

# A Ljapunov-Schmidt-módszer

Lipták Bence Gábor

ELTE prog. inf. MSc, modellalkotó szakirány

*padsoldier@gmail.com*

Témavezető: Dr. Kovács Sándor

2019. január 8.

Tekintsünk egy

$$Lu = Nu$$

alakú operátor-egyenletet.

- Ha  $L$  invertálható, akkor a

$$u = L^{-1}Nu$$

fixpont-egyenlet megoldásaként  $u$  előállítható.

- Ha  $L$  nem invertálható, akkor más megközelítésre van szükség.

Tekintsük az

$$F(x, \lambda) = 0$$

bifurkációs egyenletet, aminek van  $(x_0, \lambda_0)$  megoldása:

$$F(x_0, \lambda_0) = 0.$$

Keressük az egyes  $\lambda$  értékekhez tartozó  $x$  megoldásokat.

# Definíció: Fredholm-operátorok

## Definíció

$L \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$  Fredholm-operátor, ha

- $\dim \mathcal{N}(L) < +\infty$ , és
- $\operatorname{codim} \mathcal{R}(L) = \dim(\mathcal{Y}/L[\mathcal{X}]) < +\infty$

Vegyük továbbá az alábbi projekciókat:

$$P : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{N}(L),$$

$$Q : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{R}(L).$$

# A Ljapunov-Schmidt-módszer I.

Tekintsük az

$$F \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{Y}, \quad F(x, \lambda) = 0$$

egyenletet ( $\mathcal{X}$  és  $\mathcal{Y}$  Banach-terek), aminek ismert  $(x_0, \lambda_0)$  megoldása.

Legyen

$$L := \partial_1 F(x_0, \lambda_0) \in L(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$$

Fredholm-operátor.

Legyen

$$\mathcal{X} = \mathcal{N}(L) \oplus \mathcal{X}_0, \quad \mathcal{Y} = \mathcal{Y}_0 \oplus \mathcal{R}(L),$$

és a lineárisan független  $x_1, \dots, x_n \in \mathcal{X}$  elemekkel

$$\mathcal{N}(L) = \text{span}\{x_1, \dots, x_n\}.$$

# A Ljapunov-Schmidt-módszer II.

A Ljapunov-Schmidt-projekciókat felhasználva és  $x = x_0 + v + w$  felbontást bevezetve (ahol  $v \in \mathcal{N}(L)$ ,  $w \in \mathcal{X}_0$ ) kapjuk az alábbi, eredetivel ekvivalens egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} Q \circ F(x_0 + v + w, \lambda) &= 0, \\ (I - Q) \circ F(x_0 + v + w, \lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Legyen

$$\begin{aligned} G &\in \mathcal{X}_0 \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{R}(L), \\ G(w, s, \lambda) &:= Q \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + w, \lambda). \end{aligned}$$

amire

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = L|_{\mathcal{X}_0}.$$

# A Ljapunov-Schmidt-módszer III.

Mivel

$$\partial_1 G(0, 0, \lambda_0) = L|_{\mathcal{X}_0},$$

invertálható, így  $G$ -re alkalmazható az implicit függvény tétel, így a  $(0, \lambda_0)$  egy környezetében

$$w = \phi(s, \lambda), \quad \phi(0, \lambda_0) = 0,$$

$$G(\phi(s, \lambda), s, \lambda) = Q \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda) = 0.$$

Így már csak az

$$(I - Q) \circ F(x_0 + \sum_{k=1}^n s_k x_k + \phi(s, \lambda), \lambda) = 0$$

egyenletet kell megoldani, ami véges dimenzió értelműt  
( $s_1, \dots, s_n, \lambda \in \mathbb{R}$ ), és véges dimezióba képez.

# Alkalmazások: Elsőrendű peremérték-feladat

Legyen  $n \in \mathbb{N}, \lambda \in \mathbb{R}$ ,

$$f := (f_1, \dots, f_n) : [0, 1] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

esetén tekintsük az

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \lambda f(t, x(t)) \quad (t \in (0, 1)), \\ x(0) &= x(1)\end{aligned}$$

peremérték feladatot.

A módszer segítségével feltételt adhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságára  $\lambda \in (-\delta, \delta)$  esetén.



# Alkalmazások: $n$ -edrendű peremérték-feladat

Legyen  $n, N \in \mathbb{N}$ . Tekintsük az alábbi feladatot:

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = g(y(t)), \quad (t \in [0, 1]),$$

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n b_{ij}(0)y^{(j-1)}(0) + \sum_{j=1}^n b_{ij}(1)y^{(j-1)}(t_1) + \dots + \\ + \sum_{j=1}^n b_{ij}(N)y^{(j-1)}(t_N) = 0 \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, n),$$

ahol  $g, a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $b_{ij}(k) \in \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ,  $k = 1, \dots, N$ ),  
illetve  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_N = 1$ .

A módszer segítségével feltételeket adhatunk a feladat megoldhatóságára.

# A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer I.

Keressük az

$$Lu = Nu$$

feladat megoldásait numerikusan, ahol  $L$  lineáris, zárt és önadjungált,  $N$  pedig nemlineáris operátor. Rögzítsünk  $m \leq M \in \mathbb{N}$  számokat.

$L$  sajátfüggvényei:  $\Phi_1, \Phi_2, \dots$ , sajátérték  $(\lambda_1, \dots)$  szerint növekvően.

Ha  $u = \sum_{k=1}^{\infty} \langle u, \Phi_k \rangle \Phi_k$ , akkor legyen

$$P_m u := \sum_{k=1}^m \langle u, \Phi_k \rangle, \Phi_k$$

és

$$H_m u := \sum_{k=m+1}^M \frac{1}{\lambda_k} \langle u, \Phi_k \rangle, \Phi_k.$$

# A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer II.

Ezekkel előállítjuk a kisegítő egyenletünket:

$$u = P_m u + H_m N u,$$

és a bifurkációs egyenletünket:

$$P_m(Lu - Nu) = 0.$$

# A numerikus Ljapunov-Schmidt-módszer III.

Vegyünk egy

$$u^* = \sum_{k=1}^m c_k \Phi_k$$

kiinduló értéket, és állítsuk elő az ehhez tartozó, az

$$y = P_m y + H_m N y$$

kisegítő egyenletet megoldó  $y(u^*)$ -ot fixpontiterációval:

$$y_0 := u^*; \quad y_{i+1} := u^* + H_m N y_i.$$

Majd oldjuk meg az ( $m$ -dimenziós)

$$L u^* = P_m N y$$

egyenletet  $u^*$ -ra, és ezt kiinduló értéknek véve ismételjük a lépéseket.

Ha  $L$  úgynevezett Sturm-Liouville-operátor

$$Lu = \frac{1}{w}(-(pu')' + qu),$$

akkor a Csebisev-Tau-módszerrel állíthatjuk elő a sajátfüggvényeit Csebisev-polinomok véges lineáris kombinációjaként.

$$u(x) = \sum_{k=0}^N a_k T_k(x).$$

Ekkor  $u$ -t meghatározza az  $\mathbf{a} := [a_0, \dots, a_N]$  együtthatóvektor.

Az ilyen együtthatóvektorokhoz megadható  $\hat{D}$  mátrix, ami a deriválást közelíti:

$$u \sim \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad u' \sim \hat{D}\mathbf{a}$$

illetve  $M$  mátrix, amivel analitikus függvénnyel való szorzást tudunk közelíteni:

$$u \sim \mathbf{a} \quad \Longrightarrow \quad f \cdot u \sim f(M)\mathbf{a}.$$

Ezekkel felírhatjuk a sajátfüggvény egyenletünket általánosított sajátérték feladatként, ahol az együtthatóvektor a sajátfüggvény, és arra megoldva megkapjuk a sajátfüggvényeket.



**Kovács, S.:** *Funkcionálanalízis feladatokban, egyetemi jegyzet*, Budapest, 2013.  
ISBN: 978-963-284-445-9



**Rodriguez, J.; Taylor, P.:** *Multipoint boundary value problems for nonlinear ordinary differential equations*, Nonlinear Anal. **68**(11) (2008), 3465–3474.



**Trif, D.:** *The Lyapunov-Schmidt method for two-point boundary value problems*, Fixed Point Theory **6**(1) (2005), 119–132.



**Liefvendahl, M.:** *A Chebyshev Tau Spectral Method for the Calculation of Eigenvalues and Pseudospectra*, Technical Report, TRITA-NA-0125, KTH, Stockholm, 2001.

Köszönöm a figyelmet.