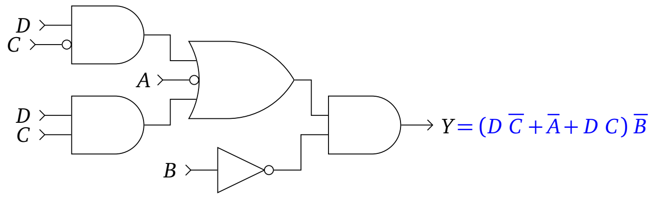
Andreas Engel, Raad Bahmani **LÖSUNGSVORSCHLAG** **KW47**

Die Präsenzübungen werden in Kleingruppen während der wöchentlichen Übungsstunde bearbeitet. Bei Fragen hilft Ihnen Ihr Tutor gerne weiter. Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen.
Die mit **„Zusatzaufgabe“** gekennzeichneten Aufgaben sind zur zusätzlichen Vertiefung für interessierte Studierende gedacht und daher nicht im Zeitumfang von 90 Minuten einkalkuliert.

Übung 5.1 Normalformen und Theoreme der boole’schen Algebra - Wiederholung [15 min]

Geben Sie die durch folgende Gatterschaltung realisierte Funktion in disjunktiver *oder* konjunktiver Normalform an. Vereinfachen Sie die Normalform mit Hilfe der Rechenregeln der boole’schen Algebra soweit wie möglich. Geben Sie für jeden Umformungsschritt das verwendete Axiom bzw. Theorem an.



A	B	C	D	Y
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

$$
\begin{aligned}
\mathrm{DNF} = {} & \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} \\
& + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D \\
& + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} \\
& + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D \\
& + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D \\
& + A\,\overline{B}\,C\,D
\end{aligned}
$$

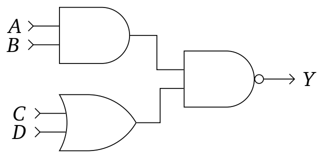
$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,\overline{D} + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,D \\
&\quad + A\,\overline{B}\,\overline{C}\,D + A\,\overline{B}\,C\,D && \text{Distributivität} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,(\overline{C}\,\overline{D} + \overline{C}\,D + C\,\overline{D} + C\,D) + A\,\overline{B}\,(\overline{C}\,D + C\,D) && \text{Distributivität} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,(C + \overline{C})\,(D + \overline{D}) + A\,\overline{B}\,(C + \overline{C})\,D && \text{Komplement} \\
&= \overline{A}\,\overline{B}\,(1)\,(1) + A\,\overline{B}\,(1)\,D && \text{Neutralität} \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B}\,D && \text{Distributivität} \\
&= \overline{B}\,(\overline{A} + A\,D) && \text{Neutralität} \\
&= \overline{B}\,(\overline{A} \cdot 1 + A\,D) && \text{Konsensus} \\
&= \overline{B}\,(\overline{A} \cdot 1 + A\,D + 1 \cdot D) && \text{Neutralität} \\
&= \overline{B}\,(\overline{A} + A\,D + D) && \text{Absorbtion} \\
&= \overline{B}\,(\overline{A} + D)
\end{aligned}
$$

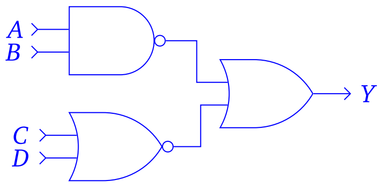
Übung 5.2 Bubble Pushing [10 min]

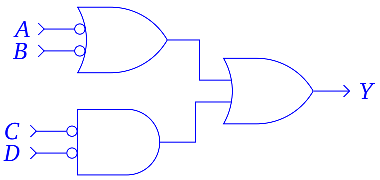
Übung 5.2.1 Zu den Eingängen

Verschieben Sie die Invertierungsblasen in den folgenden Schaltung bis zu den Eingängen. Geben Sie jeweils die resultierende Funktion als boole'schen Ausdruck an.

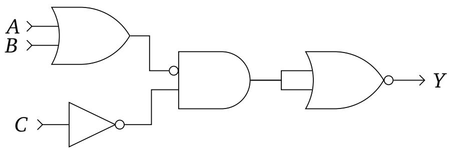
a) $Y = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\,\overline{D}$

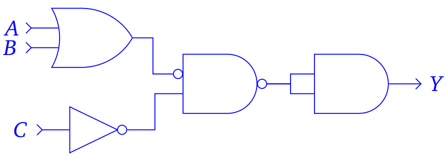


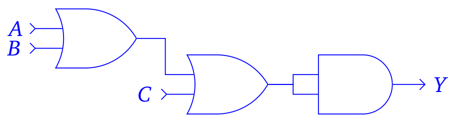




b) $Y = (A + B + C)\,(A + B + C) = A + B + C$



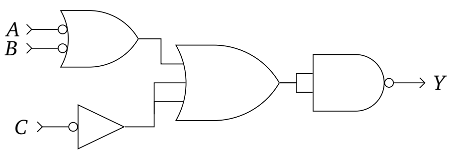


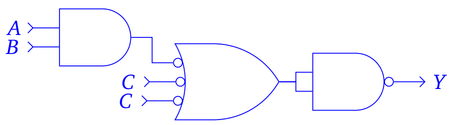


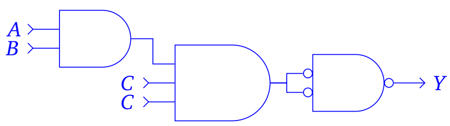
Übung 5.2.2 Zum Ausgang

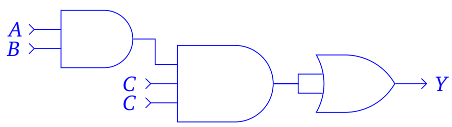
Verschieben Sie möglichst viele Invertierungsblasen in den folgenden Schaltung bis zum Ausgang. Geben Sie jeweils die resultierende Funktion als boole'schen Ausdruck an.

a) $Y = A\;B\;C\;C + A\;B\;C\;C = A\;B\;C$

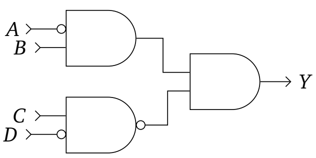


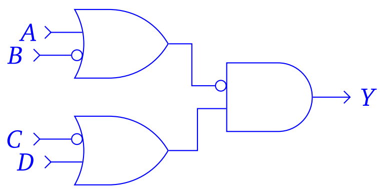


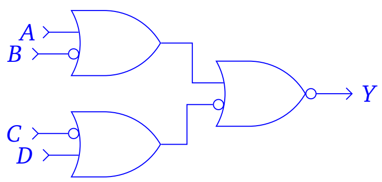




b) $Y = \overline{A + \overline{B} + \overline{\overline{C} + D}}$



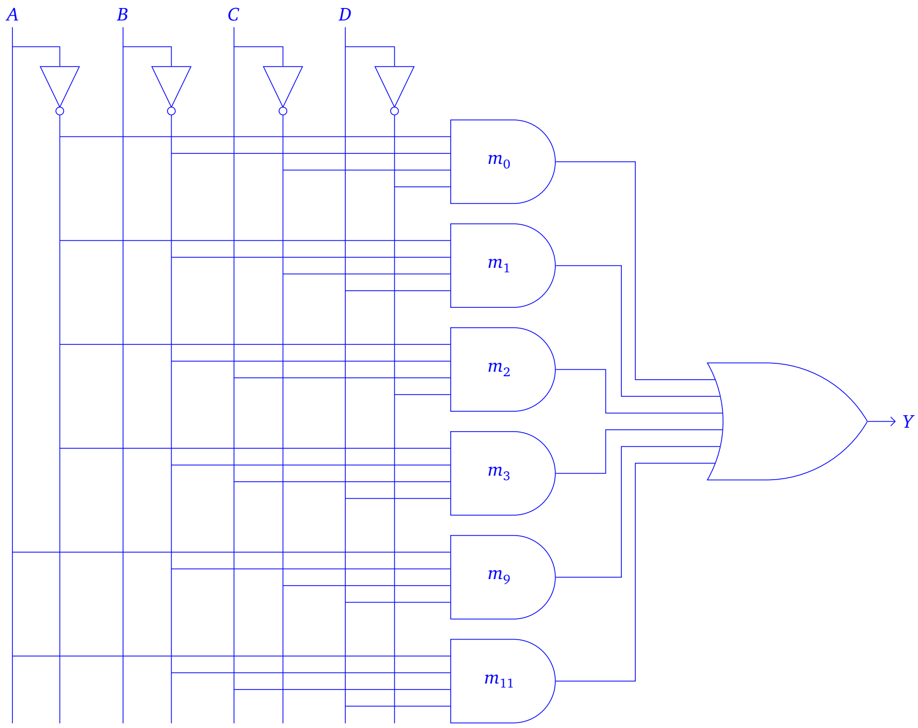




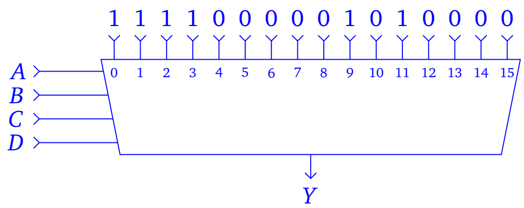
Übung 5.3 Logikrealisierung [15 min]

Realisieren Sie die Funktion $Y = \overline{B}\,(D\ C + \overline{A} + D\ \overline{C})$ (Wahrheitswertetabelle kann aus 5.1 entnommen werden), *ohne* diese zuvor zu minimieren.

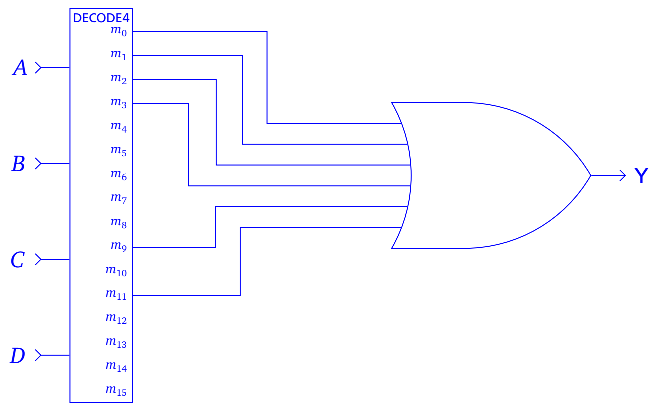
a) mit zweistufiger Logik



b) mit einem Multiplexer
Der MUX16 : $\mathbb{B}^{20} \longrightarrow \mathbb{B}$ hat vier Steuersignale. Die 16 verbleibenden Eingänge werden auf konstante Werte entsprechend der Wahrheitswertetabelle gezogen.



c) mit einem Decoder
Der DECODE4 : $\mathbb{B}^4 \longrightarrow \mathbb{B}^{16}$ erzeugt eine One-Hot Codierung aller Minterme und ersetzt die erste Stufe der zweistufigen Realisierung.



Übung 5.4 Grafisch unterstützte Logikminimierung [10 min]

Minimieren Sie die folgenden Funktionen mit Hilfe von Karnaugh-Diagrammen.

a) $Y = \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} + A\,B\,\overline{C} = \overline{B} + A\,\overline{C}$

Y:

C \ AB	00	01	11	10
0	1		1	1
1	1			1

b) $Y = \overline{B}\,(D\,C + \overline{A} + D\,\overline{C}) = \overline{A}\,\overline{B} + \overline{B}\,D = \overline{B}\,(\overline{A} + D)$

Y:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1			
01	1			1
11	1			1
10	1			

c) $Y = A\,(D\,(\overline{C} + B) + \overline{D}\,(C + \overline{B})) + B\,\overline{C}\,D$ unter Ausnutzung der „Don't Cares" $X = \overline{B}\,C\,D + B\overline{C}\,\overline{D}$

$Y = A + B\,\overline{C}$

Y:

CD \ AB	00	01	11	10
00		*	*	1
01		1	1	1
11	*		1	*
10			1	1

Übung 5.5 Gray-Codierung - **Zusatzaufgabe**

Ein Code besteht aus verschiedenen Codewörtern, die mit einer bestimmten Zuordnungsvorschrift aus den Ursprungswörtern gebildet werden. In dieser Aufgabe betrachten wir den Gray-Code. Da sich bei der Gray-Codierung zwei benachbarte Codewörter nur in einem Bit unterscheiden, kann man Gray-Code beispielsweise benutzen, um Fehler bei der Signalübertragung zu erkennen.

Binär				**Gray-Code**			
B_3	B_2	B_1	B_0	G_3	G_2	G_1	G_0
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	1	0	0	0	1
0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	0	1
1	1	1	1	1	0	0	0

Geben Sie für jede Stelle $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ des Gray-Codes einen minimalen bool'schen Ausdruck für $G_i(B_3, B_2, B_1, B_0)$ an.

G_0:

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00				
01	1	1	1	1
11				
10	1	1	1	1

G_1:

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1	1	
01		1	1	
11	1			1
10	1			1

G_2:

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00		1		1
01		1		1
11		1		1
10		1		1

G_3:

B_1B_0 \ B_3B_2	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11			1	1
10			1	1

$$G_0 = B_0\,\overline{B_1} + \overline{B_0}\,B_1 = B_0 \oplus B_1$$
$$G_1 = B_1\,\overline{B_2} + \overline{B_1}\,B_2 = B_1 \oplus B_2$$
$$G_2 = B_2\,\overline{B_3} + \overline{B_2}\,B_3 = B_2 \oplus B_3$$
$$G_3 = B_3$$