszen

- $\displaystyle\int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = 1 \neq 0$ következtében $e \notin \mathcal{A}$, tehát $[e] \neq [0]$, így $([e])$ lineárisan független.
- ha
  $$f \in \mathcal{X} \qquad \text{és} \qquad \lambda := \int_0^1 f,$$
  akkor
  $$\int_0^1 (f - \lambda e) = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \lambda \int_0^1 1 \, \mathrm{d}x = \int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x - \lambda = 0$$
  következtében
  $$f - \lambda e \in \mathcal{A}, \qquad \text{azaz} \qquad [f] = \lambda[e].$$

Adott $\mathcal{X}$ vektortér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér esetében $\mathcal{A}$ kodimenziója a

$$(\mathrm{codim}(\mathcal{A}) :=) \, \mathrm{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}} := \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A})$$

(kibővített értelemben vett) szám. Ha $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér az $\mathcal{A}$ direkt kiegészítője: $\mathcal{A} \oplus \mathcal{B} = \mathcal{X}$, akkor $\mathrm{codim}(\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{B})$.

Belátható, hogy

- ha $\mathcal{A} = \mathcal{X}$, akkor $\mathcal{X}/\mathcal{A} = \{0\}$, így $\mathrm{codim}(\mathcal{X}) = 0$.
- a következő három állítás egyenértékű:
  1. $\mathrm{codim}(\mathcal{A}) = 1$.
  2. alkalmas $v \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{A}$ esetén
     $$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v : \ a \in \mathcal{A}, \ \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
  3. tetszőleges $v \in \mathcal{X} \backslash \mathcal{A}$ esetén
     $$\mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v.$$

**1.1.1. tétel.** Ha $\mathcal{A}$ altér az $\mathcal{X}$ vektortérben, amelynek a $\mathcal{B}$ vektorrendszer egy bázisa, akkor $\mathcal{X}$-ben van olyan $\mathcal{C}$ bázis, hogy $\mathcal{B}$ részrendszere $\mathcal{C}$-nek és

$$\{x + \mathcal{A} : \; x \in \mathcal{C} \backslash \mathcal{B}\}$$

bázisa az $\mathcal{X}/\mathcal{A}$ faktortérnek.

Az iménti tétel következménye az

**1.1.1. állítás.** Ha $\mathcal{A}$ altér az $\mathcal{X}$ vektortérben, akkor

$$\dim(\mathcal{X}) = \dim(\mathcal{A}) + \dim(\mathcal{X}/\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{A}) + \operatorname{codim}(\mathcal{A})_{\mathcal{X}}.$$

**1.1.2. tétel.** Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér. Ekkor a $|||\cdot||| : \mathcal{X}/\mathcal{A} \to \mathbb{R}$,

$$|||[x]||| := d(x, \mathcal{A}) := \inf\{\|x - y\| \in \mathbb{R} : \; y \in \mathcal{A}\} = \inf\{\|z\| \in \mathbb{R} : \; z \in [x]\}$$

leképezés norma, továbbá, ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, akkor $(\mathcal{X}/\mathcal{A}, |||\cdot|||)$ is Banach-tér.

## 1.2. Lineáris operátorok

A lineáris operátorok, ill. az $\mathcal{Y} = \mathbb{K}$ esetben lineáris funkcionálok terének jelölésére az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : \; A \text{ lineáris}\},$$

ill. az

$$\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y} : \; A \text{ lineáris}\}$$

szimbólumot használjuk, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $\mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et $\mathfrak{L}(\mathcal{X})$-szel rövidítjük. Sok esetben – különösen fizikai alkalmazásokban – szokás az

$$\mathcal{X}^+ := \mathit{Hom}(\mathcal{X}, \mathbb{K}) = \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathbb{K})$$

teret **lineáris formák** vagy **kovektor**ok tereként emlegetni, $\mathcal{X}$ elemeire a „ket-vektor”, $\mathcal{X}^+$ elemeire pedig a „bra-vektor” elnevezést használni, és tetszőleges $f \in \mathcal{X}^+$ és $x \in \mathcal{X}$ esetén az $f(x)$ helyettesítési értéket az $\langle f, x\rangle$, ill. $\langle f|x\rangle$ („bracket”) jelsorozattal jelölni:

$$\langle f, x\rangle := \langle f|x\rangle := f(x) \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

Az $\mathcal{X}^+$ teret szokás az $\mathcal{X}$ tér **algebrai duális**ának nevezni. Ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\mathcal{R}(A) := \{Au \in \mathcal{Y} : \; u \in \mathcal{D}(A)\},$$

ill. az

$$\mathcal{N}(A) := A^{-1}[\{0\}] = \{u \in \mathcal{D}(A) : \ Au = 0 \in \mathcal{Y}\}$$

altereket az $A$ operátor (funkcionál) **képter**ének, ill. **magter**ének nevezzük.

**1.2.1. megjegyzés.** Világos, hogy, ha $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$A \quad \text{izomorfizmus} \qquad \Longleftrightarrow \qquad /\mathcal{N}(A) = \{0\} \quad \text{és} \quad \mathcal{R}(A) = \mathcal{Y} \quad (\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A) = \{0\})/\,,$$

azaz

$$A \quad \text{izomorfizmus} \qquad \Longleftrightarrow \qquad /\dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \operatorname{codim}(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A))/\,.$$

A lináris algebrából közismert az alábbi

**1.2.1. tétel.** Ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós vektortér, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$, akkor igaz az

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathcal{N}(A) \cap \mathcal{R}(A) = \{0\}$$

ekvivalencia.

**1.2.2. tétel.** (**Dimenziótétel.**) Ha $\mathcal{X}$ véges dimenziós vektortér, $\mathcal{Y}$ pedig (nem feltételenül véges dimenziós) vektortér, továbbá $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\dim(\mathcal{N}(A)) + \dim(\mathcal{R}(A)) = \dim(\mathcal{X}).$$

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|\mathcal{Y})$ normált terek és $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ operátor esetén értelmezzük az

$$\|A\| := |||A||| := \inf\{K \in [0, +\infty] : \ \|Ax\|_{\mathcal{Y}} \leq K\|x\|_{\mathcal{X}} \ (x \in \mathcal{D}(A))\} \qquad /\inf\emptyset := +\infty/$$

(kibővített értelemben) valós számot. Az $A$ operátor **korlátos**, ha $\|A\| < +\infty$. A korlátos, lineráris operátorok halmazának jelölésére az

$$L(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y}) : \ A \text{ korlátos}\}\,,$$

ill. az

$$L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ A \text{ korlátos}\}$$

szimbólumokat fogjuk használni, $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetén pedig az $L(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et $L(\mathcal{X})$-szel rövidítjük:

$$L(\mathcal{X}) := L(\mathcal{X}, \mathcal{X}).$$

Ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

$$\|A\| = \sup\{\|Ax\|_{\mathcal{Y}} \in \mathbb{R} : \ x \in \mathcal{X}, \ \|x\|_{\mathcal{X}} = 1\}\,.$$

**1.2.1. példa.**

1. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor az $I$ identikus operátorra
$$I \in L(\mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|I\| = 1$$
teljesül.

2. Ha
$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (L^2[0,\pi], \|\cdot\|_{L^2}),$$
akkor az
$$A \in \mathcal{X} \to \mathcal{X}, \qquad Au := -u'' \qquad (u \in \mathfrak{C}^2[0,\pi]:\ u(0) = u(\pi) = 0)$$
operátor nem korlátos, ui. ha
$$\varphi_n : [0,\pi] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi_n(t) := \sin(nt) \quad (n \in \mathbb{N}),$$
akkor
$$\|\varphi_n\| = \sqrt{\pi/2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
és
$$\|A\varphi_n\| = \sqrt{\int_0^\pi n^2 \sin^2(nt)\,\mathrm{d}t} = n^2\|\varphi_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor pontosan akkor korlátos, ha folytonos. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy az $\mathcal{N}(A)$ magtér zárt altere $\mathcal{X}$-nek.

Ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ egy kodimenziós zárt altér, akkor alkalmas $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionálra
$$\mathcal{A} = \mathcal{N}(f) := \{x \in \mathcal{X}:\ \langle f, x\rangle = 0\},$$
hiszen a feltételek következtében
$$v \in \mathcal{X}\backslash\mathcal{A} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{X} = \mathcal{A} + \mathbb{R}v := \{a + \lambda v:\ a \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{R}\},$$
így az
$$f(x) = f(a + \lambda v) := \lambda \qquad (x \in \mathcal{X})$$
választással a kívánt funkcionálhoz jutunk (vö. [5], 131. old.)

**1.2.1. definíció.** Adott $\mathcal{X}$ lineáris tér esetén azt mondjuk, hogy az $A \in \mathcal{L}(\mathcal{X})$ operátor

1. **idempotens**, ha $A^2 := A \circ A = A$;
2. **projekció**, ha alkalmas az $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} = \mathcal{X}$ feltételnek eleget tévő $\mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ altér esetén

$$Ax := u \qquad (\exists|\, u \in \mathcal{U},\, v \in \mathcal{V} :\; x = u + v).$$

Az $A$ (lineáris) operátort szokás az $U$ altérre való, $V$ altér menti, vagy $V$ altérrel párhuzamos irányú **vetítő operátor**nak is nevezni.

**1.2.2. példa.** Az $I : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $Ix := x$ identikus operátor projekció.

**1.2.3. példa.** A $\mathcal{O} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$, $Ix := 0$ zérusoperátor projekció.

**1.2.4. példa.** Ha $p \in [1, +\infty)$, és $\mathcal{X} := l_p$, akkor az

$$A : l_p \to l_p, \qquad Au := (u_1, \ldots, u_n, 0, \ldots)$$

operátor projekció.

**1.2.5. példa.** Ha $d \in \mathbb{N}$, és $\mathcal{X} := \mathbb{K}^{d\times d}$, akkor az

$$AM := \frac{1}{2}(M + M^T) \qquad (M \in \mathcal{X})$$

operátor projekció.

**1.2.6. példa.** Ha valamely $0 < a \in \mathbb{R}$ esetén

$$\mathcal{X} := \{f : [-a, a] \to \mathbb{K} :\; f \in \mathfrak{C}\},$$

akkor az

$$(Af)(x) := \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) \qquad (f \in \mathcal{X},\, x \in [-a, a])$$

operátor projekció. Látható, hogy az

$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} :\; f \text{ páratlan}\} \qquad \text{és az} \qquad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} :\; f \text{ páros}\}$$

alterekre

$$\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$$

teljesül, hiszen

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right) + \frac{1}{2}\left(f(x) - f(-x)\right) \qquad (x \in [-a, a]).$$

Projekciók jellemzésére szolgál a következő állítás.

**1.2.3. tétel.** Legyen $\mathcal{X}$ lineáris tér. Az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X})$ operátor pontosan akkor projekció, ha idempotens, továbbá ez utóbbi esetben

1. $\mathcal{N}(I - A) = \mathcal{R}(A)$ és $\mathcal{R}(I - A) = \mathcal{N}(A)$.
2. $\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A)$, pontosabban bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén
$$x = u + v,\ u \in \mathcal{N}(A),\ v \in \mathcal{R}(A) \qquad \Longleftrightarrow \qquad u = (I - A)x,\ v = Ax.$$
3. Az $I - A$ operátor projekció: az $\mathcal{N}(A)$ altérre való $\mathcal{R}(A)$-val párhuzamos vetítés.
4. Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ Banach-tér, $\mathcal{X} = U \oplus V$, úgy az $U$ altérre való $A$ projekció pontosan akkor lesz korlátos, ha $U$ és $V$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben.

**1.2.7. példa.** Ha
$$\mathcal{X} := L^2([0,1] \times [0,1]),$$
akkor az
$$(Af)(x,y) := \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x)) \qquad (f \in \mathcal{X},\ (x,y) \in [0,1] \times [0,1])$$
operátor projekció, ui. bármely $f \in \mathcal{X}$, ill. $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén
$$\begin{aligned}(A^2 f)(x,y) &= (A(Af))(x,y) = \frac{1}{2}\{(Af)(x,y) - (Af)(y,x)\} = \\ &= \frac{1}{2}\left\{\frac{f(x,y) - f(y,x)}{2} - \frac{f(y,x) - f(x,y)}{2}\right\} = \\ &= \frac{1}{4}(2f(x,y) - 2f(y,x)) = (Af)(x,y).\end{aligned}$$
Látható, hogy az
$$\mathcal{N}(A) = \{f \in \mathcal{X} :\ f \text{ szimmetrikus}\}, \qquad \mathcal{R}(A) = \{f \in \mathcal{X} :\ f \text{ antiszimmetrikus}\}$$
alterekre $\mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A) = \mathcal{X}$ teljesül, hiszen bármely $(x,y) \in [0,1] \times [0,1]$ esetén
$$f(x,y) = \frac{1}{2}(f(x,y) + f(y,x)) + \frac{1}{2}(f(x,y) - f(y,x)).$$

Az $\mathcal{X}^* := L(\mathcal{X}, \mathbb{K})$ szimbólum jelöli az $\mathcal{X}$-en értelmezett korlátos, lineáris funkcionálok összességét, az $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ normált teret az $\mathcal{X}$ vektortér, ill. az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér (**topológiai**) **duális**ának (**duális terének** vagy **konjugált terének**) nevezzük. Az egyszerűség kedvéért $(\mathcal{X}^*, \|\cdot\|)$ helyett gyakran csak $\mathcal{X}^*$-ot írunk. Az $\mathcal{X}^*$ altere $\mathcal{X}^+$-nek és

$$\dim(\mathcal{X}) < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{X}^+ = \mathcal{X}^*.$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Hilbert-tér, akkor $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ azonosítható duálisukkal, és $\langle\cdot,\cdot\rangle$ nem más mint a skaláris szorzat.

**1.2.2. definíció.** Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, valamint $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Azt mondjuk, hogy $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ **nyílt**, ill. **zárt operátor**, ha bármely $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ nyílt, ill. zárt halmaz esetén az $A[\mathcal{H}] \subset \mathcal{Y}$ képhalmaz nyílt, ill. zárt.

**1.2.4. tétel. (Nyílt leképezések tétele.)** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, akkor tetszőleges $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor esetében egyenértékűek az alábbi állítások.

**(1)**. Az $A$ operátor szürjektív.

**(2)**. Az $A$ operátor nyílt.

Az iménti tétel következményeként kapjuk az alábbi igen fontos állítást.

**1.2.5. tétel. (Banach-féle homeomorfia-tétel.)** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, továbbá az $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ (folytonos, lineáris) operátor bijektív, akkor $A^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$, azaz minden, Banach-teret Banach-térbe képező korlátos lineáris bijekció inverze is korlátos.

Operátorok folytonossága sok esetben gráfjuk zártságára vezethető vissza.

**1.2.6. tétel. (Zárt gráfra vonatkozó tétel.)** Az $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek és az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X} \curvearrowright \mathcal{Y})$ (lineáris) operátor esetén, ha

**(1)** $\mathcal{D}(A)$ zárt $/(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$-ben/ és **(2)** $\Gamma(A)$ zárt $/(\mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \|(\cdot,\cdot)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}})$-ban/,

akkor $A$ folytonos, ahol

$$\Gamma(A) := \{(x, Ax) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} : \; x \in \mathcal{D}(A)\}$$

és

$$\|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \|x\|_{\mathcal{X}}^p + \|y\|_{\mathcal{Y}}^p \qquad (x \in \mathcal{X},\; y \in \mathcal{Y}\, p \in [1, +\infty))$$

vagy

$$\|(x,y)\|_{\mathcal{X}\times\mathcal{Y}} := \max\{\|x\|_{\mathcal{X}}, \|y\|_{\mathcal{Y}}\} \qquad (x \in \mathcal{X},\; y \in \mathcal{Y}).$$

Bármely normált tér egy alterén értelmezett korlátos, lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész térre a linearitás és a norma megtartásával. Erről szól a

**1.2.7. tétel. (Hahn-Banach-tétel.)** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor tetszőleges $f \in \mathcal{A}^*$ esetén van olyan $F \in \mathcal{X}^*$, hogy

$$\textbf{(1)}\ f \subset F, \quad \text{azaz} \quad F(u) = f(u) \quad (u \in \mathcal{A}) \qquad \text{és} \qquad \textbf{(2)}\ \|F\| = \|f\|.$$

Következésképpen

- az $(L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\cdot\|)$ operátortér pontosan akkor Banach-tér, ha $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ is Banach-tér. Így a $(\mathbb{K}, |\cdot|)$ tér teljessége miatt az $(L(\mathcal{X}, \mathbb{K}), \|\cdot\|)$ tér is teljes, azaz Banach-tér (vö. [6], 578. old. és 624. old).
- ha $\mathcal{X} \neq \{0\}$, akkor bármely $0 \neq u \in \mathcal{X}$ vektorhoz van olyan $f \in \mathcal{X}^*$ funkcionál, amelyre
$$\|f\| = 1 \qquad \text{and} \qquad f(u) = \|u\|$$
(vö. [15], 449. old.)
- bármely véges lineárisan független $\{u_1, \ldots, u_d\} \subset \mathcal{X}$ rendszerhez létezik $\{f_1, \ldots, f_d\} \subset \mathcal{X}^*$ funkcionálok olyan rendszere, hogy
$$\{f_i, u_i\} \qquad (i \in \{1, \ldots, d\})$$
**biortogonális rendszer**:
$$\langle f_i, u_j \rangle = \delta_{ij} := \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \qquad (i, j \in \{1, \ldots, d\}),$$
továbbá az
$$Ax := \sum_{k=1}^{d} \langle f_k, x \rangle u_k \qquad (x \in \mathcal{X})$$
operátor korlátos projekció a $\operatorname{span}\{u_1, \ldots, u_d\}$ altérre (vö. [6], 622. old.).

**1.2.3. definíció.** Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$, ill. $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}^*$ alterek. Az

$$\mathcal{A}^{\perp} := \{f \in \mathcal{X}^* : \ f(u) = 0 \ (u \in \mathcal{A})\} = \{f \in \mathcal{X}^* : \ \langle f, u \rangle = 0 \ (u \in \mathcal{A})\},$$

ill. a

$$\mathcal{B}_{\perp} := \{u \in \mathcal{X} : \ f(u) = 0 \ (f \in \mathcal{B})\} = \{u \in \mathcal{X} : \ \langle f, u \rangle = 0 \ (f \in \mathcal{B})\}$$

altereket az $\mathcal{A}$, ill. a $\mathcal{B}$ altér **annihilátor**ának nevezzük.

Világos, hogy

1. $\mathcal{A}^\perp$, ill. $\mathcal{B}_\perp$ zárt altere $\mathcal{X}^*$-nak, ill. $\mathcal{X}$-nek.
2. ha $\mathcal{X}$ véges-dimenziós, akkor

$$\dim(\mathcal{A}^\perp) = \dim(\mathcal{X}) - \dim(\mathcal{A}).$$

**1.2.8. tétel.** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|)$ normált tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér, akkor a

$$\varphi : \mathcal{A}^\perp \to (\mathcal{X}/\mathcal{A})^*, \qquad \varphi(f)([x]) := f(x) \quad (f \in \mathcal{A}^\perp,\ [x] \in \mathcal{X}/\mathcal{A}),$$

ill. a

$$\psi : \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp \to \mathcal{A}^*, \qquad \psi([f]) := f|_{\mathcal{Y}} \quad ([f] \in \mathcal{X}^*/\mathcal{A}^\perp)$$

leképezések izometrikus izomorfizmusok.

**1.2.9. tétel.** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az

$$A^* f := f \circ A \qquad (f \in \mathcal{Y}^*)$$

operátorra

$$A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*), \qquad \text{továbbá} \qquad \|A^*\|_{L(\mathcal{Y}^*,\mathcal{X}^*)} = \|A\|_{L(\mathcal{X},\mathcal{Y})}.$$

Az 1.2.9. tételbeli $A^*$ operátort az $A$ operátor duálisának nevezzük. A fenti jelölésekkel tehát tehát $A^* : \mathcal{Y}^* \to \mathcal{X}^*$ pontosan akkor **duális operátor**a $A$-nak, ha

$$\boxed{\langle f, Ax\rangle} = f(Ax) = (A^*(f))(x) = \boxed{\langle A^* f, x\rangle} \qquad (x \in \mathcal{X},\ f \in \mathcal{Y}^*).$$

**1.2.8. példa.** Ha

$$(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}}) := (l_{12}, \|\cdot\|_{l_{12}}) \qquad \text{és} \qquad (\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}}) := (l_3, \|\cdot\|_{l_3}),$$

akkor az

$$A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad A(x_n) := \left(\frac{x_n}{\sqrt{n}}\right)$$

operátor duálisa az

$$A^* f = \left(\frac{f_n}{\sqrt{n}}\right) \qquad (f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*)$$

operátor, ahol

$$\mathcal{X}^* = l_{12/11} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y}^* = l_{3/2},$$

hiszen bármely

$$f = (f_n) \in \mathcal{Y}^*$$

esetén

$$A^* f(g) = f(Ag) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{g_n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{\sqrt{n}} g_n \qquad (g \in \mathcal{X}).$$

Az alábbi két példában legyen

$$p \in [1, +\infty), \qquad q := \begin{cases} \frac{p}{p-1} & (p \neq 1), \\ +\infty & (p = 1). \end{cases}$$

**1.2.9. példa.** Ha $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := l_p$, és $B$, ill. $J$ jelöli **balra**, ill. a **jobbra való eltolás** operátorát:

$$B : l_p \to l_p, \quad Bu := (u_{n+1}), \qquad J : l_p \to l_p, \quad Ju := (u_{n-1}),$$

akkor $B, J \in L(\mathcal{X})$, ui. $B$, ill. $J$ triviálisan lineáris, továbbá

$$\|Bu\|_{l_p} = \left(\sum_{n=2}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \quad (u \in l_p),$$

ill.

$$\|Ju\|_{l_p} = \left(0 + \sum_{n=1}^{\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} = \|u\|_{l_p} \qquad (u \in l_p),$$

és bármely

$$v \in \mathcal{X}^* = l_q$$

esetén

$$B^*v(u) = v(Bu) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \cdot u_{n+1} = \sum_{n=2}^{\infty} v_{n-1} \cdot u_n \qquad (u \in \mathcal{X}),$$

azaz

$$B^*v = (0, v_1, v_2, \ldots) = Jv \qquad (v \in l_q).$$

**1.2.10. példa.** Ha $\mathcal{X} := \mathcal{Y} := L^p[0,1]$, továbbá $\varphi \in L^\infty[0,1]$, úgy az

$$A_p u := \varphi u \qquad (u \in L^p[0,1])$$

operátor triviálisan lineáris, ill. duálisa az $A_q$ operátor, hiszen bármely $u \in L^p[0,1]$ és $v \in L^q[0,1]$ esetén

$$(A_p^* v)(u) = \int_0^1 (A_p u)v = \int_0^1 huv = \int_0^1 u(A_q v) = (A_q v)(u).$$

Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, továbbá $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor nyilvánvalóan $\mathcal{N}(A)$ és $\mathcal{R}(A)$ altér $\mathcal{X}$-ben, ill. $\mathcal{Y}$-ban továbbá $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ esetén $\mathcal{N}(A)$ zárt altér (vö. pl. [6]). Az $\mathcal{R}(A)$ altér azonban nem mindig zárt altere $\mathcal{Y}$-nak. Az

$$A : l_\infty \to l_\infty, \qquad Au := \left(\frac{u_n}{n}\right)$$

operátor esetében

– bármely $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, ill. $(u_n), (v_n) \in l_\infty$ esetén

$$A(\alpha(u_n) + \beta(v_n)) = \left(\frac{\alpha u_n + \beta v_n}{n}\right) = \alpha\left(\frac{u_n}{n}\right) + \beta\left(\frac{v_n}{n}\right) = \alpha A(u_n) + \beta A(v_n),$$

azaz $A$ lineáris;

– tetszőleges $u \in l_\infty$ sorozatra

$$\|Au\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\frac{u_n}{n}\right| \le \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n| = \|u\|_\infty,$$

tehát $A$ korlátos és így folytonos is: $A \in L(l_\infty)$ (következésképpen $\mathcal{N}(A)$ zárt);

– ha

$$u_n := (1, \ldots, n, 0, \ldots, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor $(u_n) \in L_\infty$ és a

$$v_n := (1, \ldots, 1, 0 \ldots, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorral $A(u_n) = (v_n)$. Ennélfogva $(v_n) \in \mathcal{R}(A)$ és

$$v_n \longrightarrow v := (1, \ldots, 1, \ldots) \qquad (n \to \infty).$$

Így $v \notin \mathcal{R}(A)$, hiszen $u := A^{-1}v = (1, \ldots, n \ldots) \notin l_\infty$.

Igaz viszont a következő

**1.2.1. tétel.** Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_\mathcal{X})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_\mathcal{Y})$ normált tér. Ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor

1. $\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*)$ és $\overline{\mathcal{R}(A)} = \mathcal{N}(A^*)_\perp$;
2. ha $\mathcal{R}(A)$ zárt altere $\mathcal{Y}$-nak, akkor még

$$\dim((\mathcal{Y}/\mathcal{R}(A))^*) = \dim(\mathcal{R}(A)^\perp) = \dim(\mathcal{N}(A^*))$$

is igaz.

**Biz.**

1. Világos, hogy bármely $x \in \mathcal{X}$ esetén igaz az

$$f \in \mathcal{R}(A)^\perp \iff f(Ax) = A^*f(x) = 0 \iff A^*f = 0 \iff f \in \mathcal{N}(A^*).$$

Továbbá

– $\overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{N}(A^*)_\perp$, hiszen bármely $u \in \mathcal{X}$, ill. $v := Au \in \mathcal{R}(A)$ esetén, ha $f \in \mathcal{N}(A^*)$, akkor

$$f(v) = f(Au) = (A^*f)(u) = 0,$$

ahonnan $v \in \mathcal{N}(A^*)_\perp$ következik;

– $\overline{\mathcal{R}(A)} \supset \mathcal{N}(A^*)_\perp$, hiszen $U := \overline{\mathcal{R}(A)} \subset \mathcal{Y}$ zárt altér, ennélfogva (vö. Hahn-Banach-tétel egyik következménye) bármely $v \notin U$ esetén van olyan $f \in \mathcal{Y}^*$ funkcionál, hogy $f(v) \neq 0$ ($v \in \mathcal{Y}^*$). Így tetszőleges $x \in \mathcal{X}$ vektorra

$$(A^* f)(x) = f(Ax) = 0,$$

azaz $f \in \mathcal{N}(A^*)$. Világos, hogy $f \notin \mathcal{N}(A^*)_\perp$, hiszen ellenkező esetben $f(v) = 0$ lenne. Mindez azt jelenti, hogy $v \notin U$, ahonnan $v \notin \mathcal{N}(A^*)_\perp$ és így

$$\mathcal{N}(A^*)_\perp \subset U = \overline{\mathcal{R}(A)}$$

következik.

2. Az előző állítás következménye. ■

Az 1.2.1. tételbeli állítás következményeként elmondható, hog ha $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ zárt képterű operátor, úgy valamely $Au = v$ egyenlet pontosan akkor oldható meg, ha igaz az

$$A^* f = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad f(v) = 0$$

implikáció.

**1.2.4. definíció.** Valamely $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátort **véges rang**únak nevezünk, ha $\mathcal{R}(A)$ képtere véges dimenziós. Ha $A$ véges rangú, akkor a $\dim(\mathcal{R}(A))$ számot az $A$ operátor **rang**jának nevezzük.

**1.2.11. példa.** Ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$, ill. $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek és $f \in \mathcal{X}^*$, ill. $y \in \mathcal{Y}$, akkor az

$$f \otimes y : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad (f \otimes y)(x) := \langle f, x \rangle y$$

operátor nyilván véges rangú: $\dim(\mathcal{R}(f \otimes y)) = 1$.

Nem nehéz belátni, hogy ha az $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ lineáris operátor esetén $\mathcal{X}$ vagy $\mathcal{Y}$ véges dimenziós, akkor $A$ véges rangú.

Lineáris algebrai megfontolásokra támaszkodva elmondható, hogy egy vektortér minden alterének van direkt kiegészítője. Sőt, ha $\mathcal{X}$ Hilbert-tér és $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altér, akkor

$$\mathcal{X} = \overline{\mathcal{A}} \oplus \mathcal{A}^T.$$

Az ortogonális kiegészítő zárt altér, továbbá $(\mathcal{A}^T)^\perp = \overline{\mathcal{A}}$. Ha $\mathcal{X}$ Banach-tér, akkor bármely zárt $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ altérnek van ugyan direkt kiegészítője, azonban ez a kiegészítő altér nem feltétlenül zárt. Így pl. a $c_0 \subset l_\infty$ altérnek nincsen zárt direkt kiegészítője $l_\infty$-ben, ill. a

$$\mathfrak{C}[0,1] \subset L^\infty[0,1]$$

altérnek sincsen zárt direkt kiegészítője (vö. pl. [19, 11]).

**1.2.2. tétel.** Legyen $\mathcal{X}$ Banach-tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ pedig véges dimenziós altér: $\dim(\mathcal{A}) < \infty$. Ekkor $\mathcal{A}$-nak van $\mathcal{X}$-beli zárt direkt kiegészítője, azaz alkalmas zárt $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altér esetén

$$\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$$

teljesül.

**Biz.** Mivel $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ véges dimenziós, ezért alkalmas $d \in \mathbb{N}$ esetén $\mathcal{A}$-ban van $d$-elemű bázis: $b_1, \ldots, b_d$. Így alkalmas $\alpha_1, \ldots, \alpha_l \in \mathbb{K}$ esetén

$$u = \alpha_1 b_1 + \ldots \alpha_d b_d.$$

Jelölje $f_1, \ldots, f_d$ a megfelelő Auerbach-bázist (vö. [10], 70. old.), azaz legyen $\{f_1, \ldots, f_d\} \subset \mathcal{A}^*$ olyan, amelyre

$$f_k(b_l) = \delta_{kl} \qquad (k, l \in \{1, \ldots, d\},$$

ahol $\mathcal{A}^*$ jelöli az $\mathcal{A}$ altér duálisát. Ekkor (vö. Hahn-Banach-tétel harmadik következménye) alkalmas $f_1, \ldots, f_d$ ($\mathcal{X}^*$-beli) funkcionálok esetén az

$$Ax := \sum_{k=1}^{d} \langle f_k, x \rangle u_k \qquad (x \in \mathcal{X})$$

operátor korlátos projekció. Ha most $\mathcal{B} := \mathcal{N}(A)$, akkor $A$ folytonossága következtében $\mathcal{B}$ zárt altér $\mathcal{X}$-ben, továbbá $\mathcal{B} \cap \mathcal{A} = \{0\}$, hiszen ellenkező esetben valamely $v \in \mathcal{B} \cap \mathcal{A}$ esetén $v \neq 0$, ahonnan

$$v \in \mathcal{B} = \mathcal{N}(A),$$

azaz $A(v) = 0$ következik, ez pedig $v \in \mathcal{X}$ miatt azt jelenti, hogy

$$0 = A(v) = vz,$$

ami ellentmond annak, hogy $v \neq 0$. Mivel bármely $u \in \mathcal{B}$ esetén $Au \in \mathcal{B}$, ill.

$$A(u - Pu) = Au - A^2 u = Au - Au = 0$$

következtében $u - Au \in \mathcal{B}$, ezért

$$u = (u - Au) + Au$$

a kívánt felbontás. ■

Ha tehát az $\mathcal{X}$ Banach-tér, ill. $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ zárt altér esetén $\operatorname{codim}(\mathcal{A}) < +\infty$, akkor $\mathcal{A}$-nak van $\mathcal{X}$-beli zárt direkt kiegészítője, ui. ha a $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$ altérre $\mathcal{X} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$, akkor

$$\dim(\mathcal{B}) = \operatorname{codim}(\mathcal{A}) < +\infty,$$

így $\mathcal{B}$ zárt $\mathcal{X}$-ben.

## 1.3. Kompakt operátorok

A Fredholm-operátorok konstrukciójához érdemes feleleveníteni a kompakt operátorok fogalmát és néhány, a gyakorlat szempontjából hasznos tulajdonságukat. A következők során $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\cdot\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\cdot\mathcal{Y}})$ normált terek.

**1.3.1. definíció.** Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált terek esetén az $A \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátort **kompakt**nak nevezzük, ha bármely $H \subset \mathcal{X}$ korlátos halmaz $A[H] \subset \mathcal{Y}$ képe prekompakt halmaz. Ha az $A$ operátor még folytonos is, akkor $A$-t **teljesen folytonos**nak nevezzük.

**1.3.1. példa.** A

$$B : l_2 \to l_2, \qquad Bu := (u_{n+1})$$

operátor nem kompakt, ui. az

$$e_n := (\delta_{jn})_{j\in\mathbb{N}} \in l_2 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat korlátos, és az $(Ae_n)$ sorozatnak nincsen Cauchy-féle, így konvergens részsorozata, hiszen

$$Ae_n = e_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}) \qquad \text{és így} \qquad \|Ae_m - Ae_n\|_2 = 2 \quad (m \neq n).$$

A kompakt, lineáris $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ operátorok halmazának jelölésére a

$$K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \{A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ A \text{ kompakt}\}$$

szimbólumot használjuk, az $\mathcal{X} = \mathcal{Y}$ esetben $K(\mathcal{X}, \mathcal{X})$-et pedig $K(\mathcal{X})$-szel rövidítjük. Belátható (vö. [6], 788. old), hogy $K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \subset L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, továbbá (vö. [6], 790. old.), hogy minden véges rangú operátor kompakt.

Belátható (vö. [6], 790-793. old.), hogy minden véges rangú, folytonos lineáris operátor kompakt, továbbá ha valamely korlátos lineáris operátor tetszőleges pontossággal közelíthető véges rangú operátorokkal az indukált operátornormában, akkor a szóban forgó operátor kompakt.

Még tegyünk egy megállapítást a kompakt operátorok duálisával kapcsolatban.

**1.3.1. tétel.** (**Schauder**). Legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér, $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, ekkor

$$A \in K(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad A^* \in K(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*),$$

azaz A pontosan akkor kompakt, ha az $A^*$ duális operátor kompakt.

**Biz.** Vö. [6], 799-801. old. ■

## 1.4. Fredholm-operátorok

Ismeretes, hogy ha $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $A \in \mathfrak{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, úgy az $A$ (lineáris) operátor pontosan akkor izomorfizmus, ha injektív és szürkjektív, azaz ha

$$\mathcal{N}(A) = \{0\} \qquad \text{és} \qquad A[\mathcal{X}] = \mathcal{Y}$$

teljesül. Ez utóbbi azt jelenti, hogy $\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}] = \{0\}$. Így az $A$ lineáris operátor izomorfiája azzal egyenértékű, hogy

$$\dim(\mathcal{N}(A)) = 0 = \dim(\mathcal{Y}/A[\mathcal{X}]).$$

**1.4.1. definíció.** Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-tér esetén azt mondjuk

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

**Fredholm-operátor** (jelben $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$), ha

$$n := \dim \mathcal{N}(A) = \dim A^{-1}[\{0\}] < +\infty \qquad \text{és} \qquad r := \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = \dim \mathcal{Y}/A[X] < +\infty,$$

továbbá az $n - r$ számot az $A$ **index**ének nevezzük: $\operatorname{ind}(A) := n - r$.

**1.4.1. példa.** Ha $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ véges dimenziós: $\dim \mathcal{X} =: m \in \mathbb{N}$, $\dim \mathcal{Y} =: n \in \mathbb{N}$, akkor $A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ $(m - n)$-indexű Fredholm-operátor, ui.

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}(A) &= \dim \mathcal{N}(A) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = \\ &= (\dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{R}(A)) - (\dim \mathcal{Y} - \dim \mathcal{R}(A)) = \\ &= \dim \mathcal{X} - \dim \mathcal{Y} = m - n. \end{aligned}$$

**1.4.2. példa.** A balra való eltolás

$$B : l_\infty \to l_\infty, \qquad (Bu)_n := u_{n+1}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(B) = e_1 \qquad \text{and} \qquad \mathcal{R}(B) = l_\infty$$

ennélfogva $\dim \mathcal{N}(B) = 1$, $\operatorname{codim} \mathcal{R}(B) = 0$, ami azt jelenti, hogy $\operatorname{ind}(B) = 1$.

**1.4.3. példa.** A jobbra való eltolás

$$J : l_\infty \to l_\infty, \qquad (Ju)_n := \begin{cases} 0 & (n = 0), \\ \\ u_{n-1} & (n > 0) \end{cases}$$

operátorára

$$\mathcal{N}(J) = \{0\} \qquad \text{és} \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(J) = \dim \mathcal{N}(B) = 1$$

és így

$$\operatorname{ind}(J) = -1$$

/$\mathcal{R}(J)$ zárt, hiszen tartalmaz minden olyan $v = (v_1, v_2, v_2, \ldots) \in l_\infty$ sorozatot, amelyre $v_1 = 0$/.

**1.4.4. példa.** Ha $\mathcal{X} := \mathfrak{C}^1_{\mathbb{R}}[a, b]$ és $\mathcal{Y} := \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$, ill.

$$\|u\|_{\mathcal{X}} := \max\{\|u\|_\infty, \|u'\|_\infty\} \qquad (u \in \mathcal{X}) \qquad \text{és} \qquad \|\cdot\|_{\mathcal{Y}} := \|\cdot\|_\infty,$$

akkor az

$$Au := u' \qquad (x \in \mathcal{X}).$$

operátorra

$$A \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) \cap \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \qquad \operatorname{ind}(A) = 1,$$

hiszen

- bármely $v \in \mathfrak{C}_{\mathbb{R}}[a, b]$ esetén az $u' = v$ egyenletnek van $\mathfrak{C}^1_{\mathbb{R}}[a, b]$-ban megoldása:

  $$u(x) = \int_a^x v(t)\,\mathrm{d}t \qquad (t \in [a, b])$$

  így $\mathcal{R}(A) = \mathcal{Y}$, ahonnan $\operatorname{codim} \mathcal{R}(A) = 0$ következik;
- továbbá $v = 0$ esetén $u = const$, és így

  $$\dim \mathcal{N}(A) = 1.$$

Belátható (vö. [20], 366-367. old.), hogy a Fredholm-operátorok rendelkeznek az alábbi tulajdonságokkal.

1. Ha $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, $\operatorname{ind}(A) = 0$, továbbá $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, akkor $A$ **invertálható**, azaz

   $$A \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) := \left\{T \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y}) : \ \exists T^{-1} \in L(\mathcal{Y}, \mathcal{X})\right\}.$$

2. Bármely $A \in \mathcal{K}(X)$operátorra $I - A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ és $\operatorname{ind}(A - I) = 0$.

3. Ha $\mathcal{R}(A) \subset \mathcal{Y}$ zárt altér /$A$ folytonossága következtében $\mathcal{N}(A)$ is zárt/, akkor alkalmas $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ zárt alterekkel
$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0 \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$
továbbá
$$\dim(\mathcal{Y}_0) = \operatorname{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{codim}(\mathcal{X}_0) = \dim(\mathcal{N}(A)) < +\infty.$$

4. Ha $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, akkor az $A^*$ duális operátorra is $A^* \in L(\mathcal{Y}^*, \mathcal{X}^*)$, továbbá
$$\dim \mathcal{N}(A^*) = \operatorname{codim}(\mathcal{R}(A)) < +\infty, \qquad \text{és} \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(A^*) = \dim \mathcal{N}(A) < +\infty.$$

5. Az $A \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ pontosan akkor bijektív, ha $\operatorname{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$. Így a Banach-féle homeomorfia-tétel következményeként tetszőleges $b \in \mathcal{Y}$ esetén az $Ax = b$ egyenletnek pontosan akkor van egyértelmű megoldása, ha $\operatorname{ind}(A) = \dim \mathcal{N}(A) = 0$ teljesül.

A fenti $\mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X}$, ill. $\mathcal{Y}_0 \subset \mathcal{Y}$ zárt alterek menti
$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{N}(A), \qquad \text{ill.} \qquad Q : \mathcal{Y} \to \mathcal{R}(A)$$
folytonos projekciók és a kiegészítő alterek az alábbi módnon konstruálhatók meg (vö. [20], 369. old.). Válasszunk egy-egy bázist $\mathcal{N}(A)$-ban és $\mathcal{N}(A^*)$-ban:
$$\{x_1 \ldots, x_n\} \subset \mathcal{N}(A), \qquad \{g_1 \ldots, g_m\} \subset \mathcal{N}(A^*),$$
majd legyenek
$$f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{X}^* \qquad \text{és} \qquad y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{Y}$$
olyan funkcionálok, amelyekre
$$\langle f_i, x_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \ldots, n\}) \qquad \text{és} \qquad \langle g_i, y_j \rangle = \delta_{i,j} \quad (i, j \in \{1, \ldots, m\})$$
teljesül. Ez a korábban említettek szerint megtehető. Így az
$$\{f_j, x_j\}, \qquad \text{ill.} \qquad \{g_j, y_j\}$$
biortogonális rendszerekkel a
$$Px := \sum_{k=1}^{n} \langle f_k, x \rangle x_k \quad (x \in \mathcal{X}) \qquad \text{és a} \qquad Qy := y - \sum_{l=1}^{m} \langle g_l, y \rangle y_l \qquad (y \in \mathcal{Y})$$
operátorok olyan projekciók, amelyek folytonosak (vö. zárt gráfra vonatkozó tétel), továbbá

1. $I - P$ az $\mathcal{X}$-ről az $\mathcal{X}_0 = (I - P)[\mathcal{X}]$ altérre
2. $I - Q$ pedig $\mathcal{Y}$-ról az $\mathcal{Y}_0 = (I - Q)[\mathcal{Y}]$ altérre

való projekció.

## 1.5. Az implicit függvényre vonatkozó tétel

A továbbiakban legyen $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ normált tér, $\Omega \subset \mathcal{X}$, és $\Lambda \subset \mathbb{R}$ egy-egy nyílt halmaz.

**1.5.1. tétel.** Ha $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ és $z_0 \in \mathcal{Y}$, továbbá az $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$ leképezés teljesíti az

$$\textbf{(i)} \quad F(x_0, \lambda_0) = z_0 \qquad \text{és} \qquad \textbf{(ii)} \quad \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

feltételeket, akkor alkalmas $\exists\, \delta > 0$ esetén van olyan

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \to K_\varepsilon(x_0) \quad /\phi \in \mathfrak{C}^k/$$

leképezés (**implicit függvény**), amelyre

- $\phi(\lambda_0) = x_0$,
- a $K_\varepsilon(x_0) \times K_\delta(\lambda_0)$ környezetben $\qquad F(x, \lambda) = z_0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x = \phi(\lambda),$
- $\phi'(\lambda_0) = -(\partial_1 F(x_0, \lambda_0))^{-1} \circ \partial_2 F(x_0, \lambda_0)$

teljesül.

Megjegyezzük, hogy a fenti tétel „konstruktív”, ui. a

$$\phi : K_\delta(\lambda_0) \to K_\varepsilon(x_0)$$

függvény a következő numerikus (módosított Newton-)módszer eredményeként adódik (vö. [5], 523. old., [20], 151. old.):

$$\phi_1(\lambda) := x_0, \qquad \phi_{n+1}(\lambda) := \phi_n(\lambda) - [\partial_1 F(\phi_0, \lambda_0)]^{-1} \circ \{F(\phi_n(\lambda), \lambda) - z_0\}$$
$$(n \in \mathbb{N};\ \lambda \in K_\delta(\lambda_0)).$$

**1.5.1. példa.** Ha $F_n : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$F_1(x, \lambda) := x^2 - \lambda, \qquad F_2(x, \lambda) := x^2 - \lambda^2, \qquad F_3(x, \lambda) := x^3 - \lambda.$$

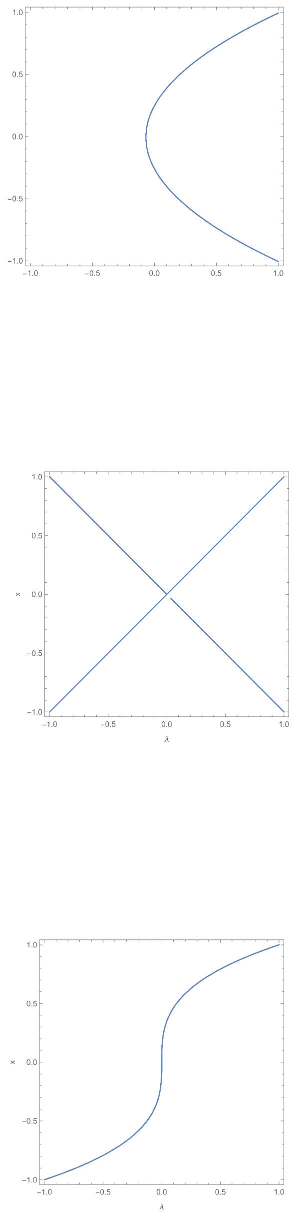
akkor

$$F_n(0{,}0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 F_n(0{,}0) = 0,$$

következésképpen nem teljesül az 1.5.1. tételben a **(ii)** feltétel (vö. (1.5.1) ábra). Nem csoda, hogy az

$$F_n(x, \lambda) = 0$$

egyenletből nem fejezhető ki $x$ a $\lambda$ (sima) függvényeként.




1.5.1. ábra. Az $F_n^{-1}[\{0\}] \subset \mathbb{R}^2$ ősképek alakja.

Előfordulhat, hogy

$$\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

de a $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ operátor szürjektív. Ebben az esetben az implicit függvényre vonatkozó tétel alábbi variánsa igazolható.

**1.5.1. tétel.** Legyen $k \in \mathbb{N}$ $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$, $z_0 \in \mathcal{Y}$. Ha az $F \in \mathfrak{C}^k(\Omega \times \Lambda, \mathcal{Y})$ függvényre
**(i)** $F(x_0, \lambda_0) = z_0$ és
**(ii)** $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ szürjektív úgy, hogy alkalmas $P \in L(\mathcal{X})$ projekcióval

$$\mathcal{X} = \mathcal{R}(P) \oplus \mathcal{N}(P) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)),$$

akkor alkalmas $\rho > 0$ szám, ill.

$$U := K(x_0) \subset \mathcal{R}(P) \qquad \text{és} \qquad V := K(z_0) \subset \mathcal{N}(P)$$

környezetek esetén pontosan egy olyan

$$\phi : U \times K_\rho(\lambda_0) \to V, \qquad \phi \in \mathfrak{C}^k$$

függvény van, amelyre

$$F(x_0 + \xi + \phi(\xi, \lambda), \lambda) = z_0 \qquad\qquad ((\xi, \lambda) \in U \times K_\rho(\lambda_0))$$

teljesül.

**Biz.** Legyen $\mathcal{X} =: \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$, ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{R}(P) \qquad \text{és} \qquad \mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(P).$$

Ekkor az

$$L := \partial_1 F(x_0, \lambda_0)|_{\mathcal{X}_2} : \mathcal{X}_2 \to \mathcal{Y}$$

operátor bijektív, ui. ha valamely $\eta \in \mathcal{X}_2$ vektorra $L\eta = 0$, akkor $\eta \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0, \lambda_0)) = \mathcal{X}_1$, ennélfogva $\eta = 0$. Legyen most

$$G(\eta, \xi, \lambda) := F(x_0 + \xi + \eta, \lambda) \qquad (\xi \in \mathcal{X}_1,\ \eta \in \mathcal{X}_2 :\ x_0 + \xi + \eta \in \Omega,\ \lambda \in \Lambda).$$

Ekkor

$$G(0{,}0, \lambda_0) = z_0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 G(0{,}0, \lambda) = \partial_1 F(x_0, \lambda)|_{\mathcal{X}_2} = L \in GL(\mathcal{X}_2, \mathcal{Y}),$$

következésképpen $G$-re teljesülnek az implicit függvényre vonatkozó ttétel feltételei: a

$$G(\eta, \xi, \lambda) = z_0$$

egyenletből az első változó kifejezhető a második, ill. a harmadik változó függvényeként: $\eta = \phi(\xi, \lambda)$. ■

# 2. fejezet

# Bifurkációk

Ebben a bevezetjük a bifurkáció fogalmát, majd példákon keresztül szemléltetünk néhány egyszerűbb esetet.

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek esetén legyen $\emptyset \neq \Omega \subset \mathcal{X}$ és $\emptyset \neq \Lambda \subset \mathbb{R}$ az $x_0 \in \mathcal{X}$ és a $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ egy-egy környezete, majd tegyük fel, hogy az

$$F : \Omega \times \Lambda \to \mathcal{Y}, \qquad F \in \mathfrak{C}^2$$

leképezésre

$$F(x_0, \lambda_0) = 0 \tag{2.0.1}$$

teljesül. Feladatunk az $(x_0, \lambda_0)$ pont egy környezetében az

$$S := F^{-1}[\{0\}] = \{(x, \lambda) \in \Omega \times \Lambda : \; F(x, \lambda) = 0\},$$

**megoldáshalmaz** vizsgálata, ill. a $\lambda$ **paraméter**től függő

$$S_\lambda := \{x \in \mathcal{X} : \; (x, \lambda) \in S\} \tag{2.0.2}$$

halmaz szerkezetének feltárása.

**2.0.1. definíció.** Azt mondjuk, hogy a $(x_0, \lambda_0)$ pár **bifurkációs pont**, ill. $\lambda_0$ **kritikus érték**, amelynél **bifurkáció lép fel**, ha $(x_0, \lambda_0)$ tetszőleges környezetében az

$$F(x, \lambda) = 0 \tag{2.0.3}$$

egyenlet megoldható, pontosabban alkalmas

$$(u_n, \lambda_n), (v_n, \lambda_n) \in \Omega \times \Lambda \quad (u_n \neq v_n) \qquad (n \in \mathbb{N}) :$$

sorozatra

$$F(u_n, \lambda_n) = 0 = F(v_n, \lambda_n) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, \lambda_n) = (x_0, \lambda_0) = \lim_{n\to\infty} (v_n, \lambda_n).$$

**2.0.1. példa.** A $(0{,}0)$ pár az

$$F_\pm : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad F_\pm(x,\lambda) := \pm x^2 + \lambda.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **nyereg-csomó-bifurkáció**). A $\lambda\in\mathbb{R}$ paramétertől függően a szub-, ill. a szuperkritikus esetben a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_\lambda = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda},\sqrt{-\lambda}\} & (\lambda<0),\\ \{0\} & (\lambda=0),\\ \emptyset & (\lambda>0); \end{cases} \qquad \text{ill.} \qquad S_\lambda = \begin{cases} \emptyset & (\lambda<0),\\ \{0\} & (\lambda=0),\\ \left\{-\sqrt{\lambda},\sqrt{\lambda}\right\} & (\lambda>0). \end{cases}$$

**2.0.2. példa.** A $(0{,}1)$ pár az

$$F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad F(x,\lambda) := \lambda x(1-x) - x.$$

leképezés bifurkációs pontja (**transzkritikus bifurkáció**). A $\lambda\in\mathbb{R}$ paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_\lambda = \begin{cases} \{0\} & (\lambda\in\{0;1\}),\\ \{0{,}1-\frac{1}{\lambda}\} & (\lambda\in\mathbb{R}\backslash\{0;1\}). \end{cases}$$

**2.0.3. példa.** A $(0{,}0)$ pár az

$$F_\pm : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}, \qquad F_\pm(x,\lambda) := \lambda x \pm x^3.$$

leképezés bifurkációs pontja (**szub-** /(+)/, ill. **szuperkritikus** /(-)/ **vasvilla-bifurkáció**). A $\lambda\in\mathbb{R}$ paramétertől függően a (2.0.2)-beli halmaz a következő alakú:

$$S_\lambda = \begin{cases} \{-\sqrt{-\lambda},0,\sqrt{-\lambda}\} & (\lambda<0),\\ \{0\} & (\lambda\geq 0), \end{cases} \qquad \text{ill.} \qquad S_\lambda = \begin{cases} \{0\} & (\lambda\leq 0),\\ \left\{-\sqrt{\lambda},0,\sqrt{\lambda}\right\} & (\lambda>0). \end{cases}$$

**2.0.4. példa.** Ha

$$A\in L(\mathcal{X}), \qquad \mu\in\mathbb{R}: \quad \mathcal{N}(A-\mu I)\neq\{0\},$$

akkor a $(0,\mu)$ pár az

$$F(x,\lambda) := Ax - \lambda x \qquad ((x,\lambda)\in\Omega\times\Lambda)\,,$$

leképezés bifurkációs pontja, hiszen bármely $\varepsilon > 0$ esetén van olyan $u\in\mathcal{X}$, $\|u\|=\varepsilon$ vektor, amelyre $Au=\mu u$ (**lineáris sajátérték-feladat**).

**2.0.5. példa.** Ha valamely az $(x, y)$-síkon lévő $L$ hosszúságú **rugalmas szál** egyik végét rögzítjük az origóban, a másik vége szabadon mozoghat, és az $x$-tengely mentén hat rá erő, akkor a rugalmas szál mozgását leíró peremérték-feladat a következő

$$\vartheta''(s) + \lambda \sin(\vartheta(s)) = 0 \quad (s \in [0, L]), \qquad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0,$$

ahol $\vartheta(s)$ jelöli a szál és az $x$-tengely közötti szöget az $(x(s), y(s))$, $s \in [0, L]$ pontban. A $\sin(\vartheta) \approx \vartheta$ egyszerűsítő feltevéssel lineáris peremérték-feladatot kapunk:

$$\vartheta''(s) + \lambda\vartheta(s) = 0 \quad (s \in [0, L]), \qquad \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0.$$

Látható, hogy az iménti peremérték-feladat

$$\vartheta(s) := 0 \quad (s \in [0, L])$$

triviális megoldásából a $\lambda$ paraméter változásával végtelen sok megoldás „bifurkálódik”:

$$\vartheta_n(s) := \gamma \cos(\sqrt{\lambda_n} s) \qquad \left(n \in \mathbb{N}_0,\ 0 \neq \gamma \in \mathbb{R},\ \lambda_n := \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\right).$$

A rugalmas szálra vonatkozó feladat absztrakt megfogalmazása a következő. Határozzuk meg az

$$F(\vartheta, \lambda) = 0$$

egyenlet bifurkációs pontjait, ahol

$$F : \mathcal{X} \times \mathbb{R} \to \mathcal{Y}, \qquad F(\vartheta, \lambda) := \vartheta'' + \lambda \sin(\vartheta),$$

ill.

$$\mathcal{X} := \left\{\vartheta \in \mathfrak{C}^2[0, L] :\ \vartheta'(0) = \vartheta'(L) = 0\right\}, \qquad \|\vartheta\|_{\mathcal{X}} := \max\left\{\|\vartheta\|_\infty, \|\vartheta'\|_\infty, \|\vartheta''\|_\infty\right\}$$

és

$$\mathcal{Y} := \mathfrak{C}[0, L], \qquad \|\vartheta\|_{\mathcal{Y}} := \|\vartheta\|_\infty.$$

Az alábbiakban a bifurkáció fellépésének szükséges feltételét fogalmazzuk meg.

**2.0.1. tétel.** Ha az $(x_0, \lambda_0) \in \Omega \times \Lambda$ pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek, akkor $F$ első változó szerinti Fréchet-driváltja nem invertálható: $\partial_1 F(x_0, \lambda_0) \notin GL(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$.

**Biz.** H $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$ nem invertálható operátor (nincs folytonos inverze), akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében bármely $\lambda_0 \neq \lambda \in \Lambda$ esetén az $x$ kifejezhető $\lambda$ függvényeként, azaz $(x_0, \lambda_0)$ nem lehet bifurkációs pont. ■

**2.0.6. példa. (Lineáris sajátérték-feladat).** Ha $A \in L(\mathcal{X})$ és $F(x, \lambda) :\equiv Ax - \lambda x$, akkor – mint ahogy azt fentebb láttuk – az $A$ operátor tetszőleges sajátértéke esetén a $(0, \mu)$ pár bifurkációs pontja a (2.0.3) egyenletnek. Nem csoda tehát, hogy

$$\partial_1 F(0, \mu) = A - \mu I \notin GL(\mathcal{X}).$$

**2.0.7. példa. (Nemlineáris sajátérték-feladat).** Let $\mathcal{Y} = \mathcal{X}$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $0 \in \Omega$ és tegyük fel, hogy az $f \in \mathfrak{C}^1(\Omega, \mathcal{X})$ függvényre $f(0) = 0$. Ekkor az

$$f(x) = \mu x$$

nemlineáris sajátérték-feladat az

$$F(x, \lambda) :\equiv f(x) - \lambda x$$

leképezés segítségével írható le. Világos, hogy a $(0, \mu)$ pár megoldása az $f(x) - \lambda x = 0$ egyenletnek. Ha $(0, \mu)$ bifurkációs pont, akkor a fentiekből $\mu \in \sigma(f'(0))$ következik, hiszen

$$\partial_1 F(0, \mu) = f'(0) - \mu I.$$

Megjegyezzük, hogy a $\partial_1 F(x_0, \lambda_0)$ operátor nem invertálható volta még nem elégséges a bifurkáció fellépéséhez, mint ahogy azt az alábbi példa is mutatja.

**2.0.8. példa.** Ha $\mathcal{X} = \mathbb{R}^2$, $\Lambda = \mathbb{R}$, $\mathcal{Y} := \mathbb{R}^2$, továbbá

$$F(x, y, \lambda) := (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3)),$$

akkor

$$\partial_{(x,y)} F(0,0,1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin GL(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2).$$

A $(0,0,1)$ pár nem bifurkációs pontja $F$-nek, ui. az

$$(0,0) = F(x, y, \lambda) = (x - \lambda(x - y^3), y - \lambda(y + x^3))$$

egyenlőség első komponensét $y$-nal, a másodikat $(-x)$-szel szorozva azt kapjuk, hogy

$$(0,0) = (xy - \lambda(yx - y^4), -xy + \lambda(yx + x^4)).$$

Az iménti két egyenlőség összeadásával $0 = \lambda(x^4 + y^4)$ adódik, ami azt jelenti, hogy bármely $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén $F(x, y, \lambda) = (0,0)$, azaz $(x, y) = (0,0)$.

# 3. fejezet

# A Ljapunov-Schmidt-redukció

Ebben a fejezetben egy olyan módszert mutatunk be, amelynek segítségével egy végtelen dimenziós feladatatot véges dimenziósra tudunk redukálni. A „lényeges” koordinátákra való vetítéssel vezetjük vissza a (2.0.3) végtelen dimenziós egyenletrendszert véges dimenziós egyenletrendszerre, az ún. **bifurkációs egyenlet**re.

Adott $(\mathcal{X}, \|\cdot\|_{\mathcal{X}})$ és $(\mathcal{Y}, \|\cdot\|_{\mathcal{Y}})$ Banach-terek esetén legyen

$$A := \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in \mathcal{F}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}),$$

ill. tegyük fel, hogy a (2.0.3) egyenletnek van triviális megoldása, azaz (2.0.1) teljesül. Világos, hogy ha $A$ invertálható operátor, akkor az implicit függvényre vonatkozó tétel alkalmazásával a (2.0.3) egyenletet meg tudjuk oldani: az (2.0.3) egyenletnek az $(x_0, \lambda_0)$ pont egy környezetében van nemtriviális megoldása. Igen gyakori azonban az az eset, amikor az $A$ operátor nem invertálható. Ekkor, mint ahogy a következőkben látni fogjuk, néhány változótól eltekintve a megoldás nem reménytelen.

Mivel $A$ Fredholm-operátor, ezért $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ felbontható direkt kiegészítő alterekre:

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{X}_0, \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(A),$$

ahol a $P \in L(\mathcal{X})$, $Q \in L(\mathcal{Y})$ ún. **Ljapunov-Schmidt-projekció**kra

$$P : \mathcal{X} \to \mathcal{N}(A) \qquad \text{és} \qquad Q : \mathcal{Y} \to \mathcal{R}(A),$$

ill. alkalmas

$$x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{X}; \quad y_1, \ldots, y_m \in \mathcal{Y}$$

lineárisan független vektorok esetén

$$\mathcal{N}(A) = \text{span}\{x_1 \ldots, x_n\} \qquad \text{és} \qquad (I - Q)[\mathcal{Y}] = \text{span}\{y_1 \ldots, y_m\}.$$

**3.0.1. tétel.** Tetszőleges $x \in \Omega$ vektornak a fenti projekciókkal való

$$x = x_0 + v + w$$

felbontása esetén, ahol $v \in \mathcal{N}(A)$ és $w \in \mathcal{X}_0$ a (2.0.3) egyenlet egyenértékű a

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0 \qquad \text{és} \qquad (I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0. \tag{3.0.1}$$

egyenletekből álló rendszerrel.

**Biz.**

**1. lépés**. Világos, hogy a (2.0.3), azaz az $F(x, \lambda) = 0$ egyenlet következménye

$$Q \circ F(x, \lambda) = 0 \qquad \text{és} \qquad (I - Q) \circ F(x, \lambda) = 0.$$

**2. lépés**. Ha pedig (3.0.1) teljesül, akkor nyilvánvalóan

$$(I - Q) \circ F(x, \lambda) = Q \circ F(x, \lambda)$$

is igaz, így

$$Q \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{R}(A), \qquad \text{és} \qquad (I - Q) \circ F(x, \lambda) \in \mathcal{Y}_0,$$

ahonnan $\mathcal{R}(A) \cap \mathcal{Y}_0 = \{0\}$ figyelembe vételével $F(x, \lambda) = 0$ következik. ■

Így a (2.0.3) egyenlet helyett külön-külön kell megoldanunk a végtelen dimenziós

$$Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0,$$

ill. a véges dimenziós

$$(I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) = 0$$

egyenletet. A fenti dimenzió végtelen, illetve véges voltát az indokolja, hogy a $v \in \mathcal{N}(A)$ vektor „végesen generált”, a $w \in \mathcal{X}_0$ vektor pedig nem. Jelölje $U \subset \mathbb{R}^n$ halmaz a 0 egy környezetét, ekkor a 1.5.1. tételt a

$$G : \mathcal{N}(A) \times U \times \Lambda \to \mathcal{R}(Q), \qquad G(w, s, \lambda) := Q \circ F\left(x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + w, \lambda\right),$$

függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\partial_1 G(0{,}0, \lambda_0) = A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q)).$$

Ennélfogva

$$w = \phi(s, \lambda),$$

ahol a

$$\phi : S \times \Lambda_0 \to \mathcal{X}_0 \qquad \text{függvényre} \qquad \phi(0, \lambda_0) = 0$$

és

$$Q \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s,\lambda), \lambda \right) = 0 \qquad ((s,\lambda) \in S \times \Lambda_0),$$

ahol $S \subset \mathbb{R}^n$, ill. $\Lambda_0 \subset \Lambda$ egy-egy, a 0-t, ill. $\lambda_0$-at tartalmazó konvex, nyílt halmaz.

**3.0.2. tétel.** A fenti $\phi$ függvényre $\partial_1 \phi(0,\lambda_0) = 0$ teljesül.

**Biz.** Ha deriváljuk az

$$Q \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s,\lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az $s_k$ változók szerint, akkor $s = 0$-t, ill. $\lambda = \lambda_0$-t helyettesitve az $x_k \in \mathcal{N}(\partial_1 F(x_0,\lambda_0))$ vektorral azt kapjuk, hogy

$$0 = Q \circ \partial_1 F(x_0,\lambda_0)[x_k + \partial_{s_k}\phi(0,\lambda_0)] = Q \circ \partial_1 F(x_0,\lambda_0)\partial_{s_k}\phi(0,\lambda_0).$$

Így $A|_{\mathcal{X}_0} \in GL(\mathcal{X}_0, \mathcal{R}(Q))$ következtében

$$\partial_{s_k}\phi(0,\lambda_0) = 0 \quad (k \in \{1,\ldots,n\}),$$

ennélfogva $\partial_1\phi(0,\lambda_0) = 0$. ■

Így tehát a (2.0.3) egyenlet helyett egy $m$ egyenletből álló

$$f(s,\lambda) = 0, \tag{3.0.2}$$

rendszert, ún. **bifurkációs egyenlet**et kell megoldanunk, ahol az $n$-, pontosabban $(n+$ $+1)$-változós $f$ függvényre

$$f = (f_1,\ldots,f_m), \qquad f_l : S \times \Lambda_0 \to \mathbb{R}, \qquad f_l \in \mathfrak{C}^k \quad (l \in \{1,\ldots,m\})$$

és

$$\sum_{l=1}^{m} f_l(s,\lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s,\lambda), \lambda \right)$$

teljesül. Világos, hogy ez a függvény deriválható, továbbá igaz a

**3.0.3. tétel.** A bifurkációs egyenletet definiáló $f$ függvényre $\partial_1 f(0,\lambda_0) = 0$ teljesül.

**Biz.** Ha deriváljuk a

$$\sum_{l=1}^{m} f_l(s,\lambda) y_l := (I - Q) \circ F \left( x_0 + \sum_{k=1}^{n} s_k x_k + \phi(s,\lambda), \lambda \right) \equiv 0$$

egyenlőség mindkét oldalát az $s_k$ változók szerint, akkot $s = 0$-t, ill. $\lambda = \lambda_0$-t helyettesítve tetszőleges $k \in \{1,\ldots,n\}$ esetén azt kapjuk

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{l=1}^{m} \partial_{s_k} f_l(s,\lambda) y_l = (I-Q) \circ \partial_1 F(x_0,\lambda_0)[x_k + \partial_{s_k}\phi(0,\lambda_0)] = \\ &= (I-Q) \circ \partial_1 F(x_0,\lambda_0) x_k + (I-Q) \circ \partial_1 F(x_0,\lambda_0)\partial_{s_k}\phi(0,\lambda_0) = \\ &= 0 + 0 = 0. \quad ■ \end{aligned}$$

# 4. fejezet

# Alkalmazások

Az alábbiakban a Ljapunov-Schmidt módszert fogjuk használni peremérték-feladatok megoldhatóságának vizsgálatára.

## 4.1. Egy elsőrendű peremérték-feladat

Ebben a pontban adott $\lambda \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, ill.

$$f := (f_1, \ldots, f_n) : [0,1] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

függvény esetén az

$$\dot{x}(t) = \lambda f(t, x(t)) \quad (t \in (0,1)), \qquad x(0) = x(1) \tag{4.1.1}$$

peremérték-feladat megoldhatóságának vizsgálatával foglalkozunk: feltételeket adunk meg a peremérték-feladat megoldhatóságára.

**4.1.1. tétel.** Tegyük fel, hogy $f$ folytonos

$$\partial_j f_i \in \mathfrak{C} \qquad (i, j \in \{1, \ldots, n\}),$$

továbbá valamely $v \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\int_0^1 f(s, v)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad \det\left[\int_0^1 \partial_j f_i(s, v)\,\mathrm{d}s\right] \neq 0 \quad (i \in \{1, \ldots, n\}),$$

teljesül. Ekkor alkalmas $\delta > 0$ számra és

$$\Phi : [0,1] \times (-\delta, \delta) \to \mathbb{R}^n$$

differenciálható függvényre $\Phi(\cdot,0) = v$, és a $\Phi(\cdot, \lambda)$ függvény megoldása a (4.1.1) peremérték-feladatnak.

**Biz.** Világos, hogy ha $\lambda := 0$, akkor a (4.1.1) peremérték-feladatnak van (triviális) megoldása, hiszen bármely $c \in \mathbb{R}^n$ esetén a

$$\varphi : [0{,}1] \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) := c$$

függvény megoldás. Legyen most

$$\mathcal{X} := \left\{x \in \mathfrak{C}^1([0{,}1], \mathbb{R}^n) : \; x(0) = x(1)\right\} \qquad \text{és} \qquad \mathcal{Y} := \{y \in \mathfrak{C}([0{,}1], \mathbb{R}^n) : \; y(0) = 0\},$$

majd értelmezzük az $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, ill. $N : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ lineáris, ill. nemlineáris operátorokat az alábbi módon:

$$(Lu)(t) := u(t) - u(0) \quad (u \in \mathcal{X},\, t \in [0{,}1]), \qquad (Nu)(t) := \int_0^t f(s, u(s))\, \mathrm{d}s \quad (u \in \mathcal{X},\, t \in [0{,}1]).$$

Látható, hogy valamely $\phi : [0{,}1] \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény pontosan akkor lesz a (4.1.1) peremértékfeladat megoldása, ha megoldása az

$$F(x, \lambda) := Lx - N(x) = 0 \tag{4.1.2}$$

egyenletnek. Mivel az $L$ operátor lineáris, és folytonos, ezért deriválható (vö. [1], 1. fejezet), továbbá Fréchet-deriváltjára

$$dL(x)h = Lh \qquad (h \in \mathcal{X}).$$

Az $N$ nemlináris operátor is Fréchet-differenciálható, és deriváltjára

$$(dN(x)h)(t) = \int_0^t \partial_2 f(s, x(s))h(s)\, \mathrm{d}s \qquad (h \in \mathcal{X},\, t \in [0{,}1]).$$

Így a

$$\partial_1 F(c{,}0)h = Lh$$

operátor nem injektív és

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L) = \operatorname{span}\{\alpha : [0{,}1] \to \mathbb{R}^n,\; \alpha \text{ állandófüggvény}\},$$

sőt

$$\mathcal{Y}_1 := \mathcal{R}(L) := \{y \in \mathcal{Y} : \; y(0) = y(1) = 0\}.$$

A

$$(Px)(t) := x(0), \quad (x \in \mathcal{X},\, t \in [0{,}1]), \qquad (Qy)(t) := y(t) - ty(1) \qquad (y \in \mathcal{Y},\, t \in [0{,}1])$$

folytonos projekciókkal az $\mathcal{X}$ és $\mathcal{Y}$ tér alterek direkt összegére bomlik:

$$\mathcal{X} = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2, \qquad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_1 \oplus \mathcal{Y}_2,$$

ahol

$$\mathcal{X}_1 := \mathcal{N}(P) = \{x \in \mathcal{X} : \; x(0) = 0\}, \qquad \mathcal{X}_2 := \mathcal{R}(P) = \mathcal{N}(L),$$

ill.

$$\mathcal{Y} := \mathcal{R}(Q) := \mathcal{R}(L), \qquad \mathcal{Y}_2 := \mathcal{N}(Q) = \{y \in \mathcal{Y} : \; y(t) = \alpha t,\, \alpha \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ennélfogva $L$ Fredholm-operátor, hiszen

$$\dim \mathcal{N}(L) = \dim \mathcal{X}_2 = n \qquad \text{és} \qquad \operatorname{codim} \mathcal{R}(L) = \dim \mathcal{Y}_2 = n,$$

így

$$\operatorname{ind}(L) = \dim \mathcal{N}(L) - \operatorname{codim} \mathcal{R}(L) = n - n = 0.$$

Alkalmazható tehát Ljapunov-Schmidt-módszer. A (4.1.2) egyenlet tehát pontosan akkor megoldható, ha az

$$x = x_1 + b \qquad (x_1 \in \mathcal{X}_1,\, b \in \mathcal{X}_2)$$

vektorokkal az

$$\begin{aligned} F_1(x_1, b, \lambda) &:= QL(x_1 + b) - \lambda QN(x_1 + b) = QLx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0, \\ F_2(x_1, b, \lambda) &:= (I - Q)L(x_1 + b) - \lambda(I - Q)N(x_1 + b) = 0 \end{aligned}$$

egyenletekből álló rendszer megoldható. Mivel $\mathcal{R}(Q) = \mathcal{Y}_1$ és így $QLx_1 = Lx_1$, ezért

$$(I - Q)L(x_1 + b) = (I - Q)Lx_1 = Lx_1 - QLx_1 = 0.$$

Ennélfogva a (4.1.2) egyenlet az alábbi egyenletekből álló rendszerrel egyenértékű:

$$\left.\begin{aligned} F_1(x_1, b, \lambda) &:= Lx_1 - \lambda QN(x_1 + b) = 0, \\ F_2(x_1, b, \lambda) &:= (I - Q)N(x_1 + b) = 0. \end{aligned}\right\}$$

Látható, hogy bármely $h \in \mathcal{X}_1$ esetén

$$F_1(0, b, 0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 F_1(0, b, 0) = Lh.$$

Ennélfogva az $\partial_1 F_1 : \mathcal{X}_1 \to \mathcal{Y}_1$ lineáris, folytonos és bijektív leképezés. Így (vö. nyílt leképezések tétele) $(\partial_1 F_1)^{-1}$ folytonos. Az implicit függvényre vonatkozó tétel következtében tehát a $(b, 0) \in \in \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R}$ pont egy környezetében a $F_1$ első változója kifejezhető a második, és a harmadik változó függvényeként: alkalmas $\phi \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ függvényre

$$x_1 = \phi(b, \lambda)$$

teljesül. Ezen kívül még az is igaz, hogy

$$\phi(b, 0) = 0 \qquad \text{és} \qquad \partial_1 \phi(b, 0) = 0.$$

Ez azt jelenti, a megoldhatóság vizsgálata a

$$H(b, \lambda) :\equiv (I - Q)N(\phi(b, \lambda) + b) = 0$$

egyenlet az első változójának a többi változó függvényében való kifejezhetőségét jelenti. Mivel

$$\dim \mathcal{X}_2 = \dim Y_2 = n < +\infty \qquad \text{és} \qquad H : \mathcal{X}_2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

ezért az implicit függvényre vonatkozó tétel ismét alkalmazható. Ez persze olyan $v \in \mathcal{X}_2$ meglétét tételezi fel, amelyre

$$(I-Q)N(v) = t\int_0^1 f(s,v)\,\mathrm{d}s = 0, \qquad \text{azaz} \qquad \int_0^1 f(s,v)\,\mathrm{d}s = 0$$

és amelyre a

$$(I-Q)dN(v)d = t\left(\int_0^1 \partial_2 f(s,v)\,\mathrm{d}s\right)d = ta$$

tetszőleges $a \in \mathbb{R}^n$ esetén megoldható $d$-re. Ez pedig azt jelenti, hogy az

$$\int_0^1 \partial_2 f(s,v)\,\mathrm{d}s$$

mátrix invertálható. ■

## 4.2. Egy $n$-edrendű peremérték-feladat

Legyen

$$n, N \in \mathbb{N}, \qquad B := [b_{ij}] \in \{1,\ldots,N\} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \qquad g, a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathfrak{C}(\mathbb{R},\mathbb{R}).$$

Az alábbiakban az

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0(t)y(t) = g(y(t)) \qquad (t \in [0{,}1]), \tag{4.2.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \ldots + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \quad (i=1,\ldots,n) \tag{4.2.2}$$

$n$-edrendű, nemlineáris peremérték-feladat megoldhatóságát vizsgáljuk, ahol

$$0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = 1$$

(vö. [14]). Feltesszük, hogy $g$ Lipschitz-folytonos, valamint

$$a_0(t) \neq 0 \qquad (0 \le t \le 1),$$

továbbá

$$g(+\infty) := \lim_{t\to+\infty} g(t) \in \mathbb{R}, \qquad \text{és} \qquad g(-\infty) := \lim_{t\to-\infty} g(t) \in \mathbb{R}.$$

A vizsgálat során fontos szerepet fog játszani a

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t) = 0 \quad (0 \le t \le 1) \tag{4.2.3}$$

homogén egyenlet a (4.2.2) peremfeltételekkel. Első lépésként fogalmazzuk át a feladatot: a magasabbrendű egyenlet írjuk át elsőrendű egyenletrendszerré. Az

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-1)}, \end{bmatrix} \qquad A(t) := \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & \dots & -a_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

továbbá az

$$f(x) := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x_1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(y), \end{bmatrix}, \qquad \text{ill.} \qquad B_k = \begin{bmatrix} b_{11}(k) & b_{12}(k) & \dots & b_{1n}(k) \\ b_{21}(k) & b_{22}(k) & \dots & b_{2n}(k) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1}(k) & b_{n2}(k) & \dots & b_{nn}(k) \end{bmatrix}$$

jelölések bevezetésével a (4.2), ill. a (4.2) egyenlet a (4.2.2) peremértékfeltétellel következő:

$$x'(t) = A(t)x(t) + f(x(t)) \quad (t \in [0,1]), \tag{4.2.4}$$

$$x'(t) = A(t)x(t) \quad (t \in [0,1]), \tag{4.2.5}$$

$$B_0x(0) + B_1x(t_1) + \ldots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0. \tag{4.2.6}$$

Legyen $\Phi$ a homogén egyenlet alapmátrixa, azaz

$$\Phi'(t) = A(t)\Phi(t) \quad (t \in [0,1]), \qquad \Phi(0) = I,$$

ahol $I$ jelöli az $N \times N$ méretű egységmátrixot. Ezt felhasználva még legyen

$$D := B_0 + B_1\Phi(t_1) + \ldots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1).$$

Emellett még szükséges az inhomogén, lineáris egyenlet vizsgálata:

$$x'(t) = A(t)x(t) + h(t) \quad (0 \le t \le 1). \tag{4.2.7}$$

Az állandók variálásának módszerét használva látható, hogy valamely $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény pontosan akkor lesz (4.2.7)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldása, ha

$$\begin{aligned} &x(t) = \Phi(t)x(0) + \Phi(t)\int_0^1 \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s \quad (t \in [0,1]), \\ &B_0x(0) + B_1x(t_1) + \ldots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0. \end{aligned}$$

Ennélfogva

$$\begin{aligned}
0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \ldots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)\left(x(0) + \int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s\right) + \ldots + \\
&\quad +B_N\Phi(t_{N-1})\left(x(0) + \int_0^{t_{N-1}} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s\right) + \\
&\quad +B_N\Phi(1)\left(x(0) + \int_0^{1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s\right) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \ldots + B_N\Phi(1)x(0) + \\
&\quad +B_1\Phi(t_1)\int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \ldots + B_N\Phi(1)\int_0^{1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Mivel

$$Dx(0) = B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \ldots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0),$$

ezért az előbbit átrendezve

$$Dx(0) = -\left(B_1\Phi(t_1)\int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \ldots + B_N\Phi(1)\int_0^{1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s\right)$$

adódik. Tehát a

$$B_1\Phi(t_1)\int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \ldots + B_N\Phi(1)\int_0^{1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s$$

vektor benne van a $D$ mátrix képterében. Mivel $\mathcal{R}(D) \perp \mathcal{N}(D^T)$, ezért ha $p \in \mathcal{N}(D^T)$, akkor

$$0 = p^T\left(B_1\Phi(t_1)\int_0^{t_1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s + \ldots + B_N\Phi(1)\int_0^{1} \Phi^{-1}(s)h(s)\,\mathrm{d}s\right).$$

Ezután megvizsgáljuk a (4.2.5)-(4.2.6) feladatot. Ez pontosan akkor oldható meg, ha

$$\begin{aligned}
&x(t) = \Phi(t)x(0) \quad (t \in [0,1]), \\
&B_0x(0) + B_1x(t_1) + \ldots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = 0
\end{aligned}$$

teljesül. A második egyenlet a következő alakba írható:

$$\begin{aligned}
0 &= B_0x(0) + B_1x(t_1) + \ldots + B_{N-1}x(t_{N-1}) + B_Nx(1) = \\
&= B_0x(0) + B_1\Phi(t_1)x(0) + \ldots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1})x(0) + B_N\Phi(1)x(0) = \\
&= Dx(0).
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $x$ pontosan akkor megoldása a homogén peremfeladatnak, ha $x(0) \in$ $\in \mathcal{N}(D)$. Ebből az is kiderült, hogy a megoldástér ugyanannyi dimenziós, mint $\mathcal{N}(D)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\dim \mathcal{N}(D) = 1$, $\hat{p} \in \mathcal{N}(D)$, $\|\hat{p}\| = 1$, majd legyen

$$u(t) := \Phi(t)\hat{p} \qquad (t \in [0,1]).$$

Hogy alkalmazhassuk a Ljapunov-Schmidt-módszert, értelmezzük az alábbi operátorokat. Legyen

$$N : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \to (L^2[0,1], \mathbb{R}^n), \qquad Nx := f \circ x,$$

továbbá

$$L : \mathcal{D}(L) \to (L^2[0,1], \mathbb{R}^n), \qquad Lx := x' - Ax$$

ahol

$$(L^2[0,1], \mathbb{R}^n) := \left\{\phi \in L^2[0,1] \to \mathbb{R}^n\right\}$$

és

$$\mathcal{D}(L) := \left\{\phi : [0,1] \to \mathbb{R}^n : \phi \text{ abszolút folytonos}, \phi' \in L^2[0,1], \sum_{k=1}^{N} B_k \phi(t_k) = 0\right\}.$$

Látható, hogy az $N$ operátor az $f$ függvény korlátossága következtében folytonos, továbbá az $L$ operátor $\mathcal{D}$ értelmezési tartományában azok a függvények vannak, amelyek kielégítik a (4.2.6) peremfeltételt. Valamely $x : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ függvényre pontosan akkor teljesül (4.2.4), ha

$$Lx = Nx. \tag{4.2.8}$$

Amennyiben $L$ invertálható, akkor $x$-re az $x = L^{-1}Nx$ fixpont-egyenletet kapjuk. Tegyük fel, hogy $L$ nem invertálható: $\mathcal{N}(L) \neq \{0\}$. Erre fogjuk a Ljapunov-Schmidt-módszert alkalmazni. Alkalmasan választott

$$Q : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{R}(L), \qquad \text{és} \qquad P : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \to \mathcal{N}(L)$$

projekciók bevezetésével az A $Q$ segítségével felírjuk a (4.2.8) operátoregyenlettel egyenértékű

$$QLx = Lx = QNx, \tag{4.2.9}$$

$$(I - Q)Lx = 0 = (I - Q)Nx \tag{4.2.10}$$

egyenletekből álló rendszert. Vezessük be az alábbi jelöléseket:

$$\mathcal{X}_2 := \mathcal{N}(L), \qquad \mathcal{X}_1 := \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{X}_2^{\perp},$$

amivel

$$\mathcal{D}(L) = \mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2.$$

Mivel
$$\mathcal{N}(L|_{\mathcal{X}_1}) = \{0\},$$
így $L|_{\mathcal{X}_1}$ invertálható, legyen
$$M := (L|_{\mathcal{X}_1})^{-1}.$$
Értelemszerűen
$$\begin{aligned} LMh &= h && (h \in \mathcal{R}(L)),\\ MLx &= (I-P)x && (x \in \mathcal{D}(L)). \end{aligned}$$
Bontsuk fel $x \in \mathcal{D}(L)$-et az $\mathcal{X}_1$ és $\mathcal{X}_2$ alterek mentén:
$$x = \widetilde{x} + \overline{x}, \qquad (\widetilde{x} \in \mathcal{X}_1, \overline{x} \in \mathcal{X}_2).$$
Jól látható, hogy
$$Px = \overline{x}, \qquad (I-P)x = \widetilde{x},$$
valamint
$$ML\widetilde{x} = \widetilde{x}. \tag{4.2.11}$$
Ezt a (4.2.9) egyenletbe behelyettesítve és $M$-et alkalmazva mindkét oldalra jutunk az
$$\begin{aligned} \widetilde{x} &= MQN(\widetilde{x} + \overline{x}),\\ 0 &= (I-Q)N(\widetilde{x} + \overline{x}) \end{aligned}$$
egyenletrendszerhez, amiből az első egyenlet a fixpont feladat, de a cikket követve viszont már más megközelítéssel fogjuk megoldani az egyenletrendszert.
Nézzük ezt meg egy kicsit részletesebben. A korábbi levezetésünkből és $L$ definíciójából következik, hogy $x \in \mathcal{X}_2$ pontosan akkor, ha $x(t) = \Phi(t)\hat{p}$ (ami egybevág $u$-nak a definíciójával, tehát $u \in \mathcal{X}_2$).
Konstruáljunk meg egy $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ függvényt úgy, hogy az ő merőleges kiegészítője $\mathcal{X}_2$ legyen. Legyen $p \in \mathcal{N}(D^T) \setminus \{\mathbf{0}\}$, és legyen
$$\psi(t) = \begin{cases} \left[(B_N\Phi(1))\,\Phi^{-1}(t)\right]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-1}, 1]\\ \left[(B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\,\Phi^{-1}(t)\right]^T p & \text{ha } t \in (t_{N-2}, t_{N-1}]\\ \vdots & \\ \left[(B_2\Phi(t_2) + \ldots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\,\Phi^{-1}(t)\right]^T p & \text{ha } t \in (t_1, t_2]\\ \left[(B_1\Phi(t_1) + B_2\Phi(t_2) + \ldots + B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1))\,\Phi^{-1}(t)\right]^T p & \text{ha } t \in [0, t_1]. \end{cases}$$
Ellenőrizzük, hogy $\psi(t) = 0$ $(t \in [0,1])$ lehetséges-e. Először nézzük meg, hogy $(t_{N-1}, 1]$ intervallumon ez mit jelentene:
$$0 = \psi(t) = \left[B_N\Phi(1)\Phi^{-1}(t)\right]^T p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(1)B_N^T p,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha $p \in \mathcal{N}(B_N^T)$. Ezt feltéve és továbbhaladva, $(t_{N-2}, t_{N-1}]$ intervallumon nézzük:

$$0 = \psi(t) = \left[ \left( B_{N-1}\Phi(t_{N-1}) + B_N\Phi(1) \right) \Phi^{-1}(t) \right]^T p =$$
$$= \Phi^{-T}(t) \left( B_{N-1}^T \Phi^T(t_{N-1}) + \Phi^T(1) B_N^T \right) p = \Phi^{-T}(t)\Phi^T(t_{N-1}) B_{N-1}^T p,$$

ami akkor teljesül, ha $p \in \mathcal{N}(B_{N-1}^T)$. Ezt ismét feltételezve és $i = N-3, \ldots, 1$ tovább folytatva azt kapjuk, hogy ha $\psi(t) = 0$ $(t \in [0,1])$, abból az következik, hogy $p \in \mathcal{N}(B_i^T)$. A továbbiakban feltesszük, hogy $\cap_{i=1}^N \mathcal{N}(B_i^T) = \{\mathbf{0}\}$, így $\psi$ nem az azonosan $\mathbf{0}$ függvény, valamint hogy $p \in \mathcal{N}(D^T)$-at úgy választjuk, hogy $\|\psi\|_{L^2} = 1$.
Belátható, hogy $\mathcal{R}(L) = \psi^\perp$. Ennek segítségével írjuk fel az $Q$ projekciót:

$$(Qx)(t) = x(t) - \psi(t) \int_0^1 \psi^T(s) x(s) \, \mathrm{d}s = x(t) - \psi(t) \langle x, \psi \rangle_{L^2}.$$

Értelemszerűen $QLx = Lx$ $(x \in \mathcal{D}(L))$.
Írjuk fel a $P$ projekciót is integrál segítségével:

$$(Px)(t) = u(t) \int_0^1 u^T(s) x(s) \, \mathrm{d}s = u(t) \langle x, u \rangle_{L^2},$$

ahol $u$ volt az a vektor, ami kifeszíti $\mathcal{X}_2$-őt. Így bármely $x \in (L^2[0,1], \mathbb{R}^n)$-re $Px = \overline{x} = \alpha u$, ahol $\alpha$ megfelelő ($x$-től függő) valós szám.
Írjuk fel $x$-et az $\mathcal{X}_1 \oplus \mathcal{X}_2$ felbontásával és helyettesítsük be a (4.2.11) azonosságot, a (4.2.9) levetített feladatot, illetve a $\mathcal{X}_2$-őt kifeszítő $u$-t:

$$x = \overline{x} + \widetilde{x} = \overline{x} + ML\widetilde{x} = \overline{x} + MLx = \overline{x} + MQNx = \alpha u + MQNx.$$

A (4.2.9) egyenlet azt is jelenti, hogy $N(x) \in \mathcal{R}(L)$, és mivel $\psi$ ortogonális $\mathcal{R}(L)$-re, ezért pontosan akkor teljesül, ha

$$0 = \langle Nx, \psi \rangle = \int_0^1 \left( f(x(t)) \right)^T \psi(t) \, \mathrm{d}t.$$

Vezessük be az alábbi jelöléseket:

- $u(t)$ első komponensét jelöljük $s(t)$-vel,
- $MQN(x)$ első komponensét jelöljük $w(x)$-szel,
- $\psi(t)$ $n$. komponensét jelöljük $v(t)$-vel.

Mivel $f$ az a függvény, aminek az első $n-1$ komponense azonosan $0$, az $n$. komponense pedig $f_n(x) = g(x_1)$, emellett $x_1$ felírható $x_1(t) = \alpha s(t) + w(x(t))$ alakban, így az integrál átalakítható:

$$0 = \int_0^1 \left( f(x(t)) \right)^T \psi(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 v(t) g(x_1(t)) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 v(t) g(\alpha s(t) + w(x(t))) \, \mathrm{d}t.$$

Mivel $\{t : s(t) = 0\}$ 0-mértékű, ezért az integrál felbontható:

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t)+w(x(t)))\,\mathrm{d}t = \int_{\{s(t)>0\}} v(t)g(\alpha s(t)+w(x(t)))\,\mathrm{d}t + \int_{\{s(t)<0\}} v(t)g(\alpha s(t)+w(x(t)))\,\mathrm{d}t$$

$M$, $E$ és $g$ korlátossága miatt $w$ is korlátos, írjuk fel $\alpha \to \pm\infty$ esetén az egyenletet:

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t = g(\infty)\int_{s(t)>0} v(t)\,\mathrm{d}t + g(-\infty)\int_{s(t)<0} v(t)\,\mathrm{d}t =: J_1$$
$$\lim_{\alpha\to-\infty} \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t = g(-\infty)\int_{s(t)>0} v(t)\,\mathrm{d}t + g(\infty)\int_{s(t)<0} v(t)\,\mathrm{d}t =: J_2.$$

Tegyük fel, hogy $J_2 < 0 < J_1$ ($J_1 < 0 < J_2$ esetén analóg módon folytatható, de $J_1 J_2 < 0$ szükséges). Így létezik $\alpha_0$, amivel

$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t > 0 \qquad \text{ha } \alpha \geq \alpha_0, \tag{4.2.12}$$
$$\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t < 0 \qquad \text{ha } \alpha \leq -\alpha_0.$$

Definiáljuk az alábbi operátorokat:

$$\begin{aligned}
&H_1 : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to (L^2[0,1], \mathbb{R}^n)\\
&H_1(x, \alpha) := \alpha u + MQN(x)\\
&H_2 : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}\\
&H_2(x, \alpha) := \alpha - \int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t\\
&H : (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R} \to (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}\\
&H(x, \alpha) := (H_1(x, \alpha), H_2(x, \alpha)).
\end{aligned}$$

Ezzel a szétválasztással $\overline{x} = \alpha u$, azaz $x$-nek az $\mathcal{X}_2$ irányú komponensét az $\alpha$ reprezentálja. $(L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$-en a norma amit használunk $\|(x, \alpha)\| := \max\{\|x\|_{L^2}, |\alpha|\}$. Jól látható, hogy az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremérték-feladat megoldhatósága a $H$ fixpontjának létezésével hozható összefüggésbe.
Legyen

$$r := \sup\{|g(t)| \in \mathbb{R} : \ t \in \mathbb{R}\} \qquad \text{és} \qquad m := \sup\{|v(t)| \in \mathbb{R} : \ t \in [0{,}1]\}.$$

Ekkor

$$\left|\int_0^1 v(t)g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t\right| \leq rm.$$

Válasszunk $\alpha_0$-át úgy, hogy (4.2.12) egyenletek teljesüljenek és $\alpha_0 > rm$, legyen $\delta := = \alpha_0 + rm$. $u$, $g$ és $ME$ korlátossága miatt ha $|\alpha| \leq \delta$ és $x \in L^2[0,1]$, akkor

$$\|H_1(x, \alpha)\| = \|\alpha u + MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQN(x)\| \leq |\alpha|\|u\| + \|MQ\||g(x_1)| \leq b_1$$

megfelelő $b_1$ választásával. Legyen

$$\mathcal{B} = \left\{(x, \alpha) \in L^2[0,1] \times \mathbb{R} : \|x\| \leq b_1 \text{ és } |\alpha| \leq \delta\right\},$$

így $\mathcal{B}$ egy zárt, korlátos, konvex halmaz. A cél megmutatni, hogy $H$ a $\mathcal{B}$ halmazt önmagába képezi. $\|H_1(x, \alpha)\| \leq b_1$-et az előbb beláttuk, nézzük $\|H_2(x, \alpha)\| \leq \delta$-t.
Először legyen $\alpha_0 \leq \alpha \leq \delta$, a feltételünk miatt

$$\int_0^1 v(t) g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t > 0,$$

így

$$H_2(x, \alpha) = \alpha - \int_0^1 v(t) g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t \geq \alpha_0 - rm > 0,$$

így $H_2(x, \alpha) \in [0, \alpha_0 - rm] \subset [-\delta, \delta]$.
Ha $0 \leq \alpha < \alpha_0$, akkor

$$\begin{aligned} |H_2(x, \alpha)| &= \left|\alpha - \int_0^1 v(t) g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t\right| \leq \\ &\leq |\alpha| + \left|\int_0^1 v(t) g(\alpha s(t) + w(x(t)))\,\mathrm{d}t\right| \leq \alpha_0 + rm = \delta, \end{aligned}$$

így $H_2(x, \alpha) \in [-\delta, \delta]$, tehát ha $0 \leq \alpha \leq \delta$ és $x \in L^2[0,1]$, akkor $H(x, \alpha) \in \mathcal{B}$. Analóg módon belátható, hogy ha $-\delta \leq \alpha \leq 0$, akkor ugyanez fenn áll.
Így tehát $H(\mathcal{B}) \subset \mathcal{B}$. $H$ kompaktsága következik $MQN$ kompaktságából, és így a Schauder fixpont-tétel értelmében $H$-nak van fixpontja $\mathcal{B}$-ben, tehát van $(x_0, \alpha_0) \in \in (L^2[0,1], \mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}$, amivel

$$\begin{aligned} x_0 &= \alpha_0 u + MQN(x_0), \text{ és} \\ \alpha_0 &= \alpha_0 - \int_0^1 v(t) g(\alpha_0 s(t) + w(x_0(t)))\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

teljesül, tehát az eredeti (4.2.4)-(4.2.6) peremfeladat megoldható, és $x_0 + \alpha_0 u$ egy megoldása.

# 5. fejezet

# A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer

A következő fejezetben ismertetjük a Ljapunov-Schmidt módszernek egy numerikus módszerkénti felhasználását bizonyos peremérték-feladatok esetén [16] alapján. Tekintsük az alábbi egyenletet:

$$Lu(x) = Nu(x),\ x \in [a,b] \tag{5.0.1}$$

ahol $L$ úgynevezett Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

ahol $p(x) > 0, w(x) > 0$ $(x \in [a,b])$, $p, q, w$ adott analitikus függvények, valamint $u$-ra a következő peremfeltételek teljesülnek:

$$\alpha_{11}u(a) + \alpha_{12}u'(a) = 0,$$
$$\alpha_{21}u(b) + \alpha_{22}u'(b) = 0.$$

Ezek a kikötések azért szükségesek, mert a későbbiekben az ilyen $L$-ekhez adunk meg egy módszert (a Csebisev-Tau-módszert [8]), amivel a sajátfüggvényeit elő tudjuk állítani.
Emellett feltesszük a következőket:

– $\mathcal{X}$ valós, szeparábilis Hilbert-tér, $L : \mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ lineáris operátor, $N : \mathcal{D}(N) \subset \subset \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ nemlineáris operátor,

– $L$ zárt leképezés (amivel ekvivalens [6]: $x_n \to x$ és $Lx_n \to y$-ból következik hogy $x \in \mathcal{D}(L)$ és $Lx = y$), önadjungált, $\mathcal{D}(L)$ sűrű $\mathcal{X}$-ben, $\mathcal{N}(L) = p > 0$ véges,

– $L$-nek a sajátértékei $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0 < \lambda_{p+1}$, $\lambda_i \leq \lambda_{i+1}$, $\lim_{i\to\infty} \lambda_i = \infty$, és a hozzájuk tartozó $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ sajátfüggvények $\mathcal{X}$-ben egy teljes ortonormált rendszert alkotnak - ezeket a tulajdonságokat a Sturm-Liouville-operátor biztosítja,

– létezik egy $\mathcal{X}' \subset \mathcal{X}$ altér, ami egy $\mu$ normával teljes, $\mathcal{D}(L) \subset \mathcal{X}'$, minden $x \in \in \mathcal{D}(L)$ esetén a $\Phi_i$-szerinti Fourier-sora ($\sum_{k=1}^{\infty}\langle x, \Phi_k\rangle\Phi_k$) $\mu$-ben konvergál $x$-hez és $\{\mu(\Phi_k)/\lambda_k\}_{k>p} \in l_2$, valamint létezik $\alpha > 0$, amivel $x \in \mathcal{X}'$ esetén $\|x\|_S \leq \alpha\mu(x)$ (tehát $\mu$ $\alpha$-szorosa felső becslése az eredeti normának, és $\mu$-beli konvergenciából következik, hogy az adott sorozat az eredeti normában is konvergens),

– $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N) \neq \emptyset$, $\mathcal{D}(N) \subset \mathcal{X}'$ és altér $\mathcal{X}'$-ben, $\mathcal{D}(N)$ zárt $\mu$ szerint,

– bármely $R > 0$-hoz létezik $\beta_R > 0, b_R > 0$, amelyekkel azon $x, y \in \mathcal{D}(N)$-ekre, amelyekre $\mu(x) \leq R, \mu(y) \leq R$ teljesül, $\mu(Nx - Ny) \leq \beta_R\mu(x - y)$ és $\mu(Nx) \leq b_R$, tehát tetszőleges $\mu$-szerinti gömb $N$-szerinti képe korlátos ($\mu$ normával), valamint ezen gömbbeli elemek környezetének képének átmérője arányos a környezet átmérőjével; ezek a feltételek biztosítják majd az kisegítő egyenletünk kontrakció tulajdonságát.

Az (5.0.1) egyenlet megoldásait $\mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N)$-ben keressük. Legyen $m \geq p$ és

$$S_m := \operatorname{span}\{\Phi_1, \dots, \Phi_m\}, \quad S_0 := \{0\},$$

azaz $S_m$ az első $m$ sajátfüggvény által kifeszített altér, $S_m \subset \mathcal{D}(L)$. Definiáljuk a következő operátorokat, amennyiben $u = \sum_{k=1}^{\infty}\langle u, \Phi_k\rangle, \Phi_k$ ($u \in S$):

$$P_m u := \sum_{k=1}^{m}\langle u, \Phi_k\rangle, \Phi_k,$$

tehát $P_m$ az $S_m$-re történő ortogonális projekció, valamint

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle u, \Phi_k\rangle, \Phi_k.$$

$H_m$ $\mathcal{D}(L)$-be képez (mivel $\Phi_k \in \mathcal{D}(L)$ $(k = 0, \dots, m+1, \dots)$), lássuk be róla, hogy lineáris ($x, y \in \mathcal{X}$, $\alpha \in \mathbb{R}$):

$$\begin{aligned}
H_m(\alpha x + y) &= \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle \alpha x + y, \Phi_k\rangle\Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}(\langle \alpha x, \Phi_k\rangle + \langle y, \Phi_k\rangle)\Phi_k = \\
&= \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle \alpha x, \Phi_k\rangle\Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle y, \Phi_k\rangle\Phi_k = \\
&= \alpha\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle x, \Phi_k\rangle\Phi_k + \sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k}\langle y, \Phi_k\rangle\Phi_k = \\
&= \alpha H_m x + H_m y.
\end{aligned}$$

$H_m$ az $L$ egy leszűkítésének inverze, pontosabban $H_m = (L_{|S_m^\perp})^{-1}$, értelemszerűen $S_m^\perp = \mathrm{span}\{\Phi_{m+1}, \Phi_{m+2}, \dots\}$, így a linearitás miatt elég $\Phi_n$-ra nézni ($n > m$):

$$\begin{aligned} LH_m\Phi_n &= L\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle\Phi_n, \Phi_k\rangle\Phi_k\right) = \\ &= L\left(\frac{1}{\lambda_n}\Phi_n\right) = \frac{1}{\lambda_n}\lambda_n\Phi_n = \Phi_n. \end{aligned}$$

$H_m L u = (I - P_m)u$, ahol $I$ az identitás operátor, ezt szintén elég $\Phi_n$-re vizsgálni ($n = = 1, 2, \dots$):

$$\begin{aligned} H_m L\Phi_n = H_m(\lambda_n\Phi_n) &= \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle\Phi_n, \Phi_k\rangle\Phi_k = \\ &= \begin{cases} \mathbf{0}, & \text{ha } n \le m \\ \Phi_n, & \text{ha } n \ge m+1. \end{cases} \end{aligned}$$

$H_m$ $\mathcal{X}$-szerinti normája $\frac{1}{\lambda_{m+1}}$, ehhez felhasználjuk, hogy $L$ sajátértékei növekvő sorrendben vannak indexelve, valamint hogy $\|I - P_m\| \le 1$ az ortogonális projekció tulajdonsága miatt:

$$\begin{aligned} \|H_m u\| &= \left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle u, \Phi_k\rangle\Phi_k\right\| \le \\ &\le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|(I - P_m)u\| \le \frac{1}{\lambda_{m+1}}\| \cdot \|u\| \end{aligned}$$

és $u = \Phi_{m+1}$ esetén teljesül az egyenlőség:

$$\begin{aligned} \|H_m\Phi_{m+1}\| &= \left\|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle\Phi_{m+1}, \Phi_k\rangle\Phi_k\right\| = \\ &= \left\|\frac{1}{\lambda_{m+1}}\Phi_{m+1}\right\| = \frac{1}{\lambda_{m+1}}\|\Phi_{m+1}\|. \end{aligned}$$

Még nézzük meg $H_m$ $\mu$-szerinti normáját: $\mu(H_m) \le \alpha\sigma(m)$, ahol $\sigma(m) = = \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\right)^2\right)^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \mu(H_m u) &= \mu\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle u, \Phi_k\rangle\Phi_k\right) \le \\ &\le \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k}\langle u, \Phi_k\rangle\mu(\Phi_k)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\langle u, \Phi_k\rangle\right| \le \\ &\le \left|\left(\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}, \langle u, \Phi_k\rangle\right)_{l_2}\right| \le \left\|\frac{\mu(\Phi_k)}{\lambda_k}\right\|_{l_2} \cdot \|\langle u, \Phi_k\rangle\|_{l_2} = \\ &= \sigma(m)\|u\| \le \sigma(m)\alpha\mu(u) \end{aligned}$$

ahol $(\cdot,\cdot)_{l_2}$ az $l_2$-beli skaláris szorzást jelöli. A levezetés során alkalmaztuk a Cauchy-Bunyakovsky-Schwarz-egyenlőtlenséget és a Parseval-egyenlőséget. Ebből az is következik, hogy $\lim_{m\to\infty}\mu(H_m) = 0$. A korábbi feltételeinket egészítsük ki még azzal, így $\mathcal{R}(H_m) \subset \mathcal{D}(N)$ és $S_m \subset \mathcal{D}(N)$, hogy a $P_m$ és a $H_m$ alkalmazása után tudjuk az $N$-et is még alkalmazni.
Tegyük fel, hogy $\overline{u} \in \mathcal{D}(N) \cap \mathcal{D}(L)$ megoldása az (5.0.1) egyenletnek, tehát

$$L\overline{u} = N\overline{u}. \tag{5.0.2}$$

Erre először alkalmazzuk $H_m$-et:

$$\begin{aligned} H_m L\overline{u} &= H_m N\overline{u}, \\ (I - P_m)\overline{u} &= H_m N\overline{u}, \\ \overline{u} &= P_m\overline{u} + H_m N\overline{u}, \end{aligned} \tag{5.0.3}$$

ez a kisegítő egyenlet. Ezután alkalmazzuk (5.0.2)-re $P_m$-et:

$$P_m(L\overline{u} - N\overline{u}) = 0, \tag{5.0.4}$$

ami a bifurkációs egyenlet. Az összes olyan $\overline{u} \in \mathcal{D}(L) \cap \mathcal{D}(N)$, ami megoldása a kisegítő és a bifurkációs egyenletnek, az megoldása az eredeti (5.0.1) feladatnak.
Legyenek $a > 0, b > 0$ valós számok, és legyen $u_0$ egy közelítő megoldása az $Lu = = Nu$ egyenletnek úgy, hogy létezik $u^* \in S_m$ ($u^* = \sum_{k=1}^{m} a_k\Phi_k$ valamely $a_k$ számokra, $k = 1, \ldots, m$), amivel $\mu(u^* - u_0) \le a$. Vegyük a következő halmazt:

$$S_{u^*}^b := \{u \in \mathcal{D}(N) \mid P_m u = u^*, \mu((I - P_m)u) \le b\},$$

tehát $S_{u^*}^b$ azon $u$-kat tartalmazza, melyek $S_m$-re levetítve $u^*$-ba esnek, és $u^*$-tól $\mu$-szerinti távolságuk legfeljebb $b$. Ezen elemek $\mu$-normája korlátos:

$$\mu(u) = \mu(P_m u + (I - P_m)u) \le \mu(u^*) + \mu((I - P_m)u) \le \mu(u^*) + b.$$

Ezután definiáljuk a következő operátort:

$$\begin{aligned} T_{u^*}^b &: S_{u^*}^b \to \mathcal{X}, \\ T_{u^*}^b(u) &:= u^* + H_m N u. \end{aligned}$$

Lássuk be $T_{u^*}^b$-ről, hogy bizonyos feltételek mellett kontrakció, legyen $x, y \in S_{u^*}^b$:

$$\begin{aligned} \mu(T_{u^*}^b(x) - T_{u^*}^b(y)) &= \mu((u^* + H_m N x) - (u^* + H_m N y)) = \\ &= \mu(H_m(Nx - Ny)) \le \\ &\le \mu(H_m)\mu(Nx - Ny) \le \\ &\le \mu(H_m)\beta_R\mu(x - y), \end{aligned}$$

ahol $R = \mu(u^*) + b$, tehát $u^*$-tól és $b$-től függő konstans, és a kezdeti kikötéseink alapján $\beta_R$ egy $R$-től függő konstans. Mivel $\lim_{m\to\infty} \mu(H_m) = 0$, ezért elég nagy $m$ esetén $\mu(H_m)\beta_R < 1$. Annak, hogy $\mathcal{R}(T^b_{u^*}) \subset S^b_{u^*}$ (tehát lehet $T^b_{u^*}$-t iteratívan alkalmazni) elégséges feltétele, hogy $\mu(H_m)^2\mu(L)b_R \le b$, ami kellően nagy $m$-re szintén teljesül. Tehát ha $m$ elég nagy, akkor $T^b_{u^*}$ kontrakció, így a Banach-Tyihonov-Cacciopoli-tétel miatt van fixpontja. Ezt az $u^*$-tól függő fixpontot jelöljük $y(u^*)$-al, és asszociált elemnek nevezzük. $y(u^*)$-ról könnyen belátható, hogy megoldása az (5.0.3) egyenletnek.

Vezessük be a $c_k := \langle u^*, \Phi_k\rangle$ $(k = 1,\ldots,m)$ jelölést, amivel $u^* = \sum_{k=1}^m c_k\Phi_k$. Nézzük meg, hogy milyen feltételek mellett lesz $y(u^*)$ megoldása a (5.0.4) bifurkációs egyenletnek:

$$
\begin{aligned}
0 &= P_m(Ly(u^*) - Ny(u^*)) = P_mLy(u^*) - P_mNy(u^*),\\
P_mLy(u^*) &= P_mL(u^* + H_mNy(u^*)) = P_mLu^* + P_mLH_mNy(u^*) =\\
&= P_mL(\sum_{k=1}^m c_k\Phi_k) + P_mL\sum_{k=m+1}^{\infty}\langle Ny(u^*), \Phi_k\rangle\Phi_k =\\
&= P_m(\sum_{k=1}^m c_k\lambda_k\Phi_k) + P_m\sum_{k=m+1}^{\infty}\langle Ny(u^*), \Phi_k\rangle\lambda_k\Phi_k =\\
&= P_m(\sum_{k=1}^m c_k\lambda_k\Phi_k) + \sum_{k=m+1}^{\infty}\langle Ny(u^*), \Phi_k\rangle\lambda_kP_m\Phi_k =\\
&= P_m(\sum_{k=1}^m c_k\lambda_k\Phi_k),
\end{aligned}
$$

tehát

$$0 = P_m(\sum_{k=1}^m c_k\lambda_k\Phi_k - Ny(u^*)),$$

ami pontosan akkor teljesül, ha

$$
\begin{aligned}
0 &= \langle\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j\Phi_j - Ny(u^*), \Phi_k\rangle && (k = 1,\ldots,m), \text{ azaz}\\
0 &= \langle c_k\lambda_k\Phi_k - Ny(u^*), \Phi_k\rangle && (k = 1,\ldots,m), \text{vagy}\\
0 &= \langle\lambda_ku^* - Ny(u^*), \Phi_k\rangle && (k = 1,\ldots,m). \qquad (5.0.5)
\end{aligned}
$$

Ez utóbbi egy $m$-változós ($c_k$ $(k = 1,\ldots,m)$ számok meghatározzák $u^*$-ot), $m$ egyenletből álló egyenletrendszer. Ezek eredményeként megállapíthatjuk, hogy ha $a, b, m$ elég nagyok, akkor az eredeti (5.0.1) egyenletnek $\overline{u}$ pontosan akkor megoldása, ha az (5.0.5) egyenletnek $u^*$ megoldása és $\overline{u} = y(u^*)$.

Ezzel mindenünk megvan ahhoz, hogy a feladat numerikus megoldását ismertessük. Legyen $N \ge m$. Az $Lu = Nu$ feladat megoldásait

$$u = \sum_{k=1}^N c_k\Phi_k = \sum_{k=1}^m c_k\Phi_k + \sum_{k=m+1}^N c_k\Phi_k$$

alakban keressük, tehát N növelésével a megoldás pontosságát javítjuk (a műveletigény rovására). $H_m$-en is hasonlóképpen módosítunk:

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^{N} \frac{c_k}{\lambda_k} \Phi_k$$

Maga az algoritmus a következő:

1. Állítsuk elő $L$-hez $\Phi_k (k = 1, \ldots, N)$ sajátfüggvényeket.
2. Rögzítsünk egy kezdeti $u^* = \sum_{k=1}^{m} c_k \Phi_k$ kiinduló értéket.
3. Állítsuk elő $y(u^*)$-ot a fixpontiterációval: $y_0 := u^*$, $y_{i+1} := u^* + H_m N y_i$, $(i = = 1, \ldots, S)$.
4. Oldjuk meg az $Lu^* = P_m N y_{S+1}$ egyenletet $u^*$-ra, például Newton-módszerrel.
5. Az így kapott $u^*$-ból kiindulva ismételjük 3.-4. lépéseket, amíg a kívánt pontosságot el nem érjük (amit $Lu^* - Nu^*$ normájával lehet jellemezni).

Előfordulhat, hogy a 3. vagy a 4. lépésben nincs konvergencia, ekkor $m$ növelése szükséges lehet (ami miatt $N$-et is lehet, hogy növelni kell).
A peremfeltételeket $u$-ra azzal garantáljuk, hogy a homogén peremfeltételt kikényszerítjük a $\Phi_k$ sajátfüggvényekre, így az ő lineáris kombinációjukkal előálló függvényre is teljesülni fognak. A következő szekcióban taglaljuk, hogy hogyan találjuk meg a sajátfüggvényeket.

## 5.1. Csebisev-Tau-módszer a sajátfüggvények előállítására

A fejezet elején előrebocsátottuk, hogy az $L$ alakjára vonatkozó megkötésekre azért van szükség, mert az ilyen operátorokhoz tudunk sajátfüggvényeket numerikusan könnyen előállítani. A [8] és [17] cikkek alapján ezt bemutatjuk. Ennek az eljárásnak az eredményeként ugyan nem ortonormált rendszert kapunk, de a Gram-Schmidt-módszerrel át lehet megfelelően alakítani.
Legyen $L$ egy Sturm-Liouville operátor:

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

és tegyük fel, hogy az intervallum amin dolgozunk a $(-1, 1)$. A peremfeltételeink a következők:

$$\alpha_{11} u(a) + \alpha_{12} u'(a) = 0,$$
$$\alpha_{21} u(b) + \alpha_{22} u'(b) = 0.$$

Ha $L$-nek $\lambda$ sajátértéke, $v$ pedig a hozzá tartozó sajátvektor, akkor $Lv = \lambda v$, azaz

$$\frac{1}{w}(-(pv')' + qv) = \lambda v,$$
$$-pv'' - p'v' + qv = \lambda wv. \tag{5.1.1}$$

Jelöljük $T_n(x)$-el a $(-1,1)$-en értelmezett Csebisev-polinomokat: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$. Ezekről tudjuk, hogy ortogonális rendszert alkotnak az $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ súlyfüggvénnyel, és van rekurzív képletük ($T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$). A cél az, hogy ilyen polinomok véges lineáris kombinációjával közelítsük a sajátfüggvényt:

$$v(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k(x) = \mathbf{a}^T \mathbf{t},$$

ahol $\mathbf{a}^T = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ és $\mathbf{t} = [T_0(x), T_1(x), \ldots, T_N(x)]^T$, így az együtthatók a vektora egyértelműen meghatározza a $v(x)$ függvényt.
Mivel $L$-nek szüksége van $v$ deriváltjaira, vizsgáljuk meg, hogy a deriválás milyen (mátrixszal leírható) változást eredményez az együtthatók vektorán:

$$v'(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k T_k'(x) = \sum_{k=0}^{N} b_k T_k(x) = \mathbf{b}^T \mathbf{t} \tag{5.1.2}$$

Először is nézzük meg, hogy mi a kapcsolat a Csebisev-polinomok és a deriváltak között. Az áttekinthetőség kedvéért használjuk a $\theta := \arccos x$ jelölést (amivel $\sin\theta = \sqrt{1-x^2}$).

$$\begin{aligned}
T_n(x) &= \cos(n\theta)\\
T_n'(x) &= \sin(n\theta)n\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{1}{n+1}T_{n+1}'(x) &= \sin((n+1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{1}{n-1}T_{n-1}'(x) &= \sin((n-1)\theta)\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\\
\frac{1}{n+1}T_{n+1}'(x) - \frac{1}{n-1}T_{n-1}'(x) &= \frac{\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta)}{\sqrt{1-x^2}}\\
\sin((n+1)\theta) - \sin((n-1)\theta) &= 2\cos(n\theta)\sin\theta = 2T_n(x)\sqrt{1-x^2}\\
\frac{1}{n+1}T_{n+1}'(x) - \frac{1}{n-1}T_{n-1}'(x) &= 2T_n(x)
\end{aligned}$$

Ez működik $n \geq 2$ esetén, kis $n$-ekre pedig egyszerű a dolog:

$$\begin{aligned}
&T_0'(x) = 0,\\
&T_1'(x) = 1 = T_0(x),\\
&T_2'(x) = 4x = 4T_1(x).
\end{aligned}$$

Helyettesítsük be (5.1.2)-be a $T_k(x)$-ek helyére az így kapott képleteket:

$$v' = \sum_{n=0}^{N} b_n T_n = b_0 T_1' + \frac{b_1}{4} T_2' + \sum_{n=2}^{N} \frac{b_n}{2(n+1)} T_{n+1}' - \sum_{n=2}^{N} \frac{b_n}{2(n-1)} T_{n-1}' =$$
$$= \left(b_0 - \frac{b_2}{2}\right) T_1' + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{b_{n-1} - b_{n+1}}{2n} T_n' + \frac{b_{N-1}}{2N} T_N' + \frac{b_N}{2(N+1)} T_{N+1}'.$$

Így már látható az összefüggés $a_n$ és $b_n$ között:

$$\begin{aligned} b_N &= 0 \\ b_{N-1} &= 2N a_N \\ b_{n-1} &= b_{n+1} + 2n a_n \ (n = N-1, \dots, 2) \\ b_0 &= \frac{b_2}{2} + a_1. \end{aligned}$$

Belátható, hogy az alábbi mátrix kielégíti a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ egyenletet ($k, l = 0, \dots, N$):

$$\hat{D}_{kl} = \begin{cases} l, & \text{ha } k = 0 \text{ és } l \text{ páratlan} \\ 2l, & \text{ha } l \geq k \geq 1 \text{ és } l + k \text{ páratlan} \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

azaz ennek a mátrixnak a segítségével tudjuk a polinomsorral felírt függvényeket deriválni:

$$v' = \mathbf{b}^T \mathbf{t} = (\hat{D}\mathbf{a})^T \mathbf{t}.$$

Ezután vizsgáljuk meg, hogy az $x$-szel történő szorzás milyen változást eredményez. Ezt már csak közelítőleg tudjuk megadni:

$$x v(x) = \sum_{k=0}^{N} a_k x T_k(x) \approx \sum_{k=0}^{N} c_k T_k(x).$$

Itt a Csebisev-polinomok rekurziójából gyorsan kijön a megoldás:

$$\begin{aligned} x T_0(x) &= T_1(x) \\ x T_n(x) &= \frac{1}{2}\left(T_{n+1} + T_{n-1}\right) \ (n \geq 1) \end{aligned}$$

Ezt behelyettesítve kapjuk:

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_1}{2} \\ c_1 &= a_0 + \frac{a_2}{2} \\ c_n &= \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \ (n = 2, \dots, N-1) \\ c_N &\approx \frac{a_{N-1}}{2} \end{aligned}$$

Így az alábbi mátrix közelítőleg megvalósítja a $M\mathbf{a} \approx \mathbf{c}$ szorzást ($k, l = 0, \dots, N$):

$$M_{kl} = \begin{cases} 1, & \text{ha } (k,l) = (1,0) \\ \frac{1}{2}l, & \text{ha } l \geq 2 \text{ és } |k-l| = 1 \\ 0, & \text{különben,} \end{cases}$$

tehát

$$xv(x) \approx \mathbf{c}^T\mathbf{t} \approx (M\mathbf{a})^T\mathbf{t}.$$

Ezenfelül, ha $f$ analitikus függvény, akkor $f(x)v(x) \approx (f(M)\mathbf{c})^T\mathbf{t}$.
Ezek segítségével írjuk fel az (5.1.1) egyenletet az együtthatók vektorán végzett mátrix-műveletként:

$$\hat{L}\mathbf{a} := \left(-p(M)\hat{D}^2 - p'(M)\hat{D} + q(M)\right)\mathbf{a}.$$

A (5.1.1) egyenlet jobb oldala ebben a formában pedig $\lambda w(M)\mathbf{a}$, jelölésként $\mathbf{B} := w(M)$.
Még hasonlóképpen meg kell fogalmaznunk a peremfeltételeinket, ehhez felhasználjuk, hogy $\mathbf{t}$ egy vektorértékű függvény, $[a,b] = [-1,1]$, és ennek az intervallumnak a végpontjain $T_n(-1) = (-1)^n$, $T_n(1) = 1$. Legyen

$$\begin{aligned} h_1^T &= \alpha_{11}(\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{t}(-1))^T\hat{D}, \\ h_2^T &= \alpha_{21}(\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{t}(1))^T\hat{D} \end{aligned}$$

amivel (ismét a $\hat{D}\mathbf{a} = \mathbf{b}$ jelölést alkalmazva)

$$\begin{aligned} h_1^T\mathbf{a} &= \alpha_{11}(\mathbf{a}^T\mathbf{t}(-1))^T + \alpha_{12}(\mathbf{b}^T\mathbf{t}(-1))^T = \alpha_{11}v(-1) + \alpha_{12}v'(-1), \\ h_2^T\mathbf{a} &= \alpha_{21}(\mathbf{a}^T\mathbf{t}(1))^T + \alpha_{22}(\mathbf{b}^T\mathbf{t}(1))^T = \alpha_{21}v(1) + \alpha_{22}v'(1). \end{aligned}$$

Legyen $H = (h_1, h_2)^T$, így a peremfeltétel megfogalmazható $H\mathbf{a} = \mathbf{0}$ formában.
Legyen $\hat{A}$ az a mátrix, amit úgy kapunk, hogy $\hat{L}$ utolsó két sorát elhagyjuk (tehát $N - 1 \times N + 1$ mátrix), és állítsuk elő $\hat{B}$-t ugyanígy $\mathbf{B}$-ből. Az alábbi egyenletrendszer megoldásaként megkapjuk a sajátfüggvényekhez tartozó együtthatósorozatokat (ezt általánosított sajátérték feladatnak is nevezik):

$$\begin{pmatrix} \hat{A} \\ H \end{pmatrix}\mathbf{a} = \lambda \begin{pmatrix} \hat{B} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}\mathbf{a}.$$

Az egyenlet jobb oldalán javíthatunk, ha $\mathbf{0}$ helyett $\frac{1}{\lambda_*}H$-t használunk, ahol $\lambda_*$ egy nagy szám, ami nem sajátértéke $L$-nek. Így a jobb oldal mátrixának $\begin{pmatrix} \hat{B} \\ \frac{1}{\lambda_*}H \end{pmatrix}$ nincsenek csupa 0 sorai.
Még fontos megjegyezni, hogy ha az eredeti intervallumunk nem a $[-1,1]$, hanem valamely $[a,b]$ intervallum, akkor a deriválás mátrix egy kicsit máshogy fog kinézni: $D := \frac{1}{\alpha}\hat{D}$, ahol $\alpha$ az intervallum középpontja ($\alpha = \frac{b-a}{2}$).

## 5.2. Példa a numerikus alkalmazásra

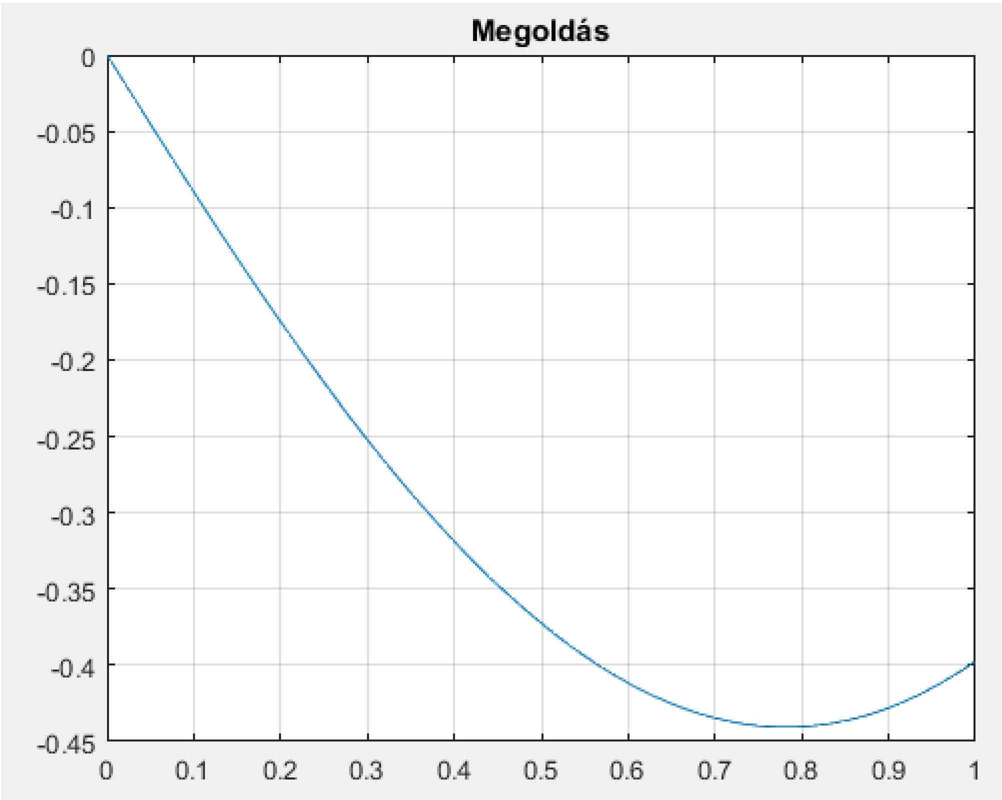
Most mutassunk két példát a módszer gyakorlati alkalmazására, felhasználva a [16] cikkhez készült MATLAB csomagot.
Tekintsük az

$$-u''(x) - 2u(x) = \frac{1}{3}u^3 - \sqrt{x}$$

egyenletet a $[0, 1]$ intervallumon a

$$u(0) = 0$$
$$u(1) + u'(1) = 0$$

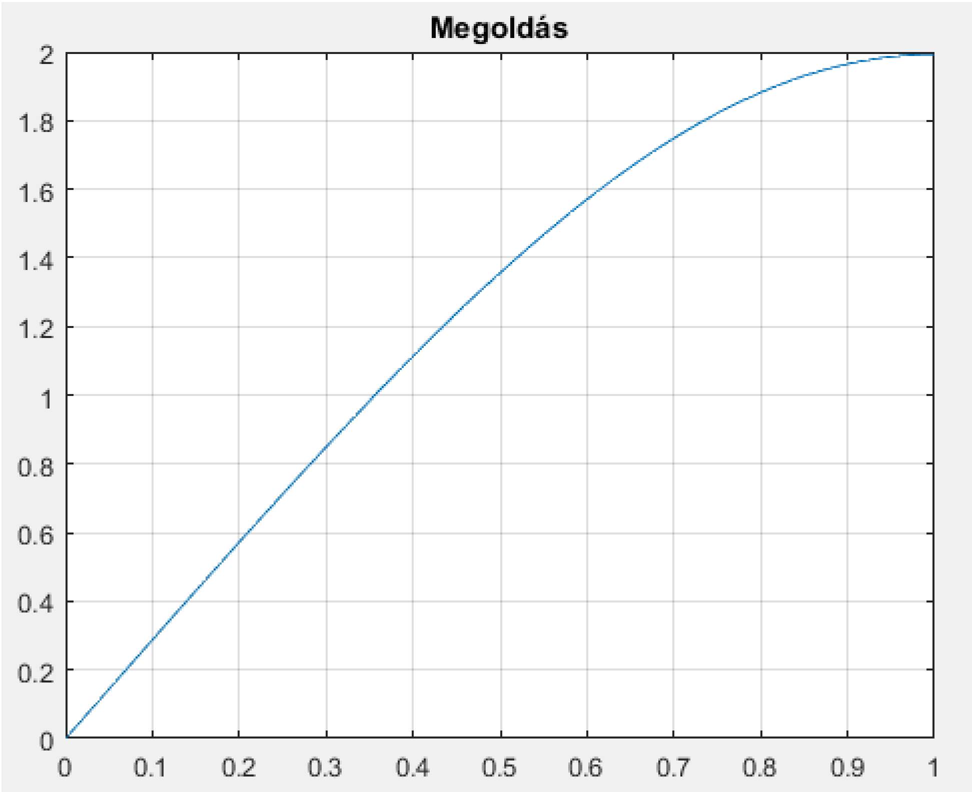
peremfeltételekkel. Erre a feladatra a kiszámolt megoldás a következő, legfeljebb $10^{-5}$ hibát megengedve:




Ehhez az $m = 0$ választás elegendő volt. Ezzel szemben, ha változtatunk a peremfeltételen, és az intervallum jobb oldalán a

$$u'(1) = 0$$

feltételt követeljük meg, akkor $m = 0$ esetén nincs konvergencia, és még $m = 1$ esetén is problémás a helyzet, mert a Newton-iteráció nem konvergál, ezért meg kell adni kezdeti feltételt. A cinit $= [1]$ paraméterrel, azaz a $\Phi_1$ komponens kezdeti együtthatóját 1-re változtatva viszont már van konvergencia, és megkapjuk a megoldást:


Megoldás
2
1.8
1.6
1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1

# Irodalomjegyzék


[1] **Ambrosetti, A.; Prodi, G.**: *A Primer of Nonlinear Analysis*, Cambridge University Press, 1993.

[2] **Chow, S. N.; Hale, J. K.:** *Methods of bifurcation theory*, Pitman Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, 251, Springer, Berlin etc., 1996.

[3] **Farkas, M.:** *Periodic Motions*, Berlin, Heidelberg and New York: Springer-Verlag, 1994.

[4] **Hirzebruch, F.; Scharlau, W.**: *Einführung in die Funktionalanalysis*, B.I.-Wissenschaftsverlag, 1971.

[5] **Kolmogorov, A. N.; Fomin, Sz. V.**: *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[6] **Kovács, S.**: *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013. ISBN: 978-963-284-445-9

[7] **Kovács, S.**: *Abstract bifurcations*, Miklós Farkas Seminar on Applied Analysis, Budapest University of Technology, 22 February 2018.

[8] **Liefvendahl, M.**: *A Chebyshev Tau Spectral Method for the Calculation of Eigenvalues and Pseudospectra*, Technical Report, TRITA-NA-0125, KTH, Stockholm, 2001.

[9] **Marx, B.; Vogt, W.**: *Dynamische Systeme - Theorie und Numerik*, Spektrum, 2011.

[10] **Meise, R.; Vogt, D.**: *Einführung in die Funktionalanalysis*, Vieweg, 1992.

[11] **Pelczynski, A.; Sudakov, V. N.**: *Remark on noncomplemented subspaces of the space*$m(S)$, Colloq. Math. **9** (1962), 85–88.

[12] **Pötzsche, C.:** *Bifurcation theory*, Lecture Notes, SS 2010, TU München, 2011.

[13] **Rodriguez, J.; Kobylus Abernathy, Kristen**: *On the solvability of nonlinear boundary value problems*, Differential Equations and Applications **1**(2) (2010), 487–499.

[14] **Rodriguez, J.; Taylor, P.**: *Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **68**(11) (2008), 3465–3474.

[15] **Simon, P.**: *A funkcionálanalízis alapjai*, ELTE Eötvös Kiadó, 2017.

[16] **Trif, D.**: *The Lyapunov-Schmidt method for two-point boundary value problems*, Fixed Point Theory **6**(1) (2005), 119–132.

[17] **Trif, D.**: *LISC - A Matlab package for linear differential problems*, Romai Journal **1** (2006), 203–208.

[18] **Werner, D.**: *Funktionalanalysis*, Springer, 2011.

[19] **Whitley, R. J.**: *Projecting* $m$ *onto* $\mathfrak{c}_0$, Amer. Math. Monthly **73** (1966), 285–286.

[20] **Zeidler, E.**: *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I.*, Springer, 1986.

**Lipták Bence,**
**programtervező informatikus szakos egyetemi hallgató**
**Eötvös Loránd Tudományegyetem, Informatikai Kar,**
**1117 Budapest, Pázmány Péter sétány 1/C,**
**padsoldier@gmail.com**