Digitaltechnik
Wintersemester 2017/2018
6. Übung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Andreas Engel, Raad Bahmani **LÖSUNGSVORSCHLAG** **KW48**

Die Präsenzübungen werden in Kleingruppen während der wöchentlichen Übungsstunde bearbeitet. Bei Fragen hilft Ihnen Ihr Tutor gerne weiter. Mit der angegebenen Bearbeitungszeit für die einzelnen Aufgaben können Sie Ihren Leistungsstand besser einschätzen.

Übung 6.1 Logikminimierung mit Karnaugh Diagrammen - Wiederholung [10 min]

Erstellen Sie für folgende Funktionen jeweils ein Karnaugh Diagramm. Markieren Sie die Primimplikanten und geben Sie einen minimalen boole'schen Ausdruck für die Funktion an.

a) $Y:(A,B,C,D)\mapsto m_0+d_1+d_5+m_7+d_8+m_{12}+m_{13}+d_{15} = B\,D + \overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D} + A\,\overline{C}\,\overline{D}$

$Y:$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1		1	*
01	*	*	1	
11		1	*	
10				

b) $Y:(A,B,C,D)\mapsto m_0+m_1+d_2+d_3+m_4+m_6+d_8+d_9+d_{10}+d_{11}+m_{12}+m_{14} = \overline{B} + \overline{D}$

$Y:$

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	*
01	1			*
11	*			*
10	*	1	1	*

Übung 6.2 Logikminimierung mit Espresso [15 min]

Übung 6.2.1 Eingabe

Erstellen Sie eine Espresso-Repräsentation für die Funktion $Y:(A,B,C,D)\mapsto m_0+d_1+d_5+m_7+d_8+m_{12}+m_{13}+d_{15}$.
Eine minimale Espresso-Repräsentation für Y:

Y.esp

```
.i 4
.o 1
0000 1
0001 -
0101 -
0111 1
1000 -
1100 1
1101 1
1111 -
```

Übung 6.2.2 Ausgabe

Minimieren Sie Y mit Espresso. Wenden Sie dafür sowohl die Heuristik als auch das exakte Minimierungsverfahren an. Geben Sie den boole'schen Ausdruck für Y an, der von den beiden Verfahren ermittelt wurde.
Beide Minimierungsmethoden ergeben (bis auf eine unterschiedliche Reihenfolge der Terme) das folgende Ergebnis:

espresso Y.esp

```
.i 4
.o 1
.p 3
-000 1
1-00 1
-1-1 1
.e
```

Das Ergebnis repräsentiert den boole'schen Ausdruck $Y=\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}+A\,\overline{C}\,\overline{D}+B\,D$.

Übung 6.2.3 Qualität der Heuristik

Minimieren Sie nun die im Moodle verfügbare boole'sche Funktion (`U6.2.3.esp`). Vergleichen Sie die Laufzeit und das Ergebnis (Anzahl der resultierenden Implikanten) von Heuristik und dem exakten Verfahren miteinander.

Kommando	Anzahl Implikanten	Laufzeit
`espresso -D ESPRESSO U6.2.3.esp`	22	ca. 30 ms
`espresso -D exakt U6.2.3.esp`	18	ca. 180 s

Die Laufzeit der beiden Verfahren wurden auf einem System mit Intel Core i5-6200U Prozessor ermittelt. Unter Unix kann die Ausführungszeit eines Befehls (cmd) mittels `time cmd` ermittelt werden. Unter Windows kann man dafür bspw. `echo %time% && cmd && echo %time%` verwenden.

Übung 6.3 Vierwertige Logik [10 min]

Geben Sie die Wahrheitswertetabelle für $Y=A\oplus B$ mit vierwertiger Logik an.
Durch Anwenden der Resolutionstabellen für AND, OR und NOT auf $Y=A\,\overline{B}+\overline{A}\,B$ erhält man:

A/B	X	0	1	Z
X	X	X	X	X
0	X	0	1	X
1	X	1	0	X
Z	X	X	X	X

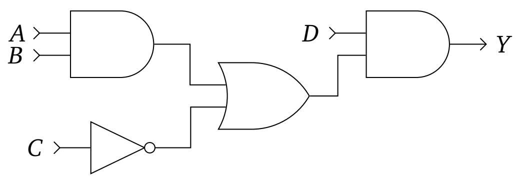
Übung 6.4 Zeitverhalten kombinatorischer Schaltungen

In dieser Aufgabe werden ausschließlich die wie folgt spezifizierten Gatter verwendet:

Gatter	AND	OR	NOT	XOR	AND3
t_{pd}	2 ns	2 ns	1 ns	3 ns	3 ns
t_{cd}	2 ns	2 ns	1 ns	2 ns	2 ns

Übung 6.4.1 Kürzester und längster Pfad [10 min]

Berechnen Sie t_{pd} und t_{cd} für die folgenden Schaltungen. Gebeben Sie jeweils einen funktional äquivalenten Ausdruck mit kürzerem kritischen Pfad an.

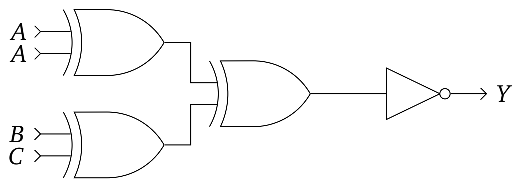
a) 

$$t_{pd,1} = t_{pd,AND} + t_{pd,OR} + t_{pd,AND} = 2\,ns + 2\,ns + 2\,ns = 6\,ns \qquad A, B \to Y$$
$$t_{pd,2} = t_{pd,NOT} + t_{pd,OR} + t_{pd,AND} = 1\,ns + 2\,ns + 2\,ns = 5\,ns \qquad C \to Y$$
$$t_{pd,3} = t_{pd,AND} = 2\,ns \qquad D \to Y$$
$$t_{pd,Y} = \max(t_{pd,1}, t_{pd,2}, t_{pd,3}) = 6\,ns$$

$$t_{cd,1} = t_{cd,AND} + t_{cd,OR} + t_{cd,AND} = 2\,ns + 2\,ns + 2\,ns = 6\,ns \qquad A, B \to Y$$
$$t_{cd,2} = t_{cd,NOT} + t_{cd,OR} + t_{cd,AND} = 1\,ns + 2\,ns + 2\,ns = 5\,ns \qquad C \to Y$$
$$t_{cd,3} = t_{cd,AND} = 2\,ns \qquad D \to Y$$
$$t_{cd,Y} = \min(t_{cd,1}, t_{cd,2}, t_{cd,3}) = 2\,ns$$

Die Schaltung repräsentiert den dreistufigen Ausdruck $Y = (A\,B + \overline{C})\,D$. Durch Ausmultiplizieren erhält man den Ausdruck $Y = A\,B\,D + \overline{C}\,D$. Dieser ist zwar immer noch dreistufig, erzeugt wegen einer besseren Ausbalancierung der ersten beiden Stufen aber einen kürzeren kritischen Pfad:

$$t_{pd,1} = t_{pd,AND3} + t_{pd,OR} = 3\,ns + 2\,ns = 5\,ns \qquad A, B, D \to Y$$
$$t_{pd,2} = t_{pd,NOT} + t_{pd,AND} + t_{pd,OR} = 1\,ns + 2\,ns + 2\,ns = 5\,ns \qquad C \to Y$$
$$t_{pd,3} = t_{pd,AND} + t_{pd,OR} = 2\,ns + 2\,ns = 4\,ns \qquad D \to Y$$
$$t_{pd,Y} = \max(t_{pd,1}, t_{pd,2}, t_{pd,3}) = 5\,ns$$

b) 

Für die beiden äquivalenten Pfade müssen keine Maxima/Minima gebildet werden.

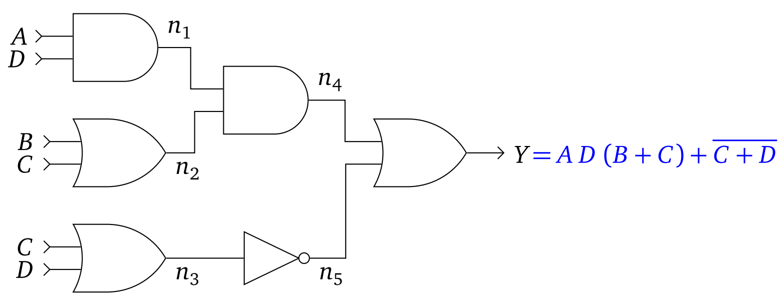
$$t_{\text{pd,Y}} = t_{\text{pd,XOR}} + t_{\text{pd,XOR}} + t_{\text{pd,NOT}} = 3\,\text{ns} + 3\,\text{ns} + 1\,\text{ns} = 7\,\text{ns} \qquad A, B, C \to Y$$
$$t_{\text{cd,Y}} = t_{\text{cd,XOR}} + t_{\text{cd,XOR}} + t_{\text{cd,NOT}} = 2\,\text{ns} + 2\,\text{ns} + 1\,\text{ns} = 5\,\text{ns} \qquad A, B, C \to Y$$

Die Schaltung repräsentiert den dreistufigen Ausdruck $Y = \overline{(A \oplus A) \oplus (B \oplus C)}$. Die Funktion kann wegen $A \oplus A = 0$ und $0 \oplus X = X$ auch durch $Y = \overline{B \oplus C}$ realisiert werden. Der kritische Pfad verkürzt sich damit zu

$$t_{\text{pd,Y}} = t_{\text{pd,XOR}} + t_{\text{pd,NOT}} = 3\,\text{ns} + 1\,\text{ns} = 4\,\text{ns} \qquad B, C \to Y$$

Übung 6.4.2 Störimpulse [30 min]

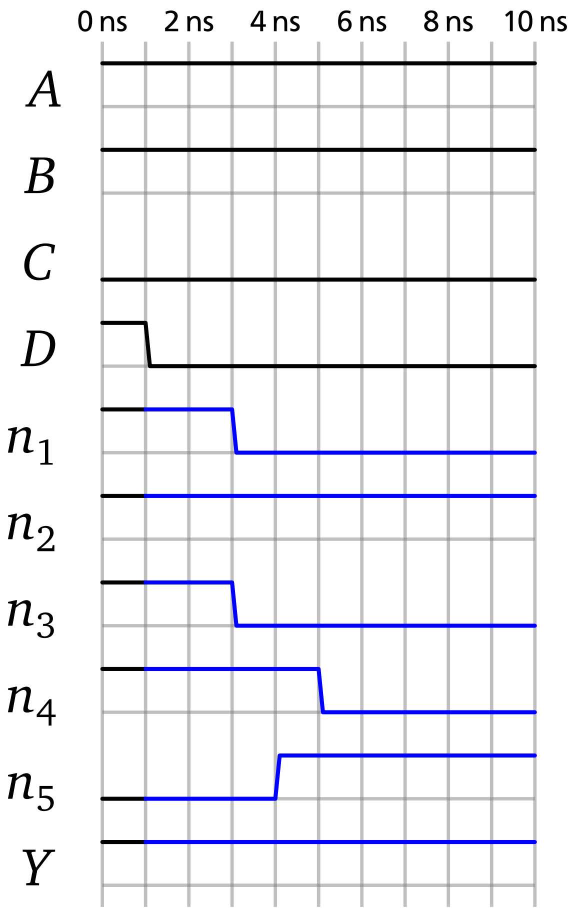
a) Tragen Sie die durch folgende Schaltung repräsentierte Funktion in ein Karnaugh Diagramm ein und markieren Sie alle Stellen, an denen Störimpulse auftreten *können*.



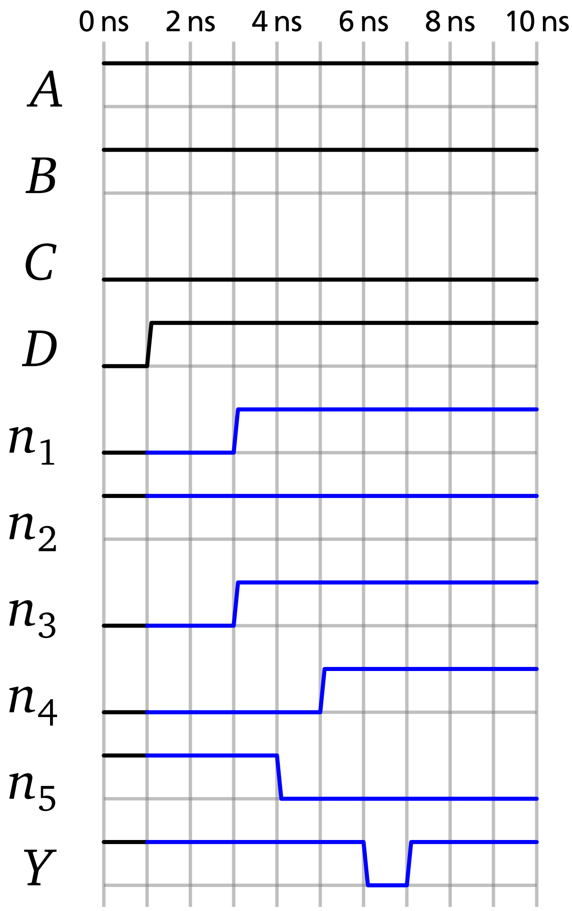
Y:

CD \ AB	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01			1	
11			1	1
10				

b) Ergänzen Sie den Zeitverlauf aller Knoten des Schaltnetzes in folgenden Diagrammen. Verwenden Sie dazu die zu Beginn dieser Aufgabe spezifizierten Gatterverzögerungszeiten. Treten Störimpulse auf?



$ABCD$: 1101 → 1100 [kein Glitch!]



$ABCD$: 1100 → 1101 [Glitch!]

c) Geben Sie nun einen funktional äquivalenten Ausdruck an, der keine Störimpulse enthält.
Zusätzlicher Implikant $A\ B\ \overline{C}$ überdeckt kritischen Übergang im Karnaugh-Diagramm:

$$Y = \overline{C}\ \overline{D} + A\ B\ D + A\ C\ D + A\ B\ \overline{C}$$