lim 杯数学方面综合比赛（试题）

注意事项：

1. 建议闭卷，如果自己开卷莉姆丝在看着你。

2. 内容以高数、线代和概率论为主，另有文学类题目。

3. 答题后将答案（仅答案，无需试题原题，注意标明题号）发送至邮箱 2280883416@qq.com（即莉姆丝账号的 QQ 邮箱），暂不接受其他方式提交。如果有莉姆丝粉丝牌记得截图（等级）发过来，有小加分（1 级 1 分，上限 10 分），附在提交的答案尾页。

4. 本卷正式题目总分 250 分，附加题（小作文）50 分，共计 300 分。如果只想做附加题，在发送的答案前标明，将按照满分 300 分对附加题进行评分。

5. 友谊第一，比赛第二。

参考公式：

醒醒，公式都不记还想我给你写？

零、成分查询题（共一题，答对不计分，答错扣 300 分）

在这里该单推的粉毛是谁？

A.永雏塔菲

B.阿夸

C.hiiro

D.莉姆丝

一、选择题（每题 6 分共 10 题，共计 60 分）

在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设 m 与 n 都是常数，若反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{x^n(1-e^{-x})}{(1+x)^m}dx$收敛，则 m 与 n 的取值范围为（　）.

A. n>-2,m>n+1　B. n>-2,m<n+1　C. n<-2,m<n+1　D. n<-2,m>n+1

2. 在曲线 $x=t,y=-t^2,z=t^3$ 的所有切线中，与平面 27x+54y+27z=4 平行的切线（　）.

A. 只有一条　B. 只有两条　C. 至少有三条　D. 不存在

3. 微分方程$y''+y'+y=e^{-\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$的一个特解应具有形式（其中 a,b 为常数）（　）.

A. $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x+bx\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$　B. $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

C. $xe^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+b\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$　D. $e^{-\frac{1}{2}x}\left(a\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+bx\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

4. 利用变量代换$u=x,v=\frac{y}{x}$，可将方程$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$化成新方程（　）.

A. $u\frac{\partial z}{\partial u}=z$　B. $v\frac{\partial z}{\partial v}=z$　C. $u\frac{\partial z}{\partial v}=z$　D. $v\frac{\partial z}{\partial u}=z$

5. 设函数$f(t)$连续，区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2y\}$，则$\iint\limits_D f(xy)dxdy$ =（　）.

A. $\int_{-1}^{1}dx\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}f(xy)dy$　B. $2\int_0^2 dy\int_0^{\sqrt{2y-y^2}}f(xy)dx$

C. $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)dr$　D. $\int_0^{\pi}d\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r^2\sin\theta\cos\theta)rdr$

6. 设 A,B 是 n 阶实对称可逆矩阵，则存在 n 阶可逆矩阵 P，使下列关系式

①PA=B；②$P^{-1}ABP=BA$；③$P^{-1}AP=B$；④$P^TA^2P=B^2$.

成立的个数为（　）.

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

7.$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5$均是 4 维列向量，记$A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5)$.已知方程组$Ax=\alpha_5$有通解 $k(1,-1,2,0)^T+(2,1,0,1)^T$，其中 k 是任意常数，则下列向量不是方程组$Bx=0$的解的是（　）.

A. $(1,-2,-2,0,-1)^T$　　B. $(0,3,-4,1,-1)^T$　　C. $(2,1,0,1,-1)^T$　　D. $(3,0,2,1,-1)^T$

8. 二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x^T\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ -2 & -3 & 2\\ 0 & -8 & 0\end{bmatrix}x$的秩为（　）.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

9. 设随机变量$X\sim B(4,\frac{2}{3})$，$Y\sim B(8,\frac{4}{5})$，且相关系数ρ_{XY}=-1,则（　）.

A. $P\{Y=-1.2X-9.6\}=1$　　B. $P\{Y=-1.2X+9.6\}=1$

C. $P\{Y=1.2X-3.2\}=1$　　D. $P\{Y=1.2X+3.2\}=1$

10. 设总体$X\sim N(a,\sigma^2)$，$Y\sim N(b,\sigma^2)$，且相互独立.分别从 X 和 Y 中各抽取容量为 9 和 10 的简单随机样本，记它们的方差分别为S_X^2和S_Y^2，并记$S_{12}^2=\frac{1}{2}(S_X^2+S_Y^2)$和$S_{XY}^2=\frac{1}{18}(8S_X^2+10S_Y^2)$，则这四个统计量$S_X^2$，$S_Y^2$，$S_{12}^2$，$S_{XY}^2$中，方差最小者是（　）.

A. S_X^2　　B. S_Y^2　　C. S_{12}^2　　D. S_{XY}^2

二、填空题（每题 6 分共 10 题，共计 60 分）

11. 设 x>0 且 x≠1，则$\lim\limits_{n\to\infty}n^2\left(\sqrt[n-1]{x}-\sqrt[n]{x}\right)$=________.

12. 设函数 $f(x)$ 在 [1,+ ∞) 上连续， $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ 收敛，且满足 $f(x)=\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}+\dfrac{1+x^2}{1+x^4}\int_1^{+\infty} f(x)dx$，则 $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ =_______.

13. 设函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$ 上连续，且满足 $(f''_{xx}+f''_{yy})e^{x^2+y^2}=1$，则 $\iint\limits_D xf'_x+yf'_y d\sigma$ =_______.

14. 设 $z=f(\sqrt{x^2+y^2})$，其中 $f(u)$ 有二阶连续导数，$f(0)=f'(0)=0$，且 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}=z+\sqrt{x^2+y^2}$，则 $f(u)$ =_______.

15.直线 $L:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-1}{3}=z+1$ 绕直线 $L_1:\begin{cases}x=2\\y=3\end{cases}$ 旋转一周所成的曲面方程为_______.

16. 设 A=E+αβ^T，其中α，β均为 n 维列向量，α^{T}β=3，则|A+2E|=_______.

17. 设 A 是 3 阶实对称矩阵，λ=5 是 A 的二重特征值，对应的特征向量为 $\xi_1=[1,-1,2]^T$，$\xi_2=[1,2,1]^T$，则二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx$ 在 $x_0=[1,5,0]^T$ 的值 $f(1,5,0)$ =_______.

18. 设 A 是三阶矩阵，$b=[9,18,-18]^T$，方程组 $Ax=b$ 有通解 $k_1[-2,1,0]^T+k_2[2,0,1]^T+[1,2,-2]^T$，其中 k_1，k_2 是任意常数，则 A^{100}=_______.

19. 甲、乙两人轮流投篮，甲先投，甲每轮只投篮一次，而乙每轮投篮两次，先投中者为胜.已知甲、乙每次投篮命中率分别为 p，0.5，且每人命中与否相互独立，若甲、乙两人胜率相同，则 p=_______.

20. 已知随机变量 X 在（1,2）上服从均匀分布，在 X=x 条件下 Y 服从参数为 x 的指数分布，则 E(XY^2)=_______.

三、解答题（共 6 小题，共计 130 分）

解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

21. （20 分）求下列极限.

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\sin(\pi\sqrt{4n^2+2}))^n$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{\arctan(1-e^x)}{\sqrt{1+4x^2}}+\left(\dfrac{\arctan x}{\tan x}\right)^{\frac{3}{\sin^2 x}}\right]$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)-\sin(\sin x)}{x-\sin x}$

（4）$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^x-(\sin x)^x}{x^2\ln(1+x)}$

22. （20 分）设 a 与 b 都是常数，且 b>a>0.

（1）写出 yOz 平面上的圆 $(y-b)^2+z^2=a^2$ 绕 Oz 轴旋转一周生成的环面 Σ 的方程;

（2）记 Σ 所围成的空间区域为 Ω，计算三重积分 $\iiint\limits_{\Omega}(x+y)^2dv$.

23. （20 分）设函数 $f(x)$ 在区间[a,b]上具有连续导数，$f'(x)>0$，且 $a\le f(x)\le b$.

求证:

（1）对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$，存在 $c\in(a,b)$，使得 $f'(c)=\sqrt{f'(x_1)f'(x_2)}$；

（2）存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f[f(a)]-f[f(b)]=[f'(\xi)]^2(a-b)$.

24. （20 分）设$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + 2y_{n-1} \\ y_n = 4x_{n-1} + 3y_{n-1} \end{cases}$，(n=1,2,3,...),且$x_0 = 2$，$y_0 = 1$，求$x_{2077}$.

25. （20 分）设三阶矩阵$P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，其中$\alpha_1$，$\alpha_2$分别是三阶矩阵 A 对应于特征值-1 与 1 的特征向量，且$(A-E)\alpha_3 - \alpha_2 = 0$.

（1）证明 P 可逆;

（2）计算$P^{-1}A^*P$.

26. （30 分）设随机变量 X 的概率密度为$f_X(x) = \begin{cases} 2x, 0 < x < 1 \\ 0, 其他 \end{cases}$，在给定$X = x(0 < x < 1)$的条件下，随机变量 Y 在$(-x, x)$上服从均匀分布.

（1）求$P\left\{\frac{1}{2} < X < \frac{3}{2} \middle| Y = EY\right\}$;

（2）判断 X 与 Y 的独立性、相关性，并给出理由;

（3）令随机变量 Z=X-Y，求$f_z(z)$.

四、附加题（小作文，50 分）

将你对莉姆丝的爱用文字描绘出来，文体不限，诗歌更好，300 字以上。

评分要素：修辞，剧情，情感，发病程度，好活赖活。

温馨提示：会进行枝网查重，查重率 70%以上不计分；名字写错，负分并记入莉姆丝的假粉榜；写的特别好的按心情加分。