Digitaltechnik
Wintersemester 2017/2018
4. Vorlesung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Inhalt

Einleitung

Organisatorisches

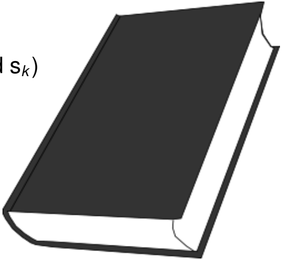
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Testate als Klausurzulassung
  - notwendig, wenn DT mit schriftlicher Fachprüfung abgeschlossen wird
  - nicht notwendig, wenn DT mit schriftlicher Studienleistung abgeschlossen wird
  - nicht notwendig, wenn DT Klausurzulassung bereits vorher erworben
- Themen für Testate:
  - Tx = Üx = Vx
  - x entsprechend aktueller Kalenderwoche (siehe Moodle)
  - keine Themen, die nur als Zusatzübung behandelt wurden
- Überarbeitung von Vorlesungsfolien

Rückblick auf die letzten Vorlesungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Komplexität und (digitale) Abstraktion
- Zahlensysteme
  - vorzeichenlos ($u_{b,k}$) und vorzeichenbehaftet ($bv_{b,k}$ und s_k)
  - Addition, Negieren durch Komplement und Inkrement
  - Bitbreitenerweiterung
- Logikgatter $\mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^k$
  - Symbole und Wahrheitswertetabellen
  - XOR als Paritätsfunktion
- Physikalische Realisierung von Logikgattern
  - Logikpegel
  - Feldeffekt-Transistoren
  - CMOS-Gatter
  - Leistungsaufnahme
  - Moor'sches Gesetz



Harris 2013
Kapitel 1

Wiederholung: Zahlendarstellungen

Woran erkennt man, ob Zahlendarstellung vorzeichenbehaftet ist?
Wie sieht die hexadezimale Darstellung von Zweierkomplement-Zahlen aus?
Muss diese mit einem „-“ markiert werden?

- $u_{2,5}(11010_2) = 26_{10} = 1A_{16}$
- $bv_{2,5}(11010_2) = -10_{10} = 8A_{16}$
- $s_5(11010_2) = -6_{10} = FA_{16}$

Wiederholung: Zahlendarstellungen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Wie kann Überlauf bei Addition/Subtraktion vermieden werden kann bzw. wie geht man damit um?
Welche technischen Schwierigkeiten ergeben sich daraus?

					unsigned	signed
1	1	1				
	0	1	1	1	7_{10}	7_{10}
+	1	0	1	0	10_{10}	-6_{10}
	0	0	0	1	1_{10}	1_{10}
					OV=1	OV=0

Wiederholung: Logikgatter

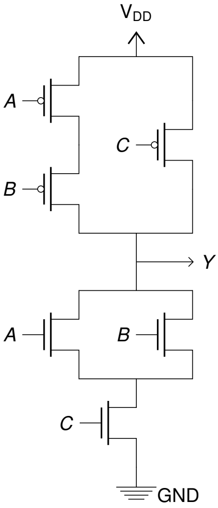
TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Aufbau eines Multiplexers?

- MUX : $\mathbb{B}^3 \rightarrow \mathbb{B}$
- $\text{MUX}(I_0, I_1, S) = I_S = S \; ? \; I_1 : I_0$

I_0	I_1	S	F
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	0	1
0	0	1	0
0	1	1	1
1	0	1	0
1	1	1	1

Wiederholung: CMOS $Y = \overline{(A + B)\ C}$



Schichtenmodell eines Computers

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Anwendungs-software	Programme
Betriebs-systeme	Gerätetreiber
Architektur	Befehle Register
Mikro-architektur	Datenpfade Steuerung
Logik	Addierer Speicher
Digital-schaltungen	UND Gatter Inverter
Analog-schaltungen	Verstärker Filter
Bauteile	Transistoren Dioden
Physik	Elektronen

Überblick der heutigen Vorlesung

- Kombinatorische Logik
  - Boole'sche Gleichungen
  - Boole'sche Algebra

Harris 2013
Kap. 2.1 - 2.3
Seite 51 - 62

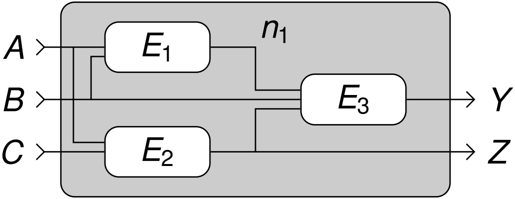
Kombinatorische Logik

Abstrakte Eigenschaften *logischer* Schaltungen

- Eingängen
- Ausgängen
- Spezifikation der realisierten (boolschen) Funktion
- Spezifikation des Zeitverhaltens

Komponenten einer *logischen* Schaltung

- Verbindungsknoten
  - Eingangs-Terminals: A, B, C
  - Ausgangs-Terminals: Y, Z
  - interne Knoten: n_1
- Schaltungselemente
  - E_1, E_2, E_3
  - jedes selbst eine Schaltung $\rightarrow$ Hierarchie



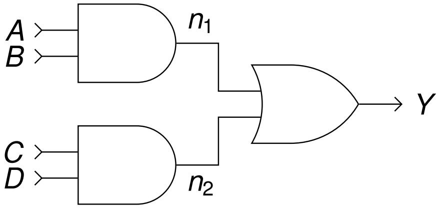
Arten von *logischen* Schaltungen

- kombinatorische Logik („Schaltnetz“)
  - Ausgänge hängen nur von *aktuellen* Eingangswerten ab
- sequentielle Logik („Schaltwerk“)
  - Ausgänge hängen von aktuellen Eingangswerten und **internem** Zustand ab

  ⇒ Ausgänge indirekt abhängig von *vorherigen* Eingangswerten

Eigenschaften kombinatorischer Logik

- jedes Schaltungselement ist selbst kombinatorisch
- jeder Verbindungsknoten ist
  - Eingang in die Schaltung, oder
  - an *genau ein* Ausgangsterminal („Treiber“) eines Schaltungselements angeschlossen
- jeder Pfad durch die Schaltung besucht jeden Verbindungsknoten maximal einmal (*zyklenfrei*)



Boole’sche Gleichungen

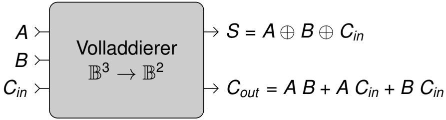
Boole'sche Gleichungen

- beschreiben Ausgänge einer kombinatorischen Schaltung als (boolsche) Funktion der Eingänge

$\Rightarrow$ Spezifikation des funktionalen Verhaltens (ohne zeitliche Information)

- unter Verwendung elementarer boole'scher Operatoren (sortiert nach *Operatorpräzedenz*):
  - NOT: $\overline{A}$
  - AND: $A\,B = A \cdot B$
  - XOR: $A \oplus B$
  - OR: $A + B$

- Beispiel
  - $S = F_1 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$
  - $C_{out} = F_2 : (A, B, C_{in}) \in \mathbb{B}^3 \mapsto \mathbb{B}$



Grundlegende Definitionen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Komplement: Boole'sche Variable mit einem Balken (invertiert)
$\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}$

Literal: Variable oder ihr Komplement
$A, \overline{A}, B, \overline{B}, C, \overline{C}$

Implikant: Produkt von Literalen
$ABC, A\overline{C}, BC$

Minterm: Produkt (UND, Konjunktion) über alle Eingangsvariablen
$ABC, AB\overline{C}, \overline{A}BC$

Maxterm: Summe (ODER, Disjunktion) über alle Eingangsvariablen
$(A + \overline{B} + \overline{C}), (A + B + \overline{C}), (\overline{A} + \overline{B} + \overline{C})$

Minterm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Produkt (Implikant), das jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- entspricht einer Zeile in Wahrheitswertetabelle
- jeder Minterm wird für *genau eine* Eingangskombination *wahr* (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	**B**	**Y**	**Minterm**
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}\,B$
1	0	1	$m_2 = A\,\overline{B}$
1	1	0	$m_3 = A\,B$

Disjunktive Normalform (DNF)
Sum-of-products (SOP)

- Summe aller Minterme, für welche die Funktion *wahr* ist

$\Rightarrow$ jede boolsche Funktion hat *genau eine* DNF (abgesehen von Kommutation)

- im Beispiel: $Y = m_1 + m_2 = \overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

$\Rightarrow$ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $\overline{A}\,B + A\,\overline{B}$

A	**B**	**Y**	**Minterm**
0	0	0	$m_0 = \overline{A}\,\overline{B}$
0	1	1	$m_1 = \overline{A}\,B$
1	0	1	$m_2 = A\,\overline{B}$
1	1	0	$m_3 = A\,B$

Maxterm

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Summe, welche jede Eingangsvariable *genau einmal* enthält
- entspricht einer Zeile in Wahrheitswertetabelle
- jeder Maxterm wird für *genau eine* Eingangskombination *falsch* (unabhängig von Ergebnisspalte)

A	**B**	**Y**	**Maxterm**
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	1	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

Konjunktive Normalform (KNF)
Product-of-sums (POS)

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Produkt aller Maxterme, für welche die Funktion *falsch* ist

$\Rightarrow$ jede boolsche Funktion hat *genau eine* KNF (abgesehen von Kommutation)

- im Beispiel: $Y = M_0 \; M_3 = (A + B) \; (\overline{A} + \overline{B})$

$\Rightarrow$ $A \oplus B$ nur kompakte Schreibweise für $(A + B) \; (\overline{A} + \overline{B})$

A	B	Y	Maxterm
0	0	0	$M_0 = A + B$
0	1	1	$M_1 = A + \overline{B}$
1	0	1	$M_2 = \overline{A} + B$
1	1	0	$M_3 = \overline{A} + \overline{B}$

Boole'sche Algebra

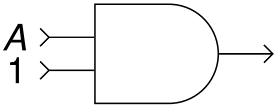
Boole'sche Algebra

- Rechenregeln zur Vereinfachung boole'scher Gleichungen
  - Axiome: grundlegende Annahmen der Algebra (nicht beweisbar)
  - Theoreme: komplexere Regeln, die sich aus Axiomen ergeben (beweisbar)
- analog zur Algebra auf natürlichen Zahlen
- ergänzt um Optimierungen durch Begrenzung auf $\mathbb{B}$
- Axiome und Theoreme haben jeweils duale Entsprechung: AND $\leftrightarrow$ OR, 0 $\leftrightarrow$ 1

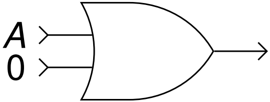
Axiome der boole'schen Algebra

	Axiom		Duales Axiom	Bedeutung
A1	$B \neq 1 \Rightarrow B = 0$	A1'	$B \neq 0 \Rightarrow B = 1$	Dualität
A2	$\overline{0} = 1$	A2'	$\overline{1} = 0$	Negieren
A3	$0 \cdot 0 = 0$	A3'	$1 + 1 = 1$	Und / Oder
A4	$1 \cdot 1 = 1$	A4'	$0 + 0 = 0$	Und / Oder
A5	$0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$	A5'	$1 + 0 = 0 + 1 = 1$	Und / Oder

T1: Neutralität von 1 und 0

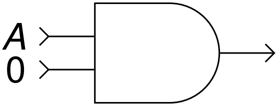


$$A \cdot 1 = A$$

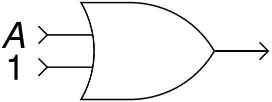


$$A + 0 = A$$

T2: Extremum von 0 und 1

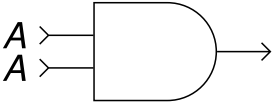


$$A \cdot 0 = 0$$

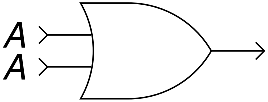


$$A + 1 = 1$$

T3: Idempotenz

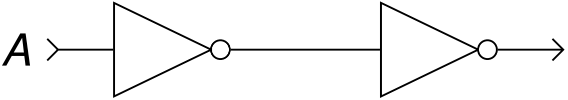


$$A \cdot A = A$$



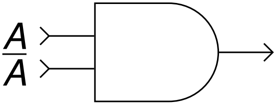
$$A + A = A$$

T4: Involution

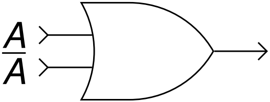


$$\overline{\overline{A}} = A$$

T5: Komplement

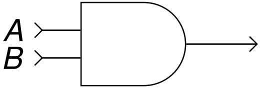


$$A \cdot \overline{A} = 0$$

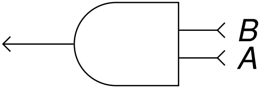


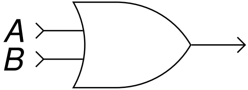
$$A + \overline{A} = 1$$

T6: Kommutativität

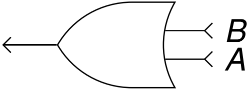


$$A \cdot B = B \cdot A$$

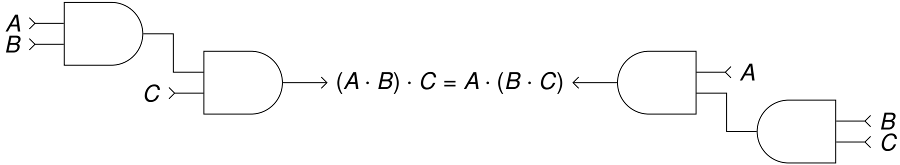




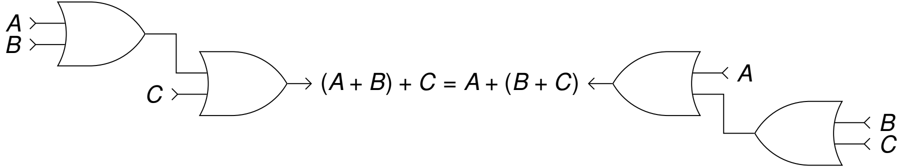
$$A + B = B + A$$



T7: Assoziativität

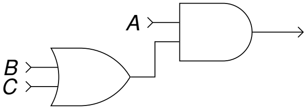


$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$$

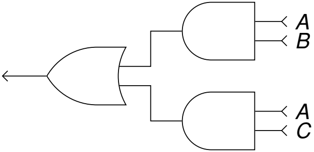


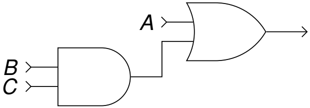
$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

T8: Distributivität

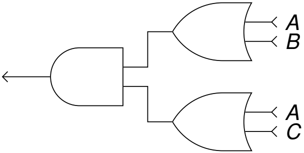


$$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

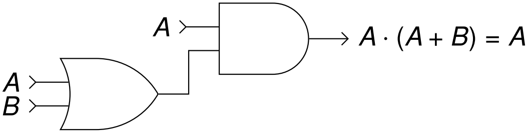


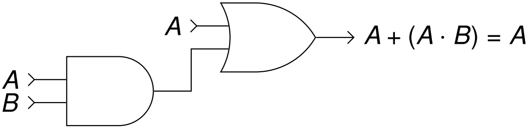


$$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$$

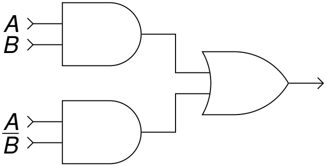


T9: Absorption

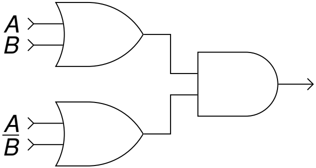




T10: Zusammenfassen

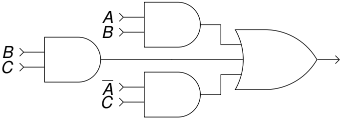


$$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$$

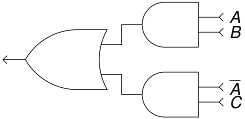


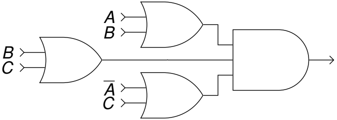
$$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$$

T11: Konsensus

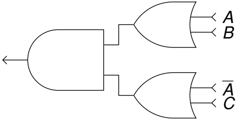


$(A \cdot B) + (B \cdot C) + (\overline{A} \cdot C) = (A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$

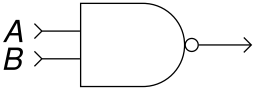




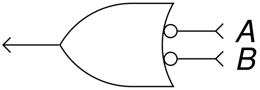
$(A + B) \cdot (B + C) \cdot (\overline{A} + C) = (A + B) \cdot (\overline{A} + C)$

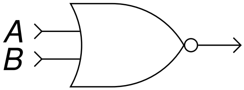


T12: De Morgan

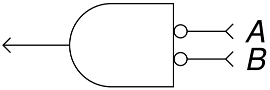


$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$





$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$



Augustus De Morgan, 1806 - 1871

- erster Präsident der London Mathematical Society
- Lehrer von Ada Lovelace
- De Morgan'sche Regeln:
  - Das Komplement des Produkts ist die Summe der Komplemente.
  - Das Komplement der Summe ist das Produkt der Komplemente.

Theoreme der boole'schen Algebra

	Theorem		Duales Theorem	Bedeutung
T1	$A \cdot 1 = A$	T1'	$A + 0 = A$	Neutralität
T2	$A \cdot 0 = 0$	T2'	$A + 1 = 1$	Extremum
T3	$A \cdot A = A$	T3'	$A + A = A$	Idempotenz
T4	$\overline{\overline{A}} = A$			Involution
T5	$A \cdot \overline{A} = 0$	T5'	$A + \overline{A} = 1$	Komplement
T6	$A \cdot B = B \cdot A$	T6'	$A + B = B + A$	Kommutativität
T7	$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$	T7'	$A + (B + C) = (A + B) + C$	Assoziativität
T8	$A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$	T8'	$A + (B \cdot C) = (A + B) \cdot (A + C)$	Distributivität
T9	$A \cdot (A + B) = A$	T9'	$A + (A \cdot B) = A$	Absorption
T10	$(A \cdot B) + (A \cdot \overline{B}) = A$	T10'	$(A + B) \cdot (A + \overline{B}) = A$	Zusammenfassen
T11	$(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C) + (B \cdot C) =$ $(A \cdot B) + (\overline{A} \cdot C)$	T11'	$(A + B) \cdot (\overline{A} + C) \cdot (B + C) =$ $(A + B) \cdot (\overline{A} + C)$	Konsensus
T12	$\overline{A \cdot B \cdot C \ldots} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C} \ldots$	T12'	$\overline{A + B + C \ldots} = \overline{A} \cdot \overline{B} \cdot \overline{C} \ldots$	De Morgan

Beweis für Theoreme

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Methode 1: Überprüfen aller Möglichkeiten
- Methode 2: Gleichung durch Axiome und andere Theoreme vereinfachen

Beweis für Distributivität (T8) durch Überprüfen aller Möglichkeiten

A	B	C	$B+C$	$A\,(B+C)$	$A\,B$	$A\,C$	$A\,B+A\,C$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Beweis für Absorption (T9) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$A \cdot (A + B)$	Distributivität
$= A \cdot A + A \cdot B$	Idempotenz
$= A + A \cdot B$	Neutralität
$= A \cdot 1 + A \cdot B$	Distributivität
$= A \cdot (1 + B)$	Extremum
$= A \cdot 1$	Neutralität
$= A$	q.e.d.

Beweis für Zusammenfassen (T10) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

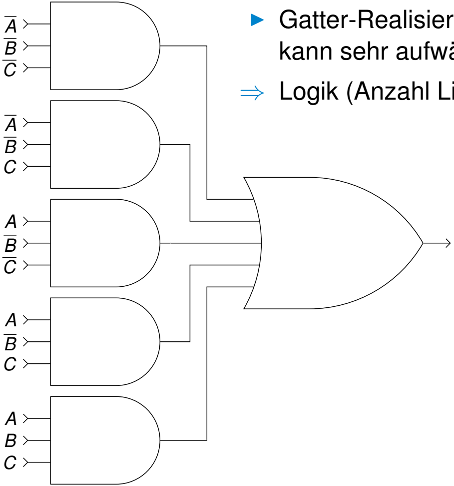
$A \cdot B + A\,\overline{B}$	Distributivität
$= A \cdot (B + \overline{B})$	Komplement
$= A \cdot \quad 1$	Neutralität
$= A$	q.e.d.

Beweis für Konsensus (T11) durch Anwendung von Axiomen und Theoremen

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{aligned}
& A \cdot B + \overline{A} \cdot C + B \cdot C && \text{Neutralität} \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + 1 \cdot B \cdot C && \text{Komplement} \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + (A + \overline{A}) \cdot B \cdot C && \text{Distributivität} \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot B \cdot C && \text{Kommutativität} \\
&= A \cdot B + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot B && \text{Neutralität} \\
&= A \cdot B \cdot 1 + A \cdot B \cdot C + \overline{A} \cdot C \cdot 1 + \overline{A} \cdot C \cdot B && \text{Distributivität} \\
&= A \cdot B \cdot (1 + C) + \overline{A} \cdot C \cdot (1 + B) && \text{Extremum} \\
&= A \cdot B \cdot 1 + \overline{A} \cdot C \cdot 1 && \text{Neutralität} \\
&= A \cdot B + \overline{A} \cdot C && \text{q.e.d.}
\end{aligned}
$$

Logikminimierung



$$Y = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C$$

- Gatter-Realisierung per DNF kann sehr aufwändig sein

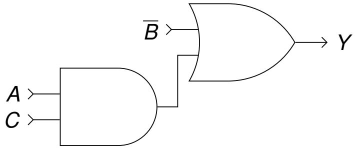
⇒ Logik (Anzahl Literale und Operatoren) minimieren

Logikminimierung

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

$$
\begin{aligned}
Y &= \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C} + \overline{A}\,\overline{B}\,C + A\,\overline{B}\,\overline{C} + A\,\overline{B}\,C + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,C) + A\,(\overline{B}\,\overline{C} + \overline{B}\,C) + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,(\overline{B}\,(\overline{C} + C)) + A\,(\overline{B}\,(\overline{C} + C)) + A\,B\,C \\
&= \overline{A}\,\overline{B} + A\,\overline{B} + A\,B\,C \\
&= (\overline{A} + A)\,\overline{B} + A\,B\,C \\
&= \overline{B} + A\,B\,C
\end{aligned}
$$

- weitere Vereinfachungen möglich?
- $Y = \overline{B} + A\,C$
- Systematik notwendig, um minimale Ausdücke zu erkennen/finden



Zusammenfassung

Zusammenfassung und Ausblick

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

- Kombinatorische Logik
- Boole’sche Gleichungen
- Boole’sche Algebra

- Nächste Vorlesung behandelt
  - Logikminimierung und -realisierung