树状数组详解

前言

```
树状数组或二叉索引树（Binary Indexed Tree），又以其发明者命名为 Fenwick 树。其初衷是解决数据压缩里的累积频率的计算问题，现多用于高效计算数列的前缀和、区间和。它可以以 O(logn) 的时间得到任意前缀和。并同时支持在 O(logn) 时间内支持动态单点值的修改。空间复杂度 O(n)。
```

一、树状数组概括

树状数组是一个查询和修改复杂度都为log(n)的数据结构。主要用于数组的单点修改 + 区间求和，另外一个拥有类似功能的是线段树。

具体区别和联系如下：

1.两者在复杂度上同级, 但是树状数组的常数明显优于线段树, 其编程复杂度也远小于线段树.

2.树状数组的作用被线段树**完全涵盖**, 凡是可以使用树状数组解决的问题, 使用线段树一定可以解决, 但是线段树能够解决的问题树状数组未必能够解决.

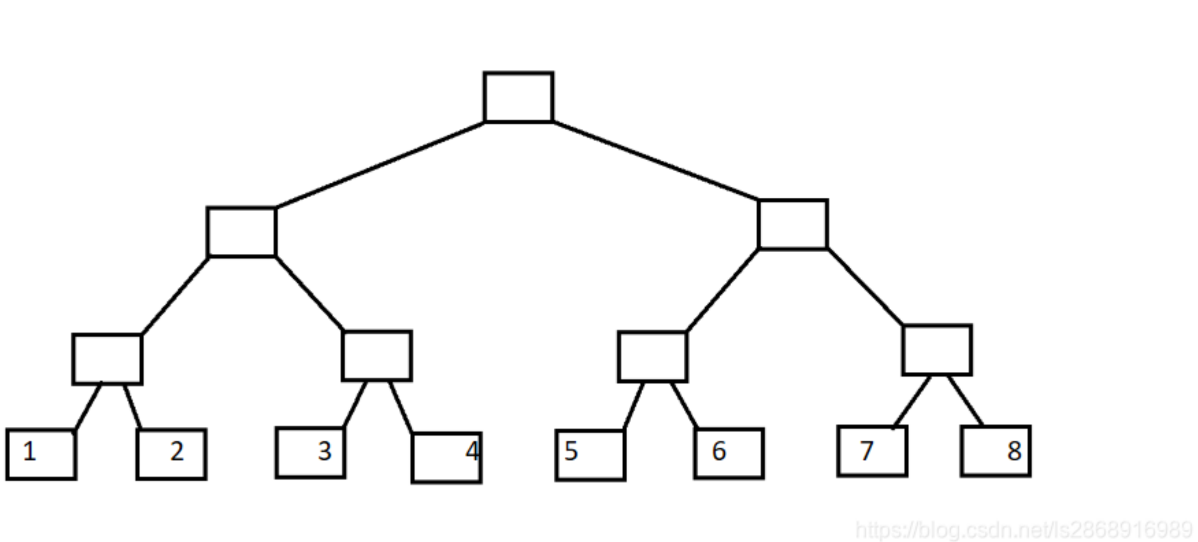
3.树状数组的突出特点是其编程的极端简洁性, 使用**lowbit**技术可以在很短的几步操作中完成树状数组的核心操作，其代码效率远高于线段树。

二. 树状数组的应用

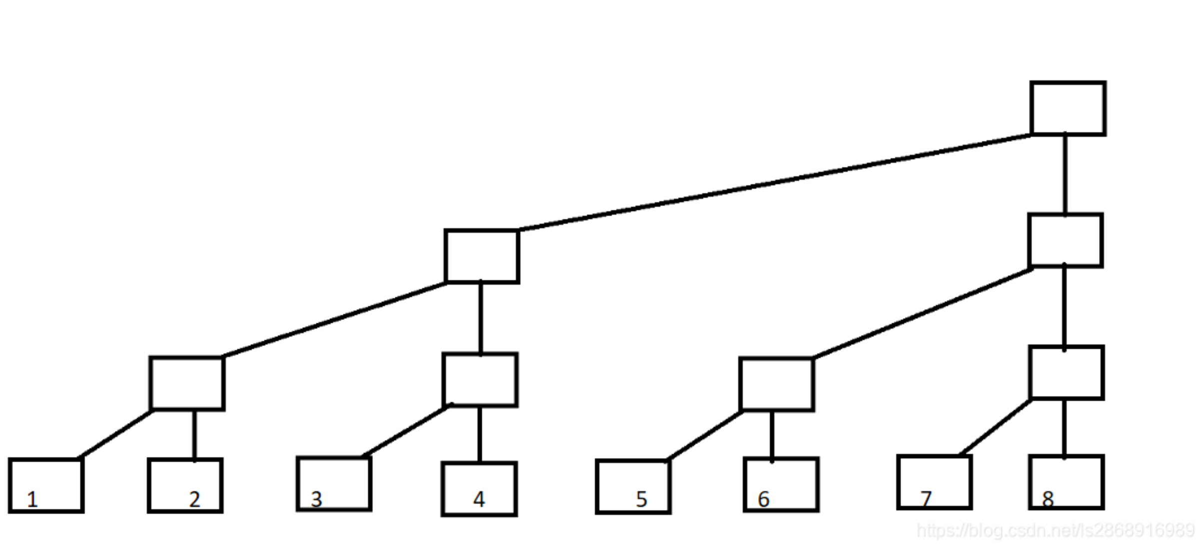
1.单点修改+区间查询

实现原理

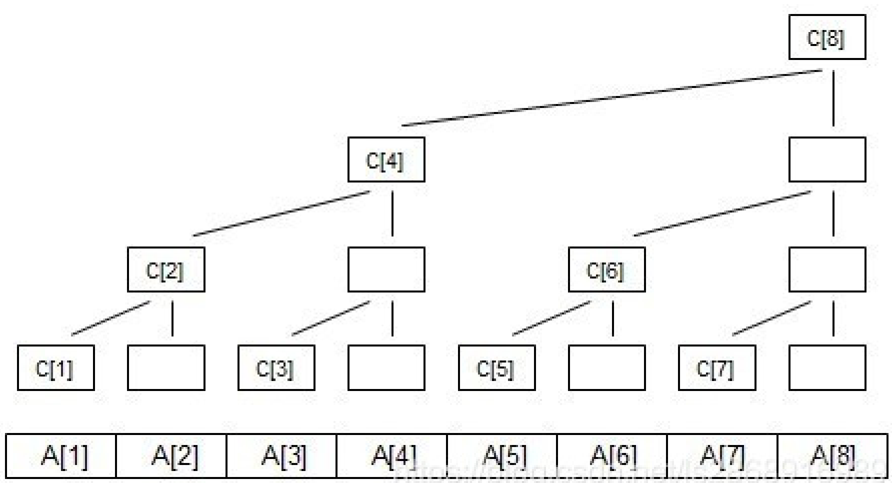
树状数组，顾名思义是树状的数组，我们首先引入二叉树，叶子节点代表A[1]~A[8]



现在变形一下:



现在定义每一列的顶端节点C数组（其实C数组就是树状数组），如图:



理解树状数组的重点

```
C[i]代表子树的叶子节点的权值之和，如图可以知道：

C[1]=A[1];

C[2]=A[1]+A[2];

C[3]=A[3];

C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];

C[5]=A[5];

C[6]=A[5]+A[6];
```

```
C[7]=A[7];

C[8]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]+A[8];
```

区间查询（求和）：

利用C[i]数组，求A数组中前i项和，举两个栗子：

①当i等于7时，前7项和：sum[7]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]；

而C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]；C[6]=A[5]+A[6]；C[7]=A[7]；可以得到：sum[7]=C[4]+C[6]+C[7]。

数组下标写成二进制：sum[(111)]=C[(100)]+C[(110)]+C[(111)]；

②当i等于5时，前5项和：sum[5]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]；

而C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]；C[5]=A[5]；可以得到：sum[5]=C[4]+C[5]；

数组下标写成二进制：sum[(101)]=C[(100)]+C[(101)]；

代码推演

细细观察二进制，树状数组追其根本就是二进制的应用，结合代码演示一下代码过程：

```
int sum(int j)//求区间[1,j]所有元素的和
{
    int ans=0;
    while(j>0){
        ans = ans + C[j];//从右往左区间求和
        j = j - lowbit(j);
    }
    return ans;
}

```

对于i=7进行演示：

ans += C[7]　　lowbit(7)=001　7-lowbit(7)=6(110)

ans+=C[6]　　lowbit(6)=010　6-lowbit(6)=4(100)

ans+=C[4]　　lowbit(4)=100　4-lowbit(4)=0(000)

break;

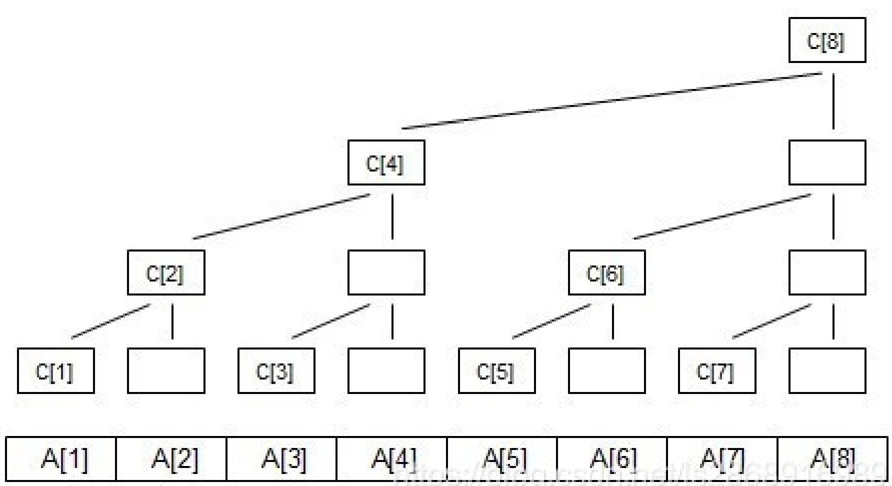
```
C[i]代表子树的叶子节点的权值之和，如图可以知道：

```

```
C[1]=A[1];

C[2]=A[1]+A[2];

C[3]=A[3];

C[4]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4];

C[5]=A[5];

C[6]=A[5]+A[6];

C[7]=A[7];

C[8]=A[1]+A[2]+A[3]+A[4]+A[5]+A[6]+A[7]+A[8];
```

单点修改(更新)：

当我们修改A数组中某个值时，应当如何更新C数组呢？回想一下，区间查询的过程，再看一下上文中列出的过程。这里声明一下：单点更新实际上是不修改A数组的，而是修改树状数组C，向上更新区间长度为lowbit(i)所代表的节点的值。

```
void update(int i,int VALUE)//更新单节点的值
{
    while(i<=n){
        C[i] = C[i] + VALUE;
        i = i + lowbit(i);//由叶子节点向上更新a数组
    }
}
//可以发现 更新过程是查询过程的逆过程
//由叶子结点向上更新C[]数组
```



如图：当在A[1]加上值val，即更新A[1]时，需要向上更新C[1],C[2],C[4],C[8]，这个时候只需将这4个节点每个节点的值加上val即可。

这里为了方便大家理解，人为添加了个A数组表示每个叶子节点的值，事实上**A数组并不用修改**，实际运用中也可不设置A数组，

单点更新只需修改树状数组C即可。下标写成二进制：C[(001)],C[(010)],C[(100)],C[(1000)]；

C[1] += val;

lowbit(1)=001   1+lowbit(1)=2(010)   C[2]+=val；

lowbit(2)=010   2+lowbit(2)=4(100)   C[4]+=val；

lowbit(4)=100   4+lowbit(4)=8(1000)   C[8]+=val；

由于c[1] c[2] c[4] c[8] 都包含有A[1]，所以在更新A[1]时实际上就是更新每一个包含A[1]的节点。

总结

1. **树状数组的重点就是利用二进制的变化，动态地更新树状数组。**
2. **树状数组的每一个节点并不是代表原数组的值，而是包含了原数组多个节点的值。**

   所以在更新A[1]时需要将所有包含A[1]的C[i]都加上val这也就利用到了二进制的神奇之处。

3. **如果是更新A[i]的值，则每一次对C[i] 中的 i 向上更新，即每次i+=lowbit(i),这样就能C[i] 以及C[i] 的所有父节点都加上val。**

   反之求区间和也是和更新节点值差不多，只不过每次 i-=lowbit(i)。

2. 区间修改 + 单点查询

通过“差分”（就是记录数组中每个元素与前一个元素的差），可以把这个问题转化为 单点修改 + 区间求值。

PS : 对于差分数组，从第一项到第n项求和，即会得到原始数组中第n项元素的值

```
for(int i=1;i<=n;i++){
    cin >> a[i];
    chafen[i] = a[i]-a[i-1];
    add(i , chafen[i]);
}

cin >> x >> y >> k;
//将区间[x,y]内每个数加上k ----> 单点改变chafen[x]+k   chafen[y+1]-k
add(x , k);
add(y+1 , -k);
```

3. 区间修改 + 区间查询 ------> 建议去用线段树