Monte Carlo Príklady

Každý príklad je požadované riešiť metódou **statickej simulácie** – **Monte Carlo**. Správne (exaktné) výsledky sú uvedené pri niektorých príkladoch v hranatej zátvorke.

Príklad 1

Dvaja hráči hádžu férovou mincou. Ak padne hlava, hráč ktorý hádzal vyhráva.

- Aká je pravdepodobnosť, že vyhrá prvý hráč? *[2/3 = 0.666667]*
- Aká že počas 8 hodov nikto nevyhrá? *[$(1/2)^8$ = 0.00390625]*

Príklad 2

Medzi 10 000 procesormi je 100 procesorov chybných.

- Aká je pravdepodobnosť, že v počítači je chybný procesor? *[0.01]*
- Aká je pravdepodobnosť, že v pracovnej stanici, ktorá obsahuje 3 procesory, sú všetky chybné? *[9.7×10^{-7}]*

Príklad 3

Dvaja bossovia chodia na obed do rovnakého podniku. Obed sa podáva od 12:00 do 14:00, pričom doba stravovania pri oboch je rovnaká, 30 minút. Aká je pravdepodobnosť, že sa stretnú? *[7/16 = 0.4375]*

Príklad 4

V priebehu 100ms budú cez satelit ALOHA vysielať dve pozemné stanice. Doba vysielania obidvoch staníc je 25ms. Aká je pravdepodobnosť kolízie? *[7/16 = 0.4375]*

Príklad 5

Nech nejaký systém závisí od troch prvkov Z_1, Z_2 a Z_3. Ak zlyhajú všetky tri prvky, systém prestane pracovať, ak zlyhajú ľubovoľné dva prvky, systém prestane pracovať s pravdepodobnosťou 0.7, ak zlyhá iba jeden prvok, systém prestane pracovať s pravdepodobnosťou 0.2. Ak žiadny prvok nezlyhá, systém pracuje iste. Pravdepodobnosť zlyhania prvkov sú $Pr(Z_1) = 0.4$, $Pr(Z_2) = 0.3$, a $Pr(Z_1) = 0.1$. Aká je pravdepodobnosť zlyhania celého systému? *[0.211]*

Príklad 6

V červenej a modrej miske boli cukríky. Cukríky boli zelené a biele. V červenej miske boli 2 zelené a 8 bielych cukríkov, v modrej miske boli 4 zelené a 1 biely cukrík. Cukríky sme vysypali na tanier a ponúkli hosťom. Následne sa zistilo, že cukríky v modrej miske olízal pes. Aká je pravdepodobnosť, že hosť si vybral cukrík olízaný psom, ak vieme, že hosť zjedol biely cukrík? *[1/9 = 0.1111111]*

Príklad 7

Vo výrobe je 0.3% zlých čipov. Test vyradí čip s pravdepodobnosťou 98% ak bol zlý, a test vyradí čip s pravdepodobnosťou 0.1% ak bol dobrý.

- Aká je pravdepodobnosťou, že testom vyradený čip je naozaj zlý? *[74.7%]*
- Vyrobíme 10 000 čipov. Koľko bude (v priemere) vyradených? *[39.37]*

Príklad 8

Vypočítajte hodnotu nasledovného určitého integrálu: *[0.059374]*

$$\int_1^2 sin(x)cos(x)dx$$

Príklad 9

Vypočítajte hodnotu nasledovného dvojného určitého integrálu: *[250]*

$$\int_2^4 \int_0^5 (x^2y)dxdy$$

Príklad 10

Vypočítajte hodnotu nasledovného trojného určitého integrálu: *[17.5268]*

$$\int_1^{10} \int_2^4 \int_3^5 \frac{x}{yz}dxdydz$$

Príklad 11

V programovacom jazyku Java existuje trieda Random, ktorá obsahuje metódu nextInt(n), ktorej úlohou je vygenerovať náhodné číslo od 0 po n – 1. Popis funkcie uvádza rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti vzhľadom na generované výsledky. Experimentálne overte či daná funkcia skutočne poskytuje čísla z rovnomerného rozdelenia. Ako spôsob validácie výsledkov použitie porovnávanie počtov výskytov „nameraných" hodnôt s ich teoretickými.

Príklad 12

Experimentálne overte pravdepodobnosť možných výsledkov pre chronicky známu hru zvanú „kameň, papier, nožnice". Je evidentné, že pravdepodobnosť výhry pre „použitie" kameňa, papiera alebo nožníc je rovná 1/3. Ukážte, že teoretické pravdepodobnosti súhlasia s experimentálnymi.

Príklad 13

Čas potrebný na vypracovanie písomky má normálne rozdelenie pravdepodobnosti s priemernou dobou vypracovania 50 minút a s odchýlkou 10 minút.

- S akou pravdepodobnosťou dokončí náhodne vybraný študent vypracovanie písomky do jednej hodiny? *[0,8413]*
- Koľko času treba stanoviť na vypracovanie písomky, aby ju v danom čase dokončilo 90% študentov? *[63 minút]*

Príklad 14

Doba životnosti výrobku má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti so strednou hodnotou 200 hodín. Určte:

- pravdepodobnosť toho, že výrobok bude funkčný aspoň 300 hodín, *[0,2231]*
- pravdepodobnosť toho, že nebude funkčný dlhšie ako je jeho priemerná doba životnosti, *[0,63212]*
- maximálnu záručnú dobu, ktorú chce poskytnúť jeho výrobca, ak pripúšťa maximálne 5% reklamácií. *[10]*

Príklad 15

Vlak v metre chodí vo večerných hodinách pravidelne každých 10 minút. Aká je pravdepodobnosť, že budete na príchod vlaku čakať viac ako 3 minúty, ak prídete na stanicu náhodne? *[70%]*

Príklad 16

V istom hypermarkete sa objavil oznam: „Ak nie sú všetky pokladne v prevádzke a Vy čakáte v rade na pokladňu viac ako 3 minúty, dostanete od nás 5 Eur ako bonus.“ Predpokladajme, že nie všetky pokladne sú otvorené a jeden zákazník čaká priemerne na pokladňu 100 sekúnd s exponenciálnym rozdelením pravdepodobnosti. S akou pravdepodobnosťou získate sľúbený bonus, ak stojíte v rade na pokladňu číslo 4? *[0,1653]*

Príklad 17

Priemerná hmotnosť balíka, zaslaného poštou, je 5kg s odchýlkou 1,5kg. Aká je pravdepodobnosť, že 100 zaslaných balíkov, ktoré sú nakladané do poštového auta, prevýši svojou hmotnosťou jeho nosnosť, ktorá je 550kg? *[0,0004]*

Príklad 18

Študent dochádza do školy a zo školy trolejbusom, ktorý jazdí v 8-minútových intervaloch. Na zástavku prichádza náhodne vzhľadom na odchod trolejbusu. S akou pravdepodobnosťou bude jeho celková doba čakania na trolejbus za celý semester najviac 6 hodín (pričom semester má 13 týždňov a študent chodí do školy 4 dní do týždňa)? *[0,0087]*

Príklad 19

Daných je 100 nezávislých náhodných premenných a každá z nich má exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom rovným 2. Aká je pravdepodobnosť, že ich súčet neprekročí hodnotu 60? *[0,9772]*

Príklad 20

Koľko čísel z intervalu <0, 6> je potrebné náhodne zvoliť, aby ich aritmetický priemer ležal v intervale <2,98, 3,02> s pravdepodobnosťou aspoň 0,99? *[49730]*

Príklad 21

Horná asymptotická zložitosť triediaceho algoritmu Bubble Sort je $O(n^2)$, pričom dolná asymptotická zložitosť je $\Omega(n)$. To značí, že v najhoršom prípade algoritmus vykoná n^2 krokov, a v najlepšom n krokov (ak poskytnuté dáta sú vopred utriedené). Experimentálne toto tvrdenie overte použitím algoritmu na utriedenie náhodne vygenerovaných prvkov poľa. Veľkosť poľa by mala byť fixná počas celej simulácie a jej hodnota by mala byť niekde v rozmedzí od 6 až po 10 prvkov (hodnota môže byť aj väčšia avšak je potrebné zvážiť možný počet krokov). Počet replikácií je odporúčaný rádovo niekoľko miliónov v závislosti od výkonu počítača.

- Je najväčší možný počet krokov ekvivalentný vždy n^2? V koľkých percentách prípadov takáto situácia nastane?
- V koľkých percentách prípadov nastane situácia, že dáta sú utriedené a teda počet krokov je ekvivalentný n?
- Aký je priemerný počet krokov potrebných pre utriedenie všetkých dát?

Pseudokód algoritmu

```
Funckia BubbleSort

    definuj premennú výmena;

    Rob

        výmena := false;

        Pre i od 0 do počet prvkov - 1, i++

            Ak Kľúč[i] > Kľúč[i + 1] tak

                Vymeň (i, i + 1);

                výmena := true;

    Pokiaľ (výmena)

Koniec
```

Príklad 22

Algoritmus binárne vyhľadávanie, zvaný aj interpolačné vyhľadávanie alebo bisekcia, má hornú asymptotickú algoritmickú zložitosť $O(\log_2(n))$, kde n reprezentuje počet prvkov, medzi ktorými sa vyhľadáva. Je založený na predpoklade, že prvky sú utriedené pred začatím vyhľadávania (v prípade nejasností si dohľadajte viacej informácií). Úlohou je experimentálne zistiť nasledovné informácie:

- Je najväčší možný počet krokov ekvivalentný vždy $\log_2(n)$? V koľkých percentách prípadov takáto situácia nastane?
- V koľkých percentách prípadov nastane situácia, že prvok je nájdený na prvý krát (je vykonaný len jeden krok)?
- Aký je priemerný počet krokov potrebných na nájdenie požadovaného prvku?

Z vyššie uvedeného vyplýva, že počet prvkov musí byť fixný a na základe toho je odporúčaná veľkosť poľa 32 prvkov (všeobecne, mocnina dvojky) a počet replikácií minimálne 1 000 000.

Pseudokód algoritmu

Hľadaný prvok Phľadaný sa vyhľadáva v intervale <Hdolná;Hhorná> (H – hranica).

Vyberie sa prvok Pstred zo stredu intervalu:

- *Ak Pstred = Phľadaný, konči úspechom.*
- *Ak Hdolná = Hhorná, konči neúspechom.*
- *Ak je Pstred < Phľadaný, potom Hdolná= Pstred + 1 a opakuj hľadanie na tomto intervale.*
- *Ak je Pstred > Phľadaný, potom Hhorná= Pstred a opakuj hľadanie na tomto intervale.*