

Digitaltechnik

Wintersemester 2017/2018

4. Vorlesung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT





1. Einleitung
2. Kombinatorische Logik
3. Boole'sche Gleichungen
4. Boole'sche Algebra
5. Zusammenfassung

Einleitung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

001001011111001101111110101011000100001
0011010010000100000101011100010011111100
111000101001011001000100011001011111110
0001000101100001010101111111001101101010
1011110101101111101101011000101111010110
0000101010110000011010110110101000111110
1000111011100011110110110111101101101000
110111010100010111000110011000011100111
100001110111100000011111011111000100110
1000110110110001111000111011010000001111
1010100110011110111110100011010100110110
0110011110111001001010101100010000111101
0111010110110101111001011011100100101100
1111011011101101101010010000100010100101
1111110111111101100110111000001111010110
1010111000011001100001001110101110111011



- ▶ Testate als Klausurzulassung
 - ▶ notwendig, wenn DT mit schriftlicher Fachprüfung abgeschlossen wird
 - ▶ nicht notwendig, wenn DT mit schriftlicher Studienleistung abgeschlossen wird
 - ▶ nicht notwendig, wenn DT Klausurzulassung bereits vorher erworben

- ▶ Themen für Testate:
 - ▶ $T_x = \ddot{U}_x = V_x$
 - ▶ x entsprechend aktueller Kalenderwoche (siehe Moodle)
 - ▶ keine Themen, die nur als Zusatzübung behandelt wurden

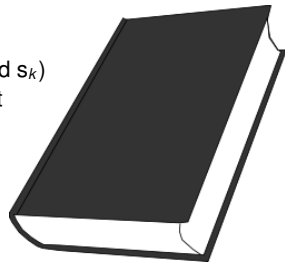
- ▶ Überarbeitung von Vorlesungsfolien

Rückblick auf die letzten Vorlesungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- ▶ Komplexität und (digitale) Abstraktion
- ▶ Zahlensysteme
 - ▶ vorzeichenlos ($u_{b,k}$) und vorzeichenbehaftet ($bv_{b,k}$ und s_k)
 - ▶ Addition, Negieren durch Komplement und Inkrement
 - ▶ Bitbreitenerweiterung
- ▶ Logikgatter $\mathbb{B}^n \rightarrow \mathbb{B}^k$
 - ▶ Symbole und Wahrheitwertetabellen
 - ▶ XOR als Paritätsfunktion
- ▶ Physikalische Realisierung von Logikgattern
 - ▶ Logikpegel
 - ▶ Feldeffekt-Transistoren
 - ▶ CMOS-Gatter
 - ▶ Leistungsaufnahme
 - ▶ Moor'sches Gesetz



Harris 2013
Kapitel 1

Wiederholung: Zahlendarstellungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Woran erkennt man, ob Zahlendarstellung vorzeichenbehaftet ist?
Wie sieht die hexadezimale Darstellung von Zweierkomplement-Zahlen aus?
Muss diese mit einem „-“ markiert werden?

- ▶ $u_{2,5}(11010_2) = 26_{10} = 1A_{16}$
- ▶ $bv_{2,5}(11010_2) = -10_{10} = 8A_{16}$
- ▶ $s_5(11010_2) = -6_{10} = FA_{16}$

Wiederholung: Zahlendarstellungen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Wie kann Überlauf bei Addition/Subtraktion vermieden werden kann bzw. wie geht man damit um?
Welche technischen Schwierigkeiten ergeben sich daraus?

1	1	1			unsigned	signed
	0	1	1	1	7_{10}	7_{10}
+	1	0	1	0	10_{10}	-6_{10}
	0	0	0	1	1_{10}	1_{10}
					OV=1	OV=0

Aufbau eines Multiplexers?

► $\text{MUX} : \mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$

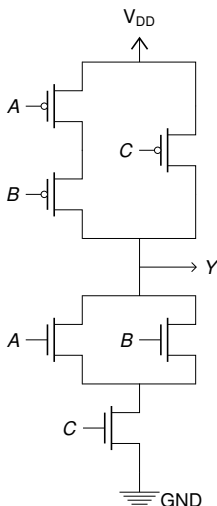
► $\text{MUX}(I_0, I_1, S) = I_S = S ? I_1 : I_0$

I_0	I_1	S	F
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Wiederholung: CMOS $Y = \overline{(A + B) C}$



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Schichtenmodell eines Computers



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Anwendungs- software	Programme
Betriebs- systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro- architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital- schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog- schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Überblick der heutigen Vorlesung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- ▶ Kombinatorische Logik
 - ▶ Boole'sche Gleichungen
 - ▶ Boole'sche Algebra



Harris 2013
Kap. 2.1 - 2.3
Seite 51 - 62

Kombinatorische Logik

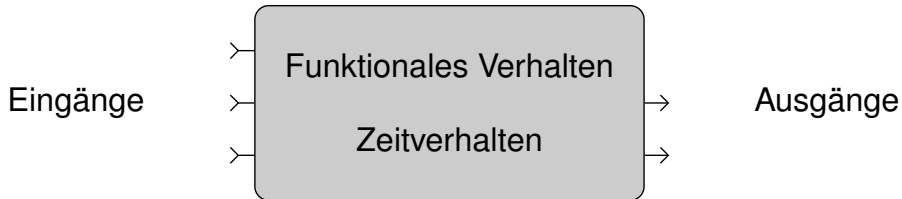


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

11111000101001111000100101111010011010011
1100111111101110000100000101100100011001
1110110011111000100111011010101110000111
1001111011001000001001111101101010101110
0001111000110101111011110010000001101100
000010000110101100011110111110010111111
00111110001101000100101100011100010110101
0000010001101011010010110010010000100101
1010101010001111000111111011001110000100
01111100000110101001001111110000111010000
0100100111000100000101111000000001111101
01101110100000101111000000000110100000011
00110101111101111110101010000110101100011
10010100001101101100111001011100000001110
0010000011010010110000010100011010100100
1100100010010101100011010100010010111111



- ▶ Eingängen
- ▶ Ausgängen
- ▶ Spezifikation der realisierten (boolschen) Funktion
- ▶ Spezifikation des Zeitverhaltens

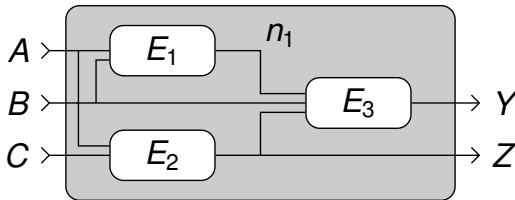


Komponenten einer *logischen* Schaltung

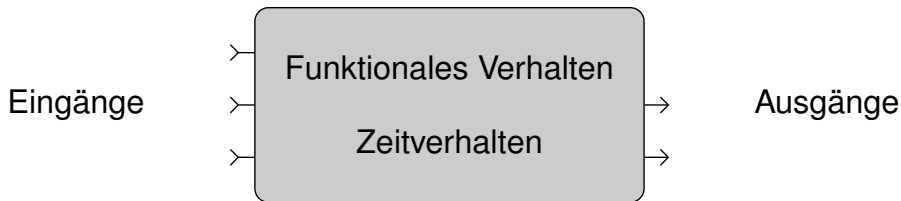


TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

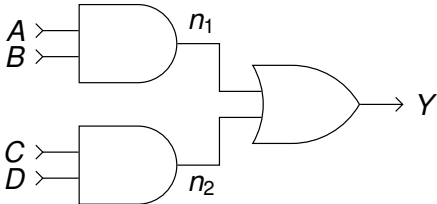
- ▶ Verbindungsknoten
 - ▶ Eingangs-Terminals: A, B, C
 - ▶ Ausgangs-Terminals: Y, Z
 - ▶ interne Knoten: n_1
- ▶ Schaltungselemente
 - ▶ E_1, E_2, E_3
 - ▶ jedes selbst eine Schaltung \rightarrow Hierarchie



- ▶ kombinatorische Logik („Schaltnetz“)
 - ▶ Ausgänge hängen nur von *aktuellen* Eingangswerten ab
- ▶ sequentielle Logik („Schaltwerk“)
 - ▶ Ausgänge hängen von aktuellen Eingangswerten und **internem** Zustand ab
 - ⇒ Ausgänge indirekt abhängig von *vorherigen* Eingangswerten



- ▶ jedes Schaltungselement ist selbst kombinatorisch
- ▶ jeder Verbindungsknoten ist
 - ▶ Eingang in die Schaltung, oder
 - ▶ an *genau ein* Ausgangsterminal („Treiber“) eines Schaltungselements angeschlossen
- ▶ jeder Pfad durch die Schaltung besucht jeden Verbindungsknoten maximal einmal (zyklenfrei)



Boole'sche Gleichungen



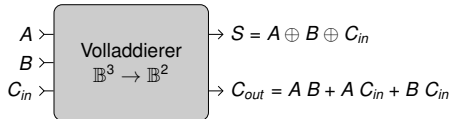
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1011011100000100010111000111100100010000
1101111011101010010101100100000101101010
0011010010000011110001110000110011110011
1110101000100111100110001100010000010111
0001010101001100010001000011111011100000
1111101011000010001000111101110011111110
0001011100001011111110000000011100111111
0111101010110100110011001001010000011
0111100100101110111101011101001001010001
0101010101110101011001111000000001111101
0010100001100100001101101110100011010100
1101011000011011110100101100010001111001
11000100100110001111101000011111111011010
1011011101001000010100001010001000010110
0110101101110011010011011110110011011010
0111000101100110000100000001000100111100

- ▶ beschreiben Ausgänge einer kombinatorischen Schaltung als (boolsche) Funktion der Eingänge
- ⇒ Spezifikation des funktionalen Verhaltens (ohne zeitliche Information)
- ▶ unter Verwendung elementarer boole'scher Operatoren (sortiert nach *Operatorpräzedenz*):
 - ▶ NOT: \bar{A}
 - ▶ AND: $A B = A \cdot B$
 - ▶ XOR: $A \oplus B$
 - ▶ OR: $A + B$

▶ Beispiel

- ▶ $S = F_1 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$
- ▶ $C_{out} = F_2 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$





Komplement: Boole'sche Variable mit einem Balken (invertiert)
 $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

Literal: Variable oder ihr Komplement
 $A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}$

Implikant: Produkt von Literalen
 $ABC, A\overline{C}, BC$

Minterm: Produkt (UND, Konjunktion) über alle Eingangsvariablen
 $ABC, A\overline{B}\overline{C}, \overline{A}BC$

Maxterm: Summe (ODER, Disjunktion) über alle Eingangsvariablen
 $(A + \overline{B} + \overline{C}), (A + B + \overline{C}), (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

- ▶ Produkt (Implikant), das jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- ▶ entspricht einer Zeile in Wahrheitstabelle
- ▶ jeder Minterm wird für *genau eine* Eingangskombination *wahr* (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	B	Y	Minterm
0	0	0	$m_0 = \bar{A} \bar{B}$
0	1	1	$m_1 = \bar{A} B$
1	0	1	$m_2 = A \bar{B}$
1	1	0	$m_3 = A B$

Disjunktive Normalform (DNF)

Sum-of-products (SOP)

- ▶ Summe aller Minterme, für welche die Funktion *wahr* ist
- ⇒ jede boolsche Funktion hat *genau eine* DNF (abgesehen von Kommutation)
- ▶ im Beispiel: $Y = m_1 + m_2 = \bar{A} B + A \bar{B}$
- ⇒ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $\bar{A} B + A \bar{B}$

A	B	Y	Minterm
0	0	0	$m_0 = \bar{A} \bar{B}$
0	1	1	$m_1 = \bar{A} B$
1	0	1	$m_2 = A \bar{B}$
1	1	0	$m_3 = A B$

- ▶ Summe, welche jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- ▶ entspricht einer Zeile in Wahrheitstabelle
- ▶ jeder Maxterm wird für *genau eine* Eingangskombination *falsch* (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	B	Y	Maxterm
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \bar{B}$
1	0	1	$M_2 = \bar{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \bar{A} + \bar{B}$

Konjunktive Normalform (KNF)

Product-of-sums (POS)



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- ▶ Produkt aller Maxterme, für welche die Funktion *falsch* ist
- ⇒ jede boolsche Funktion hat *genau eine* KNF (abgesehen von Kommutation)
- ▶ im Beispiel: $Y = M_0 M_3 = (A + B) (\bar{A} + \bar{B})$
- ⇒ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $(A + B) (\bar{A} + \bar{B})$

A	B	Y	Maxterm
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \bar{B}$
1	0	1	$M_2 = \bar{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \bar{A} + \bar{B}$

Boole'sche Algebra



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

0011001111101001000110101100110100010000
1001101101101101111100110000010101000101
0100111101001100001001111000111011010101
0111001101101001011101000011001111000100
1100110010011001000111110010011011000000
0010000011011110010000001000001010100011
1111101000100101110111110101000100010101
0001001111110111110100110011001011001111
1111100101111000001010101111001001010110
0111010011000011111110101101101110000001
0001111111001010100001110001101111001101
1100000110111111111110110101001101011111
0011011011101100101111101011111011110010
0100001000111110111111100010110010000010
1001111100100001101100101011110100001110
0101101010111110000100111001101110001101



- ▶ Rechenregeln zur Vereinfachung boole'scher Gleichungen
 - ▶ Axiome: grundlegende Annahmen der Algebra (nicht beweisbar)
 - ▶ Theoreme: komplexere Regeln, die sich aus Axiomen ergeben (beweisbar)
- ▶ analog zur Algebra auf natürlichen Zahlen
- ▶ ergänzt um Optimierungen durch Begrenzung auf \mathbb{B}
- ▶ Axiome und Theoreme haben jeweils duale Entsprechung: $\text{AND} \leftrightarrow \text{OR}$, $0 \leftrightarrow 1$

Axiome der boole'schen Algebra



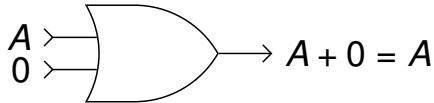
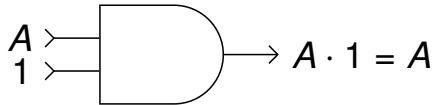
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Axiom		Duales Axiom		Bedeutung
A1	$B \neq 1 \Rightarrow B = 0$	A1'	$B \neq 0 \Rightarrow B = 1$	Dualität
A2	$\overline{0} = 1$	A2'	$\overline{1} = 0$	Negieren
A3	$0 \cdot 0 = 0$	A3'	$1 + 1 = 1$	Und / Oder
A4	$1 \cdot 1 = 1$	A4'	$0 + 0 = 0$	Und / Oder
A5	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	A5'	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	Und / Oder

T1: Neutralität von 1 und 0



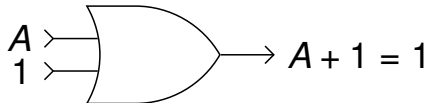
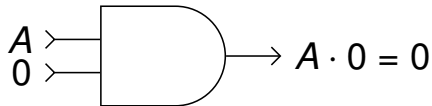
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



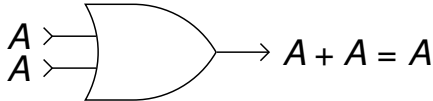
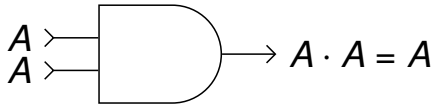
T2: Extremum von 0 und 1



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



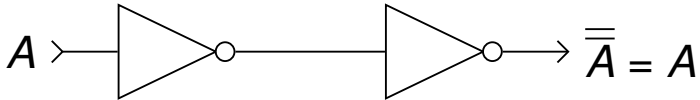
T3: Idempotenz



T4: Involution



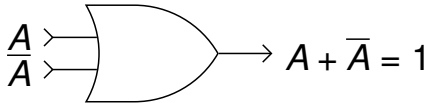
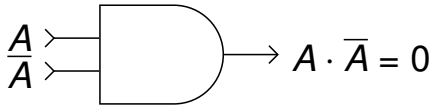
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



T5: Komplement



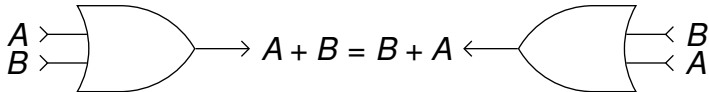
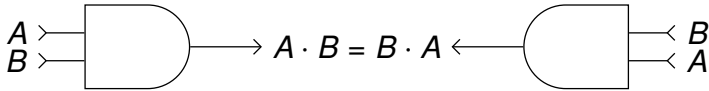
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



T6: Kommutativität



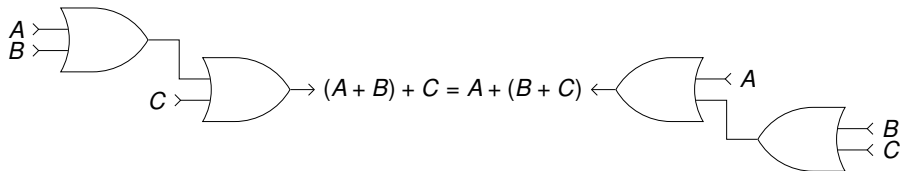
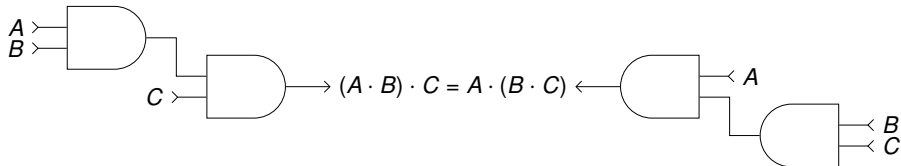
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



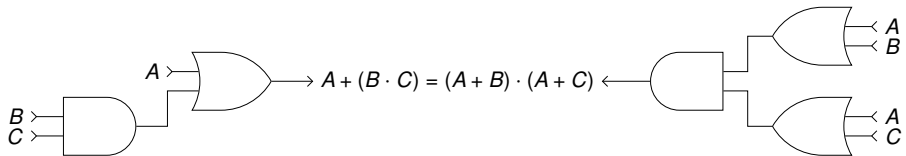
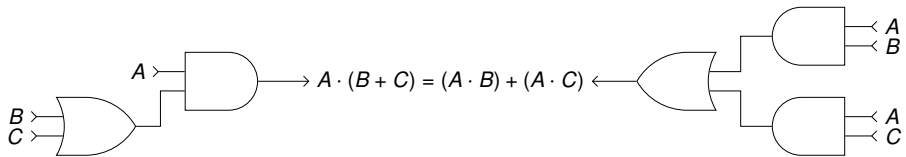
T7: Assoziativität



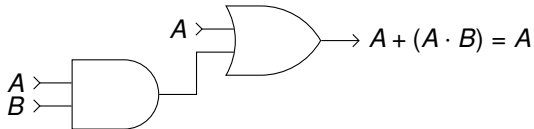
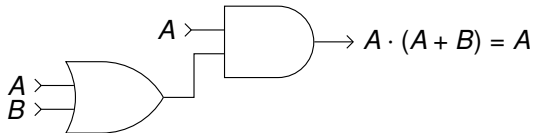
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



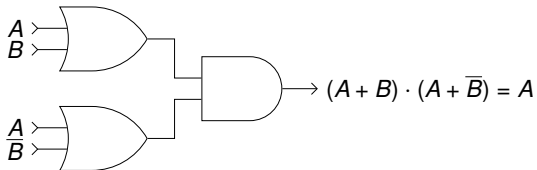
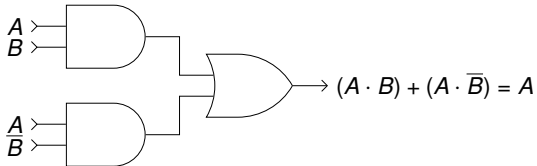
T8: Distributivität



T9: Absorption



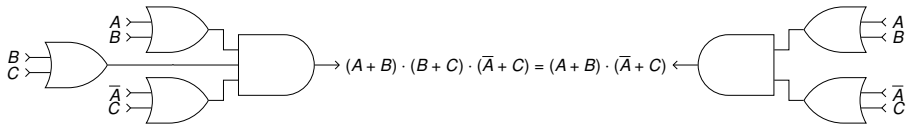
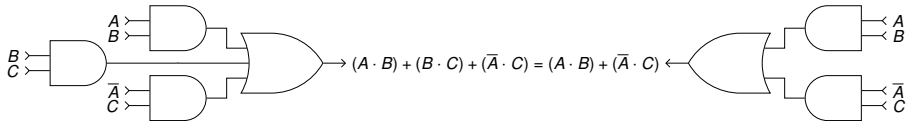
T10: Zusammenfassen



T11: Konsensus



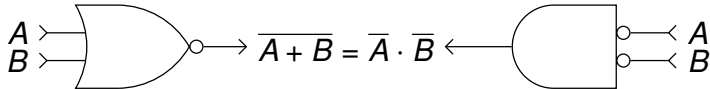
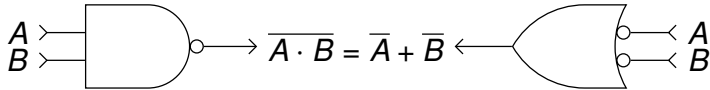
TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



T12: De Morgan



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT



Augustus De Morgan, 1806 - 1871



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

- ▶ erster Präsident der London Mathematical Society
- ▶ Lehrer von Ada Lovelace
- ▶ De Morgan'sche Regeln:
 - ▶ Das Komplement des Produkts ist die Summe der Komplemente.
 - ▶ Das Komplement der Summe ist das Produkt der Komplemente.



Theoreme der boole'schen Algebra



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Theorem	Duales Theorem	Bedeutung
T1 $A \cdot 1 = A$	T1' $A + 0 = A$	Neutralität
T2 $A \cdot 0 = 0$	T2' $A + 1 = 1$	Extremum
T3 $A \cdot A = A$	T3' $A + A = A$	Idempotenz
T4 $\overline{\overline{A}} = A$		Involution
T5 $A \cdot \overline{A} = 0$	T5' $A + \overline{A} = 1$	Komplement
T6 $A \cdot B = B \cdot A$	T6' $A + B = B + A$	Kommutativität
T7 $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	T7' $A + (B + C) = (A + B) + C$	Assoziativität
T8 $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	T8' $A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributivität
T9 $A \cdot (A + B) = A$	T9' $A + (A \cdot B) = A$	Absorption
T10 $(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$	T10' $(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	Zusammenfassen
T11 $(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C) + (B \cdot C) = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$	T11' $(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	Konsensus
T12 $\overline{A \cdot B \cdot C \dots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \dots$	T12' $\overline{A + B + C \dots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \dots$	De Morgan



- ▶ Methode 1: Überprüfen aller Möglichkeiten
- ▶ Methode 2: Gleichung durch Axiome und andere Theoreme vereinfachen

Beweis für Distributivität (T8) durch Überprüfen aller Möglichkeiten



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

A	B	C	$B + C$	$A(B + C)$	AB	AC	$AB + AC$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Beweis für Absorption (T9) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\begin{aligned} & A \cdot (A + B) \\ &= A \cdot A + A \cdot B \\ &= A + A \cdot B \\ &= A \cdot 1 + A \cdot B \\ &= A \cdot (1 + B) \\ &= A \cdot 1 \\ &= A \end{aligned}$$

Distributivität
Idempotenz
Neutralität
Distributivität
Extremum
Neutralität
q.e.d.

Beweis für Zusammenfassen (T10) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

$$\begin{aligned} & A \cdot B + A \overline{B} \\ &= A \cdot (B + \overline{B}) \\ &= A \cdot 1 \\ &= A \end{aligned}$$

Distributivität

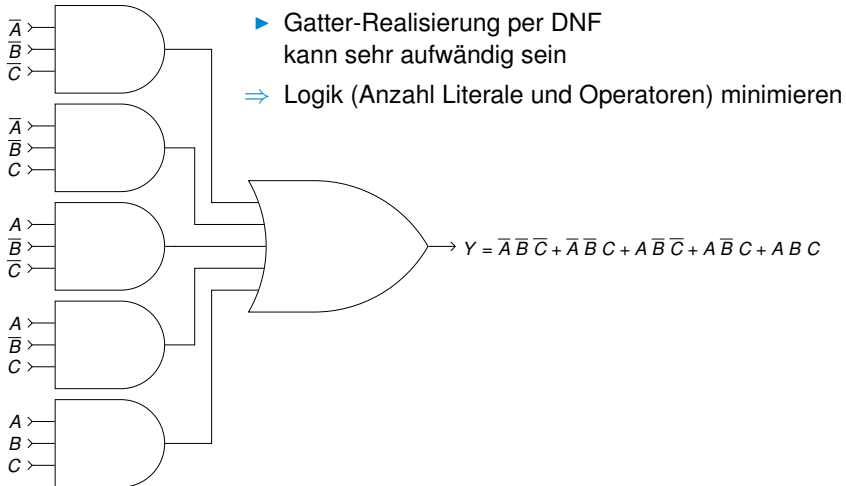
Komplement

Neutralität

q.e.d.

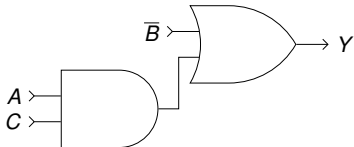
Beweis für Konsensus (T11) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

$A \cdot B + \bar{A} \cdot C + B \cdot C$	Neutralität
$= A \cdot B + \bar{A} \cdot C + 1 \cdot B \cdot C$	Komplement
$= A \cdot B + \bar{A} \cdot C + (A + \bar{A}) \cdot B \cdot C$	Distributivität
$= A \cdot B + \bar{A} \cdot C + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot B \cdot C$	Kommutativität
$= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C + \bar{A} \cdot C \cdot B$	Neutralität
$= A \cdot B \cdot 1 + A \cdot B \cdot C + \bar{A} \cdot C \cdot 1 + \bar{A} \cdot C \cdot B$	Distributivität
$= A \cdot B \cdot (1 + C) + \bar{A} \cdot C \cdot (1 + B)$	Extremum
$= A \cdot B \cdot 1 + \bar{A} \cdot C \cdot 1$	Neutralität
$= A \cdot B + \bar{A} \cdot C$	q.e.d.



$$\begin{aligned} Y &= \overline{A} \overline{B} \overline{C} + \overline{A} \overline{B} C + A \overline{B} \overline{C} + A \overline{B} C + A B C \\ &= \overline{A} (\overline{B} \overline{C} + \overline{B} C) + A (\overline{B} \overline{C} + \overline{B} C) + A B C \\ &= \overline{A} (\overline{B} (\overline{C} + C)) + A (\overline{B} (\overline{C} + C)) + A B C \\ &= \overline{A} \overline{B} + A \overline{B} + A B C \\ &= (\overline{A} + A) \overline{B} + A B C \\ &= \overline{B} + A B C \end{aligned}$$

- ▶ weitere Vereinfachungen möglich?
- ▶ $Y = \overline{B} + A C$
- ▶ Systematik notwendig, um minimale Ausdrücke zu erkennen/finden



Zusammenfassung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

1000001111001011100010101110100001000011
1110110101110010001100110101001011100011
1111000101001110010010110011111111000001
0001100001011110000001011100110101110100
0111010011100110100001010001111011111000
1100101100011010101110110100101101010010
0101001011011000101001011110100001111001
11011111000000001001001001111100100100
0000101000110011101100010001110011001101
1000111110001011000010101101011101010011
1101001010101111010110001110111001000000
0011010001101111110110100010000111101111
0111010000110101100000001011011000010111
1001010001000111110101011100000011111101
0010001111001100110101011010011110011010
0000011011100110010101110001011011111011



- ▶ Kombinatorische Logik
- ▶ Boole'sche Gleichungen
- ▶ Boole'sche Algebra

- ▶ Nächste Vorlesung behandelt
 - ▶ Logikminimierung und -realisierung