KMA/MA2AA

Matematika 2

ZS 2015

Obsah

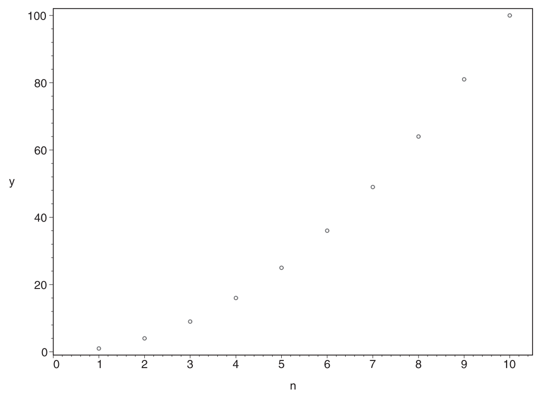
Kapitola 1

Číselné posloupnosti

1.1 Motivační příklady

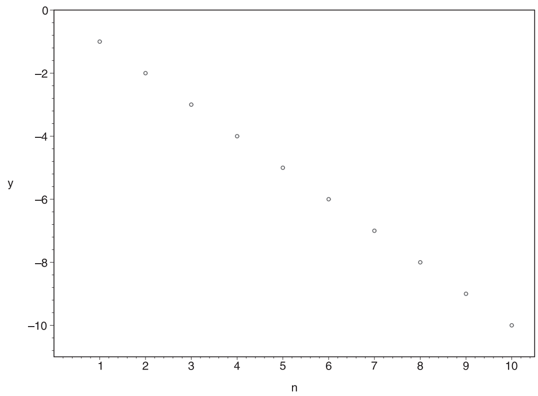
Prozkoumejme, zatím „laicky“, následující posloupnosti:

1. Posloupnost $1, 4, 9, \ldots, n^2, \ldots$:



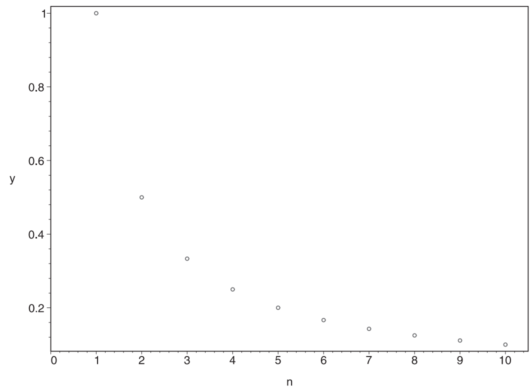
Hodnoty rostou nade všechny meze.

2. Posloupnost $-1, -2, -3, \ldots, -n, \ldots$:



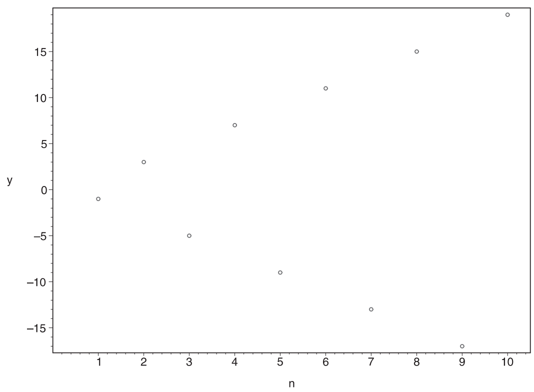
Hodnoty klesají pode všechny meze.

3. Posloupnost $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$:



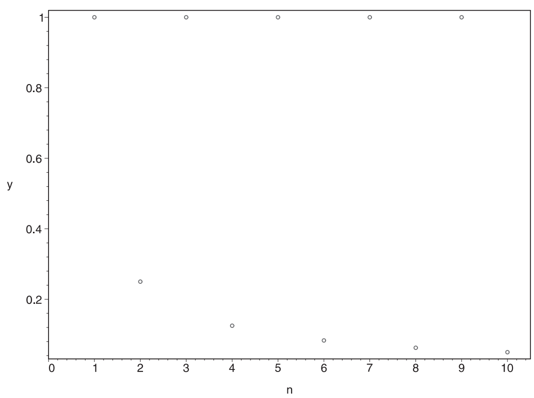
Hodnoty leží v intervalu $[0; 1)$ a s rostoucím n se blíží nule.

4. Posloupnost $1, -2, 3, -4, 5, \ldots, 2n-1, -2n, \ldots$:



Hodnoty střídají znaménko (oscilují) a rostou (v absolutní hodnotě) nade všechny meze.

5. Posloupnost $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{4}, 1 \ldots, 1, \frac{1}{2^{2n}}, \ldots$:



1.2 Pojem posloupnosti

Definice 1.2.1. Každé zobrazení $\mathbb{N}$ do $\mathbb{R}$ nazýváme ***číselná posloupnost***. Zápis: $\{a_n\}_{n=1}^{+\infty}$ nebo jen $\{a_n\}$; a_n se nazývá *n-tý člen* posloupnosti.

Definici číselné posloupnosti lze založit i na pojmu (reálné) funkce; pak je to funkce definovaná na množině $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel.

Způsoby zadání posloupnosti

Číselná posloupnost bývá zadána *několika prvními členy* (tak, aby bylo patrné pravidlo, jak vytvářet další členy, n-tým členem nebo rekurentně.

Úloha 1.2.2. *Je dána posloupnost* $\frac{1}{1\cdot 4}$, $\frac{3}{4\cdot 7}$, $\frac{5}{7\cdot 10}$, $\frac{7}{10\cdot 13}$, $\cdots$ *Určete její n-tý člen.*

Řešení. $a_n = \frac{2n-1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$ □

Při zadání *n-tým členem* zase naopak lze z příslušného vzorce počítat jednotlivé členy posloupnosti.

Úloha 1.2.3 (Příklady číselných posloupností zadaných n-tým členem)**.** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$, $\{(-1)^n \cdot n\}$, $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $\{a \cdot q^{n-1}\}$, $\{a+(n-1)d\}$. *Vypočtěte členy* a_1, a_2, a_3, a_4.

Rekurentní definice obsahuje zpravidla 1. člen (nebo několik prvních členů) a pravidlo, jak vytvořit další člen ze členů předcházejících.

Rekurentní definice aritmetické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n + d$.

Rekurentní definice geometrické posloupnosti: $a_1 = a$, $a_{n+1} = a_n \cdot q$ $(q \notin \{0, 1, -1\})$.

Úloha 1.2.4. *Posloupnost* $\{a_n\}$ *je zadána rekurentně takto:* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{10}{a_n}\right)$; *je to posloupnost aproximací čísla* $\sqrt{10}$. *Vypočtěte první čtyři aproximace.*

Úloha 1.2.5. *Fibonacciova posloupnost* $\{b_n\}$ *je definována takto:* $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. *Vypočtěte prvních 10 členů této posloupnosti.*

Posloupnost $\{a_n\}$ je třeba odlišovat od množiny (všech) jejích členů (kdy se též užívají složené závorky). Například množina (všech) členů posloupnosti $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ je $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}$, množina (hodnot) členů posloupnosti $\{(-1)^n\}$ je $\{-1, 1\}$.

Definice 1.2.6. Posloupnost $\{b_n\}$ se nazývá ***vybraná*** *z posloupnosti* $\{a_n\}$ (nebo též ***podposloupnost***) $\Leftrightarrow$ $\exists$ posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \cdots$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $b_n = a_{k_n}$.

Např. posloupnost všech prvočísel je vybraná z posloupnosti $\{n\}$ všech čísel přirozených, ale není vybraná z posloupnosti $\{2n\text{-}1\}$ všech čísel lichých.

1.3 Základní vlastnosti číselných posloupností

V této kapitole se dále zabýváme jen číselnými posloupnostmi.

Definice 1.3.1. Posloupnost se nazývá (***shora, zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina všech jejích členů.

Např. posloupnost $\{2n-1\}$ je zdola omezená, není omezená shora, není omezená. Posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená shora i zdola, je omezená. Stacionární posloupnost $\{c\}$ je omezená.

Definice 1.3.2. Posloupnost a se nazývá

– ***rostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < a_{n+1}$,

– ***klesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n > a_{n+1}$,

– ***nerostoucí*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$,

– ***neklesající*** $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \geq a_{n+1}$.

Společný název pro všechny tyto druhy posloupností: ***posloupnosti monotonní*** a pro první dva druhy: ***posloupnosti ryze monotonní***.

Definice 1.3.3. Operace s posloupnostmi jsou definovány takto:

– ***násobení reálným číslem c***: $c \cdot \{a_n\} = \{c \cdot a_n\}$;

– ***aritmetické operace*** (*součet, rozdíl, součin, podíl*): $\{a_n\}+\{b_n\} = \{a_n + b_n\}$, $\{a_n\} - \{b_n\} = \{a_n - b_n\}$, $\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}$, $\{a_n\} / \{b_n\} = \{a_n/b_n\}$, (pro $b_n \neq 0$);

– ***opačná posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{-a_n\}$;

– ***reciproká posloupnost*** k $\{a_n\}$ je $\{1/a_n\}$ (pro $a_n \neq 0$).

1.4 Limita posloupnosti

Definice 1.4.1. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ ***má limitu*** $a \Leftrightarrow$

$$\forall U(a) \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N}: \quad n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n \in U(a).$$

Je-li $a \in \mathbb{R}$, nazývá se *a vlastní limita* a posloupnost $\{a_n\}$ se nazývá ***konvergentní***, pokud $a = \pm\infty$, nazývá se *a nevlastní limita.* Neexistuje-li vlastní limita, nazývá se posloupnost $\{a_n\}$ ***divergentní***.

Zápisy: $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$; $\lim a_n = a$; $a_n \to a$ pro $n \to +\infty$.

Posloupnost tedy buď konverguje nebo diverguje. V tomto druhém případě buď diverguje k $+\infty$ nebo k $-\infty$ nebo *osciluje* (tj. nemá limitu vlastní ani nevlastní).

Např. posloupnost $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ je konvergentní, má limitu 1, stacionární posloupnost $\{c\}$ je konvergentní a má limitu c, posloupnost $\left\{\frac{n}{100}\right\}$ je divergentní, má nevlastní limitu $+\infty$, posloupnost $\{q^n\}$ je pro $q \leq -1$ divergentní, nemá limitu (osciluje).

Definice 1.4.2. Je-li $V(n)$ nějaká výroková forma a platí-li, že výrok

$$(\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tak, že} \quad \forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow V(n))$$

je pravdivý, pak říkáme, že $V(n)$ platí ***pro skoro všechna*** n.

Pomocí tohoto vyjádření lze vyjádřit definici limity posloupnosti např. takto:

Definice 1.4.3. Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}$ *má limitu* $a \Leftrightarrow$ v každém okolí $U(a)$ leží skoro všechny členy této posloupnosti.

Věty o limitách:

Věta 1.4.4. *Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.*

Důkaz (sporem). Kdyby existovaly dvě limity a, b, pak by existovala disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že pro skoro všechna n by mělo platit současně $a_n \in U(a)$, $a_n \in U(b)$, což je spor. □

Věta 1.4.5. *Má-li posloupnost* $\{a_n\}$ *limitu, pak každá posloupnost* $\{b_n\}$ *vybraná z posloupnosti* $\{a_n\}$ *má tutéž limitu.*

Důkaz. Označme tuto limitu a; pak $\forall U(a) \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow a_n \in U(a)$; pro $k_n > n_0$ je ovšem též $b_m = a_{k_n} \in U(a)$, takže $b_m \in U(a)$ pro skoro všechna m. □

Limita posloupnosti se tedy nezmění, vynecháme-li nebo pozměníme-li libovolný konečný počet členů posloupnosti.

Při výpočtu limit využíváme také tohoto postupu:

1) zjistíme, že daná posloupnost je konvergentní a

2) najdeme limitu a nějaké vhodné vybrané posloupnosti. Pak toto a je i limitou dané posloupnosti.

– Když naopak zjistíme, že nějaká vybraná posloupnost je divergentní, znamená to podle předchozí věty, že je divergentní i daná posloupnost.

– Podobně zjistíme-li, že dvě vybrané posloupnosti mají různou limitu, je daná posloupnost divergentní.

Věta 1.4.6. *Každá konvergentní posloupnost je omezená.*

Důkaz. Označme limitu a; zvolme $\varepsilon = 1$. Pak množina M těch členů posloupnosti, které neleží v okolí $U(a, 1)$, je konečná.

$\forall n \in \mathbb{N}$ pak platí $a \geq \min\{\min M, a-1\}$, $a \leq \max\{\max M, a+1\}$. □

Tato věta ovšem neplatí obráceně, neboť např. posloupnost $\{(-1)^n\}$ je omezená, ale je divergentní. Větší hloubku pohledu do vztahu mezi omezeností a konvergencí dává následující věta.

Věta 1.4.7 (Bolzano–Weierstrassova)**.** *Z každé omezené posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost.*

Princip důkazu. (Bolzanova metoda půlení intervalů): Je dána posloupnost $\{a_n\}$; ježto je omezená, $\exists\langle K_1, L_1\rangle$ tak, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je $a_n \in \langle K_1, L_1\rangle$.

Konstrukce vybrané posloupnosti:

– Za b_1 zvolíme libovolný člen dané posloupnosti $\{a_n\}$, nechť v ní má index k_1.

– Interval $\langle K_1, L_1\rangle$ rozpůlíme a označíme $\langle K_2, L_2\rangle$ tu část, do níž je zobrazeno nekonečně mnoho členů posloupnosti $\{a_n\}$.

– V $\langle K_2, L_2\rangle$ vybereme za b_2 libovolný takový člen posloupnosti $\{a_n\}$, který má index $k_2 > k_1$.

– Interval $\langle K_2, L_2\rangle$ rozpůlíme, atd.

– Označíme a (jediný) společný bod všech intervalů $\langle K_n, L_n\rangle$ (podle věty o vložených intervalech).

– Pak $\forall U(a)$ pro skoro všechna n platí $\langle K_n, L_n\rangle \subset U(a)$, takže též $b_n \in U(a)$, tedy $b_n \to a$.

□

Věta 1.4.8. *Každá neklesající shora omezená posloupnost je konvergentní.*

Princip důkazu. Mějme dánu posloupnost $\{a_n\}$; z omezenosti množiny $M = \{a_1, a_1, \dots\}$ plyne existence vlastního suprema $a = \sup M$. Ze druhé vlastnosti suprema plyne, že v libovolném levém okolí $U(a-)$ leží alespoň jedno a_n, takže vzhledem k monotónnosti $\{a_n\}$ leží v $U(a-)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$. □

Věta 1.4.9 (o limitách součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$*. Pak platí, pokud výrazy na pravých stranách mají v* $\mathbb{R}^*$ *smysl:*

1) $\lim(a_n + b_n) = a + b$, $\lim(a_n - b_n) = a - b$,

2) $\lim(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$,

3) pro $b_n \neq 0$, $b \neq 0$ *je* $\lim(a_n/b_n) = a/b$,

4) $\lim |a_n| = |a|$.

Důkaz. Ukázka pro součet, kde a, b jsou vlastní limity:

$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tak, že $\begin{array}{l} : n \geq n_1 \Rightarrow a_n \in U(a, \varepsilon/2), \\ : n \geq n_2 \Rightarrow b_n \in U(b, \varepsilon/2). \end{array}$

Nechť $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ a $n \geq n_0$. Pak $\begin{array}{l} a - \varepsilon/2 < a_n < a + \varepsilon/2, \\ b - \varepsilon/2 < b_n < b + \varepsilon/2. \end{array}$

Po sečtení obou nerovností máme $(a_n + b_n) \in U(a + b, \varepsilon)$. □

Úloha 1.4.10. *Dokažte větu pro součet, kde* a *je vlastní limita a* $b = +\infty$*.*

Věta 1.4.11 (limita nerovnosti)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$ *a pro nekonečně mnoho* n *platí* $a_n \leq b_n$*. Pak* $a \leq b$*.*

Důkaz sporem. Kdyby bylo $a > b$, existovala by disjunktní okolí $U(a)$, $U(b)$ tak, že $\forall x \in U(a) \forall y \in U(b)$ by platilo $x > y$. Pro skoro všechna n je však $a_n \in U(a)$, $b_n \in U(b)$, tedy by platilo $a_n > b_n$, což dává spor s předpokladem věty. □

Pro konvergentní posloupnosti $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ zřejmě platí, že když pro nekonečně mnoho členů je $a_n \leq b_n$ a pro nekonečně mnoho členů je $a_n > b_n$, pak $a = b$.

Věta 1.4.12 (věta o třech limitách)**.** *Nechť* $\lim a_n = a$, $\lim b_n = a$ *a nechť pro skoro všechna* n *je* $a_n \leq c_n \leq b_n$*. Pak* $\lim c_n = a$*.*

Princip důkazu. Podle definice limity patří do libovolného okolí $U(a)$ skoro všechny členy posloupnosti $\{a_n\}$ a také skoro všechny členy posloupnosti $\{b_n\}$. Proto do $U(a)$ patří také skoro všechny členy posloupnosti $\{c_n\}$. □

Pro nevlastní limity má věta o třech limitách (zvaná též věta o třech posloupnostech) speciální tvar. Je-li totiž $\lim a_n = +\infty$, lze brát za b_n posloupnost $\{+\infty\}$, proto z nerovnosti $a_n \leq c_n$ plyne $\lim c_n = +\infty$. Podobně lze větu o třech limitách upravit pro nevlastní limitu $-\infty$.

1.5 Limes inferior a limes superior

Uvažujme omezenou posloupnost $\{a_n\}$. Pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ následovně:

$$\alpha_n = \inf \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}, \quad \beta_n = \sup \{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Úloha 1.5.1. *Určete tři prní členy posloupností $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ pro posloupnost $\left\{\frac{(-1)^n}{n+1}\right\}$.*

Řešení. Vypočteme několik prvních členů posloupnosti $\{a_n\}$:

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots .$$

Hodnoty v absolutní hodnotě klesají, a tak se dá vyvodit, že

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \inf \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = -\frac{1}{2}, \\
\alpha_2 &= \inf \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = -\frac{1}{4}, \\
\alpha_3 &= \inf \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = -\frac{1}{4}, \\
\beta_1 &= \sup \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = \frac{1}{3}, \\
\beta_2 &= \sup \left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = \frac{1}{3}, \\
\beta_3 &= \sup \left\{-\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{7}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{9} \cdots \right\} = \frac{1}{5}.
\end{aligned}$$

□

Z definic $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ plyne:

- $\alpha_n \leq a_n \leq \beta_n$,
- $\{\alpha_n\}$ je neklesající,
- $\{\beta_n\}$ je nerostoucí a
- z omezenosti $\{a_n\}$ plyne i omezenost $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$,

a tedy jsou obě posloupnosti $\{\alpha_n\}$ a $\{\beta_n\}$ konvergentní (mají vlastní limitu).

Definice 1.5.2. Nechť posloupnost $\{a_n\}$ je omezená, pak definujeme její *dolní limitu (limes inferior)*

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}$$

a její *horní limitu (limes superior)*

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\}.$$

Úloha 1.5.3. *Určete dolní a horní limitu posloupnosti* $(-1)^n \dfrac{2n-1}{n+1}$.

Řešení. Zde si opět vypíšeme několik prvních členů studované posloupnosti:

$$-\frac{1}{2}, \frac{3}{3}, -\frac{5}{4}, \frac{7}{5}, -\frac{9}{6}, \frac{11}{7}, -\frac{13}{8}, \frac{15}{9}, -\frac{17}{10}, \frac{19}{11}, \dots, -\frac{1997}{1000}, \frac{1999}{1001}, -\frac{2001}{1002}, \frac{2003}{1003}, \dots .$$

Zřejmě

$$\lim_{n\to+\infty} |a_n| = 2, \quad \text{ale samotná} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \quad \text{neexistuje.}$$

Odvodíme omezenost:

$$\left|(-1)^n \frac{2n-1}{n+1}\right| = \frac{2n-1}{n+1} \le \frac{2n+2}{n+1} = 2,$$

a tak

$$-2 \le (-1)^n \frac{2n-1}{n+1} \le 2.$$

Posloupnost je tedy omezená — existence dolní a horní limity je tedy zajištěna.

$$\liminf_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = \lim_{n\to+\infty} \inf\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \lim_{n\to+\infty} -2 = -2,$$
$$\limsup_{n\to+\infty} a_n := \lim_{n\to+\infty} \beta_n = \lim_{n\to+\infty} \sup\{a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \dots\} = \lim_{n\to+\infty} 2 = 2.$$

□

1.6 Nulové posloupnosti

Jsou to posloupnosti, kde $\lim a_n = 0$. Nulové posloupnosti fakticky nejsou jen zvláštním případem konvergentních posloupností, ale i naopak, konvergenci bychom mohli definovat užitím nulových posloupností podle věty:

Věta 1.6.1.

$$a_n \to a \Leftrightarrow (a_n - a) \to 0.$$

Uvádíme některé věty, které mají vztah k nulovým posloupnostem.

Věta 1.6.2. *Jestliže $a_n \to a$, pak $|a_n| \to |a|$.*

Tato věta neplatí pro $a \neq 0$ naopak, ale pro $a = 0$ ano.

Věta 1.6.3. *Jestliže $|a_n| \to +\infty$, je $1/a_n$ posloupnost nulová.*

Jestliže jmenovatel zlomku konverguje k nule, je situace složitější:

Věta 1.6.4. *Je-li $\forall n \in \mathbb{N}$* $$\begin{aligned} &a_n > 0,\ a_n \to 0, \text{ pak } 1/a_n \to +\infty,\\ &a_n < 0,\ a_n \to 0, \text{ pak } 1/a_n \to -\infty,\\ &a_n \neq 0,\ a_n \to 0, \text{ pak } 1/|a_n| \to \infty. \end{aligned}$$

Nulových posloupností se s výhodou využívá při výpočtech limit.

Úlohy:

1.6.1. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6n^2+n}{4n^2+5}$.

1.6.2. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{6\cdot 2^{2n}+5\cdot 2^n-4}{2^{2n+1}-2^n+15}$.

1.6.3. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7n+150}{n^2-0,25}$.

1.6.4. Vypočtěte $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^3-8n}{9n^2+10}$.

1.7 Posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická

Někdy se pro uspořádané n-tice používá název *konečné posloupnosti*, který zčásti navozuje použití posloupností v praxi. V praxi je mnoho situací, kdy známe několik prvních členů $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ nějaké posloupnosti a pomocí této znalosti chceme zjistit, zkonstruovat nebo předpovědět její další člen a_{n+1}. Může jít o posloupnost peněžních částek, (časovou) posloupnost údajů o objemu výroby, posloupnost časových termínů nebo intervalů ad. Problémem je, *jak* určit další člen (nebo alespoň jeho přibližnou hodnotu) ze znalosti předchozích. Může jít o nalezení vzorce pro n-tý člen, rekurentního pravidla nebo i o jiný postup.

Zvláštní pozornosti si zaslouží posloupnost aritmetická a posloupnost geometrická, které se v praxi vyskytují poměrně často.

Aritmetická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým prvním členem a_1, konstantní diferencí d a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n + d.$$

Aritmetickou posloupnost lze rovněž definovat jako posloupnost, u níž rozdíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

(Dokazuje se jednoduše např. matematickou indukcí). Vidíme, že aritmetická posloupnost má pro $d > 0$ limitu $+\infty$, pro $d < 0$ limitu $-\infty$.

Úloha 1.7.1. *V posledních třech měsících činil celkový objem zakázek přibližně* $a_1 = 325$ *tisíc Kč,* $a_2 = 354$ *tisíc Kč a* $a_3 = 383$ *tisíc Kč. Jaký objem lze očekávat ve 4. měsíci?*

Řešení. Lze vyslovit hypotézu, že objem zakázek tvoří aritmetickou posloupnost, kde $a_1 = 325$, $d = 29$ (tisíc Kč). Pak $a_4 = a_3 + d = 412$ (tisíc Kč). Lze očekávat objem zakázek za 412 tisíc Kč. (Samozřejmě korektnost vyslovení takové hypotézy závisí na praktických okolnostech.) $\square$

Praktický význam může mít i součet s_n prvních n členů aritmetické posloupnosti. Vzorec pro s_n lze odvodit např. takto: Vyjádříme s_n dvěma způsoby:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + (a_1 + (n-1)d), \\ s_n &= a_n + (a_n - d) + (a_n - 2d) + \cdots + (a_n - (n-1)d). \end{aligned}$$

Po sečtení máme

$$2s_n = n \cdot (a_1 + a_n), \quad \text{takže} \quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Úloha 1.7.2. *Na skládce jsou uloženy roury tak, že v dolní vrstvě jich je 26 a každá roura v každé vyšší vrstvě vždy zapadá mezi dvě roury ve vrstvě nižší; vrstev je celkem 12. Kolik je na skládce rour?*

Řešení. Položíme $a_1 = 26$; pak $d = -1$. V horní vrstvě je $a_{12} = 26 + 11 \cdot (-1) = 15$ rour a celkem $s_{12} = 6 \cdot (26 + 15) = 246$ rour. $\square$

Geometrická posloupnost

je (definována jako) posloupnost, která je dána svým 1. členem a_1, konstantním kvocientem $q \neq 0$ a rekurentním pravidlem

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_{n+1} = a_n \cdot q.$$

Geometrickou posloupnost lze tedy rovněž definovat jako posloupnost, u níž podíl libovolných dvou po sobě jdoucích členů je konstantní. Z rekurentního pravidla dostaneme vzorec pro n-tý člen:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}.$$

(Dokazuje se jednoduše například matematickou indukcí).

Úloha 1.7.3. *V prvním měsíci roku činil obrat 300 000 Kč a v každém dalším měsíci byl o* 5% *větší než v měsíci předchozím. Určete předpokládaný listopadový obrat.*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 300\,000$, $q = 1,05$, $n = 11$. Pak

$$a_{11} = 300\,000 \cdot 1,05^{10} \approx 300\,000 \cdot 1,629 = 489\,000 \text{ Kč}.$$

Viz poznámku za úlohou 1.7.1. □

Je-li $a_1 > 0$, pak geometrická posloupnost $\{a_1 \cdot q^{n-1}\}$ má limitu 0 (pro $|q| < 1$) nebo a_1 (pro $q = 1$) nebo $+\infty$ (pro $q > 1$) a nebo nemá limitu (pro $q < -1$).

Praktický význam může mít opět součet prvních n členů geometrické posloupnosti (tj. n-tý částečný součet geometrické řady).

Vzorec pro s_n lze odvodit takto: Vyjádříme s_n a $q \cdot s_n$:

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1}, \\ q \cdot s_n &= a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + \cdots + a_1 \cdot q^{n-1} + a_1 \cdot q^n. \end{aligned}$$

Po odečtení je $s_n \cdot (1 - q) = a_1 \cdot (1 - q^n)$, takže

$$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{tj. též} \quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Úloha 1.7.4. *Vynálezce šachové hry požadoval podle pověsti odměnu za každé ze 64 polí šachovnice takto: za 1. pole jedno obilní zrno, za 2. pole 2 zrna, za 3. pole 4 zrna, atd., za každé další vždy dvojnásobek. Kolik zrnek obilí měl dostat?*

Řešení. Jde o geometrickou posloupnost, kde $a_1 = 1$, $q = 2$, $n = 64$. Proto

$$s_{64} = 1 \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1 \approx 1,845 \cdot 10^{19}$$

a to je více obilí, než se kdy na Zemi urodilo. □

\- * -

Kapitola 2

Pojem funkce

2.1 Definice funkce

Písmeno x nazýváme *proměnná* na (číselné) množině $M \Leftrightarrow$ může být ztotožněno s libovolným prvkem množiny M. Pojem funkce navazuje na pojem *binární relace* a na pojem *zobrazení*, jejichž základní znalost zde předpokládáme.

Definice 2.1.1. Každé zobrazení f z $\mathbb{R}$ do $\mathbb{R}$ (tj. zobrazení v $\mathbb{R}$) nazýváme ***reálná funkce*** *jedné reálné proměnné.* Je-li $(x, y) \in f$, píšeme $y = f(x)$; x se nazývá ***nezávisle proměnná***, y **závisle proměnná**; říkáme též, že y *je funkcí* x.

Chceme-li vyjádřit, že y je (zatím nepojmenovanou) funkcí x, zapíšeme $y = y(x)$. Vedle vyjádření „funkce f" se tolerují též zápisy „funkce $f(x)$" (chceme-li zdůraznit označení nezávisle proměnné) nebo „funkce $y = f(x)$" (chceme-li zdůraznit označení obou proměnných).

S pojmem funkce jsou spjaty dvě významné množiny:

definiční obor *funkce*:

$$D(f) = \{x \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\},$$

funkční obor (***obor hodnot***):

$$H(f) = \{y \in \mathbb{R}; \exists (x, y) \in f\}.$$

Hodnotu proměnné vyjadřujeme číslem nebo symbolem proměnné s indexem. Například v bodě $x_0 = 2$ má funkce $y = 3x$ hodnotu $y_0 = 6$. Je-li $M \subset D(f)$, je $f(M)$ označení pro $\{f(x); x \in M\}$. Je tedy $H(f) = f(D(f))$. Naopak, je-li $B \subset H(f)$, pak definujeme $f^{-1}(B)$ jako množinu $\{x \in D(f); f(x) \in B\}$.

Grafem funkce f v kartézských souřadnicích rozumíme množinu všech bodů euklidovské roviny, pro jejichž souřadnice x, y platí $(x, y) \in f$. Grafické znázornění funkce často svou názorností pomáhá k pochopení vlastností a průběhu funkce; pro některé funkce však graf nedovedeme sestrojit, například pro Dirichletovu funkci. Grafy funkcí lze uvažovat také v polární souřadnicové soustavě, kdy ovšem dostáváme jiné křivky. Například grafem přímé úměrnosti $y = kx$ v kartézských souřadnicích je přímka, grafem téže funkce $\rho = k\varphi$ v polárních souřadnicích je Archimedova spirála. Neřekneme-li jinak, uvažujeme vždy graf v kartézských souřadnicích.

Způsoby definice funkce:

Funkci f lze vyjádřit takto: $f = \{(x, y) \in D(f) \times \mathbb{R}; V(x, y)\}$. Zadat (definovat) funkci f tedy znamená udat její definiční obor $D(f)$ a jisté pravidlo $V(x, y)$, jehož oborem pravdivosti je f a které stanovuje, jak k zadanému $x \in D(f)$ najít (vypočítat) hodnotu $f(x)$. Podle toho, jak je toto pravidlo formulováno, rozlišujeme tato zadání funkce:

a) (Explicitní) *rovnicí*, například

$$f = \left\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; y = x^2 - 1\right\},$$

nebo jednoduše $f : y = x^2 - 1$.

U funkce definované rovnicí, není-li řečeno jinak, bereme za $D(f)$ nejširší množinu, pro niž má rovnice smysl. Je-li předepsán jiný definiční obor, musíme jej uvést, například

$$f : y = x - 1, x \in \mathbb{N}.$$

b) *Tabulkou*, například

x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

Také zadání funkce *výčtem prvků* lze považovat za zadání tabulkou, jde jen o jinou formu zápisu; například

$$f = \{(-2; 3), (-1; 0), (0; -1), (1; 0), (2; 3), (3; 8)\}.$$

Tabulkou či výčtem prvků bývají zadávány funkce, jejichž funkční hodnoty byly získány měřením nebo kde jsou tyto hodnoty důležitější než příslušné pravidlo (například daňové tabulky, bodovací sportovní tabulky). Tabelaci funkce však používáme i u funkcí definovaných jinak, pokud může tabulka posloužit lépe k přehlednosti nebo jiné praktické potřebě (například tabulka cen v závislosti na hmotnosti zboží).

c) *Grafem* (zpravidla kartézským). Další druhy grafů — šachovnicový, uzlový nebo graf v polární soustavě souřadnic — bývají méně časté.

Grafem bývají často vyjadřovány ty funkce, jejichž průběh je zapisován v přístrojích graficky na papírová média nebo na displeji.

d) *Po částech*; tak je definována například Dirichletova funkce $\chi(x)$. Podobným způsobem je definována funkce

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ pro } x < 0, \\ 0 \text{ pro } x = 0, \\ 1 \text{ pro } x > 0. \end{cases}$$

Rovnice $y = \chi(x)$ a $y = \operatorname{sgn} x$ však již považujeme za rovnice funkcí.

e) *Implicitní rovnicí*, například

$$x^2 + y^2 = 25;$$

takto se definují implicitní funkce $y = y(x)$, s nimiž je technika práce někdy poněkud odlišná. Zejména bývá vymezena množina $M \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, pro niž má platit $(x, y) \in M$. Například u výše uvedené rovnice může být zadáno, že M je polorovina $y \geq 0$.

f) *Parametricky*: Parametrické vyjádření je tvaru

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), t \in J,$$

kde φ, ψ jsou funkce definované na množině (intervalu) J, přičemž funkce $y = f(x)$ je definována vztahem

$$f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; \exists t \in J \quad \text{tak, že} \quad x = \varphi(t) \wedge y = \psi(t)\}\,.$$

Například $x = 4\cos t$, $y = 4\sin t$, $t \in \langle 0, \pi\rangle$. Parametrického vyjádření používáme ponejvíce při vyšetřování různých (například technických) křivek.

g) *Jinak*:

Někdy je pro výrokovou formu $V(x, y)$ dána jen slovní formulace. Například výroková forma $V(x, y) =$„y je největší celé číslo, které není větší než x“ definuje funkci $[\,.\,]$ „celá část“ (například $[3,8] = 3$, $[-1] = -1$, $[-6,7] = -7$; tím se tato funkce odlišuje od „počítačové“ INT(.)). Ostatně i goniometrické funkce sinus a kosinus jsou pomocí jednotkové kružnice definovány tímto způsobem (avšak $y = \sin x$, $y = \cos x$, jsou již *rovnice* těchto funkcí).

Výroková forma $V(x, y)$ je tedy jisté „pravidlo“ („předpis“), které ke každému číslu x z jisté množiny $D \subset \mathbb{R}$ přiřazuje právě jedno číslo $y \in \mathbb{R}$. Pojem funkce se někdy (z důvodů didaktických) ztotožňuje přímo s tímto pravidlem, podle nějž rozhodujeme, zda $(x, y) \in f$, nebo s jehož pomocí k danému x počítáme příslušnou funkční hodnotu $f(x)$. I při našem pojetí funkce však toto pravidlo chápeme jako atribut a druhou stránku pojmu funkce. Pro toto pravidlo $V(x, y)$ tak proto lze používat stejné označení f jako pro funkci a zkráceně říkat a psát například „funkce $f : y = x^2 - 1$“ nebo prostě „funkce $y = x^2 - 1$“.

2.2 Řešení rovnic a nerovnic

Při vyšetřování vlastností (průběhu) funkcí se setkáváme s několika typickými úlohami, jež vedou na řešení rovnic a nerovnic resp. jejich soustav. Některé dále uvádíme.

a) ***Stanovení definičního oboru***

Je-li funkce f určena rovnicí a její definiční obor není zadán, je třeba zjistit $D(f)$ jako množinu všech $x \in \mathbb{R}$, pro něž je daná rovnice definována. Úlohy na definiční obor zpravidla vedou na řešení nerovnic nebo soustav nerovnic.

Úloha 2.2.1. *Určete definiční obor funkce* $y = \dfrac{\ln(4 - x^2)}{1 - x}$.

Řešení. Čitatel je definován pro $4 - x^2 > 0$, tj. na množině $M_1 = (-2, 2)$, jmenovatel je definován pro $1 - x \neq 0$, tj. na množině $M_2 = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Pravá strana rovnice funkce je tedy definována na množině $D(f) = M_1 \cap M_2 = (-2, 1) \cup (1, 2)$. □

b) ***Zjištění nulových bodů funkce***

Tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce: při hledání průsečíků grafu funkce s osou x zjišťujeme nulové body funkce f (a dále též při výpočtu extrémů funkcí zjišťujeme nulové body 1. derivace, tj. stacionární body, při zkoumání inflexe zjišťujeme zpravidla nulové body 2.derivace funkce).

Úloha 2.2.2. *Určete nulové body funkce* $y = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + \mathrm{e}^{-x}\cos x$.

Řešení. Máme $y = \mathrm{e}^{-x}(\cos x - \sin x)$. Hledáme body, v nichž $y = 0$, tj. řešíme goniometrickou rovnici $\cos x - \sin x = 0$, jež je ekvivalentní s rovnicí $\sin\frac{\pi}{4}\cos x - \cos\frac{\pi}{4}\sin x = 0$ (neboť $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4}$) a tedy i s rovnicí $\sin(\frac{\pi}{4} - x) = 0$. Nulové body dané funkce jsou tedy $x_k = \frac{\pi}{4} + k\pi$. □

c) ***Zjištění intervalů, kde je funkce kladná*** (***záporná***).

Také tyto úlohy jsou součástí vyšetřování průběhu funkce (při zjišťování intervalů monotónnosti řešíme nerovnice typu $y' > 0$, při zjišťování intervalů konvexnosti a konkávnosti řešíme nerovnice typu $y'' > 0$).

Úloha 2.2.3. *Určete intervaly, kde je funkce $y = (6x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x}$ kladná a kde je záporná.*

Řešení. Rovnici upravíme na tvar $y = (6 - x)x\,\mathrm{e}^{-x}$. Pro $x > 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. na intervalu (0, 6) je daná funkce kladná, pro $x > 0 \wedge 6 - x < 0$, tj. na intervalu $(6, +\infty)$ je funkce záporná, pro $x < 0 \wedge 6 - x > 0$, tj. též na intervalu $(-\infty, 0)$ je funkce záporná. □

d) ***Zjištění průsečíků grafů dvou funkcí***

Úloha 2.2.4. *Jsou dány funkce $y = x^2 - 1$, $y = x + 1$. Stanovte průsečíky grafů těchto funkcí.*

Řešení. Řešíme rovnici

$$x^2 - 1 = x + 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, x_2 = 2,$$

takže průsečíky jsou body $A[-1; 0]$ a $B[2; 3]$. □

e) ***Porovnání hodnot dvou funkcí***

Úloha 2.2.5. *Jsou dány funkce $f_1 : y = x^2$, $f_2 : y = 4-2x-x^2$. Porovnejte hodnoty těchto funkcí.*

Řešení.

$$f_1(x) < f_2(x) \quad \Leftrightarrow \quad x^2 < 4 - 2x - x^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + x - 2 < 0,$$

tedy na intervalu (-2, 1); podobně $f_1(x) > f_2(x)$ na množině $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$ a obě funkce mají stejné funkční hodnoty v bodech -2 a 1. □

2.3 Vlastnosti funkcí

Omezenost

Definice 2.3.1. Funkce f se nazývá

(***shora***, ***zdola***) ***omezená na množině*** $M \subset D(f)$ $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $f(M)$;

nazývá se (***shora***, ***zdola***) ***omezená*** $\Leftrightarrow$ tuto vlastnost má množina $H(f)$.

Například funkce $y = x^2$ je omezená zdola, není omezená shora a není omezená, ale na množině $\langle -10, 10\rangle$ je omezená.

Je-li funkce f omezená na M, existují $K, L \in \mathbb{R}$ tak, že platí $f(M) \subset \langle K, L\rangle$. Je-li funkce omezená, je omezená na každé množině $M \subset D(f)$.

Supremum množiny $f(M)$ nazýváme *supremum funkce* na množině M a označujeme $\sup\limits_{x \in M} f(x)$; podobně $\inf\limits_{x \in M} f(x)$.

Má-li množina $f(M)$ největší prvek, pak toto číslo nazýváme ***největší hodnota funkce*** f na množině M nebo též *globální* (*absolutní*) *maximum* funkce f na množině M; značí se $\max\limits_{x \in M} f(x)$, podobně $\min\limits_{x \in M} f(x)$.

Pokud $M = D(f)$, pak označení $x \in M$ vynecháváme.

Monotónnost

Definice 2.3.2. Funkce f se nazývá ***rostoucí*** (***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***) ***na množině*** $M \subset D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in M$ platí:

$$x_1 < x_2 \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \quad (f(x_1) > f(x_2),\; f(x_1) \leq f(x_2),\; f(x_1) \geq f(x_2)).$$

Funkci f rostoucí na $D(f)$ nazýváme ***rostoucí*** (tj. neuvádíme, kde je rostoucí), podobně funkce ***klesající***, ***neklesající***, ***nerostoucí***.

Pro funkce rostoucí a funkce klesající používáme souhrnný název funkce ***ryze monotónní***; souhrnný název pro všechny čtyři uvedené druhy funkcí je funkce ***monotónní***.

Například funkce $y = 1/x$ je klesající na intervalu $(-\infty, 0)$ a je klesající i na intervalu $(0, +\infty)$, ale není klesající (tj. není klesající na $D(f)$).

Kromě monotónnosti na množině, což je globální vlastnost funkce, se zavádí i pojem monotónnosti v bodě jako vlastnost lokální. Uvedeme definici jen pro funkci rostoucí, další tři případy monotónnosti se formulují analogicky.

Definice 2.3.3. Funkce f se nazývá ***rostoucí v bodě*** $x_0 \in D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \exists U(x_0) \subset D(f)$ tak, že $\forall x \in P(x_0-)$ platí $f(x) < f(x_0)$ a $\forall x \in P(x_0+)$ platí $f(x_0) < f(x)$.

Úloha 2.3.4. *Podobně definujte funkci klesající (nerostoucí, neklesající) v bodě* x_0 *a dále funkci rostoucí, klesající, nerostoucí a neklesající v bodě* x_0 *zleva resp. zprava. (Tuto vlastnost vyšetřujeme zejména v krajních bodech intervalů.)*

Věta 2.3.5 (vztah monotónnosti v bodě a na intervalu)**.** *Funkce f definovaná na intervalu (a, b) je na tomto intervalu rostoucí (klesající, nerostoucí, neklesající)* $\Leftrightarrow$ *má takovou vlastnost v každém bodě tohoto intervalu.*

Princip důkazu. (pro f rostoucí):

1) Nechť je f rostoucí na (a, b). Zvolíme libovolný bod $x_0 \in (a, b)$ a jeho okolí $P(x_0) \subset (a, b)$. Je-li $x_1 \in P(x_0-)$, $x_2 \in P(x_0+)$, je $x_1 < x_0 < x_2$ a monotónnost v bodě x_0 plyne z monotónnosti na (a, b).

2) Nechť f je rostoucí v každém bodě intervalu (a, b). Zvolíme dva body $x_1 < x_2$ a dokážeme, že $f(x_1) < f(x_2)$. Pro každé x' z jistého $P(x_1)$ je $f(x_1) < f(x')$; nechť m je supremum množiny M všech takových x'. Kdyby $m < b$, bylo by $m \in M$, neboť i v m je f rostoucí a podle 2. vlastnosti suprema $\forall P(m-)$ obsahuje bod $x' \in M$, tedy $f(x_1) < f(x') < f(m)$. Současně by existovalo pravé okolí $P(m+) \subset (a, b)$ tak, že by pro všechny jeho body x'' platilo $f(x'') > f(m) > f(x_1)$, tj. $x'' \in M$, $x'' > m$ a to je spor s 1. vlastností suprema. Proto $m = b$, takže $x_2 \in M$ a $f(x_1) < f(x_2)$.

□

Například funkce $y = \operatorname{sgn} x$ je rostoucí v bodě 0.

Parita

Definice 2.3.6. Funkce f se nazývá ***sudá*** (***lichá***) $\Leftrightarrow$ $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

$$x \in D(f) \quad \Rightarrow \quad -x \in D(f) \wedge f(-x) = f(x) \quad (f(-x) = -f(x)).$$

Příklad sudé funkce: $y = \cos x$, příklad liché funkce: $y = \sin x$.

Úloha 2.3.7. *Dokažte, že funkce $y = 3x^2 - 5$, $y = |x|$ a Dirichletova funkce χ jsou sudé a že $y = 2x^3 + x$, $y = x|x|$ a $y = \operatorname{sgn} x$ jsou funkce liché.*

Pro polynomické funkce platí: jsou-li v polynomu jen členy se sudými exponenty, je daná funkce sudá, jsou-li zde jen členy s lichými exponenty, je funkce lichá.

Kartézský graf sudé funkce je souměrný podle osy y, graf liché funkce je souměrný podle počátku.

Periodičnost

Definice 2.3.8. Funkce f se nazývá ***periodická*** $\Leftrightarrow$ $\exists p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$ tak, že $\forall x \in \mathbb{R}$ platí

1) $x \in D(f) \Rightarrow (x \pm p) \in D(f)$,

2) $\forall x \in D(f) : f(x \pm p) = f(x)$.

Číslo p se nazývá ***perioda*** funkce f.

Je-li p perioda funkce f, je $\forall k \in \mathbb{Z}$ také číslo kp periodou funkce f. Nejmenší kladná perioda p_0, pokud existuje, se nazývá *primitivní* (též *základní*) *perioda* funkce f. Konstantní funkci zpravidla mezi periodické funkce nepočítáme.

Příklady periodických funkcí: $y = \sin x$ $(p_0 = 2\pi)$, $y = \operatorname{tg} x$ $(p_0 = \pi)$.

Úloha 2.3.9. *Dokažte, že funkce $y = x - [x]$ je periodická s periodou $p_0 = 1$ a že Dirichletova funkce χ je periodická a periodou je každé racionální číslo různé od nuly; zde p_0 neexistuje.*

Někdy je užitečné chápat periodičnost jen „jednostranně“, například „periodičnost vpravo,“ tj. tak, že v definici místo $(x \pm p)$ uvažujeme jen $(x + p)$, kde $p > 0$.

2.4 Operace s funkcemi

- ***Rovnost funkcí***:

$$f = g \quad \Leftrightarrow \quad \forall x, y \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f \Leftrightarrow (x, y) \in g).$$

  Obráceně, je-li $f \neq g$, znamená to, že buď $D(f) \neq D(g)$ nebo $\exists x' \in D(f) \cap D(g)$ tak, že $f(x') \neq g(x')$.

- ***Částečné uspořádání***: Je-li F množina funkcí a jsou-li všechny funkce definovány na M, definuje se na F částečné uspořádání nerovností $f < g$.

  Úloha 2.4.1. *Definujte nerovnost $f < g$ na M a objasněte její geometrický význam.*

  Například funkce $y = |x|$ a funkce $y = x + 1$ nejsou srovnatelné na $\mathbb{R}$, ale na $(0, +\infty)$ ano.

- ***Zúžení*** (***restrikce***) ***funkce***: Mějme funkci f; její restrikcí nazveme funkci g takovou, že $D(g) \subset D(f)$ a na $D(g)$ je $g(x) = f(x)$.

- ***Algebraické operace***: $\forall x \in D(f) \cap D(g)$ se definuje

  1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
  2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$,
  3. $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$,
  4. $(f/g)(x) = f(x)/g(x)$ (pokud $g(x) \neq 0$.

- ***Skládání funkcí***: Mějme funkce f, φ a nechť $H(\varphi) \subset D(f)$. Pak složenou funkci $F = f \circ \varphi$ definujeme takto: $(f \circ \varphi)(x) = f[\varphi(x)]$, přičemž funkci f nazýváme *vnější funkce* a funkci φ *funkce vnitřní.*

  Například ve složené funkci $y = \sin 2x$ je vnější funkce $y = \sin u$, vnitřní funkce $u = 2x$. Funkce může být složena i vícekrát, například $y = \mathrm{e}^{\sin(3x+1)}$.

  Složenou funkci můžeme vytvořit substitucí proměnné. Máme-li například funkci $y = 1 - x$ a dosadíme $x = \sin t$, dostáváme složenou funkci $y = 1 - \sin t$. Zvláštním případem složené funkce je $|f|$. Vnější funkce je $y = |z|$, vnitřní funkce $z = f(x)$.

Úloha 2.4.2. *Zobrazte funkci* $y = |x^2 - 2x|$.

Funkce prostá

Definice 2.4.3. Funkce f se nazývá ***prostá na*** $M \subset D(f) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x_1, x_2 \in M$ platí: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

a nazývá se ***prostá*** $\quad \Leftrightarrow \quad$ je prostá na $D(f)$.

Množina M, na níž je funkce prostá, se nazývá jejím ***oborem prostoty***.

Například funkce $y = x^2$ není prostá, ale je prostá třeba na intervalu $\langle 0, +\infty)$, který je jejím oborem prostoty.

Věta 2.4.4 (vztah prostoty a ryzí monotónnosti)**.** *Je-li funkce ryze monotónní na* M*, je prostá na* M*.*

Důkaz. plyne z toho, že $x_1 < x_2 \Rightarrow x_1 \neq x_2$ a stejně i pro funkční hodnoty plyne z nerovností „$<$“, „$>$“ nerovnost „$\neq$“. $\square$

Obrácený vztah neplatí, existují prosté funkce, které nejsou monotónní, například funkce $y = 1/x$. Prostota funkce f je základním předpokladem pro to, aby inverzní relace f^{-1} byla zobrazením a tedy funkcí.

2.5 Funkce inverzní

Definice 2.5.1. Inverzní zobrazení f^{-1} k prosté funkci (na M) f nazýváme ***inverzní funkce***.

Je-li tedy funkce f prostá, pak k ní existuje funkce inverzní f^{-1} a platí

$$(x, y) \in f \quad \Leftrightarrow \quad (y, x) \in f^{-1};$$

přitom

$$D(f^{-1}) = H(f), \quad H(f^{-1}) = D(f).$$

Je-li f prostá na M, pak inverzní funkce má $D(f^{-1}) = f(M)$, $H(f^{-1}) = M$. Na M platí $f^{-1}(f(x)) = x$ a na $f(M)$ platí $f(f^{-1}(x)) = x$.

Geometrický význam: Grafy funkcí f a f^{-1} jsou souměrně sdružené podle přímky $y = x$ (osy I. a III. kvadrantu).

Například funkce $f : y = x^2 - 1$ je prostá na $M = \langle 0, +\infty)$, $f(M) = \langle -1, +\infty)$. Inverzní funkce f^{-1} je definována na $\langle -1, +\infty)$ a platí $x = y^2 - 1$ tj. $y = \sqrt{x+1}$. Pro $x \in \langle 0, +\infty)$ je $f^{-1} \circ f(x) = \sqrt{(x^2 - 1) + 1} = \sqrt{x^2} = x$, pro $x \in \langle -1, +\infty)$ je $f \circ f^{-1}(x) = \left(\sqrt{x+1}\right)^2 - 1 = x$.

Funkce a funkce k nim inverzní tvoří dvojice funkcí navzájem inverzních, neboť $(f^{-1})^{-1} = f$. Existují i funkce inverzní samy k sobě; graf takové funkce je souměrný podle přímky $y = x$ (například funkce $y = 1/x$, $y = a - x$, $y = x$).

Některé vlastnosti funkcí se přenášejí na funkce inverzní.

Věta 2.5.2 (o monotónnosti inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f rostoucí (klesající), je funkce f^{-1} také rostoucí (klesající).*

Princip důkazu. Nechť funkce $y = f(x)$ je rostoucí. Je-li $y_1 < y_2$, pak nemůže platit $x_1 > x_2$, protože z toho by plynulo $y_1 > y_2$. □

— ∗ —

Kapitola 3

Elementární funkce

3.1 Přehled elementárních funkcí

Jde o pojem spíše historický než matematický. Vymezuje se několik (*základních*) *elementárních funkcí* a z nich se pomocí konečného počtu algebraických operací a operací skládání vytvářejí další funkce, jež bývají v matematické literatuře někdy také nazývány *elementární funkce*.

Základní elementární funkce:

- funkce *konstantní* ($y = c$);
- funkce *mocninné* ($y = x^r$ pro libovolné $r \in R$, patří sem tedy i odmocniny a také například nepřímá úměrnost);
- *goniometrické* funkce ($y = \sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$) a funkce *cyklometrické* ($y = \arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$);
- *exponenciální* funkce ($y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$) a funkce *logaritmické* ($y = \log_a x$);
- *hyperbolické* funkce ($y = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{coth} x$) a funkce *hyperbolometrické* ($y = \operatorname{argsh} x$, $\operatorname{argch} x$, $\operatorname{argth} x$, $\operatorname{argcoth} x$).

Algebraické funkce

je název pro elementární funkce, které vzniknou z funkcí konstantních a z funkce $f(x) = x$ užitím operací sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Pokud nepoužijeme operaci odmocňování, dostaneme algebraické ***funkce racionální***. Algebraické funkce, které nejsou racionální, nazýváme ***iracionální***.

Zvláštní případy algebraických funkcí: například ***celá racionální funkce*** neboli funkce ***polynomická*** (algebraický polynom) a ***lomená racionální funkce***, patří mezi nejvýznamnější funkce studované v matematice.

Elementární funkce, které nejsou algebraické, se obvykle nazývají ***transcendentní***; ze základních elementárních funkcí mezi ně patří funkce exponenciální, logaritmické, goniometrické, cyklometrické, hyperbolické a hyperbolometrické, ale též mocninná funkce s iracionálním exponentem.

Elementární funkce mají velmi rozmanité vlastnosti (například pokud jde o omezenost, monotónnost, paritu, periodičnost aj.) a proto společné vlastnosti lze formulovat jen na velmi obecné úrovni. (Uvidíme zejména, že elementární funkce jsou spojité ve všech bodech svého definičního oboru a mají derivaci ve všech vnitřních bodech svého definičního oboru. Derivací elementární funkce je opět elementární funkce. Naopak ovšem primitivní funkcí k funkci elementární nemusí být funkce elementární).

Příklady funkcí, které nejsou elementární:

Dirichletova funkce $\chi(x)$, funkce $\operatorname{sgn} x$, funkce $[\,.\,]$ „celá část", funkce $\{\,.\,\}$ „lomená část" definovaná vztahem $\{x\} = x - [x]$.

Úloha 3.1.1. *Znázorněte graficky funkci $y = \{x\}$ a dokažte, že je periodická s periodou 1.*

Ani absolutní hodnota není považována za elementární funkci. Elementárními funkcemi nejsou ani jiné funkce definované „po částech", jako například funkce

$$y = \begin{cases} -x & \text{pro } x < 0, \\ x^2 & \text{pro } x \geq 0. \end{cases}$$

(Tuto funkci bychom ovšem mohli nazvat „po částech elementární").

3.2 Algebraické funkce

Při popisu jednotlivých funkcí nebo druhů funkcí někdy použijeme i některé pojmy, které jsou obsahem až pozdějších kapitol, ale kde určitou úroveň jejich znalosti lze předpokládat, ježto jsou obsahem středoškolského učiva matematiky. Jde tedy o jakési rozšířené zopakování středoškolského učiva.

a) Mocniny s přirozeným a celým exponentem

Mocninu a^n pro $n \in \mathbb{N}$ definujeme jako součin n činitelů a. Z této definice ihned plynou vlastnosti mocnin, zejména

$\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall r, s \in \mathbb{N}:$

(1) $a^r \cdot a^s = a^{r+s}$,

(2) $a^r : a^s = a^{r-s}$ (pokud $a \neq 0$, $r > s$),

(3) $(a^r)^s = a^{rs}$,

(4) $(ab)^r = a^r b^r$,

(5) $\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$ (pokud $b \neq 0$),

(6) $a^r = b^r \Leftrightarrow a = b$ (pokud $a, b > 0$).

K tomu přidejme ještě vlastnosti vyjádřené nerovnostmi

(7) $\forall a, b > 0 : a^r < b^r \Leftrightarrow a < b$,

(8) $\forall a > 1, r < s \Rightarrow a^r < a^s; \quad \forall a \in (0,1), r < s \Rightarrow a^r > a^s$.

Chceme-li rozšířit pojem mocniny rozšířením číselného oboru exponentu, přichází nejprve exponent 0. Mají-li zůstat v platnosti výše uvedené vlastnosti (1)–(5), je třeba podle (2) definovat

$$\forall a \neq 0; a^0 = 1.$$

Vlastnost (2) pak platí pro $r \geq s$ a u všech vlastností se musíme omezit na mocniny s nenulovým základem, neboť 0^0 není definována. Vlastnosti (6) a (7) ovšem pro $r = 0$ neplatí.

Dalším krokem je rozšíření pojmu mocnina pro exponent, jímž je celé číslo. Klíčovou vlastností je opět (2), podle níž se definuje (položíme-li $r = 0$, $s = k$)

$$\forall a \neq 0, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad a^{-k} = \frac{1}{a^k}.$$

Vlastnost (2) pak platí již bez omezení pro $r, s \in \mathbb{Z}$ a vlastnost (7) nabude tvaru

(7') $\forall r > 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r < b^r \;\Leftrightarrow\; a < b$,
$\quad\;\; \forall r < 0, \forall a, b > 0 : \quad a^r > b^r \;\Leftrightarrow\; a < b$.

b) Odmocniny

Definice 3.2.1. Pro každé přirozené číslo n definujeme n-tou odmocninu z nezáporného čísla a jako takové nezáporné číslo x, pro něž platí $x^n = a$.
Označení: $x = \sqrt[n]{a}$.

Podle definice tedy $(\sqrt[n]{a})^n = a$, například $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$.

Existence n-té odmocniny se zdá být zřejmá. Toto zdání podporují jednoduché příklady jako $\sqrt[3]{8} = 2$, neboť $2^3 = 8$. Jestliže však vyšetřujeme méně zřetelné případy, třeba $\sqrt[3]{\pi}$, je třeba si odpovědět na otázku, zda n-tá odmocnina pro každé $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ skutečně existuje a zda je to jediné číslo.

Věta 3.2.2 (o existenci a jednoznačnosti n-té odmocniny)**.** *$\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ existuje právě jedno číslo $x \in \mathbb{R}$, $x \geq 0$, takové, že $x^n = a$.*

Úloha 3.2.3. *Zjednodušte roznásobením $U = \left(2\sqrt{2} - \sqrt{3}\right)\left(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}\right)$.*

Úloha 3.2.4. *Zjednodušte umocněním a usměrněním*

$$V = \frac{\left(2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\right)}.$$

K základním vlastnostem odmocnin patří:

Věta 3.2.5. *$\forall a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $\forall m, n, r \in \mathbb{N}$:*

(1) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$,

(2) $\sqrt[nr]{a^r} = \sqrt[n]{a}$.

Důkaz.

ad (1) Pro levou a pravou stranu rovnosti platí:

$L = x^m$, kde podle definice $x^n = a$; po umocnění na m-tou máme $x^{mn} = a^m$.

$P = y$, kde podle definice je $y^n = a^m$. Je tedy $x^{mn} = y^n$ a z toho $x^m = y$,

takže $L = P$.

ad (2) $L = x$, kde $x^{nr} = a^r$, což dává $x^n = a$.

$P = y$, kde $y^n = a$. Tedy $x^n = y^n$ a z toho $x = y$,

tj. $L = P$.

□

c) Mocniny s racionálním exponentem

Chceme-li rozšířit pojem mocniny na exponent racionální, vyjdeme ze základní vlastnosti n-té odmocniny z čísla a: $x^n = a$. Tedy položíme $x = a^t$ a po umocnění na n-tou je $a = x^n = a^{tn}$, tedy $tn = 1$, $t = 1/n$. To vede k definici ($\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall a \in \mathbb{R}$, $a > 0$):

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

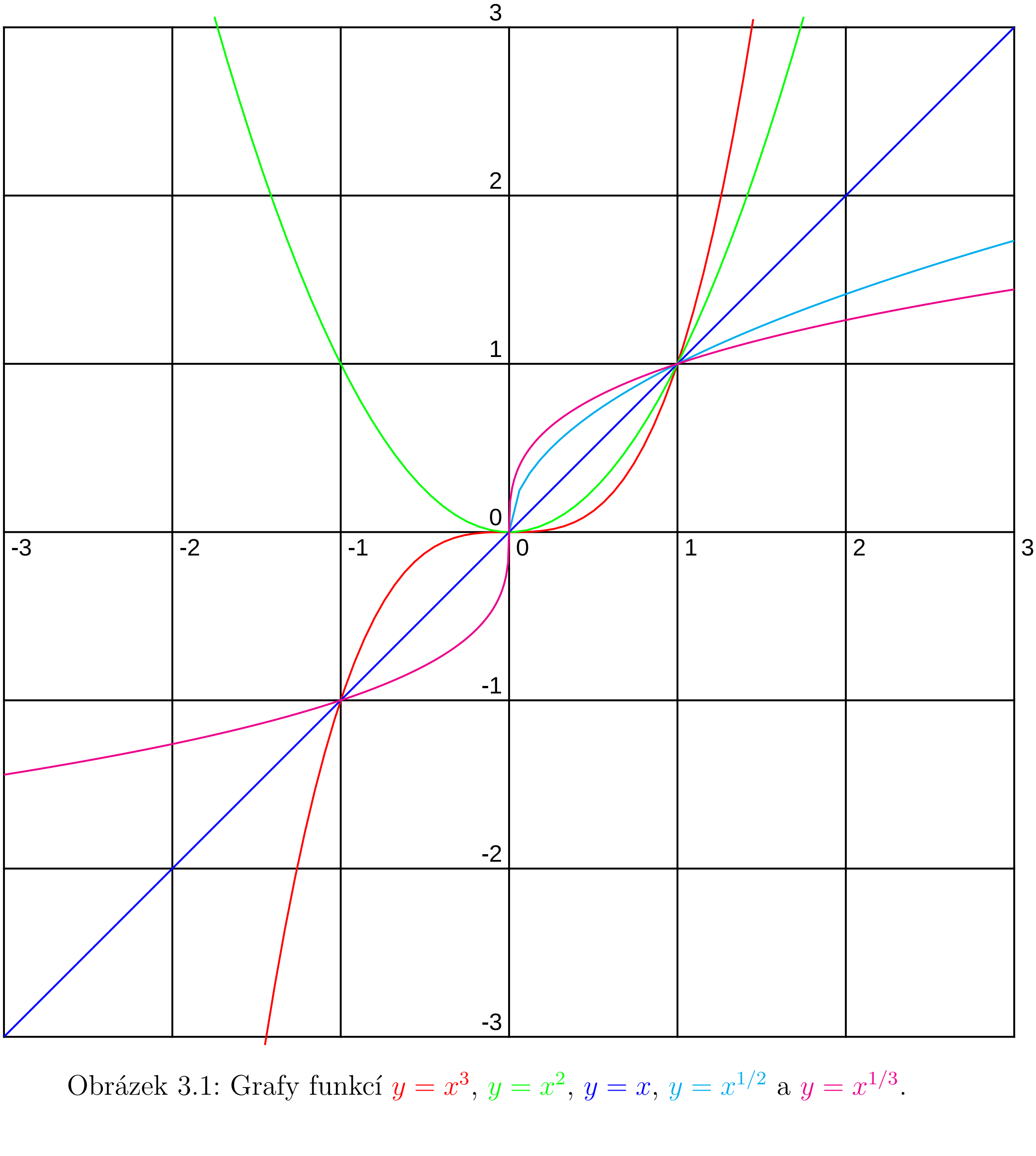
Vlastnosti mocnin zůstávají zachovány s tím, že musíme uvážit příslušné podmínky pro a, b, r, s.

Pojem mocniny lze rozšířit na libovolné reálné exponenty, ale mocnina s iracionálním exponentem již není algebraická funkce.

Definice 3.2.6. Nechť $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $q \in \mathbb{Q}'$. Pak definujeme

$$a^q = \sup_{r \in Q,\, r<q} \{a^r\}\,.$$

Výše uvedené vlastnosti mocnin (1)–6), (7'), (8) platí pro libovolné reálné exponenty.



Obrázek 3.1: Grafy funkcí $y = x^3$, $y = x^2$, $y = x$, $y = x^{1/2}$ a $y = x^{1/3}$.

d) Polynomické funkce

Jsou dány rovnicí $y = P(x)$, kde

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

je algebraický polynom. Pro $a_0 \neq 0$ jde o polynom a tedy i o polynomickou funkci n-tého stupně; $D(f) = \mathbb{R}$. Polynomická funkce obsahující jen liché mocniny x je lichá, pokud obsahuje jen sudé mocniny x, je sudá.

Při studiu polynomických funkcí se využívá poznatků z algebry, která se algebraickými polynomy zabývá. Zejména se využívá:

- dělení polynomů (se zbytkem),
- rozklad polynomu na součin kořenových činitelů a nerozložitelných kvadratických polynomů,
- věta o rovnosti polynomů. (Jestliže dva polynomy P, Q nejvýše n-tého stupně se rovnají v $n+1$ bodech, pak $P(x) = Q(x)$ na $\mathbb{R}$, tj. oba polynomy mají tentýž stupeň a tytéž koeficienty.)

Nyní uveďme některé zvláštní případy polynomických funkcí.

Mocninná funkce

$$y = x^n$$

(s přirozeným exponentem n).

Grafem je parabola n-tého stupně.

Pro n **sudé** je f sudá funkce, která pro $n \geq 2$ je na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ klesající a na intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí, tedy v bodě 0 má minimum, $H(f) = \langle 0, +\infty)$, funkce je konvexní na $\mathbb{R}$. Při definici inverzní funkce se za obor prostoty bere interval $\langle 0, +\infty)$. Inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ je tedy definována na intervalu $\langle 0, +\infty)$ a stejný je i obor hodnot.

Pro n **liché** je f lichá funkce, je rostoucí na $\mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$. Pro $n \geq 3$ je f konkávní na $(-\infty, 0\rangle$ a konvexní na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má inflexi. Ježto f je bijekcí $\mathbb{R}$ na $\mathbb{R}$, je inverzní funkce $y = \sqrt[n]{x}$ definována na $\mathbb{R}$ a má týž obor hodnot. Z tohoto důvodu je možné a účelné pro lichá n definovat n-tou odmocninu i ze záporných čísel; například $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Konstantní funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = k,$$

kde k je konstanta; $H(f) = \{k\}$. Jsou to funkce současně neklesající i nerostoucí, sudé ($y = 0$ je současně i lichá). V každém bodě mají neostré lokální maximum i neostré lokální minimum. Grafem každé konstantní funkce $y = k$ v kartézské soustavě souřadnic je přímka rovnoběžná s osou x, resp. osa x ($y = 0$). V polární soustavě souřadnic je grafem konstantní funkce $\rho = r$ (kde $r > 0$), $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$ kružnice se středem v počátku a s poloměrem r.

Lineární funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = kx + q,$$

kde $k \neq 0$, q jsou reálné konstanty; $D(f) = H(f) = R$. Pro $k > 0$ to jsou funkce rostoucí, pro $k < 0$ klesající, pro $q = 0$ jsou liché. Grafem každé lineární funkce v kartézské soustavě souřadnic je přímka, jež není rovnoběžná s osou x ani k ní kolmá. Konstanta k je *směrnicí* přímky, tj. $k = \operatorname{tg} \varphi$, kde φ je velikost orientovaného úhlu určeného osou x a touto přímkou; zpravidla bereme $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Parametr q znamená *úsek na ose y*.

Pro $q = 0$ se lineární funkce nazývá též *přímá úměrnost*, kartézským grafem přímé úměrnosti je přímka procházející počátkem. Pro lineární funkci (zpravidla pro $q \neq 0$) se používá též název *lineární závislost*.

Grafem lineární funkce v polární soustavě souřadnic je Archimedova spirála.

Ježto lineární funkce jsou ryze monotonní, jsou i prosté. Funkce inverzní jsou opět lineární. Funkce $y = a - x$ a funkce $y = x$ jsou samy k sobě inverzní.

Lineární funkce je velmi důležitá v řadě problémů, v nichž se složitější průběh nějaké funkce nahrazuje (aproximuje) průběhem lineárním; například při lineární interpolaci funkcí.

Úloha 3.2.7. *Jsou dány dvě tabulkové hodnoty funkce f: $f(4,75) = 0,6758$, $f(4,80) = 0,6803$. Pomocí lineární interpolace stanovte $f(4,78)$.*

Řešení. Danými dvěma body proložíme přímku, její rovnice je

$$y = 0,6758 + \frac{0.6803 - 0.6758}{4.80 - 4.75}(x - 4.75) = 0,6758 + 0,09(x - 4,75);$$

$$f(4,78) = 0,6758 + 0,09 \cdot 0,03 = 0,6758 + 0,0027 = 0,6785.$$

□

Kvadratické funkce

Jsou dány rovnicí

$$y = ax^2 + bx + c,$$

kde $a \neq 0$, b, c jsou konstanty; $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f)$ je pro $a > 0$ interval typu $\langle m, +\infty)$, pro $a < 0$ je to interval typu $(-\infty, m\rangle$, kde m je minimum resp. maximum funkce f. Tohoto ostrého lokálního extrému nabývá funkce f v bodě $x_0 = -\frac{b}{2a}$. Grafem každé kvadratické funkce v kartézské soustavě souřadnic je (kvadratická) parabola; pro funkci $y = ax^2$ je její vrchol v počátku soustavy souřadnic.

e) Racionální lomené funkce

Jsou to funkce dané rovnicí

$$y = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou polynomy. Je-li stupeň čitatele větší nebo roven stupni jmenovatele, dovedeme racionální lomenou funkci vyjádřit ve tvaru

$$y = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $S(x)$ je podíl a $R(x)$ je zbytek při dělení $\frac{P(x)}{Q(x)}$.Tato úprava (které se říká „snížit stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele“) se používá při integraci racionálních funkcí.

Úloha 3.2.8. *Je dána funkce* $y = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 8x - 7}{x^2 + 3}$. *Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele.*

Řešení. Po provedeném dělení dostaneme $y = x - 2 + \dfrac{3x - 1}{x^2 + 3}$. □

Úloha 3.2.9. *Je dána funkce* $y = \dfrac{x^5 - 1}{x^2 + 1}$. *Proveďte snížení stupně čitatele pod stupeň jmenovatele, aniž provedete klasické dělení.*

Řešení. V čitateli vhodné členy přičítáme a odčítáme a zlomek rozdělíme na více zlomků. Dostaneme $y = x^3 - x + \dfrac{x - 1}{x^2 + 1}$. □

Lineární lomené funkce

Jsou to funkce s rovnicí

$$y = \frac{ax + b}{cx + d},$$

kde a, b, c, d jsou reálné konstanty, přičemž platí

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0; \quad D(f) = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}.$$

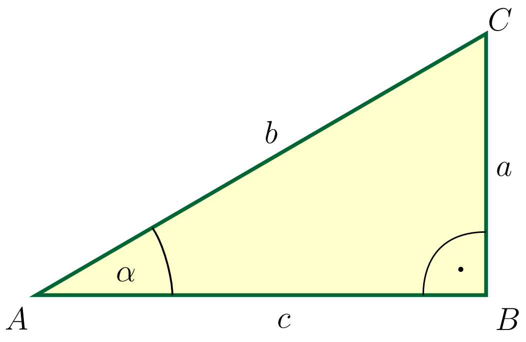
Jsou to funkce prosté, grafem v kartézské soustavě souřadnic je rovnoosá hyperbola. Inverzní funkce jsou téhož typu, tj. jsou též lineární lomené.

Zvláštním případem je funkce zvaná *nepřímá úměrnost* s rovnicí $y = \frac{a}{x}$, která je sama k sobě inverzní.

3.3 Goniometrické funkce a funkce cyklometrické

Pravoúhlé trojúhelníky

Podobnost trojúhelníků jako relace ekvivalence na množině všech pravoúhlých trojúhelníků, definuje rozklad této množiny na třídy. Z vlastnosti podobnosti plyne, že každá třída těchto trojúhelníků je určena jedním vnitřním ostrým úhlem a že všechny trojúhelníky z téže třídy ekvivalence se shodují v poměru odpovídajících si stran. Toho se využívá k definici *goniometrických funkcí ostrého úhlu.*



Obrázek 3.2: Pravoúhlý trojúhelník

Definice 3.3.1. $\sin\alpha = \frac{a}{b}, \quad \cos\alpha = \frac{c}{b}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{c}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{c}{a}.$

Tato definice pracuje zpravidla s úhly v míře stupňové.
Odsud

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Z $\triangle ABC$ dále plyne:

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha, \quad \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha, \quad \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \operatorname{cotg}\alpha.$$

Zvláštní hodnoty

Některé zvláštní hodnoty goniometrických funkcí lze odvodit (při použití Pythagorovy věty)

- z rovnostranného trojúhelníku s výškou:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \quad \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}.$$

(podobně pro „kofunkce“ $\cos\alpha$ a $\operatorname{cotg}\alpha$).

- ze čtverce s úhlopříčkou:

$$\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{cotg} 45^\circ = 1.$$

Na této úrovni se přijímá jako důsledek definice, že když α roste od 0° do 90°, tak funkce sinus roste od 0 do 1, funkce tangens roste od 0 do $+\infty$, funkce kosinus klesá od 1 k 0 a funkce kotangens klesá od $+\infty$ k 0.

Rovněž pomocí názoru se na této úrovni snese rozšíření funkcí:

$$\sin 0^\circ = 0, \quad \cos 0^\circ = 1, \quad \operatorname{tg} 0^\circ = 0, \quad \operatorname{cotg} 0^\circ \text{ není definován;}$$

podobně

$$\sin 90^\circ = 1, \quad \cos 90^\circ = 0, \quad \operatorname{tg} 90^\circ \text{ není definován,} \quad \operatorname{cotg} 90^\circ = 0.$$

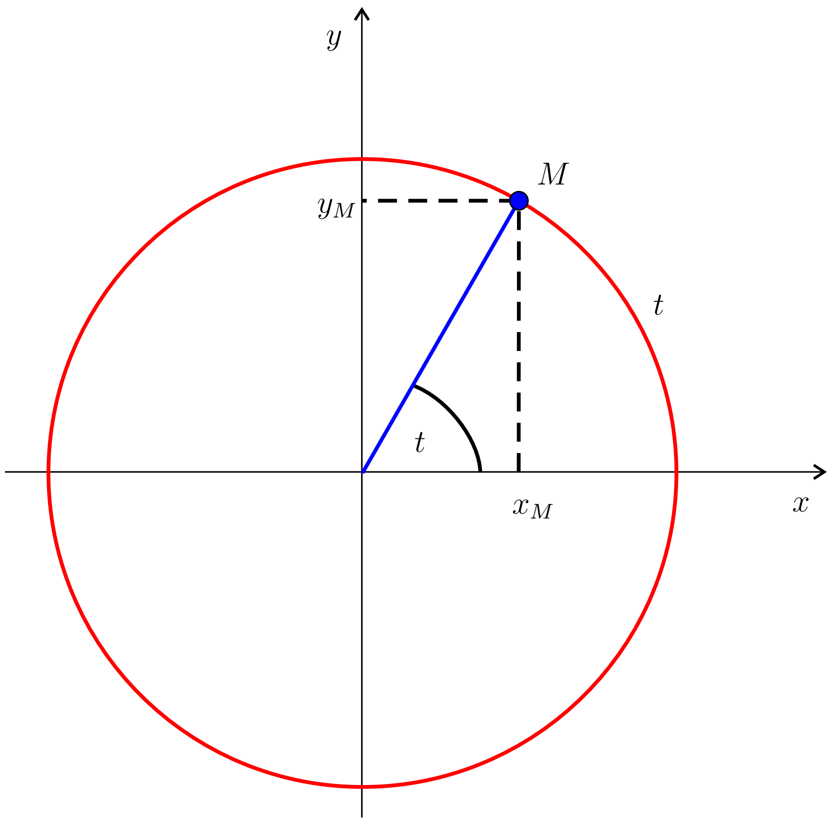
Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Tato definice se obyčejně spojuje již s používáním míry obloukové, přičemž přepočet mezi velikostí úhlu α v míře stupňové a velikostí x v míře obloukové je dán vztahy

$$x = \frac{\pi}{180}\,\alpha, \qquad \alpha = \frac{180}{\pi}\,x.$$

Definice goniometrických funkcí pomocí jednotkové kružnice přináší jeden didaktický problém. Chceme-li zachovat označení x pro velikost úhlu v míře obloukové, musíme volit jiné označení pro souřadnicové osy, například u, v. Chceme-li však zachovat označení os x, y, musíme volit jiné označení pro velikost úhlu, například t, tedy nemůžeme přímo definovat $\sin x$, přestože právě tento zápis v matematické analýze nejvíce používáme.

Definice 3.3.2. Je-li O počátek pravoúhlé soustavy souřadnic, J jednotkový bod na ose x, $M(x_M, y_M)$ bod na jednotkové kružnici a t velikost orientovaného úhlu $\angle JOM$, pak hodnota funkce $\cos t$ je definována jako x-ová souřadnice bodu M, $\cos t = x_M$, a hodnota funkce $\sin t$ je definována jako y-ová souřadnice bodu M, $\sin t = y_M$.



Obrázek 3.3: Užití jednotkové kružnice k definici goniometrických funkcí

Vlastnosti plynoucí z definice funkcí

Z definice máme: $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$, $H(\sin) = H(\cos) = \langle -1, 1\rangle$.
Z definice plyne rovněž periodičnost obou funkcí s periodou 2π:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}; \quad \sin(t + 2k\pi) = \sin t,\ \cos(t + 2k\pi) = \cos t.$$

Z běžných vlastností lze dále přímo z jednotkové kružnice zjistit

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;
- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, ..., zejména nulové body:

$$\sin t = 0 \iff t = k\pi \quad (\forall k \in \mathbb{Z}),$$
$$\cos t = 0 \iff t = (2k+1)\tfrac{\pi}{2} \quad (\forall k \in \mathbb{Z});$$

- paritu funkcí, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
  $\sin(-t) = -\sin t$ (funkce sinus je lichá),
  $\cos(-t) = \cos t$ (funkce kosinus je sudá);
- vzorce pro změnu velikosti úhlu o π, tj. $\forall t \in \mathbb{R}$:
  $\sin(t \pm \pi) = -\sin t$,
  $\cos(t \pm \pi) = -\cos t$;
- nerovnost: $\forall t \in (0, +\infty) :\quad \sin t < t$;
- parametrické vyjádření kružnice: $\begin{array}{l} x = r \cdot \cos t, \\ y = r \cdot \sin t, \end{array} \quad t \in \langle 0, 2\pi)$.

Ve školské matematice se nejčastěji setkáváme s označováním velikosti úhlů řeckými písmeny α, β, ... a s mírou stupňovou, v matematické analýze se ponejvíce pracuje s mírou obloukovou a s x jako označením velikosti úhlů v míře obloukové, tedy $\sin x$, $\cos x$, ...

Funkce tangens a kotangens

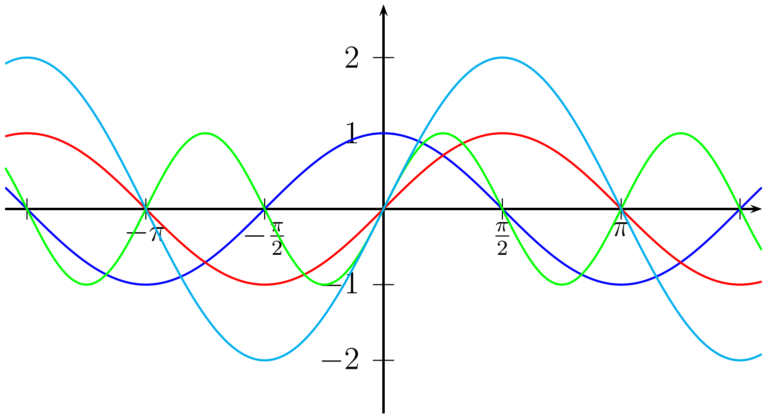
Definice funkcí tangens a kotangens vychází z funkcí sinus a kosinus.

Definice 3.3.3. $\forall x \neq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ (tedy pro něž $\cos x \neq 0$) definujeme funkci tangens:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

$\forall x \neq k\pi$ (tedy pro něž $\sin x \neq 0$) definujeme funkci kotangens:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$



Obrázek 3.4: Grafy funkcí $y = \sin x$, $y = \sin 2x$, $y = 2\sin x$ a $y = \cos x$.

Vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$ **a** $\operatorname{cotg} x$**:**

Funkce tangens je definována pro všechna $x \in (2k+1)\frac{\pi}{2}$, tj. na množině $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z}\right\}$; $H(\operatorname{tg}) = \mathbb{R}$.

Funkce kotangens je definována pro všechna $x \neq k{\cdot}\pi$, tj. na množině $D(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$; $H(\operatorname{cotg}) = \mathbb{R}$.

Z definice funkcí tangens a kotangens a z vlastností funkcí sinus a kosinus dostáváme zejména tyto základní vlastnosti:

- znaménka funkcí v jednotlivých kvadrantech I, II, III, IV;

- hodnoty funkcí pro úhly, pro něž je bod M na některé souřadnicové ose, tj. pro úhly 0, $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π, zejména nulové body: $\operatorname{tg} 0 = \operatorname{tg} \pi = 0$, $\operatorname{cotg} \frac{\pi}{2} = \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{2} = 0$;

- paritu funkcí, tj. $\forall x \in D(f)$:

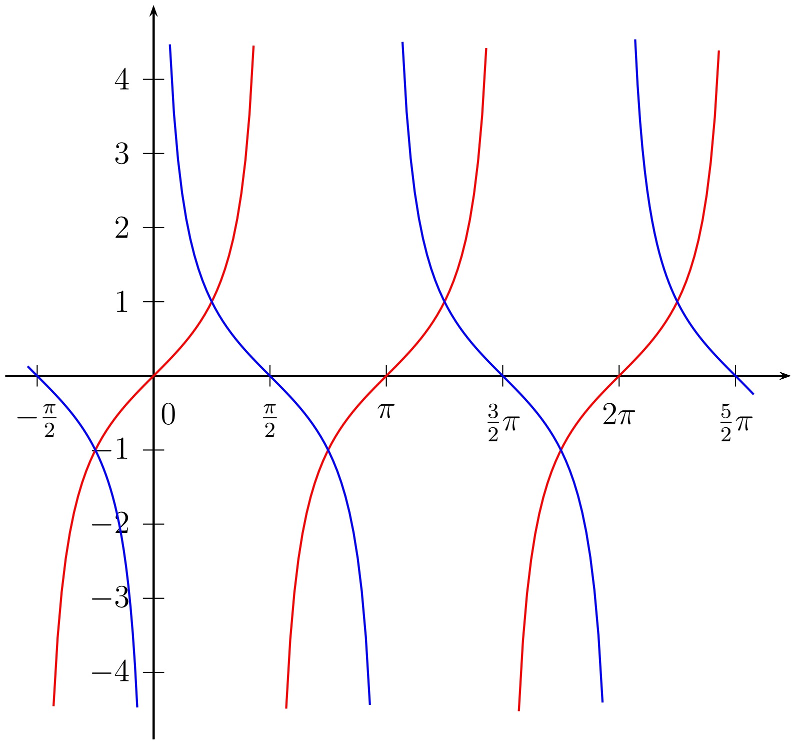
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x \text{ (funkce liché);}$$

- periodičnost funkcí: $\forall x \in D(f)$:

$$\operatorname{tg}(x \pm \pi) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x \pm \pi) = -\operatorname{cotg} x.$$

Vzorce pro goniometrické funkce:

Postupně lze vyvodit další skupiny vzorců. Je-li g libovolná ze čtyř základních goniometrických funkcí a označíme-li velikosti úhlů α, β, …, jak je to běžné na střední škole, jde o vzorce, kde



Obrázek 3.5: Grafy funkcí $y = \operatorname{tg} x$ a $y = \operatorname{cotg} x$.

- $g(\alpha \pm \beta)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlů α, β, například

  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$;

  $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$ (pro která α, β platí?);

- $g(2\alpha)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí jednoduchého úhlu α, například

  $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$,

  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$;

- $g\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)$ vyjadřujeme pomocí goniometrických funkcí úhlu α,

  například pro $\alpha \in I$ je

  $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; nebo též

  $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

  tento vzorec se využívá například při integraci goniometrických funkcí;

- $g(\alpha) \pm g(\beta)$ se vyjádří jako součin funkcí, například

  $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

- při integraci součinu goniometrických funkcí se využívá obráceného vztahu a $g(\alpha)\cdot g(\beta)$ vyjadřujeme jako součet nebo rozdíl goniometrických funkcí, například:

  $\sin m\alpha \cdot \cos n\alpha = \dfrac{1}{2}\left[\sin(m+n)\alpha + \sin(m-n)\alpha\right]$;

- velmi užitečný je vzorec $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$.

Funkce cyklometrické

Pro základní goniometrické funkce se volí obory prostoty P, přičemž obory hodnot H se nemění:

$\sin x: \quad P = \left\langle -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\rangle, \quad H = \langle -1, 1\rangle;$

$\cos x: \quad P = \langle 0, \pi\rangle, \quad H = \langle -1, 1\rangle;$

$\operatorname{tg} x: \quad P = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R};$

$\operatorname{cotg} x: \quad P = (0, \pi), \quad H = (-\infty, +\infty) = \mathbb{R}.$

Při definici cyklometrických funkcí se vymění úloha množin P a H.

Definice 3.3.4. Goniometrické funkce uvažujme na jejich oborech prostoty. Inverzní funkcí (s definičním oborem D) k funkci

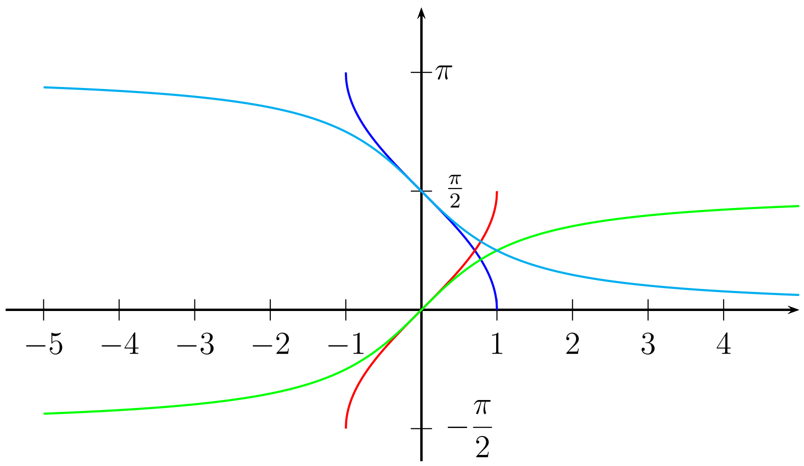
$\sin x$ je funkce $\arcsin x$ (arkussinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;
$\cos x$ je funkce $\arccos x$ (arkuskosinus), $D = \langle -1, 1\rangle$;
$\operatorname{tg} x$ je funkce $\operatorname{arctg} x$ (arkustangens), $D = (-\infty, +\infty)$;
$\operatorname{cotg} x$ je funkce $\operatorname{arccotg} x$ (arkuskotangens), $D = (-\infty, +\infty)$.

Přitom si uvědomíme, že například $\forall x \in \langle -1, 1\rangle$, $\forall y \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$, znamenají zápisy $y = \arcsin x$, $x = \sin y$ přesně totéž.

Funkce $\arcsin x$ se vyskytuje v úlohách na určení definičního oboru funkcí.

Úloha 3.3.5. *Určete definiční obor funkce* $f : y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{3x+2}}$.

Řešení. Čitatel je definován na intervalu $\langle -1, 1\rangle$, jmenovatel na množině $x > -\frac{2}{3}$, tedy na intervalu $\left(-\frac{2}{3}, +\infty\right)$. Definiční obor $D(f)$ je průnikem obou intervalů, tedy $D(f) = \left(-\frac{2}{3}, 1\right\rangle$. □



Obrázek 3.6: Grafy funkcí $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$ a $y = \operatorname{arccotg} x$.

Vlastnosti cyklometrických funkcí

Jelikož inverzní funkce zachovává monotónnost funkce výchozí, jsou funkce $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$ ve svých definičních oborech rostoucí, $\arccos x$ a $\operatorname{arccotg} x$ jsou klesající.

Ze vzorců pro funkce goniometrické lze odvodit odpovídající vzorce pro funkce cyklometrické, například:

Ježto $\cos t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)$, dostaneme po dosazení $\cos t = x$, (tedy i $t = \arccos x$): $x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) \Rightarrow \forall x \in \langle -1, 1\rangle : \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

Podobně též $\forall x \in \mathbb{R} : \quad \operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2}$.

Proto se z uvedených cyklometrických funkcí používá obvykle vždy jen jedna z každé dvojice, zpravidla funkce $\arcsin x$ a $\operatorname{arctg} x$.

Jestliže ve vzorci pro $tg(\alpha + \beta)$ položíme $\operatorname{tg}\alpha = x$, $\operatorname{tg}\beta = y$, tj. $\alpha = \operatorname{arctg} x$, $\beta = \operatorname{arctg} y$, dostaneme vzorec $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy}$.

3.4 Funkce exponenciální a logaritmické

Exponenciální funkce

Nechť $a > 0$, $a \neq 1$. *Exponenciální funkce* jsou definovány rovnicí

$$y = a^x,$$

$D(f) = \mathbb{R}$ (plyne to z definice mocniny pro libovolný reálný exponent).

Hodnotu mocniny s iracionálním exponentem, tedy exponenciální funkce pro iracionální hodnotu nezávisle proměnné x) lze najít i jako limitu posloupnosti a^r, kde $r \in \mathbb{Q}$, $r \to x$. Tak třeba 2^π je limitou posloupnosti 2^r, kde r například tvoří posloupnost dolních desetinných aproximací čísla π: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; .... Pak 2^r dává posloupnost 8; 8,5741...; 8,8152...; 8,8213...; 8,8244...; 8,82496..., takže například $2^\pi \approx 8,8250$.

Podobně (užitím suprema množin) bychom mohli dokázat, že každé kladné číslo je při daném základu a hodnotou nějaké mocniny, tj. $H(f) = (0, +\infty)$.

Pro $a > 1$ je exponenciální funkce rostoucí, jak plyne z vlastnosti mocnin 4.2 (8). Pro $a < 1$ je exponenciální funkce klesající. V tomto případě je $(1/a) > 1$, platí pro každé $x_1 < x_2 < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{a}\right)^{x_2}$ a po přechodu k převráceným hodnotám máme $a^{x_1} > a^{x_2}$.

Pro $a \in (0, 1)$ je tedy $a^x = b^{-x}$, kde $b = 1/a > 0$.

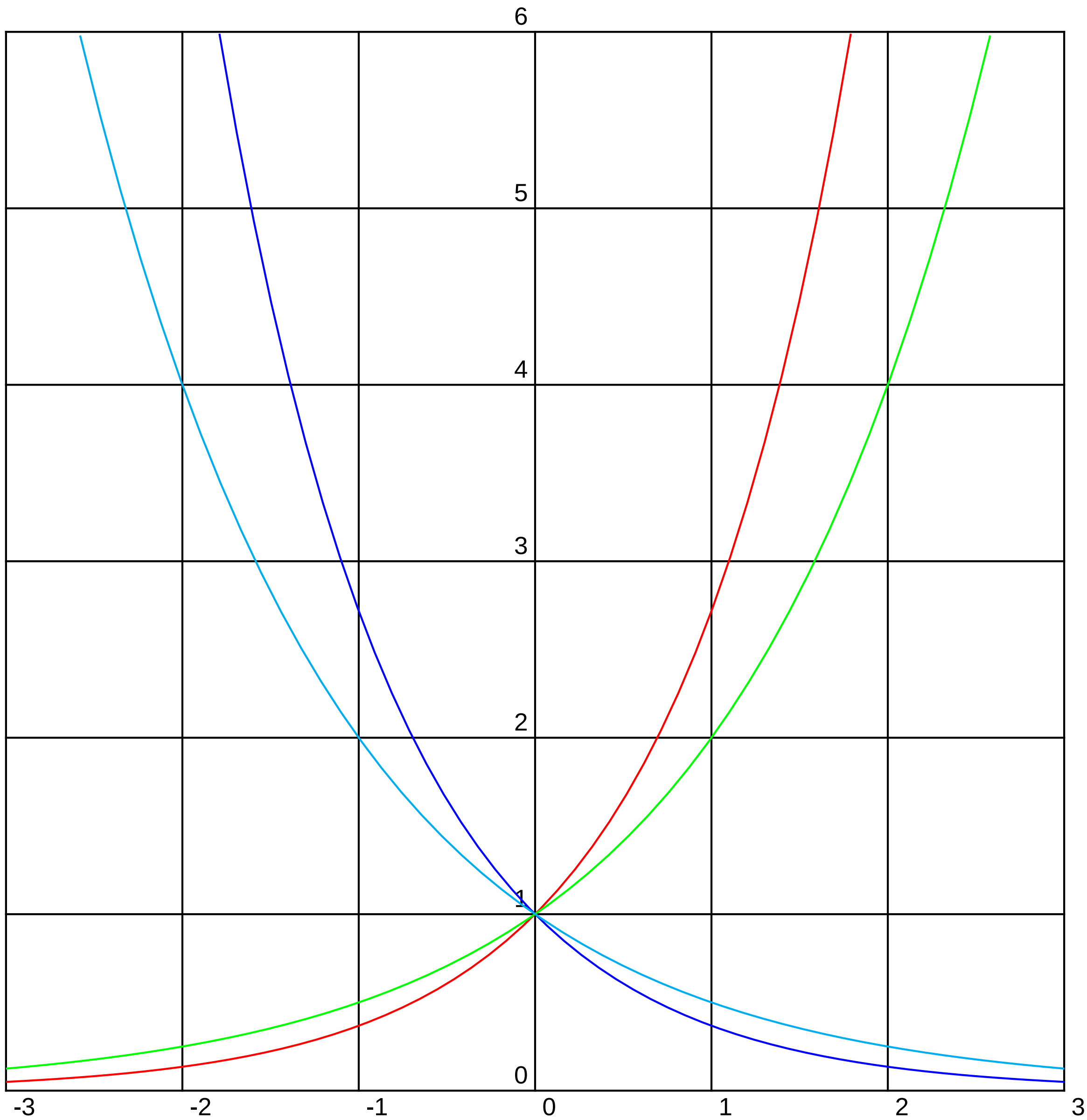
Exponenciální funkci $y = a^x$ pro $a \in (0, 1)$ lze tedy nahradit exponenciální funkcí $y = b^{-x}$ pro $b > 1$ (která je klesající), a to vede k závěru, že v podstatě není třeba se zabývat exponenciálními funkcemi se základem $a < 1$.

Grafu exponenciální funkce v kartézské soustavě říkáme *exponenciála*. Všechny exponenciály procházejí bodem $[0; 1]$. Grafem exponenciální funkce v polární soustavě souřadnic je tzv. *logaritmická spirála*.

Zvlášť důležitá je exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^x$ označovaná někdy též $\exp x$.

Logaritmické funkce

Exponenciální funkce $f : y = a^x$ je pro $a \quad > 0$ rostoucí (tedy i prostá) na celé množině $\mathbb{R}$, přičemž $H(f) = (0, +\infty)$. Existuje proto inverzní funkce



Obrázek 3.7: Grafy funkcí $y = \mathrm{e}^x$, $y = \left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)^x$, $y = 2^x$ a $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

$f^{-1} : x = a^y$, kterou nazýváme *logaritmická funkce* o základu a a kterou zapisujeme $y = \log_a x$; ta má $D(f^{-1}) = (0, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R}$. Hodnotu logaritmické funkce nazýváme ***logaritmus***; někdy pojem logaritmus používáme i pro stručné označení logaritmické funkce. *Logaritmovat* nějaký výraz znamená určit jeho logaritmus.

Pro matematickou analýzu je nejdůležitější logaritmická funkce o základu e, pro niž máme zvláštní označení $\ln x = \log_{\mathrm{e}} x$ a název ***přirozený logaritmus*** (ln = logaritmus naturalis).

Z definice logaritmu plyne zejména:

(a) Zápis $x = a^y$ znamená přesně totéž jako $y = \log_a x$.

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$: $\log_a a^x = x$, $\quad \forall x > 0$: $a^{\log_a x} = x$.

(c) $\forall x \in \mathbb{R}$: $a^x = \mathrm{e}^{x \ln a}$ (neboť $a = \mathrm{e}^{\ln a}$).

Z prostoty exponenciálních a logaritmických funkcí plyne:

(d) $a^K = a^L \;\Leftrightarrow\; K = L, \quad A = B\ (> 0) \;\Leftrightarrow\; \log_a A = \log_a B.$

V obou případech (d) získáme závěr implikace *logaritmováním* jejího předpokladu.

Dekadický logaritmus, tj. logaritmus o základu 10, měl dříve výsadní postavení při numerických výpočtech (používání tabulek dekadických logaritmů), ale s rozšířením kalkulátorů a počítačů toto postavení ztratil.

Všechny logaritmické funkce o základu $a > 1$ jsou rostoucí a jejich grafy procházejí bodem $[1; 0]$ na ose x.

Úloha 3.4.1. *Načrtněte grafy funkcí* $y = \mathrm{e}^x$, $y = \ln x$.

Z výše uvedené vlastnosti (c) plyne, že místo exponenciálních funkcí $y = a^x$ o základu a lze uvažovat jen exponenciální funkce $y = \mathrm{e}^{kx}$ o základu e. Podobně na sebe lze převádět logaritmy o různých základech. Převodní vztahy lze odvodit například takto (uvažujme logaritmus přirozený a logaritmus o základu a):

Rovnost $x = a^{\log_a x}$ logaritmujeme při základu e a dostaneme $\ln x = \ln a \cdot \log_a x$.

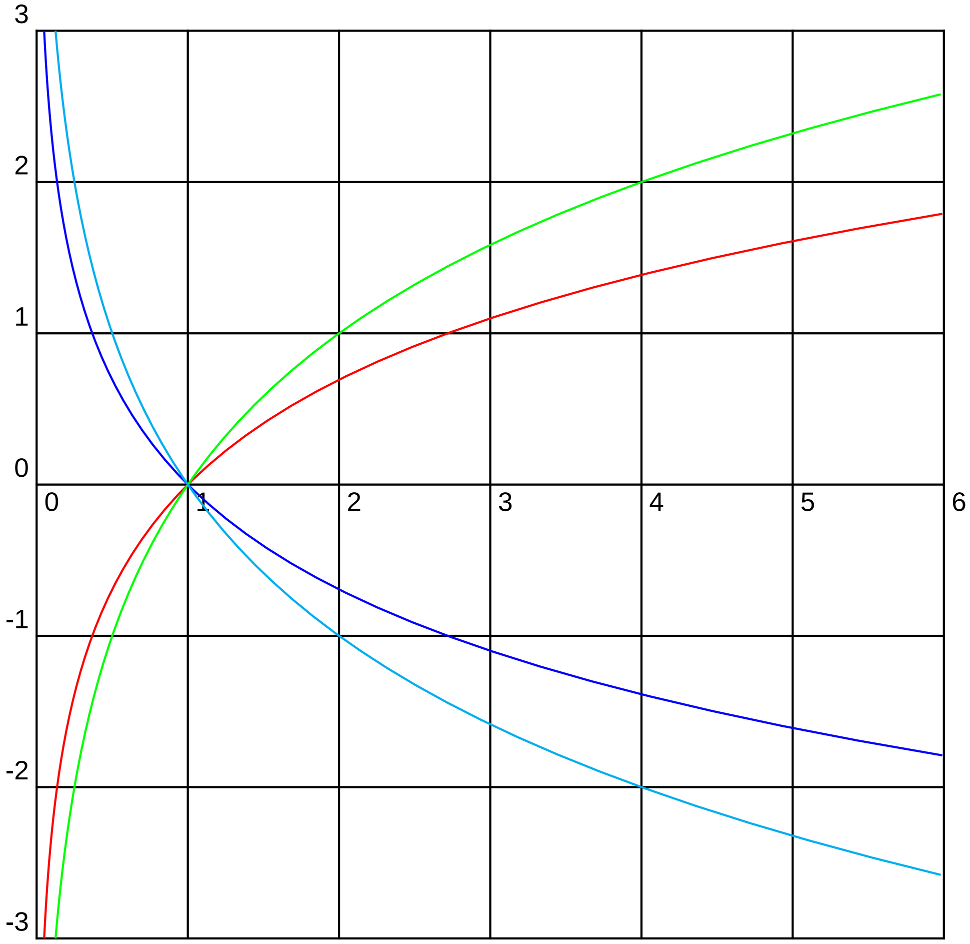
Jestliže logaritmujeme rovnost $x = \mathrm{e}^{\ln x}$ při základu a, dostaneme $\log_a x = \log_a e \cdot \ln x$.

Z vlastností exponenciálních funkcí plynou ihned vlastnosti funkcí logaritmických:

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 \cdot x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2$;

$\forall x_1, x_2 > 0$: $\log_a(x_1 : x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2$;

$\forall x > 0, \forall m \in \mathbb{R}$: $\log_a(x^m) = m \cdot \log_a x$.



Obrázek 3.8: Grafy funkcí $y = \ln x$, $y = \log_{1/\mathrm{e}} x$, $y = \log_2 x$ a $y = \log_{1/2} x$.

3.5 Funkce hyperbolické a hyperbolometrické

Hyperbolické funkce patří mezi elementární funkce a jsou definovány pomocí funkcí exponenciálních takto:

Definice 3.5.1.

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}\right), \ \operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \qquad \coth x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x};$$

jsou to *hyperbolický sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*.

Z definice je vidět, že pro první tři z těchto funkcí je $D(f) = \mathbb{R}$ (pro $\operatorname{th} x$ to plyne z toho, že $\forall x \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch} x > 0$). Lehce zjistíme, že funkce $\operatorname{sh} x$ má jediný nulový bod pro $x_0 = 0$, takže $D(\coth) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Obory hodnot a průběh:

$H(\mathrm{sh}) = \mathbb{R}$, funkce je rostoucí; $H(\mathrm{ch}) = \langle 1, +\infty)$, funkce je klesající na $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí na $\langle 0, +\infty)$, v bodě 0 má minimum 1.

$H(\mathrm{th}) = (-1; 1)$, funkce je rostoucí; $H(\coth) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, na intervalu $(-\infty, 0)$ funkce klesá od -1 k $-\infty$, na intervalu $(0, +\infty)$ funkce klesá od $+\infty$ k 1. Pro funkce tangens i kotangens jsou přímky $y = 1$ a $y = -1$ asymptotami, asymptotou grafu funkce kotangens je též osa y.

Úloha 3.5.2. *Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí* $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x$.

Úloha 3.5.3. *Do jednoho obrázku znázorněte grafy funkcí* $y = \operatorname{th} x$, $y = \coth x$.

Graf funkce $y = a \cdot \operatorname{ch} \frac{x}{a}$ v kartézské souřadnicové soustavě se nazývá *řetězovka*. Je to křivka, kterou vytváří řetěz (nepružná nit) volně zavěšený ve dvou bodech.

Hyperbolické funkce mají řadu vlastností velmi podobných vlastnostem funkcí goniometrických. Z definice funkcí lze odvodit například

(a) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\coth x$ jsou liché, funkce $\operatorname{ch} x$ je sudá.

(b) $\forall x$: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.

(c) $\forall x \neq 0$: $\operatorname{th} x \cdot \coth x = 1$.

(d) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{sh}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 \pm \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(e) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{ch}(x_1 \pm x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 \mp \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2$.

(f) $\forall x_i \in \mathbb{R}$: $\operatorname{th}(x_1 \pm x_2) = \dfrac{\operatorname{th} x_1 \pm \operatorname{th} x_2}{1 \pm \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}$.

Hyperbolické funkce se vyskytují zejména v aplikacích a také se používají při výpočtu neurčitých integrálů pomocí hyperbolických substitucí.

Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ a $\operatorname{coth} x$ jsou prosté, u funkce $\operatorname{ch} x$ vezmeme za obor prostoty interval $\langle 0, +\infty)$. Pak lze definovat funkce inverzní (zvané ***hyperbolometrické***):

- K funkci $\operatorname{sh} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argsh} x$ (argument hyperbolického sinu), $D(f) = H(f) = \mathbb{R}$.

- K funkci $\operatorname{ch} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argch} x$ (argument hyperbolického kosinu), $D(f) = \langle 1, +\infty)$, $H(f) = \langle 0, +\infty)$.

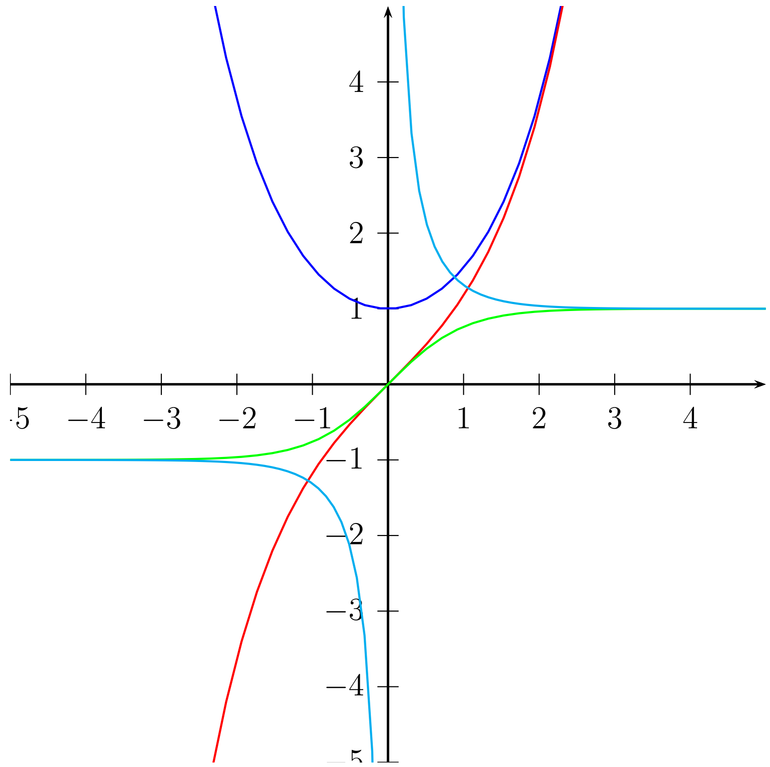
- K funkci $\operatorname{th} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argth} x$ (argument hyperbolické tangens), $D(f) = (-1; 1)$, $H(f) = \mathbb{R}$.

- K funkci $\operatorname{coth} x$ je inverzní funkcí funkce $\operatorname{argcoth} x$ (argument hyperbolické kotangens), $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, $H(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

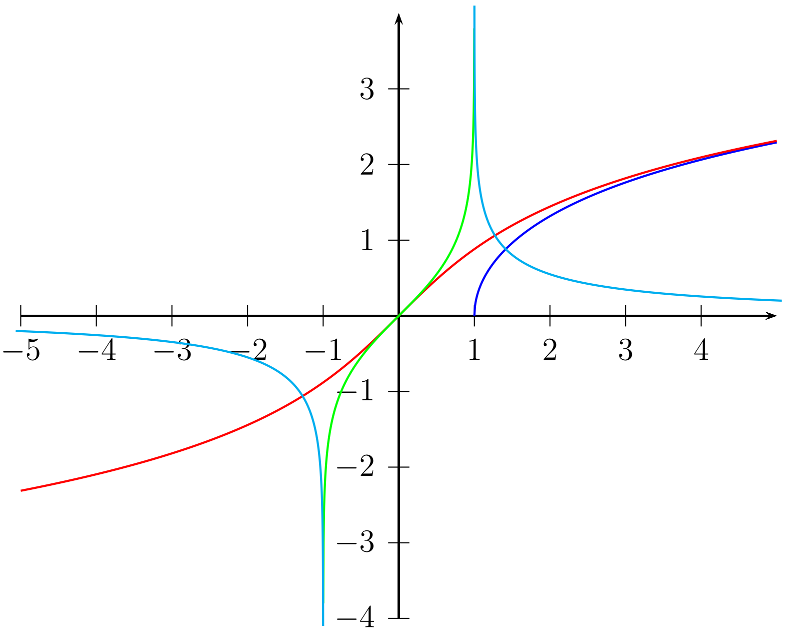
Ježto jsou hyperbolické funkce vyjádřeny pomocí exponenciální funkce, lze hyperbolometrické funkce vyjádřit pomocí funkce logaritmické, například:

$$\operatorname{argsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \quad \operatorname{argth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}.$$

$- * -$



Obrázek 3.9: Grafy funkcí $y = \operatorname{sh} x$, $y = \operatorname{ch} x$, $y = \operatorname{th} x$ a $y = \operatorname{coth} x$.



Obrázek 3.10: Grafy funkcí $y = \operatorname{argsh} x$, $y = \operatorname{argch} x$, $y = \operatorname{argth} x$ a $y = \operatorname{argcoth} x$.

Kapitola 4

Limita funkce

Limita funkce je jedním z nejdůležitějších pojmů matematické analýzy. Na pojmu limita jsou založeny další významné pojmy, jako je spojitost, derivace funkce, Riemannův integrál, délka křivky a další. S přímým praktickým použitím limity se setkáme při vyšetřování průběhu funkce, například při zjišťování asymptot grafu funkce.

4.1 Limita funkce podle Heineho

Hlavní myšlenka: Problém limity funkce se převede na (již známý) problém limity posloupnosti.

Definice 4.1.1 (limita funkce podle Heineho)**.** Nechť funkce f je definována na nějakém redukovaném okolí bodu x_0[1]. Číslo a nazveme limita funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in P(x_0), \quad (x_n \neq x_0), \quad x_n \to x_0, \quad \text{platí} \quad f(x_n) \to a.$$

Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Definice 4.1.2 (jednostranná limita funkce podle Heineho)**.** Nechť funkce f je definována na nějakém levém (pravém) redukovaném okolí bodu x_0[2]

Číslo a nazveme limita zleva (zprava) funkce f v bodě x_0 $\iff$ pro každou posloupnost $\{x_n\}$,

$$x_n \in P(x_0-),\ (x_n < x_0) \quad \Big(x_n \in P(x_0+),\ (x_n > x_0),\Big) \quad x_n \to x_0, \quad \text{platí} \quad f(x_n) \to a.$$

[1] $P(x_0) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - x_0| < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon) \setminus \{x_0\}$

[2] $P(x_0-) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x_0 - x < \varepsilon\} = (x_0 - \varepsilon; x_0)$,
$P(x_0+) := \{x \in \mathbb{R} : 0 < x - x_0 < \varepsilon\} = (x_0; x_0 + \varepsilon)$

Píšeme

$$f(x_0-) = \lim_{x \to x_0-} f(x) = a \quad \left(f(x_0+) = \lim_{x \to x_0+} f(x) = a \right).$$

Úloha 4.1.3. *Vypočtěte* $\displaystyle \lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Řešení. Podle Heineho definice limitu funkce přepíšeme na limitu posloupnosti:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n \neq 2}} \frac{x_n^2 - 4}{x_n - 2} = \lim_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n \neq 2}} \frac{(x_n - 2)(x_n + 2)}{x_n - 2} = \lim_{\substack{x_n \to 2 \\ x_n \neq 2}} (x_n + 2) = 4,$$

kde jsme mohli krátit výrazem $(x_n - 2)$, neboť z předpokladů víme, že $x_n \neq 2$, a tak $(x_n - 2) \neq 0$. □

Úloha 4.1.4. *Vypočtěte obě jednostranné limity funkce* $y = \operatorname{sgn} x$ *v bodě* 0.

Řešení. Připomeňme definici zkoumané funkce:

$$\operatorname{sgn} x := \begin{cases} -1, & \text{pro } x < 0, \\ 0, & \text{pro } x = 0, \\ 1, & \text{pro } x > 0. \end{cases}$$

Vypočteme limitu zprava (limita zleva se počítá analogicky):

$$\lim_{x \to 0+} \operatorname{sgn} x = \lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} \operatorname{sgn} x_n = \lim_{\substack{x_n \to 0 \\ x_n > 0}} 1 = 1,$$

když za $\operatorname{sgn} x_n$ jsme dosadili 1, neboť $x_n > 0$, a tak $\operatorname{sgn} x_n = 1$.

Podobně

$$\lim_{x \to 0-} = -1.$$

□

Úloha 4.1.5. *Dokažte, že Dirichletova funkce* $\chi(x)$ *nemá limitu (ani jednostrannou) v žádném bodě* $x_0 \in \mathbb{R}$.

Řešení. Připomeňme definici zkoumané funkce:

$$\chi x := \begin{cases} 1, & \text{pro } x \in Q, \\ 0, & \text{pro } x \in Q'. \end{cases}$$

Pro každý bod x_0 v $\mathbb{R}$ existuje alespoň jedna posloupnost racionálních čísel, která k němu konverguje:

$$\exists \{a_n\}\,,\ a_n \in Q:\ a_n \to x_0.$$

Také ovšem existuje i podobná posloupnost iracionálních čísel:

$$\exists \{b_n\}\,,\ b_n \in Q':\ b_n \to x_0.$$

Posloupnosti obrazů obou posloupností jsou konstantní, ale s různými konstantami:

$$\chi(a_n) = 1, \quad \chi(b_n) = 0,$$

takže

$$\lim_{a_n \to x_0} 1 = 1 \neq 0 = \lim_{b_n \to x_0} 0,$$

a tak limita $\lim\limits_{x \to x_0} \chi(x)$ neexistuje. □

Úloha 4.1.6. *Vyslovte definici nevlastní limity $+\infty$ ve vlastním bodě x_0.*

Definice 4.1.7 (vlastní limita v nevlastním bodě $+\infty$)**.** Nechť $+\infty$ je hromadným bodem $D(f)$. Číslo a nazveme limita funkce f v nevlastním bodě $+\infty$ $\Longleftrightarrow$

pro každou posloupnost $\{x_n\}$, $x_n \in D(f)$, $x_n \to +\infty$, platí $f(x_n) \to a$.

Píšeme

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = a.$$

Úloha 4.1.8. *Vyslovte definici vlastní limity funkce v nevlastním bodě $-\infty$ a definice nevlastních limit v nevlastních bodech.*

4.2 Limita funkce podle Cauchyho

Cauchyho definice limity využívá vztahu mezi okolími. Vyslovíme dvě definice. Jedna uvažuje okolí ve smyslu topologickém, druhá ve smyslu metrickém.

Definice 4.2.1 (limita funkce podle Cauchyho)**.** Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** $a \Leftrightarrow\ \forall\ U(a)\ \exists\ P(x_0)\ \forall x:\ x \in D(f) \cap P(x_0) \Rightarrow f(x) \in U(a)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 4.2.2. Poslední implikaci lze nahradit inkluzí

$$f(D(f) \cap P(x_0)) \subset U(a).$$

Definice 4.2.3 (limita funkce podle Cauchyho, druhá definice)**.** Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f)$. Říkáme, že funkce f **má v bodě** x_0 **limitu** a $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta) \Rightarrow f(x) \in U(a, \varepsilon)$. Píšeme

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a.$$

Poznámka 4.2.4. Závěr definice lze formálně upravit na jiný tvar s využitím absolutních hodnot: místo $\forall x : x \in D(f) \cap P(x_0, \delta)$ uvedeme $\forall x \in D(f) : 0 < |x - x_0| < \delta$ a místo $f(x) \in U(a, \varepsilon)$ dáme $|f(x) - a| < \varepsilon$.

Úloha 4.2.5. *Znázorněte obsah Cauchyových definic na obrázku.*

Úloha 4.2.6. *Vyslovte Cauchyovy definice vlastní limity v nevlastním bodě, nevlastní limity ve vlastním bodě a nevlastní limity v nevlastním bodě.*

Věta 4.2.7 (Ekvivalence definic limity funkce)**.** *Heineho definice a Cauchyova definice limity funkce jsou ekvivalentní.*

Limita funkce dle definice Heineho je tedy přesně týž pojem jako limita funkce podle Cauchyho. Je tu však rozdíl v jejich použití. Heineho definici používáme častěji k *výpočtu* limit, neboť v této definici znalost hodnoty limity funkce není předem potřebná, Cauchyovu definici používáme častěji k *důkazům*, hodnotu limity musíme znát předem.

4.3 Věty o limitách funkcí

Věty o limitách funkcí vyplývají na základě Heineho definice limity z vět o limitách posloupností. Proto jsou některé formulovány velmi podobně.

Formulaci uvádíme pro vlastní limity ve vlastních bodech, je však možné i jejich rozšíření na „nevlastní případy“.

Věta 4.3.1. *Každá funkce f má v libovolném bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ nejvýše jednu limitu.*

Věta 4.3.2. *Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je omezená.*

Věta 4.3.3 (věta o kladné limitě)**.** *Nechť funkce f má v bodě x_0 konečnou kladnou (zápornou) limitu. Pak existuje okolí $P(x_0)$, v němž je f kladná (záporná).*

Věta 4.3.4 (věta o limitě součtu, rozdílu, součinu a podílu)**.** *Nechť jsou na M definovány funkce f a g. Nechť x_0 je hromadný bod M a platí*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a, \quad \lim_{x \to x_0} g(x) = b.$$

Pak funkce

$$f + g, \quad f - g, \quad f \cdot g, \quad \frac{f}{g} \ (pro\ g(x) \neq 0,\ b \neq 0)$$

mají limitu

$$a + b, \quad a - b, \quad a \cdot b, \quad \frac{a}{b}.$$

Tyto vlastnosti platí pro rozšířenou reálnou osu ve všech případech, kdy mají uvedené výrazy s a, b smysl; například věta o součtu neplatí pro $a = +\infty$, $b = -\infty$.

Věta 4.3.5 (věta o limitě rovnosti)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) = g(x)$ a existuje $\lim_{x\to x_0} f(x) = a$. Pak též $\lim_{x\to x_0} g(x) = a$.*

Věta 4.3.6 (věta o limitě nerovnosti)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí $f(x) \leq g(x)$ a existují limity obou funkcí v bodě x_0.*

Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_0} g(x)$.

Úloha 4.3.7. *Na příkladech ukažte, jaký vztah může platit mezi limitami, jestliže na $P(x_0)$ platí ostrá nerovnost $f(x) < g(x)$.*

Věta 4.3.8 (věta o třech limitách)**.** *Nechť na nějakém okolí $P(x_0)$ platí*

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

přičemž

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = a.$$

Pak existuje i $\lim_{x\to x_0} h(x)$ a je rovna a.

Věta 4.3.9.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} |f(x)| = 0.$$

Věta 4.3.10.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to x_0} |f(x) - a| = 0$$

(pro a vlastní).

Věta 4.3.11. *Nechť x_0 je oboustranným hromadným bodem $D(f)$. Pak následující dva výroky jsou ekvivalentní:*

A: Existuje $\lim_{x\to x_0} f(x)$ a je rovna a.

B: Existují $\lim_{x\to x_0-} f(x)$, $\lim_{x\to x_0+} f(x)$ a obě jsou rovny a.

Úloha 4.3.12. *Užitím předchozí věty dokažte, že funkce $y = x + \dfrac{|x|}{x}$ nemá limitu v bodě $x_0 = 0$.*

Věta 4.3.13. *Nechť na nějakém $P(x_0)$ platí $f(x) > 0$. Pak*

1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = +\infty$,

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Věta 4.3.14. *Nechť x_0 je hromadným bodem $D(f\cdot g)$, $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ a g je funkce omezená. Pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = 0$.*

Věta 4.3.15 (věta o limitě složené funkce)**.** *Mějme složenou funkci $f\circ\varphi$. Nechť*

1. *$\exists$ okolí $P(x_0) \subset D(\varphi)$ tak, že $\varphi(P(x_0)) \subset D(f)$,*
2. *$\exists a$ jako $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x)$,*
3. *a je hromadným bodem $D(f)$ a existuje $b = \lim\limits_{x\to a} f(x)$,*
4. *x_0 není hromadným bodem množiny $\{x \in P(x_0); \varphi(x) = a\}$.*

Pak existuje limita složené funkce $f\circ\varphi$ v bodě x_0 a platí $\lim\limits_{x\to x_0} f\circ\varphi(x) = b$.

4.4 Výpočet limit

Limity některých elementárních funkcí

Úloha 4.4.1. *Užitím věty o třech limitách dokažte, že $\lim\limits_{x\to 0} \sin x = 0$.*

Úloha 4.4.2. *Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$ a $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.*

Úloha 4.4.3. *Dokažte, že $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$ a že pro každý polynom $P(x)$ je $\lim\limits_{x\to x_0} P(x) = P(x_0)$.*

Platnost výsledků úloh 4.4.2 a 4.4.3 lze zobecnit na všechny elementární funkce takto:

Věta 4.4.4. *Je-li f elementární funkce, $x_0 \in D(f)$, pak $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Použití této věty nazýváme *využití spojitosti funkce k výpočtu limity.*

Speciální limity:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m - 1}{x} = m \qquad \text{(pro libovolná } m \in \mathbb{R}\text{)},$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1.$$

Úloha 4.4.5. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{x}$.

Úloha 4.4.6. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$.

Výpočet dle definice a vět o limitách

Úloha 4.4.7. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6x^3+2x+5}{2x^3+x^2+7}$.

Úloha 4.4.8. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{6\cdot 2^{3x}+2^{x+1}+5}{2^{3x+1}+2^{2x}+7}$.

Úloha 4.4.9. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$.

Další metoda výpočtu limit funkcí: užitím l'Hospitalova pravidla .

– ∗ –

Kapitola 5

Spojitost funkce

Spojitost patří k nejvýznamnějším vlastnostem funkcí. Setkáváme se s ní — jako s požadovanou vlastností funkcí — ve všech částech matematické analýzy.

5.1 Pojem spojitosti funkce

Intuitivní představa spojitosti funkce f v bodě x_0 je spojena s grafem funkce: graf v tomto bodě „není přetržený“, funkce je v daném bodě definována a v malém okolí bodu x_0 *jsou malé i změny funkce. Spojitost v bodě je lokální vlastnost funkce.*

Definice 5.1.1 (spojitost funkce v bodě)**.**
Říkáme, že funkce f je ***spojitá v bodě*** $x_0 \Leftrightarrow$

1. je v bodě x_0 definována (tj. $x_0 \in D(f)$),
2. [je-li x_0 hromadným bodem $D(f)$, pak] existuje vlastní $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ a platí
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Poznámka 5.1.2. Někdy se vynechává podmínka v hranaté závorce. Její ponechání rozšiřuje spojitost i do izolovaných bodů $D(f)$ a umožňuje jednodušší formulaci některých vět.

Úloha 5.1.3. *Definujte spojitost v bodě x_0 zleva a spojitost zprava.*

Úloha 5.1.4. *Načrtněte graf funkce f tak, aby nastaly tyto jevy:*

1. *v bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu,*
2. *v bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní,*
3. *v bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva,*

4. *v bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva,*
5. *v bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota,*
6. *v bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$,*
7. *v bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$,*
8. *v bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$,*
9. *v bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$.*

Definice 5.1.5. Hromadný bod x_0 definičního oboru $D(f)$, v němž funkce f není spojitá, se nazývá ***bod nespojitosti*** funkce f.

Definice 5.1.6 (druhy nespojitosti)**.** Nespojitost v bodě x_0 se nazývá

- ***odstranitelná*** $\Longleftrightarrow$
  - f má v bodě x_0 vlastní limitu,
  - ale funkční hodnota $f(x_0)$
    - buď není definována
    - nebo není rovna limitě;
- ***neodstranitelná*** ve všech ostatních případech nespojitosti.

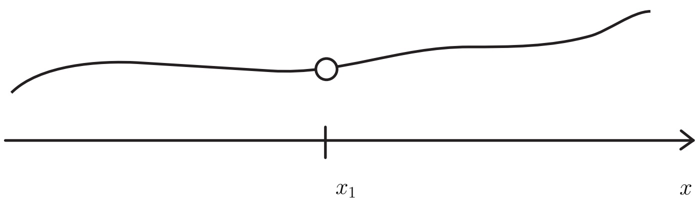
Neodstranitelnou nespojitost nazveme

- ***1. druhu*** $\Longleftrightarrow$
  - v bodě x_0 existují obě jednostranné vlastní limity,
  - ale jsou různé;
  - rozdíl limit $f(x_0+) - f(x_0-)$ (někdy jen absolutní hodnotu tohoto rozdílu) nazýváme ***skok***;
- ***2. druhu*** ve všech ostatních případech.

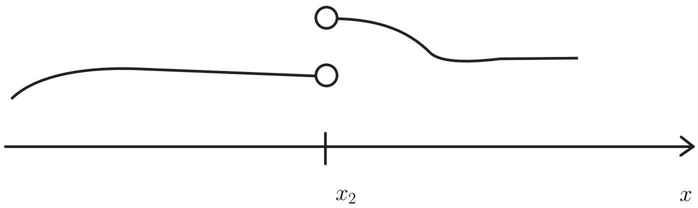
Poznámka 5.1.7. Odstranitelnou nespojitost lze odstranit tak, že funkci f v bodě x_0 *dodefinujeme* nebo *předefinujeme* tak, aby se funkční hodnota rovnala limitě funkce v bodě x_0.

Úloha 5.1.8. *Rozhodněte, jakou nespojitost má funkce f z úlohy 5.1.4 v bodech x_1 až x_9.*

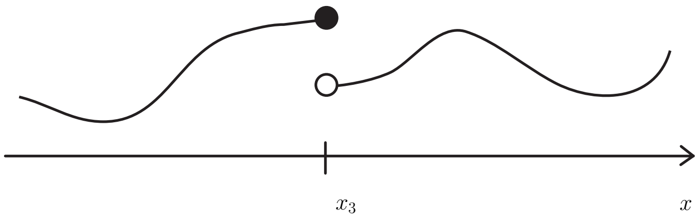
Úloha 5.1.9. *Dokažte, že Dirichletova funkce je nespojitá pro každé $x \in \mathbb{R}$. Jaká je to nespojitost?*



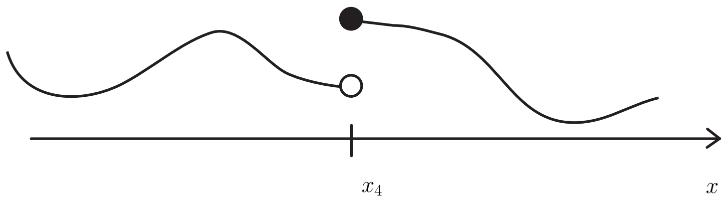
Obrázek 5.1: V bodě $x_1 \notin D(f)$ má funkce vlastní limitu (DODEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



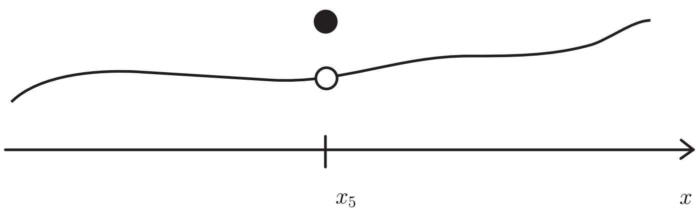
Obrázek 5.2: V bodě $x_2 \notin D(f)$ limita zleva je menší než limita zprava, obě jsou vlastní (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



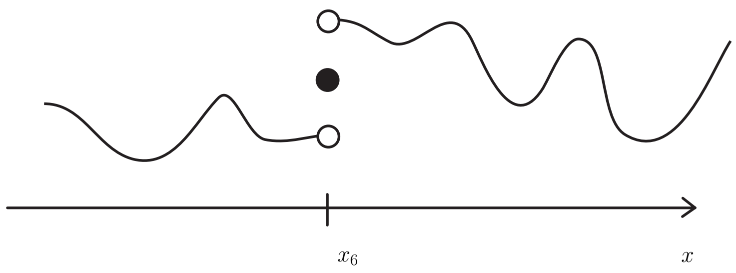
Obrázek 5.3: V bodě x_3 je funkce spojitá zleva, limita zprava je menší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



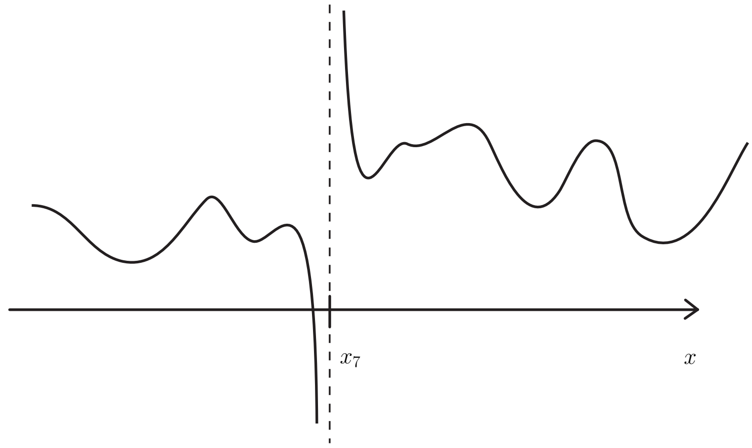
Obrázek 5.4: V bodě x_4 je funkce spojitá zprava a limita zprava je větší než limita zleva (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



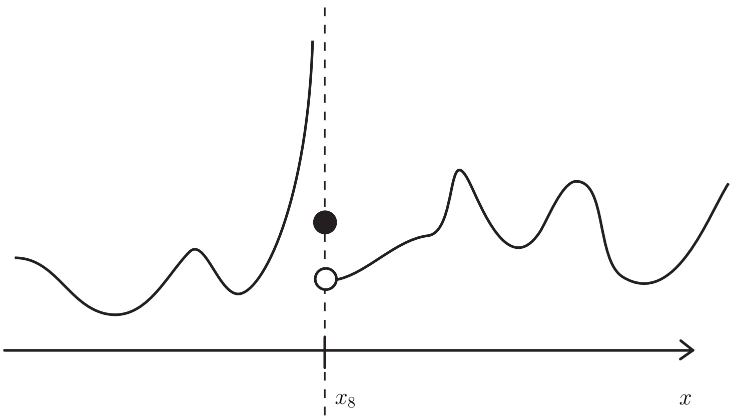
Obrázek 5.5: V bodě $x_5 \in D(f)$ má vlastní limitu, která je však menší než funkční hodnota (PŘEDEFINOVÁNÍM ODSTRANITELNÁ NESPOJITOST).



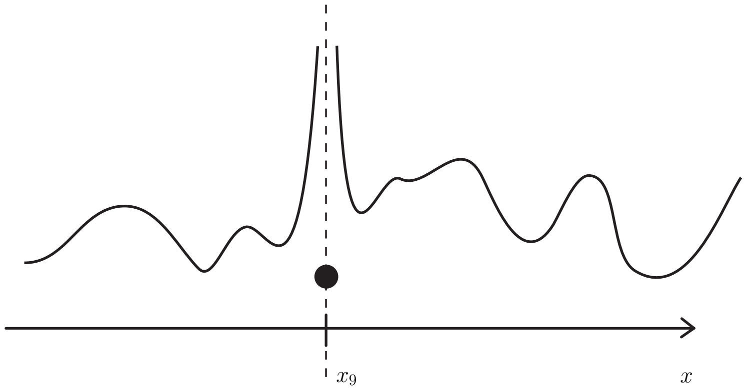
Obrázek 5.6: V bodě $x_6 \in D(f)$, limita zleva je menší než $f(x_6)$, limita zprava je větší než $f(x_6)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST PRVNÍHO DRUHU – SKOK).



Obrázek 5.7: V bodě $x_7 \notin D(f)$ je limita zleva $-\infty$, limita zprava $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 5.8: V bodě $x_8 \in D(f)$ je limita zleva $+\infty$, vlastní limita zprava je menší než $f(x_8)$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).



Obrázek 5.9: V bodě $x_9 \in D(f)$ má funkce nevlastní limitu $+\infty$ (NEODSTRANITELNÁ NESPOJITOST DRUHÉHO DRUHU).

Dále uvádíme přehled základních vět o spojitosti v bodě x_0

V případě, že tento bod je hromadným bodem $D(f)$, plynou tyto věty z vět o limitách.

Věta 5.1.10. *Jsou-li funkce*

- f, g *spojité v bodě* x_0 *a* $c \in \mathbb{R}$,

pak jsou v tomto bodě spojité též funkce

- $f + g$,
- $f - g$,
- $c \cdot f$,
- $f \cdot g$,
- $|f|$
- *a pro* $g(x_0) \neq 0$ *i* $\dfrac{f}{g}$.

(Pro součty, rozdíly a součiny platí tato vlastnost při libovolném konečném počtu členů resp. činitelů.)

Věta 5.1.11. *Je-li funkce* φ *spojitá v bodě* x_0, *funkce* f *spojitá v bodě* $a = \varphi(x_0)$, *pak složená funkce* $f \circ \varphi$ *je spojitá v bodě* x_0.

Věta 5.1.12. *Je-li funkce* f *spojitá v bodě* x_0, *pak existuje okolí* $U(x_0)$ *tak, že na* $D(f) \cap U(x_0)$ *je* f *omezená (je to tzv. lokální omezenost spojité funkce).*

Věta 5.1.13. *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f)$*, funkce* f *je spojitá v* x_0 *a* $f(x_0) \neq 0$*.*

Pak existuje okolí $U(x_0)$ *tak, že* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$x \in U(x_0) \cap D(f) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{sgn} f(x) = \operatorname{sgn} f(x_0).$$

Věta 5.1.14. *Nechť* x_0 *je oboustranný hromadný bod* $D(f)$*.*

Funkce f *je spojitá v bodě* $x_0 \Longleftrightarrow$ *je v něm spojitá zleva i zprava.*

Věta 5.1.15 (Pravidlo ε–δ)**.** *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f)$*.*

Funkce f *je spojitá v bodě* $x_0 \Longleftrightarrow$

$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ *tak, že* $\forall x \in \mathbb{R}$ *platí*

$$x \in U(x_0, \delta) \cap D(f) \Longrightarrow f(x) \in (f(x_0), \varepsilon).$$

Poznámka 5.1.16.

- Tato vlastnost se též nazývá Cauchyova definice spojitosti; tedy takto lze definovat spojitost funkce v hromadném bodě $D(f)$ bez použití pojmu limita.
- V uvedeném pravidle ε–δ je ovšem pojem limity fakticky obsažen, viz pravidlo ε–δ pro limitu funkce.
- Podobně následující větu lze chápat jako Heineho definici spojitosti.

Věta 5.1.17. *Nechť* x_0 *je hromadným bodem* $D(f)$*.*

Funkce f *je spojitá v bodě* $x_0 \Longleftrightarrow$

$$\forall x_n, x_n \in D(f),\ x_n \to x_0 \ \ \textit{platí} \ \ f(x_n) \to f(x_0).$$

Věta 5.1.18. Základní elementární funkce jsou spojité ve všech bodech, v nichž jsou definovány.

Úloha 5.1.19. *Pro které funkce naleznete důkaz věty 5.1.18 v příkladech předchozí kapitoly?*

5.2 Funkce spojité na množině

Spojitost funkce na množině je globální vlastností funkce.

Definice 5.2.1. Říkáme, že funkce f ***je spojitá na množině*** $M \subset D(f) \Longleftrightarrow$ je spojitá v každém bodě množiny M.

Zápis: $f \in C(M)$.

Říkáme, že funkce f ***je spojitá*** $\Longleftrightarrow$ f je spojitá na $D(f)$.

Poznámka 5.2.2. Je třeba rozlišovat spojitost na $D(f)$ a spojitost na uzávěru $\overline{D(f)}$. Například funkce $f : y = 1/x$ je podle výše uvedené definice spojitá, neboť je spojitá na $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, ale není spojitá na množině $\mathbb{R} = \overline{D(f)}$.

Někdy lze požadavek na spojitost funkce poněkud „oslabit“ a uvažovat funkce jen „po částech spojité“ (viz například Newtonův vzorec v kapitole Riemannův určitý integrál).

Definice 5.2.3. Funkce f se nazývá ***po částech spojitá*** na $M \iff$

- je spojitá ve všech bodech množiny M
- s výjimkou konečného počtu bodů M,
  - v nichž je definovaná
  - a má zde nespojitost 1. druhu
  - nebo nespojitost odstranitelnou.

K tomu, abychom mohli spojitosti prakticky využívat, je třeba se přesvědčit, které z běžně používaných funkcí jsou spojité. Především i zde přirozeně platí:

Věta 5.2.4. Všechny základní elementární funkce jsou spojité.

- Z vlastností spojitosti (věty 5.1.10, 5.1.11 a 5.1.18) plyne, že jsou spojité i všechny funkce, které ze základních elementárních funkcí dostaneme konečným počtem aritmetických operací a skládání funkcí.
- Nejdůležitějším zvláštním případem spojitosti na M je spojitost na intervalu.

  Přitom spojitost na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$ znamená, že
  - f je spojitá na (a, b),
  - v levém krajním bodě a je spojitá zprava
  - a v pravém krajním bodě b je spojitá zleva.

5.3 Vlastnosti funkcí spojitých na intervalu

Věta 5.3.1 (1. Weierstrassova věta)**.** *Je-li funkce spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu omezená.*

Důkaz (sporem). • Kdyby funkce f nebyla omezená na $\langle a, b\rangle$ (například shora), pak by ke každému $n \in \mathbb{N}$ existoval bod $x_n \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(x_n) > n$.

- Posloupnost $\{x_n\} \subset \langle a, b\rangle$ je omezená, takže podle Bolzano–Weierstrassovy věty existuje vybraná konvergentní podposloupnost $\{x'_n\}$ s limitou x_0, pro niž též $f(x'_n) > n$.
- Proto $f(x_0)$ je (podle Heineho definice spojitosti a podle věty o limitě nerovnosti)
  - jednak $+\infty$
  - a jednak reálné číslo vzhledem ke spojitosti f v každém bodě $\langle a, b\rangle$, tedy i v x_0,

  a to je spor.

$\square$

Úloha 5.3.2. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 1. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení.*

Věta 5.3.3 (2. Weierstrassova věta)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak na tomto intervalu nabývá své největší i nejmenší hodnoty.*

Tedy existují body $c_1, c_2 \in \langle a, b\rangle$ *tak, že*

$$f(c_1) = \max_{x\in\langle a,b\rangle} f(x), \quad f(c_2) = \min_{x\in\langle a,b\rangle} f(x).$$

Důkaz (části o maximu).

- Podle 1.Weierstrassovy věty je f shora omezená, takže existuje konečné
$$\sup_{x\in\langle a,b\rangle} f(x) = M.$$
- Stačí tedy dokázat, že existuje $c_1 \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(c_1) = M$.
- Kdyby takový bod c_1 neexistoval, byla by funkce
$$g(x) = M - f(x)$$
na $\langle a, b\rangle$ spojitá a kladná.
- Proto i funkce $\dfrac{1}{g(x)}$ by byla na $\langle a, b\rangle$ spojitá,
- tedy podle 1. Weierstrassovy věty omezená kladnou konstantou
$$L : \frac{1}{g(x)} < L \implies g(x) > \frac{1}{L} \implies f(x) < M - \frac{1}{L};$$
- dostali jsme spor se 2. vlastností suprema,

- takže $g(x)$ nemůže být stále kladná,
- tedy uvažovaný bod c_1 existuje.

□

Úloha 5.3.4. *Na příkladech ukažte, že oba předpoklady 2. Weierstrassovy věty (spojitost funkce a uzavřenost intervalu) jsou podstatné pro platnost tvrzení věty. Tedy při narušení některého z těchto předpokladů není nutně splněno ani tvrzení. (Například uvažte funkci $y = x$ na intervalu $(-1, 1)$.)*

Věta 5.3.5 (Bolzano-Cauchyova)**.** *Je-li funkce f spojitá na $\langle a, b\rangle$ a platí-li*

$$f(a) \cdot f(b) < 0,$$

pak existuje bod $\xi \in \langle a, b\rangle$ tak, že $f(\xi) = 0$.

Důkaz (Bolzanovou metodou půlení intervalů).

- Interval $\langle a, b\rangle$ rozpůlíme bodem c_1.
  - Pokud $f(c_1) = 0$, je $\xi = c_1$.
  - Jinak označíme $\langle a_1, b_1\rangle$ tu polovinu, kde $f(a_1) \cdot f(b_1) < 0$.
- Interval $\langle a_1, b_1\rangle$ rozpůlíme bodem $c_2 \ldots$.
- Buď $\exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $\xi = c_n$
- nebo dostáváme posloupnost vložených intervalů, které mají podle věty o vložených intervalech jediný společný bod ξ; o něm se dokáže $f(\xi) = 0$.
  - Nemůže být $f(\xi) > 0$, neboť by existovalo okolí $U(\xi)$ tak, že $\forall x \in U(\xi)$ by bylo $f(x) > 0$
  - a to je spor (pro dosti velké n by bylo $\langle a_n, b_n\rangle \subset U(\xi)$).
  - Stejně tak nemůže platit, že $f(\xi) < 0$, proto $f(\xi) = 0$.

□

Této věty se užívá např. při řešení rovnic k důkazu existence řešení.

Úloha 5.3.6. *Dokažte, že rovnice $x + \sin(x - 1) = 0$ má alespoň jeden kořen.*

Řešení. Uvažujeme například $a = -2$, $b = 2$ (najděte menší interval!) □

Věta 5.3.7 (věta o mezihodnotě)**.** *Nechť funkce f je spojitá na $\langle a, b\rangle$,*

$$f(a) \neq f(b).$$

Pak funkce f nabývá každé hodnoty q mezi $f(a)$ a $f(b)$.

Princip důkazu. Bolzano-Cauchyovu větu použijeme na funkci

$$g(x) = f(x) - q.$$

□

Důsledek 5.3.8. *Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak $f(J)$ je interval nebo jednobodová množina.*

Věta 5.3.9 (vztah mezi monotónností a prostotou u funkcí spojitých na intervalu)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu J, pak f je prostá právě tehdy, když je monotónní.*

Princip důkazu.

- Vztah „ryze monotónní“ $\Rightarrow$ „prostá“ platí zřejmě i pro nespojité funkce.
- Vztah „prostá“ $\Rightarrow$ „ryze monotónní“ se dokáže sporem.
  - Kdyby (prostá) funkce nebyla ryze monotónní, existovaly by tři body c_1, c_2, c_3 tak, že $f(c_2)$ by bylo větší (nebo menší) než $f(c_1)$ a $f(c_3)$.
  - Z věty o mezihodnotě plyne existence bodů $x_1 \in (c_1, c_2)$, $x_2 \in (c_2, c_3)$ tak, že $f(x_1) = f(x_2)$,
  - a to je spor s vlastností prostoty.

□

Úloha 5.3.10. *Sestrojte náčrtek k poslední části důkazu předchozí věty.*

Věta 5.3.11 (o spojitosti inverzní funkce)**.** *Je-li funkce f na intervalu J spojitá a prostá, pak inverzní funkce f je též spojitá.*

Důkaz. Používá se ryzí monotónnost funkce f a důsledek věty o mezihodnotě. □

— ∗ —

Kapitola 6

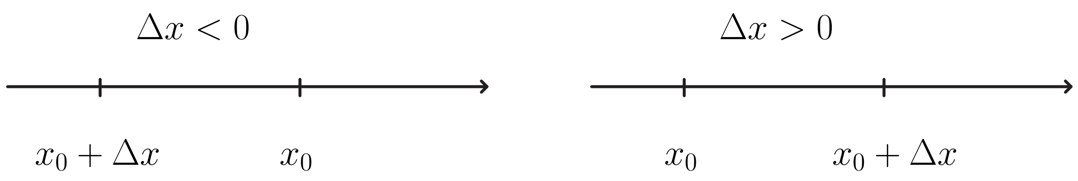
Derivace funkce

Derivace funkce patří mezi nejpoužívanější pojmy matematické analýzy. Derivace vyjadřuje rychlost změny a stojí proto i v základu četného praktického použití matematické analýzy.

6.1 Pojem derivace funkce

Mějme funkci f, která je definována v nějakém okolí $U(x_0)$ bodu x_0.

- Postoupíme-li z bodu x_0 o nějaké Δx (Δx je *přírůstek nezávisle proměnné*), dostaneme novou hodnotu nezávisle proměnné $x_0 + \Delta x$ $(\in U(x_0))$;
  - pro $\Delta x < 0$ je tato hodnota vlevo
  - a pro $\Delta x > 0$ je vpravo od x_0.

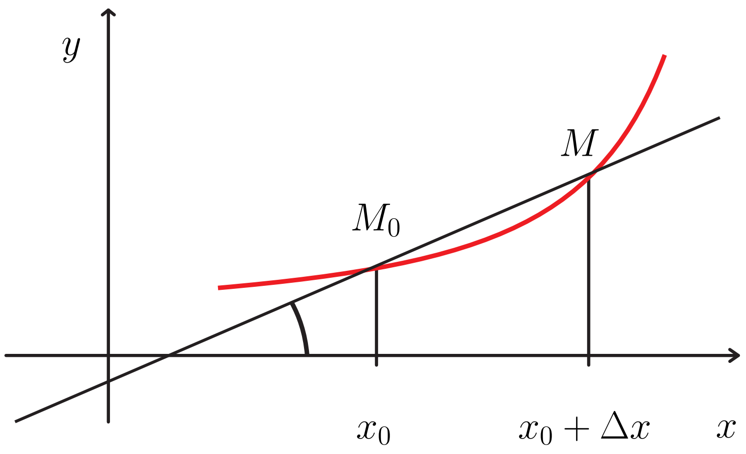


Obrázek 6.1: Přírůstky nezávisle proměnné.

- Funkční hodnota se přitom změní z hodnoty $f(x_0)$ na hodnotu $f(x_0+\Delta x)$ o rozdíl $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.
  - Δy je tzv. *přírůstek funkce.*
  - Podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je tzv. *diferenciální podíl*;
  - jeho geometrickým významem je směrnice sečny ke grafu funkce,

– tj. $\operatorname{tg}\alpha$, kde α je úhel, který svírá sečna M_0M s osou x.

Úloha 6.1.1. *Doplňte do obrázku 6.2 označení: α, Δx, a Δy.*



Obrázek 6.2: Sečna grafu.

Pro spojitou funkci f platí

$$\Delta x \to 0 \implies \Delta y \to 0,$$

takže pro $\Delta x \to 0$ je diferenciální podíl $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ výraz typu $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

Definice 6.1.2. Říkáme, že ***funkce*** f ***má v bodě*** x_0 ***derivaci***, právě když je f definována na nějakém okolí bodu x_0 a existuje (vlastní) limita

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Tuto limitu nazýváme ***derivace funkce*** f ***v bodě*** x_0 a značíme ji $f'(x_0)$.

Derivace v bodě je tedy nějaké číslo.

Geometrický význam derivace funkce v bodě:

$f'(x_0)$ znamená směrnici tečny grafu funkce v bodě M_0, tj. $\operatorname{tg}\varphi$, kde φ je úhel který svírá tečna v bodě M_0 s osou x.

Úloha 6.1.3. *Načrtněte dle obrázku 6.2 obrázek, v němž vyznačíte geometrický význam derivace funkce v bodě.*

Fyzikální význam derivace v bodě:

Je-li zákon dráhy $s = s(t)$, pak diferenciální podíl $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ znamená průměrnou rychlost a $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = v(t)$ znamená okamžitou rychlost.

Úloha 6.1.4. *Podle definice vypočtěte derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* $x_0 = 3$.

Jestliže v definici derivace nahradíme limitu jednostrannou limitou, dostaneme definice jednostranných derivací (derivace zleva, zprava), které označujeme $f'(x_0-)$ a $f'(x_0+)$.

Je-li $f'(x_0) = k$, pak existují obě jednostranné derivace a jsou rovny číslu k; také naopak, existují-li obě jednostranné derivace funkce f v bodě x_0 a rovnají se témuž číslu k, pak existuje derivace funkce f v bodě x_0 a je rovna k, jak plyne z vět o limitách.

Úloha 6.1.5. *Vypočtěte obě jednostranné derivace funkce* $f : y = |x|$ *v bodě* $x_0 = 0$.

Z výpočtu plyne, že funkce $y = |x|$ nemá v bodě 0 derivaci.

Jestliže limita diferenciálního podílu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ je pro $\Delta x \to 0$ rovna $+\infty$ nebo $-\infty$, pak mluvíme o nevlastních derivacích (též zleva, zprava).

Výrok „existuje derivace“ však bude vždy znamenat „existuje vlastní derivace“.

Úloha 6.1.6. *Je dána funkce* $f : y = \sqrt{1 - x^2}$. *Ověřte, že* $f'(1-) = +\infty$.

Úloha 6.1.7. *Určete derivaci funkce* $y = x^2$ *v bodě* x.

Derivace jako funkce

Definice 6.1.8. Má-li funkce f derivaci v každém bodě x nějaké množiny M, říkáme, že ***má derivaci na množině*** M; značíme ji f' nebo $f'(x)$.

- Vidíme, že derivace funkce na množině M je opět funkce.
- Například dle úlohy 6.1.7 derivací funkce $y = x^2$ na $\mathbb{R}$ je funkce $y = 2x$.
- Chceme-li pak zjistit derivaci $f'(x_0)$ v nějakém bodě x_0, stačí do $f'(x)$ dosadit x_0 za x.
- Například pro f z úlohy 6.1.7 je $f'(3) = (2x)_{x=3} = 6$ (srovnej s úlohou 6.1.4).

Přehled označení derivací:

v bodě:	jako funkce:	původ označení:
$f'(x_0)$	$y',\ f',\ f'(x)$	Lagrange
$\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x},\ \left(\dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_0}$	$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x},\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(f(x)\big)$	Leibniz
$\mathrm{D}f(x_0)$	$\mathrm{D}y,\ \mathrm{D}f(x)$	Cauchy

- Každé z těchto označení má své výhody.
- Například v Leibnizově je dobře vidět, podle které proměnné se derivuje, takže se dobře uplatňuje například při manipulacích s funkcemi složenými a inverzními;
- Cauchyovo označování je vhodné například při řešení diferenciálních rovnic operátorovou metodou;
- operaci definovanou operátorem D nazýváme zpravidla *derivování* (podle dané proměnné).
- Chceme-li v Lagrangeově označení zdůraznit proměnnou, podle níž se derivuje, napíšeme tuto proměnnou jako index, například f'_u.

Věta 6.1.9 (vztah mezi derivací a spojitostí)**.** *Má-li funkce f v bodě x_0 derivaci, je v něm spojitá.*

Princip důkazu. Dokážeme, že platí $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Big(f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\Big)=0.$ □

Úloha 6.1.10. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y=x^n$ pro $n\in\mathbb{N}$.*

Úloha 6.1.11. *Dle definice derivace stanovte derivace funkce $y=\sin x$ [pozor na to, jak se přitom využije spojitosti funkce kosinus].*

6.2 Vlastnosti derivací

Věta 6.2.1 (základní vlastnosti derivací)**.** *Nechť funkce $u=f(x)$, $v=g(x)$ mají na množině M derivace $u'=f'(x)$, $v'=g'(x)$ a $c\in\mathbb{R}$.*

Pak funkce $c\cdot f$, $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ a pro $g(x)\neq 0$ i $\dfrac{f}{g}$ mají na M derivace a platí:

1. $(c \cdot f)' = c \cdot f'$,

2. $(u+v)' = u' + v', \quad (u-v)' = u' - v'$,

3. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$,

4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$.

Důkaz. Provádí se podle definice derivace, u součinu a podílu se přidá a odečte určitá pomocná funkce, využívá se tu též spojitosti. □

Pravidla pro sčítání a pro násobení lze matematickou indukcí rozšířit na n členů (činitelů), $n \in \mathbb{N}$. Pro násobení tří funkcí tak například máme

$$(u \cdot v \cdot w)' = u' \cdot v \cdot w + u \cdot v' \cdot w + u \cdot v \cdot w'.$$

Věta 6.2.2 (derivace složené funkce)**.** *Nechť existuje složená funkce $f \circ \varphi$ a nechť*

1) funkce $u = \varphi(x)$ má v bodě x derivaci $\varphi'(x)$,

2) funkce $y = f(u)$ má v odpovídajícím bodě u $(= \varphi(x))$ derivaci $f'(u)$.

Pak funkce $f \circ \varphi$ má v bodě x derivaci

$$(f \circ \varphi)'(x) = (f'(u) \cdot \varphi'(x) =)(f \circ \varphi)'_u(x) \cdot \varphi'(x).$$

Úloha 6.2.3. *Užitím věty o derivaci složené funkce máme najít derivaci funkce $y = \sin^2 x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci složené funkce tvar, jako úprava zlomků: $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

Věta 6.2.4 (derivace inverzní funkce)**.** *Nechť f je ryze monotónní na intervalu J a má tu derivaci f'. Pak inverzní funkce f^{-1} má derivaci na $f(J)$ a platí*

$$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{f'(y)}.$$

Důkaz. U obou vět se provádí dle definice derivace a používá se faktu, že

$$\Delta y \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta x \to 0.$$

□

Úloha 6.2.5. *Užitím předchozí věty zjistěte derivaci funkce $y = \arcsin x$.*

Při označení podle Leibnize má pravidlo pro derivaci inverzní funkce tvar, jako úprava zlomku:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}.$$

6.3 Derivace elementárních funkcí

Věta 6.3.1 (přehled vzorců pro derivace elementárních funkcí)**.**

- $(c)' = 0$ *(derivace konstanty);*
- $(x^m)' = mx^{m-1}$ *(platí pro libovolné $m \neq 0$); zvláště* $(x)' = 1$*;*
- $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$*; zejména* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$*;*
- $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$*; zejména* $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$*;*
- $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$*;*
- $(\operatorname{tg} x)' = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$*;* $(\operatorname{cotg} x)' = -(1 + \operatorname{cotg}^2 x) = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$*;*
- $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$*;* $(\arccos x)' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$*;*
- $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$*;* $(\operatorname{arccotg} x)' = \dfrac{-1}{1+x^2}$*;*
- $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$*;* $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$*;*
- $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$*;* $(\operatorname{coth} x)' = \dfrac{-1}{\operatorname{sh}^2 x}$*;*
- $(\operatorname{argsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$*;* $(\operatorname{argth} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Důkaz. Provádí se užitím definice derivace (někde i s užitím speciálních limit), vlastností derivací, vět o derivaci složené funkce a inverzní funkce. □

Úloha 6.3.2. *Určete derivaci funkce* $y = (\cos x)^{\sin x}$ *pro x v 1. kvadrantu.*

6.4 Diferenciál funkce

Řešíme problém: funkci f v okolí bodu x_0 aproximovat lineární funkcí g, tj. nalézt takovou lineární funkci g, aby platila podmínka

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - g(x)}{x - x_0} = 0.$$

Označme $x = x_0 + h$; zřejmě $g(x) = f(x_0) + ah$, takže čitatel posledního zlomku lze zapsat jako

$$\omega(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - ah.$$

Výše uvedenou podmínku lze tak zapsat jako

$$\lim_{h \to 0} \frac{\omega(h)}{h} = 0.$$

Z definice funkce $\omega(h)$ plyne, že přírůstek funkce $\Delta f(x_0)$ lze vyjádřit ve tvaru

$$\Delta f(x_0)(= f(x_0 + h) - f(x_0)) = ah + \omega(h).$$

Definice 6.4.1. Lineární část přírůstku funkce, tedy funkci ah, nazýváme ***diferenciál funkce*** f ***v bodě*** x_0, označujeme jej $\mathrm{d}f(x_0)$ a funkci, která má diferenciál v bodě x_0, nazýváme ***diferencovatelnou v bodě*** x_0. Funkci, která má diferenciál v každém bodě množiny M, nazýváme ***diferencovatelnou na množině*** M.

Věta 6.4.2 (existence a jednoznačnost diferenciálu)**.** *Funkce f je diferencovatelná v bodě x_0 $\iff$ má v bodě x_0 vlastní derivaci. Diferenciál $\mathrm{d}f(x_0)$ funkce f v bodě x_0 je pak jednoznačně určen vzorcem*

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot h,$$

kde $h \in \mathbb{R}$ je přírůstek nezávisle proměnné.

Předchozí věta tedy říká, že výroky „f má v bodě x_0 (vlastní) derivaci“ a „f je v bodě x_0 diferencovatelná“ jsou ekvivalentní, znamenají totéž. (U funkcí více proměnných je tomu jinak.)

Místo h používáme pro přírůstek nezávisle proměnné též označení Δx nebo $\mathrm{d}x$ a název *diferenciál nezávisle proměnné*. Je to motivováno skutečností, že diferenciál lineární funkce $y = x$ je $\mathrm{d}x = 1 \cdot h(= 1 \cdot \Delta x)$. Diferenciál funkce pak též zapisujeme $\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x$. Výše uvedené poznatky nám umožňují definovat diferenciál funkce přímo uvedeným vzorcem.

Definice 6.4.3. ***Diferenciálem funkce*** f ***v bodě*** x_0 nazýváme výraz

$$\mathrm{d}f(x_0) = f'(x_0) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $\mathrm{d}x(= \Delta x)$ je konstantní přírůstek (diferenciál) nezávisle proměnné.

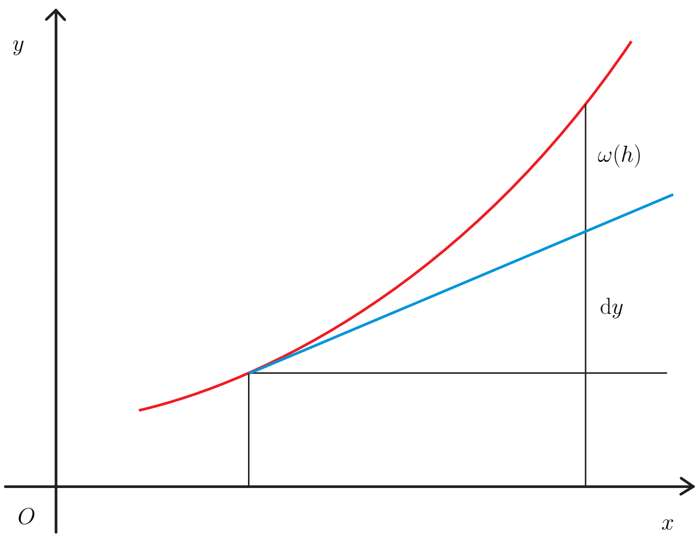
Diferenciálem funkce f ***na množině*** M nazýváme funkci

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

kde $x \in M$.

Ze vztahu $\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \mathrm{d}x$ vidíme, že Leibnizův symbol $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ pro derivaci funkce je skutečným zlomkem — podílem diferenciálu funkce a diferenciálu nezávisle proměnné. Také vzorce pro derivaci složené funkce a inverzní funkce (viz 6.2) lze chápat jako operace se skutečnými zlomky.

Úloha 6.4.4. *Doplňte obrázek 6.3, který znázorňuje geometrický význam diferenciálu funkce jako přibližné hodnoty přírůstku funkce stanovené na tečně ke grafu funkce.*



Obrázek 6.3: Geometrický význam diferenciálu funkce.

Užití diferenciálu

Užití diferenciálu *v přibližných výpočtech* je založeno na přibližné rovnosti

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta y \approx f(x_0) + \,\mathrm{d}y = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Úloha 6.4.5. *Pomocí diferenciálu funkce vypočtěte přibližnou hodnotu* $\sqrt{0,982}$.

Řešení.

$$\sqrt{0,982} = f(0,982) = f(1 - 0,018) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x,$$

$$\sqrt{0,982} \approx f(1) + f'(1) \cdot (-0,018) = \sqrt{1} + \frac{1}{2\sqrt{1}}(-0,018) = 1 - \frac{0,018}{2} = 0,991.$$

□

Užití diferenciálu *při odhadu chyb* je založeno na tom, že když h (tedy $\,\mathrm{d}x$) položíme rovno absolutní chybě měření, udává $\mathrm{d}f$ přibližnou hodnotu absolutní chyby vypočtené hodnoty $y = f(x)$.

Úloha 6.4.6. *Počítáme objem koule, jejíž průměr x jsme změřili s chybou δx. Určete chybu výsledku.*

Řešení. Vzorec pro objem koule o poloměru r, resp. průměru x:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{x}{2}\right)^3 = \frac{1}{6}\pi x^3.$$

Pokud x měříme s chybou δx, dostaneme při označení $\hat{x} = x + \delta x$:

$$\hat{V} = \frac{1}{6}\pi\hat{x}^3 = \frac{1}{6}\pi(x + \delta x)^3 \approx \frac{1}{6}\pi x^3 + \left[\frac{1}{6}\pi x^3\right]' \cdot \delta x = V + \left[\frac{1}{2}\pi x^2\right] \cdot \delta x = V + \delta V.$$

Přibližná chyba výsledku je tedy $\delta V = \dfrac{1}{2}\pi x^2 \delta x$, přičemž přibližná relativní chyba výsledku je

$$\frac{\delta V}{V} = \frac{\frac{1}{2}\pi x^2 \delta x}{\frac{1}{6}\pi x^3} = 3\frac{\delta x}{x},$$

a tedy relativní chyba výsledku je rovna trojnásobku relativní chyby měření průměru. □

Diferenciál složené funkce

Mějme funkci $y = f(u)$, kde u je nezávisle proměnná. Pak její diferenciál je

$$\mathrm{d}f (= \mathrm{d}y) = f'(u) \cdot \mathrm{d}u.$$

Určeme nyní $\mathrm{d}f$ v případě, že u není nezávisle proměnná, ale $u = \varphi(x)$. Pak

$$\mathrm{d}f = [f \circ \varphi(x)]' \cdot \mathrm{d}x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, \mathrm{d}x = f'(u) \cdot \mathrm{d}u,$$

neboť $\mathrm{d}u = \varphi'(x)\, \mathrm{d}x$.

Vidíme, že diferenciál funkce je invariantní při přechodu na složenou funkci. (Tuto vlastnost má pouze 1. diferenciál, viz 6.5, a používáme ji zejména při výpočtu neurčitých integrálů, viz 9.)

6.5 Derivace vyšších řádů

Funkce $y = \sin x$ má derivaci $y' = \cos x$. Toto je opět funkce, která má derivaci a platí $(y')' = -sinx$.

Definice 6.5.1. Má-li funkce f' v bodě x (na množině M) derivaci $(f')'$, označíme tuto derivaci f'' a nazveme ***derivace druhého řádu*** (***druhá derivace***) funkce f. Podobně ***derivaci n-tého řádu*** (***n-tou derivaci***) $f^{(n)}$ definujeme vztahem $f^{(n)} = \left(f^{(n-1)}\right)'$.

Označení podle Leibnize: $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ (čti „d dvě f podle $\mathrm{d}x$ na druhou“), $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}y^2}$, $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(f(x))$, $\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$, $\left(\dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{x=x_0}$, apod.

Označení podle Cauchyho: $D^2 f$, $D^n y$, apod.

Úloha 6.5.2. *Určete všechny derivace funkce $y = 3x^2 - 2x - 1$.*

Úloha 6.5.3. *Určete 2. derivaci funkce $y = \sin x$ v bodě $x_0 = \frac{\pi}{2}$.*

Derivace $y'', \ldots, y^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, nazýváme *derivace vyšších řádů.* Upotřebíme je např. při vyšetřování průběhu funkce (viz kapitolu 8) nebo při určování koeficientů Taylorova rozvoje (viz kapitolu 7). Má proto smysl uvažovat o vzorcích, které usnadní výpočet n-té derivace.

Některé vzorce pro n-tou derivaci elementárních funkcí

1) Funkce e^x : $\forall n \in \mathbb{N}$ je $(\mathrm{e}^x)^{(n)} = \mathrm{e}^x$;

   podobně pro funkci a^x máme $(a^x)^{(n)} = a^x(\ln a)^n$.

2) Funkce $\sin x$, $\cos x$.

   Platí: $f^{(n+4)} = f^{(n)}$, takže takto lze zjistit derivaci libovolného řádu. Platí též vzorec $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$ a podobný pro $(\cos x)^{(n)}$.

3) Funkce $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$. Zde $f^{(n+2)} = f^{(n)}$.

4) Funkce x^n, $n \in \mathbb{N}$. Zde $(x^n)^{(n)} = n!$, $(x^n)^{(m)} = 0$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $m > n$.

Leibnizovo pravidlo pro n-tou derivaci součinu:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)}v + \binom{n}{1} u^{(n-1)}v' + \binom{n}{2} u^{(n-2)}v'' + \cdots + \binom{n}{n-1} u'v^{(n-1)} + uv^{(n)}.$$

Úloha 6.5.4. *Určete 120. derivaci funkce $y = x^2\,\mathrm{e}^x$.*

Řešení.

$$\mathrm{e}^x(x^2 + 240x + 14280).$$

□

6.6 Derivace různých typů funkcí

1) Funkce více proměnných

Derivujeme vždy podle jedné proměnné a ostatní považujeme za konstantu; dostáváme tzv. *parciální derivace* s označením (například pro funkci $z = f(x, y)$) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, atd.

Úloha 6.6.1. *Vypočtěte všechny parciální derivace 2. řádu pro funkci $z = x \sin xy$.*

2) Funkce dané parametricky

Nezávisle proměnná x i hodnota funkce y jsou vyjádřeny soustavou $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, kde $t \in (\alpha, \beta)$. Derivaci $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ určíme pomocí diferenciálů (užitím uvedeného Leibnizova symbolu): $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\psi'(t)\,\mathrm{d}t}{\varphi(t)\,\mathrm{d}t} = \dfrac{\psi'(t)}{\varphi(t)}$ (tedy derivace je též funkcí parametru).

Úloha 6.6.2. *Odvoďte vzorec pro derivaci 2. řádu funkce dané parametricky.*

Řešení. $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\psi''(t)\varphi'(t) - \psi'(t)\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}.$ □

Úloha 6.6.3. *Funkce f je dána parametricky:* $\begin{array}{l} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \end{array}$ $t \in \langle 0, \pi \rangle$.

Vypočtěte $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ *a* $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

3) Funkce dané implicitně

Funkce $y = y(x)$ nechť je dána implicitní rovnicí $f(x, y) = 0$ pro $x \in (a, b)$. Na daném intervalu tedy platí identicky $f(x, y(x)) = 0$. Proto také derivace levé strany podle x je identicky rovna nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$ a z toho vypočteme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Derivaci $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ vypočteme, když tuto rovnost znovu derivujeme podle x s tím, že $y = y(x)$.

Úloha 6.6.4. *Vypočtěte 1. a 2. derivace funkce dané implicitní rovnicí* $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Řešení. $y' = -\dfrac{x}{y}$, $y'' = -\dfrac{x^2 + y^2}{y^3}$. □

– ∗ –

Kapitola 7

Základní věty diferenciálního počtu

7.1 Úvod

Věta 7.1.1 (Fermatova)**.** *Nechť funkce f je definována na M a nabývá v některém vnitřním bodě $x_0 \in M$ své největší nebo nejmenší hodnoty. Má-li f v bodě x_0 derivaci, pak $f'(x_0) = 0$.*

Princip důkazu. Uvažujeme znaménko podílu $d(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ v levém a pravém okolí bodu x_0, v němž nabývá své největší (nejmenší) hodnoty. Z věty o limitě nerovnosti pak plyne $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} d(x) = 0$. $\square$

Fermatovu větu lze vztáhnout na lokální extrém a jeho okolí, tato věta má tedy lokální charakter a lze ji formulovat takto: má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a má v něm derivaci, pak se tato derivace rovná nule. Tedy:

Věta 7.1.2. *Nutnou podmínkou existence lokálního extrému funkce f v bodě x_0 je, že v něm derivace $f'(x_0)$ buď neexistuje nebo je rovna nule.*

Pro diferencovatelnou funkci f je nutnou podmínkou rovnost $f'(x_0) = 0$.

7.2 Věty o střední hodnotě

Uvedeme zde trojici vět (Rolleova, Lagrangeova, Cauchyova), které jsou obvykle nazývány větami o střední hodnotě diferenciálního počtu. Jádrem je věta Lagrangeova.

Věta 7.2.1 (Rolleova)**.** *Nechť funkce f*

1) je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, *2) má derivaci na intervalu (a, b),*

3) splňuje rovnost $f(a) = f(b)$.

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že $f'(\xi) = 0$.

Důkaz. Podle 2. Weierstrassovy věty nabývá funkce f v nějakém bodě $c_1 \in \langle a, b\rangle$ své nejmenší hodnoty a v nějakém bodě $c_2 \in \langle a, b\rangle$ své největší hodnoty. Kdyby c_1 i c_2 byly oba krajními body intervalu $\langle a, b\rangle$, platilo by $f(x) = konst.$, takže za ξ bychom mohli vzít libovolný bod intervalu (a, b). Je-li jeden z bodů c_1, c_2 vnitřním bodem intervalu (a, b) (označme jej c), pak tvrzení plyne z Fermatovy věty, kde $\xi = c$. □

Takových bodů, v nichž je derivace funkce f rovna 0, může být i více; například funkce $\sin x$ na $\langle 0, 2\pi\rangle$ splňuje předpoklady Rolleovy věty a její derivace je nulová v bodech $\dfrac{\pi}{2}$ a $\dfrac{3\pi}{2}$.

Úloha 7.2.2. *Proveďte grafickou ilustraci Rolleovy věty.*

Úloha 7.2.3. *Formou protipříkladů ukažte, že všechny tři předpoklady Rolleovy věty jsou nutné. Uveďte tedy příklady tří funkcí f_1, f_2, f_3, pro něž neplatí tvrzení Rolleovy věty, a to tak, že*

1) funkce f_1 je nespojitá v jediném bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, ale předpoklady 2 a 3 jsou splněny;

2) funkce f_2 nemá derivaci v jediném bodě intervalu (a, b), ale předpoklady 1 a 3 jsou splněny;

3) pro funkci f_3 platí $f_3(a) \neq f_3(b)$, ale předpoklady 1 a 2 jsou splněny.

Věta 7.2.4 (Lagrangeova)**.** *Nechť funkce f*

1) je spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$,

2) má derivaci na intervalu (a, b),

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$.

Důkaz. Zavedeme pomocnou funkci $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$ a ověříme, že jsou pro ni splněny předpoklady Rolleovy věty. Z tvrzení Rolleovy věty pro funkci F pak plyne tvrzení věty Lagrangeovy. □

Úloha 7.2.5. *Proveďte grafickou ilustraci Lagrangeovy věty.*

Úloha 7.2.6. *Formou proti příkladů (dle 7.2.3) ukažte, že oba předpoklady Lagrangeovy věty jsou nutné.*

Lagrangeova věta se používá v různých tvarech; některé uvedeme.

Položíme-li $a = x_0$, $b = x_0 + \Delta x$ a označíme-li θ číslo z intervalu $(0, 1)$, lze tvrzení upravit takto:

Pak existuje $\theta \in (0, 1)$ tak, že platí

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x.$$

Označíme-li $x = x_0 + \Delta x$, lze vztah z Lagrangeovy věty zapsat ve tvaru

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) \cdot f'(x_0 + \theta(x - x_0)).$$

Jiný zápis:

$$\Delta y = f'(x_0 + \theta\Delta x) \cdot \Delta x,$$

ukazuje, proč se Lagrangeově větě říká též *věta o přírůstku funkce.*

Lagrangeova věta má četné důsledky, z nichž některé lze posuzovat jako samostatné a významné výsledky matematické analýzy (viz 7.3).

Věta 7.2.7 (Cauchyho věta, zvaná též *zobecněná věta o střední hodnotě*)**.** *Nechť funkce f, g*

1) jsou spojité na intervalu $\langle a, b\rangle$,

2) mají derivace na intervalu (a, b),

3) $g'(x) \neq 0$ na intervalu (a, b).

Pak v intervalu (a, b) existuje bod ξ tak, že platí

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Důkaz. Předně $g(a) \neq g(b)$, neboť jinak by podle Rolleovy věty existoval bod $\xi_r \in (a, b)$ tak, že by $g'(\xi_r) = 0$, což by bylo ve sporu s předpokladem 3. Zavedeme pomocnou funkci

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot [g(x) - g(a)] - [f(x) - f(a)] \cdot [g(b) - g(a)]$$

a ověříme, že jsou pro F na $\langle a, b\rangle$ splněny předpoklady Rolleovy věty. V (a, b) tedy existuje ξ tak, že $F'(\xi) = 0$, tedy

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(\xi) - f'(\xi) \cdot [g(b) - g(a)] = 0,$$

z čehož plyne tvrzení. □

Cauchyova věta se používá například k důkazu l'Hospitalova pravidla (viz 7.3).

Všimněme si ještě vztahu uvedených tří vět o střední hodnotě: implikace

$$(R) \Longrightarrow (L), \quad (R) \Longrightarrow (C)$$

znázorňují, že pomocí Rolleovy věty jsme dokázali zbývající dvě. Avšak také je (L) ⇒ (R), neboť tvrzení Rolleovy věty lze chápat jako zvláštní případ tvrzení věty Lagrangeovy, když platí $f(a) = f(b)$. Stejně tak lze ukázat, že Lagrangeova věta je zvláštním případem věty Cauchyovy, tj. (C) ⇒ (L), jestliže $g(x) = x$. Jsou tedy všechny tři věty o střední hodnotě navzájem ekvivalentní.

7.3 Některé důsledky vět o střední hodnotě

Nejprve uvedeme dva typické důsledky vět o střední hodnotě; na jednom je založen pojem neurčitého integrálu, druhý umožňuje jednoduchý výpočet limit funkcí.

Věta 7.3.1 (o konstantní funkci)**.** *Funkce f je na intervalu (a, b) konstantní $\Longleftrightarrow$ má na (a, b) derivaci a $\forall x \in (a, b)$ platí $f'(x) = 0$.*

Důkaz. Z definice derivace plyne, že funkce konstantní na (a, b) má na (a, b) derivaci rovnu 0. Naopak nechť na (a, b) je $f'(x) = 0$. Dokážeme, že pro každé dva body x_1, $x_2 \in (a, b)$ platí $f(x_1) = f(x_2)$. Zvolme označení tak, aby $x_1 < x_2$. Pak na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ jsou splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy existuje bod $\xi \in \langle x_1, x_2 \rangle$ tak, že je

$$f(x_2) = f(x_1) + (x_2 - x_1) \cdot f'(\xi).$$

Rovnost $f(x_2) = f(x_1)$ plyne z toho, že derivace ve výše uvedeném vztahu je nulová. □

Důsledek 7.3.2. *Mají-li dvě funkce f, g na (a, b) stejné derivace, tj. $f'(x) = g'(x)$, pak se na tomto intervalu liší jen o konstantu, tj. $\exists C \in \mathbb{R}$ tak, že na (a, b) je $f(x) = g(x) + C$.*

Tímto důsledkem jsou vytvořeny předpoklady k definici pojmu neurčitý integrál. Tedy primitivní funkcí například k funkci $\cos x$ je nejen funkce $\sin x$, ale také každá funkce tvaru $\sin x + C$, kde $C \in \mathbb{R}$. *Neurčitý integrál* jako množina všech primitivních funkcí k funkci f je podle důsledku Lagrangeovy věty množinou všech funkcí tvaru $F(x) + C$, kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f a C je libovolná (integrační) konstanta (viz 10).

Následující věta se týká výpočtu limit typu $\left[\frac{0}{0}\right]$. Podobnou větu lze vyslovit i pro limity typu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a obě pak použít k výpočtu několika dalších typů limit.

Věta 7.3.3 (L'Hospitalovo pravidlo)**.** *Nechť*

1) *funkce f, g mají derivace v $P(a)$, kde $a \in \mathbb{R}^*$,*

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$,

3) *existuje vlastní nebo nevlastní* $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = K$.

Pak existuje i $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a rovná se K.*

Princip důkazu (pro $a \in \mathbb{R}$, $x \to a+$. Podle 2) lze doplnit definici funkcí f, g tak, aby byly spojité v $U(a)$, když položíme $f(a) = g(a) = 0$. Existuje pak interval $\langle a, b\rangle \subset U(a+)$ tak, že obě funkce f, g jsou na něm spojité a na (a, b) mají derivaci. Předpoklady Cauchyovy věty jsou tak splněny nejen na intervalu $\langle a, b\rangle$, ale na každém podintervalu $\langle a, x\rangle \subset \langle a, b\rangle$. Podle Cauchyovy věty pak na každém intervalu $\langle a, x\rangle$ existuje bod ξ tak, že

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Pro $x \to a+$ je též $\xi \to a+$. Podle předpokladu existuje $\lim\limits_{\xi\to a+} \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = K$ a vzhledem k rovnosti $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ má stejnou limitu pro $x \to a+$ i podíl na její levé straně. □

Úloha 7.3.4. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{arctg}(x-2)}{x^2-4}$. $\left[\frac{1}{4}\right]$

Úloha 7.3.5. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. [1]

Úloha 7.3.6. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{6x^2+5x+4}{3x^3+2x^2+1}$. [2]

Z důkazu věty je zřejmé, že l'Hospitalovo pravidlo platí i pro jednostranné limity, což už jsme měli i v úloze 7.3.6.

Úloha 7.3.7. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$. [0]

L'Hospitalovo pravidlo neplatí naopak a to v tomto smyslu: z existence limity podílu funkcí neplyne existence limity podílu jejich derivací nebo, což je totéž, z neexistence limity podílu derivací ještě neplyne neexistence limity podílu funkcí. Například $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin|x|}{|x|} = 1$.

Někdy je potřebné použít l'Hospitalovo pravidlo i vícekrát, případně provádět při výpočtu úpravy, které postup zjednoduší.

Úloha 7.3.8. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{\sin^2 x}$. $\left[\frac{9}{2}\right]$

Při výpočtu limit typu $[0 \cdot \infty]$ součinu funkcí $f \cdot g$ upravíme součin funkcí na podíl $f/(1/g)$ nebo naopak $g/(1/f)$ tak, aby to bylo vhodné pro použití l'Hospitalova pravidla (tedy například funkci logaritmickou je zpravidla nejvhodnější nechat v čitateli).

Úloha 7.3.9. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} x\ln x$. $[0]$

Počítáme-li limitu typu $[\infty - \infty]$ rozdílu funkcí $f - g$, upravíme rozdíl funkcí na podíl:

$$f - g = \frac{1}{\frac{1}{f}} - \frac{1}{\frac{1}{g}} = \frac{\frac{1}{g} - \frac{1}{f}}{\frac{1}{fg}}.$$

Úloha 7.3.10. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{cotg}^2 x - \dfrac{1}{x^2}\right)$.

Řešení. $-\dfrac{2}{3}$; před použitím l'Hospitalova pravidla nejprve získaný zlomek vhodně rozložíme na součin funkcí. □

U limit typu $[0^0]$, $[\infty^0]$ a $[1^\infty]$ pro funkce f^g postupujeme tak, že tuto funkci nejprve upravíme na tvar $\mathrm{e}^{g\cdot\ln f(x)}$, limitu přeneseme do exponentu (podle věty o limitě složené funkce) a v exponentu dostaneme limitu typu $[0 \cdot \infty]$.

Úloha 7.3.11. *Vypočtěte* $\lim\limits_{x\to 0+} x^{\sin x}$. $[1]$

— ∗ —

Kapitola 8

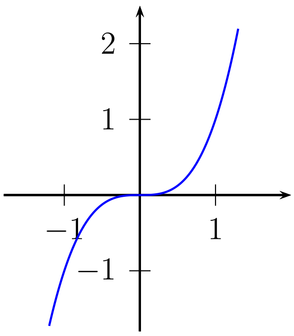
Užití diferenciálního počtu

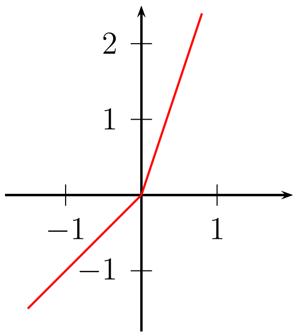
8.1 Monotónnost funkce

Při vyšetřování průběhu funkce se mimo jiné zjišťuje, zda je daná funkce v některém intervalu (resp. v některém bodě) monotónní (definice viz v kap. 2). Velmi vhodným nástrojem pro zjišťování monotónnosti funkce je derivace funkce.

Věta 8.1.1. *Jestliže existuje okolí* $U(x_0) \subset D(f)$ *a* $f'(x_0) > 0$, *pak* f *je rostoucí v bodě* x_0.

Princip důkazu. Ježto $f'(x_0) > 0$, má v jistém okolí $U(x_0)$ stejné znaménko i diferenciální podíl a z toho plyne i tvrzení věty. □





Obrázek 8.1: Grafy funkcí $y = x^3$ a $y = 2x + |x|$.

Tato věta vyjadřuje jen postačující podmínku, neplatí obráceně. Funkce rostoucí v bodě může mít i nulovou derivaci (nebo derivaci nemít). Např. funkce $y = x^3$ je v bodě 0 rostoucí, ale má zde nulovou derivaci. Funkce $y = 2x + |x|$ je v bodě 0 rostoucí, ale derivaci v tomto bodě nemá.

Podobné výsledky platí i pro funkce klesající v bodě a pro zápornou derivaci.

Definice 8.1.2. Říkáme, že x_0 je stacionárním bodem funkce f, právě když $f'(x_0) = 0$.

Ve stacionárním bodě může být funkce rostoucí, klesající nebo v něm nemusí být monotónní.

Věta 8.1.3 (o monotónnosti na intervalu)**.** *Má-li funkce f derivaci na (a, b), pak platí:*

1) Funkce f je na (a, b) neklesající [nerostoucí], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geq 0$ [≤ 0].

2) Funkce f je na (a, b) rostoucí [klesající], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f'(x) \geq 0$ [≤ 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ $f'(x) = 0$.

Princip důkazu (pro funkce neklesající, resp. rostoucí).

(1)/1 Je-li f neklesající na (a, b), je v každém bodě intervalu (a, b) diferenciální podíl nezáporný, tedy i $f'(x) \geq 0$.

(1)/2 Je-li $f'(x) \geq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$, jsou na $\langle x_1, x_2 \rangle$ splněny předpoklady Lagrangeovy věty, tedy $f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1) f'(\xi)$, odkud plyne $f(x_1) \leq f(x_2)$.

(2)/1 Je-li f rostoucí, je podle (1)/1 $f'(x) \geq 0$. Kdyby na nějakém (α, β) platilo $f'(x) = 0$, bylo by zde $f(x) = \mathit{konst.}$, což by byl spor.

(2)/2 Nechť $f'(x) \geq 0$ na (a, b), $x_1 < x_2$ a neexistuje (α, β) …Podle (1)/1 je $f(x_1) \leq f(x_2)$ a podle předpokladu o (α, β) existuje mezi x_1, x_2 bod x' tak, že $f'(x') > 0$, tj funkce f roste v x', a z toho se pomocí okolí bodu x' a definice funkce rostoucí v bodě vyvodí, že $f(x_1) < f(x_2)$.

□

Tuto větu lze rozšířit na uzavřený interval tak, že pro f předpokládáme derivaci na (a, b) a spojitost na $\langle a, b \rangle$.

Úloha 8.1.4. *Vyšetřete intervaly monotónnosti funkce $f : y = x^2 \, \mathrm{e}^{-x}$.*

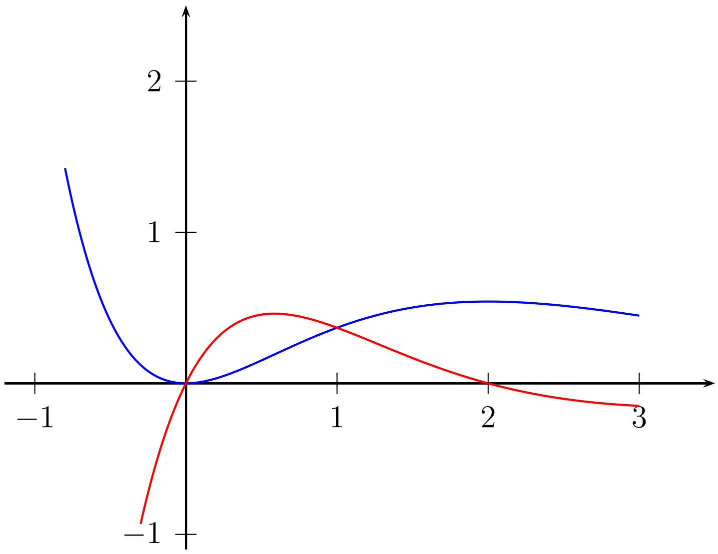
Řešení. $D(f) = \mathbb{R}$. Máme $y' = (2x - x^2)\,\mathrm{e}^{-x} = x(2 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$; ježto $\mathrm{e}^{-x} > 0$, rozdělí se číselná osa body 0 a 2 na intervaly:

(1) na intervalu $(-\infty, 0\rangle$ je $y' \leq 0$, přičemž y' je nulová v jediném bodě, f je klesající,

(2) na intervalu $\langle 0, 2 \rangle$ je $y' \geq 0$, přičemž y' je nulová ve dvou bodech, f je rostoucí,

(3) na intervalu $\langle 2, +\infty)$ je $y' \leq 0$, f je klesající (viz obrázek 8.2 na straně 85).

□



Obrázek 8.2: Grafy funkcí $y = x^2\,\mathrm{e}^{-x}$ a $y' = x(2-x)\,\mathrm{e}^{-x}$ z úlohy 8.1.4.

8.2 Lokální extrémy

V kap. 2 jsou definovány pojmy (*ostré*) *lokální maximum*, (*ostré*) *lokální minimum* — se souhrnným názvem (*ostré*) *lokální extrémy.* V kap. 7 byla odvozena *nutná podmínka existence lokálního extrému*: Má-li funkce f v bodě x_0 lokální extrém a existuje-li $f'(x_0)$, pak $f'(x_0) = 0$. Funkce tedy může mít extrém jen ve stacionárním bodě nebo v bodě, v němž nemá derivaci (jako tomu je např. u funkce $y = |x|$).

Zjišťování lokálních extrémů funkcí má velký význam teoretický i praktický, proto je důležité znát správný postup. Máme několik základních možností.

Postup při určování lokálních extrémů

Najdeme body, v nichž může nastat extrém, tj. body, v nichž je derivace funkce rovna nule (body stacionární) nebo v nichž derivace neexistuje; dále takový bod označíme x_0.

(1) Užití monotónnosti v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $U(x_0) \subset D(f)$. Je-li f rostoucí v $P(x_0\text{-})$ a klesající v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum.

Podobně lze formulovat další případy: ostré lokální minimum, neostré extrémy a případ, kdy extrém neexistuje.

(2) Užití 1. derivace v okolí bodu x_0

Nechť f je spojitá v x_0 a existuje okolí $P(x_0) \subset D(f)$, v němž má funkce f derivaci. Je-li $f'(x) > 0$ v $P(x_0-)$ a $f'(x) < 0$ v $P(x_0+)$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum. Podobně lze formulovat další případy.

(3) Užití 2. derivace v bodě x_0

Nechť f má derivaci v nějakém okolí $U(x_0) \subset D(f)$ a existuje $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) < 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální maximum, je-li $f''(x_0) > 0$, má funkce f v bodě x_0 (ostré) lokální minimum.

Pozor: Pokud $f''(x_0) = 0$, neznamená to, že extrém neexistuje, ale že musíme rozhodnout podle jiného pravidla.

Odvození postupu dle (1) plyne z definice extrému, (2) plyne z (1) užitím vztahu mezi monotónností a znaménkem derivace, (3) plyne z (2) uvážíme-li, že např. vlastnost $f''(x_0) < 0$ říká, že funkce f' je klesající v bodě x_0, a protože $f'(x_0) = 0$, platí v nějakém $P(x_0-)$, že $f'(x) > 0$ a v $P(x_0+)$, že $f'(x_0) < 0$.

Úloha 8.2.1. *Zjistěte extrém funkce $f : y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.*

Řešení. Vypočteme derivaci $y' = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$ a položíme ji rovnu 0; dostáváme stacionární bod $x_0 = 1$. Dále vypočteme $y'' = (x-2)\,\mathrm{e}^{-x}$. Ježto $y''(1) = -\mathrm{e}^{-1} < 0$, má funkce f v bodě 1 lokální maximum. □

(4) Užití Taylorova vzorce

Jestliže funkce f má derivace v $U(x_0)$ a platí $(n > 1)$ $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, pak

(1) pro n sudé existuje v bodě x_0 extrém:

- lokální maximum pro $f^{(n)}(x_0) < 0$,
- lokální minimum pro $f^{(n)}(x_0) > 0$.

(2) pro n liché extrém v bodě x_0 neexistuje.

Tvrzení plyne z toho, že z Taylorova vzorce máme za daných předpokladů $f(x_0 + \Delta x) - f(_0) = \frac{f^{(n)}(x_0+\theta\Delta x)}{n!}\Delta x^n$, přičemž okolí bodu x_0, tedy $U(x_0)$, lze volit tak malé, že $f^{(n)}(x_0 + \theta\Delta x)$ má stejné znaménko jako $f^{(n)}(x_0)$.

Úloha 8.2.2. *Vyšetřete extrém funkce $f : y = x^5$.*

Řešení. Máme $y' = 5x^4$, stacionární bod 0. Dále pak $y'' = 20x^3$, $y''(0) = 0$, $y''' = 60x^2$, $y'''(0) = 0$, $y^{(4)} = 120x$, $y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)} = 120 > 0$. První nenulová derivace je lichého řádu, tedy extrém neexistuje. □

8.3 Největší a nejmenší hodnota funkce na intervalu

Mějme funkci f definovanou a spojitou na intervalu $\langle a, b\rangle$. Podle 2.Weierstrassovy věty nabývá funkce f v některém bodě c_1 své největší hodnoty a v některém bodě c_2 své nejmenší hodnoty. Jiné názvy: *absolutní extrémy, globální extrémy.* Každý z bodů c_1, c_2 přitom může být vnitřním nebo krajním bodem intervalu $\langle a, b\rangle$, viz obr. 9.3.1.

Pokud je c_i vnitřním bodem, je to současně bod, v němž nastává lokání extrém, tedy stacionární bod nebo bod, v němž neexistuje derivace. Z toho pak plyne:

obr. 9.3.1.

Postup při určování největší a nejmenší hodnoty funkce na uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$

(1) Určíme všechny stacionární body a body, v nichž neexistuje derivace a vypočteme v nich funkční hodnoty.

(2) Vypočteme funkční hodnoty v bodech a, b.

(3) Maximum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je největší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$,

(4) minimum množiny všech těchto hodnot funkce z (1) a (2) je nejmenší hodnotou funkce na $\langle a, b\rangle$.

Tedy: není třeba určovat lokální extrémy dle 9.2.

Úloha 8.3.1. *Máme určit největší a nejmenší hodnotu funkce* $f : y = x^3 - 3x + 1$ *na intervalu* $\langle 0, 2\rangle$.

Řešení. $y' = 3x^2 - 3$; f má na $\langle 0, 2\rangle$ jediný stacionární bod 1. Vypočteme $f(1) = -1$ a dále $f(0) = 1$, $f(2) = 3$. Funkce f tedy nabývá největší hodnoty 3 v bodě 2 a nejmenší hodnoty -1 v bodě 1. $\square$

8.4 Konvexnost a konkávnost

Označme $k(u, v) = \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$; je-li f funkce spojitá, je pro $u \neq v$ také funkce $k(u, v)$ spojitá vzhledem k u i vzhledem k v. Geometrický význam: $k(u, v)$ je směrnice sečny grafu funkce f.

Definice 8.4.1. Funkce f se nazývá ***konvexní*** (***konkávní***) na intervalu $(a, b) \Leftrightarrow$ pro každé tři body $x_1, x, x_2 \in (a, b)$, kde $x_1 < x < x_2$, platí $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ $(k(x_1, x) > k(x, x_2))$.

Funkce dle této definice je *ryze konvexní* nebo *konkávní*, při neostrých nerovnostech jde o neryzí vlastnosti.

Úloha 8.4.2. *Doplňte obrázek 9.4.1 (9.4.2), tak aby ilustroval definici funkce konvexní (konkávní).*

Věta 8.4.3 (1.věta o konvexnosti a konkávnosti)**.** *Nechť funkce f má na intervalu (a, b) derivaci f'. Pak funkce f je na (a, b) konvexní (konkávní) $\Leftrightarrow$ je f' na (a, b) rostoucí (klesající).*

Důkaz. 1) Nechť f je konvexní. Zvolme libovolné x_1, $x_2 \in (a, b)$, $x_1 < x_2$; dokážeme, že $f'(x_1) < f'(x_2)$. Mezi x_1 a x_2 zvolme další 3 body tak, aby platilo $x_1 < \bar{x}_1 < x_0 < \bar{x}_2 < x_2$. Pak platí $k(x_1, x_0) < k(x_0, x_2)$ a též $k(x_1, \bar{x}_1) < k(\bar{x}_1, x_0)$, $k(x_0, \bar{x}_2) < k(x_0, \bar{x}_2)$. Přejdeme k limitám: $\lim_{\bar{x}_1 \to x_1+} k(x_1, \bar{x}_1) = f'(x_1+) = f'(x_1)$, $\lim_{\bar{x}_2 \to x_2-} k(\bar{x}_2, x_2) = f'(x_2-) = f'(x_2)$,

$\lim_{\bar{x}_1 \to x_1+} k(\bar{x}_1, x_0) = k(x_1, x_0)$, $\lim_{\bar{x}_2 \to x_2-} k(x_0, \bar{x}_2) = k(x_0, \bar{x}_2) = k(x_0, x_2)$ a z toho

$f'(x_1) \leq k(x_1, x_0) < k(x_0, x_2) < f'(x_2)$.

2) Naopak nechť f'je rostoucí na (a, b) . Uvažujme libovolné dva body $x_1, x_2 \in (a, b)$ a nechť $x \in (x_1, x_2)$. Dokážeme, že $k(x_1, x) < k(x, x_2)$ a to tak, že najdeme taková $\xi_1 < \xi_2$, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$. K tomu použijeme Lagrangeovu větu, podle níž existuje bod $\xi_1 \in \langle x_1, x \rangle$ tak, že $f'(\xi_1) = k(x_1, x)$, a podobně existuje $\xi_2 \in \langle x, x_2 \rangle$ tak, že $f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, přičemž $x_1 < x < x_2$. Proto $k(x_1, x) = f'(\xi_1) < f'(\xi_2) = k(x, x_2)$, funkce je konvexní.

□

Na funkci f' lze nyní použít větu o monotónnosti na intervalu (viz 9.1). Podle ní platí:

Věta 8.4.4 (2. věta o konvexnosti a konkávnosti)**.** *Má-li funkce f druhou derivaci na (a, b), pak tato funkce je na (a, b) konvexní [konkávní], právě když $\forall x \in (a, b)$ je $f''(x) \geq 0$ [≤ 0], přičemž neexistuje interval $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ tak, aby $\forall x \in (\alpha, \beta)$ bylo $f''(x) = 0$.*

8.5 Inflexe a inflexní body

Definice 8.5.1. Říkáme, že funkce f má v bodě x_0 ***inflexi*** $\Leftrightarrow$ má derivaci $f'(x_0)$ a je v levém okolí $U(x_0-)$ konvexní [konkávní] a v pravém okolí $U(x_0+)$ konkávní [konvexní]. Bod $[x_0, f(x_0)]$ roviny se nazývá ***inflexní bod*** funkce f resp. grafu funkce f.

Tedy v inflexním bodě přechází funkce z konvexního průběhu na konkávní nebo naopak. *Inflexní tečna*, tj. tečna ke grafu funkce f v inflexním bodě, má tu vlastnost, že v bodě dotyku graf přechází z jedné poloroviny do druhé. Např. osa x je inflexní tečnou ke grafu funkce $y = x^3$. Tím se inflexní tečna liší od tečen v bodech, které nejsou inflexní.

Věta 8.5.2. *(vztah inflexe a derivace): Má-li funkce f v nějakém okolí $U(x_0)$ derivaci f', pak má v bodě x_0 inflexi $\Leftrightarrow$ má f' v bodě x_0 lokální extrém.*

Důkaz. 1) Nechť f má v bodě x_0 inflexi. Pak nastává jedna z těchto možností:

a) f je v $U(x_0-)$ konvexní (tj. f' je rostoucí) a v $U(x_0+)$ konkávní (tj, f' je klesající), takže f' má v bodě x_0 lokální maximum;

b) f je v $U(x_0-)$ konkávní (tj. f' je klesající) a v $U(x_0+)$ konvexní (tj, f' je rostoucí), takže f' má v bodě x_0 lokální minimum.

2) Má-li f' lokální extrém v bodě x_0, je to buď lokální maximum nebo lokální minimum a podobnými úvahami (proveďte je!) pro levé a pravé okolí dojdeme k existenci inflexe.

□

Věta 8.5.3 (nutná podmínka existence inflexe)**.** *Má-li funkce f v bodě x_0 inflexi a existuje $f''(x_0)$, je $f''(x_0) = 0$.*

Důkaz. Plyne z nutné podmínky existence extrému funkce f'. □

Vztah inflexe a derivace lze dalšími větami specifikovat pro případ existence druhé resp. i třetí derivace.

Věta 8.5.4 ((vztah inflexe a druhé derivace)**.** *Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'' a má-li tato derivace v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$ různá znaménka, má funkce f v bodě x_0 inflexi. Má-li f'' stejné znaménko v $P(x_0-)$ a $P(x_0+)$, pak funkce f v bodě x_0 inflexi nemá.*

Věta 8.5.5 (vztah inflexe a 3. derivace)**.** *Má-li funkce f v nějakém okolí bodu x_0 derivaci f'', platí $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, pak funkce f má v bodě x_0 inflexi.*

Tuto větu bychom mohli rozšířit (podobně jako odpovídající pravidlo pro určování lokálního extrému) i na případ, kdy $f''(x_0) = f'''(x_0) = \cdots = f^{(k-1)}(x_0) = 0$, $f^{(k)}(x_0) \neq 0$. Pro k liché existuje v bodě x_0 inflexe, pro k sudé nikoli.

Úloha 8.5.6. *Stanovte konvexnost, konkávnost a inflexi funkce $y = x\,\mathrm{e}^{-x}$.*

Řešení. Tato funkce má potřebné derivace, vypočteme
$y' = (1 - x)\,\mathrm{e}^{-x}$, $y'' = (x - 2)\,\mathrm{e}^{-x}$, kde $\mathrm{e}^{-x} > 0$.

Pro $x < 2$ je $y'' < 0$, funkce je konkávní, pro $x > 2$ je $y'' > 0$, funkce je konvexní. Pro $x = 2$ má funkce inflexi, inflexní bod je $[2; 2\,\mathrm{e}^{-2}]$. □

8.6 Asymptoty

Asymptoty jsou přímky a představujeme si je jako tečny ke grafu funkce v nekonečnu. Např. souřadnicové osy jsou asymptotami grafu funkce $y = 1/x$. Máme asymptoty dvou druhů a vyslovíme pro ně dvě různé definice, protože to je praktické, i když z hlediska geometrického jde o tentýž jev.

Definice 8.6.1. Přímka $x = c$ se nazývá ***vertikální asymptota*** grafu funkce $f \Leftrightarrow$ funkce f má v bodě c alespoň jednu jednostrannou limitu nevlastní.

Takových asymptot může mít funkce nekonečně mnoho, příkladem je funkce tangens. Kromě toho mohou pro danou funkci existovat ještě nejvýše dvě asymptoty s rovnicemi tvaru $y = kx + q$.

Definice 8.6.2. Přímka $y = kx + q$ se nazývá ***asymptota*** (***se směrnicí***) grafu funkce $f \Leftrightarrow$ pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$ je $\lim[f(x) - kx + q] = 0$.

Asymptoty se směrnicí se zpravidla zjišťují podle následující věty.

Věta 8.6.3 (o výpočtu asymptot). *Přímka $y = kx + q$ je asymptotou grafu funkce $f \Leftrightarrow$ existují limity (pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$) $\lim \frac{f(x)}{x} = k$ a $\lim[f(x) - kx] = q$.*

Důkaz. Všechny dále uvedené limity bereme pro $x \to -\infty$ nebo pro $x \to +\infty$.

1) Nechť přímka $y = kx + q$ je asymptotou. Pak $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$, tedy též $\lim \frac{f(x)-kx-q}{x} = 0$. Ježto $\frac{q}{x} \to 0$, platí $\lim \frac{f(x)}{x} - k = 0$, tedy $\lim \frac{f(x)}{x} = k$. Druhá rovnost je zřejmá, neboť ve vztahu $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$ lze provést rozdělení na dvě limity $\lim[f(x) - kx] - q = 0$.

2) Existují-li naopak limity pro k a pro q, plyne ze vztahu $\lim[f(x) - kx] = q$ definiční vztah $\lim[f(x) - (kx + q)] = 0$.

□

Praktický postup v běžných případech

1) Vyšetříme okolí těch hromadných bodů $D(f)$, které leží v $\mathbb{R} - D(f)$ (body nespojitosti - zejména izolované body množiny $\mathbb{R} - D(f)$ nebo krajní body intervalů, jež jsou součástí $D(f)$). Zjistíme ve kterém z těchto bodů existují alespoň jednostranné nevlastní limity.

2) Je-li $+\infty$ nebo $-\infty$ hromadným bodem $D(f)$, hledáme $\lim f(x)/x$. Jestliže tato limita (nebo obě) existuje, je to směrnice k asymptot, *pokud asymptoty existují.* Dále ještě hledáme $\lim[f(x) - kx]$ s oním k, jež bylo vypočteno v předchozí limitě. Existuje-li tato limita, je to q a asymptota existuje.

Při výpočtu $k = \lim \frac{f(x)}{x}$ lze použít l'Hospitalova pravidla, z něhož $k = \lim f'(x)$. Také tento vztah se často využívá k výpočtu směrnice asymptot (ovšem neexistuje-li $\lim f'(x)$, neznamená to neexistenci asymptot).

Úloha 8.6.4. *Určete asymptoty pro funkci* $y = 2x + \operatorname{arctg} x$.

Řešení. $k = \lim \frac{f(x)}{x} = \lim \left(2 + \frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right) = 2$, neboť v posledním zlomku je funkce v čitateli omezená, takže tento zlomek konverguje k 0. Dále $q = \lim(2x + \operatorname{arctg} x - 2x) =$ Existují tedy 2 asymptoty: $y = 2x - \pi/2$ pro $x \to -\infty$ a $y = 2x + \pi/2$ pro $x \to +\infty$. $\square$

Úloha 8.6.5. *Určete asymptoty pro funkci* $y = x + \sqrt{x}$.

Řešení. Zde je nevlastním hromadným bodem $D(f)$ jen $+\infty$. Počítáme $k = \lim \frac{f(x)}{x} = 1 + \lim \frac{\sqrt{x}}{x} = 1$, $q = \lim (x + \sqrt{x} - x) = +\infty$, asymptota neexistuje. $\square$

8.7 Průběh funkce

O vyšetřování průběhu funkce lze pojednat dvěma způsoby:

- uvést věcně, ze kterých činností se vyšetřování průběhu funkce skládá,
- popsat praktický postup při vyšetřování průběhu funkce.

Dle 1. hlediska uvažujeme tyto složky:

1) Definiční obor, body nespojitosti.
2) Funkční obor, omezenost; nulové body funkce; intervaly, kde je funkce kladná, kde je záporná.
3) Funkční vlastnosti funkce: parita, periodičnost.
4) Limity (jednostranné) v bodech nespojitosti funkce, v krajních bodech definičního oboru, resp. v $-\infty$, $+\infty$.
5) Intervaly monotonnosti (kde funkce roste, kde klesá) nebo konstantnosti.
6) Lokální extrémy funkce.
7) Intervaly konvexnosti a konkávnosti.
8) Inflexe, inflexní body grafu funkce.
9) Asymptoty grafu funkce.
10) Sestrojení grafu funkce.

Praktický postup při vyšetřování průběhu funkce sleduje v běžném případě i myšlenku správného a přehledného záznamu výsledků a mezivýsledků do tabulky. Proto postupujeme takto:

A. Zjistíme údaje potřebné pro sestavení tabulky, sestavíme tabulku a zaznamenáme do ní dosud známé údaje o funkci,

B. postupně zjišťujeme další vlastnosti funkce a zaznamenáváme je do tabulky,

C. doplníme údaje potřebné pro sestrojení grafu a sestrojíme graf funkce.

Lze tak doporučit toto pořadí prací:

A1. Provedeme 1 (určíme $D(f)$ a body nespojitosti).

A2. Provedeme 3 (stanovení parity a periodičnosti), tj. zjistíme, zda bychom mohli zmenšit rozsah vyšetřování funkce tím, že se omezíme např. jen na interval $\langle 0, +\infty)$ nebo jen na jednu periodu u funkce periodické.

A3. Vypočteme 1.derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme stacionární body. K nim přidáme ty body z $D(f)$, v nichž 1. derivace neexistuje. Má-li funkce lokální extrém, pak nastane v některém z těchto bodů.

A4. Vypočteme 2. derivaci, položíme ji rovnu 0 a řešením získáme body, v nichž může mít funkce inflexi. K nim přidáme ty body z $D(f')$, v nichž 2. derivace neexistuje.

A5. Sestavíme tabulku, kde v horizontálním záhlaví zaznamenáme rozčlenění číselné osy s ohledem na A1, A2, A3, A4; ve vertikálním záhlaví jsou řádky pro x, y, y', y'', a pro záznam vlastností funkce f. Do tabulky přeneseme údaje již zjištěné.

B1. Užitím znaménka 1. derivace určíme 5 (intervaly monotonnosti).

B2. Na základě B1 zjistíme 6 (lokální extrémy), včetně funkčních hodnot v těchto bodech.

B3. Užitím znaménka 2. derivace určíme 7 (konvexnost a konkávnost).

B4. Na základě B3 zjistíme 8 (inflexi), včetně funkčních hodnot v těchto bodech a hodnot 1. derivací.

B5. Určíme 9 (asymptoty).

B6. Určíme 4 (limity), pokud je to po B5 ještě třeba.

B7. Určíme 2 (funkční obor, nulové body, znaménka funkce).

C1. Podle potřeby doplníme např. průsečík grafu funkce s osou y, hodnoty funkce v dalších bodech $D(f)$, případně i hodnoty derivací (připojíme k tabulce jako dodatek).

C2. Provedeme bod 10 (sestrojíme graf funkce).

Úloha 8.7.1. *Sestavte tabulku pro vyšetření průběhu funkce $y = x + \frac{1}{x}$.*

Řešení. $D(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, funkce je lichá, tj. graf bude souměrný podle počátku.

$y' = 1 - \frac{1}{x^2}$; $y' = 0 \Rightarrow x \in \{-1; 1\}$ (stacionární body); $y'' = \frac{2}{x^3} \neq 0$. Sestavíme tabulku (např. jen) pro interval $\langle 0, +\infty)$.

x	0	$\to 0^+$	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$	$\to +\infty$
y	n.d.	$\to +\infty$	—	2	—	$\to +\infty$
y'	n.d.	$\to -\infty$	< 0	0	> 0	$\to +\infty$
y''	n.d.	—	> 0	> 0	> 0	—
funkce	n.d.	$\to +\infty$	klesá	lok.min.	roste	$\to +\infty$
		asymptota $x = 0$	konvexní			asymptota $y = x$

Inflexní body neexistují. □

8.8 Užití extrémů funkcí

Na výpočet extrémů vede řada praktických úloh.

Úloha 8.8.1. *Ze čtvercového listu papíru o straně a má být po vystřižení čtverečků v rozích složena krabice o maximálním objemu. Vypočtěte stranu čtverečků, jež mají být v rozích vystřiženy a rozměry výsledné krabice (obr. 9.8.1).*

Řešení. $V = (a - 2x)^2 x$, $V' = 12x^2 - 8ax + a^2 \Rightarrow x_1 = \frac{a}{6}$, $x_2 = \frac{a}{2}$ (nevyhovuje praktické úloze) ; rozměry krabice jsou $\frac{2}{3}a \times \frac{2}{3}a \times \frac{1}{6}a$, výška je rovna čtvrtině šířky čtvercového dna. □

Úloha 8.8.2. *Pracoviště je v konstantní vzdálenosti a od průmětu světla na vodorovnou rovinu. Při jaké výšce h světla (viz obr. 9.8.2) je osvětlení pracoviště maximální?*

Řešení. Intenzita osvětlení závisí na vstupních podmínkách takto: $I = c\frac{\sin\varphi}{r^2}$, kde $\sin\varphi = \frac{h}{r}$ a $r = \sqrt{h^2 + a^2}$, takže $I = I(h)$; po dosazení $I = c\frac{h}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$. $I' = c\frac{a^2 - 2h^2}{(h^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} (= 0) \Rightarrow h = \frac{a}{\sqrt{2}} \approx 0,7a$. □

Úloha 8.8.3. *Výkon Peltonova kola je $P = k \cdot u \cdot (v - u)$, kde u je obvodová rychlost Peltonova kola a v je rychlost vodního paprsku. Při jaké rychlosti u je výkon Peltonovy turbiny maximální?*

Řešení. $P = P(u)$, $P' = kv - 2ku (= 0) \Rightarrow u = \frac{v}{2}$. □

Úloha 8.8.4. *Určete rozměry konzerv tvaru rotačního válce o daném objemu V tak, aby se při jejich výrobě spotřebovalo co nejmenší množství plechu.*

Řešení. Hledá se minimum funkce $S = 2\pi xv + 2\pi x^2$, kde x je poloměr dna konzervy a v výška konzervy, za podmínky, že $V = \pi x^2 v$ je zadané (tedy konstantní). Po dosazení za v z této podmínky máme $S = \frac{2V}{x} + 2\pi x^2$, odkud $S' = -\frac{2V}{x^2} + 4\pi x$. Z rovnice $S' = 0$ máme $x_0 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. Odsud je $v_0 = \frac{V}{\pi x_0^2} = \cdots = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2x_0$: výška konzervy je rovna průměru dna. □

– ∗ –

Kapitola 9

Metody integrace pro funkce jedné proměnné

9.1 Základní vzorce

Základní problém: k dané funkci f stanovit množinu všech jejích primitivních funkcí F, tedy „neurčitý integrál“ $F + C$ funkce f.

Chceme-li zjistit primitivní funkci k dané (elementární) funkci f, máme dva problémy:

1) zda pro danou funkci f primitivní funkce vůbec existuje,

2) pokud ano, zda ji lze vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí.

Existence: V následující kapitole 10 uvidíme, že každá funkce f spojitá na intervalu J má zde primitivní funkci.

Vyjádření primitivní funkce elementárními funkcemi: Je možné jen pro vybrané typy integrovaných funkcí, z nichž některé jsou probrány v této kapitole spolu s příslušnými metodami výpočtu primitivních funkcí.

Je-li tedy f funkce elementární, pak primitivní funkce není nutně také elementární; přitom funkce f může mít i poměrně jednoduché analytické vyjádření. Např. $\int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int \sin x^2\,\mathrm{d}x$, $\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}$ nejsou funkce elementární, tj. nelze je vyjádřit konečným vzorcem pomocí elementárních funkcí. (Vyjadřujeme je zpravidla pomocí mocninných řad.)

V kapitole 6 jsme se setkali se sadou základních vzorců pro derivace elementárních funkcí. K nim dostáváme ihned odpovídající vzorce pro stanovení primitivních funkcí. Např. $\sin x$ je primitivní funkce k funkci $\cos x$, neboť $(\sin x)' = \cos x$, neurčitým integrálem k funkci $\cos x$ je množina funkcí $\sin x + C$, kde C je (libovolná) *integrační konstanta.* Zapisujeme

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C, \quad \text{obecně} \quad \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

kde F je jedna z primitivních funkcí k funkci f. Operaci, při níž k dané funkci stanovujeme primitivní funkci nebo neurčitý integrál, nazveme *integrace*. Výraz $f(x)\,\mathrm{d}x$ za znakem integrace se nazývá *integrand*, říkáme, že danou funkci f integrujeme.

Ze vzorců pro derivace plynou tyto vzorce pro integraci:

Funkce:	Funkce primitivní:	Funkce:	Funkce primitivní:
$x^m \quad (m \in \mathbb{R},\ m \neq -1)$	$\dfrac{x^{m+1}}{m+1}$	$\dfrac{1}{x}$	$\ln x$
e^x	e^x	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a}$
$\cos x$	$\sin x$	$\sin x$	$-\cos x$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$	$-\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\operatorname{cotg} x$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\operatorname{th} x$	$-\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\operatorname{coth} x$
$\dfrac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$	$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$

Z věty o derivaci součtu (rozdílu) plyne: Je-li F primitivní funkce k funkci f a G primitivní funkce k funkci g, je $F+G$ $(F-G)$ primitivní funkce k funkci $f+g$ $(f-g)$. Podobně platí: Je-li F primitivní funkce k funkci f, pak kF (kde k je konstanta) je primitivní funkce k funkci kf.

9.2 Integrace užitím substitucí

Základem jsou dvě věty o substitucích; v obou případech nechť je funkce $f(u)$ definována na intervalu J a funkce φ $(u = \varphi(x))$ nechť je definována na intervalu I, kde $\varphi(I) \subset J$, přičemž existuje φ'.

Věta 9.2.1 (1.věta o substituci)**.** *Je-li F primitivní funkcí k funkci f na J, pak složená funkce $F \circ \varphi$ je primitivní funkcí k funkci $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$ na I.*

Důkaz. $[(F \circ \varphi)(x)]' = F'_u(u) \cdot \varphi'(x) = f(u) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x).$ □

V příkladech na použití 1. věty o substituci má tedy integrovaná funkce tvar součinu složené funkce a derivace vnitřní funkce.

Úloha 9.2.2. *Vypočtěte* $I = \int \sin x \cos x \, \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \begin{bmatrix} \sin x = u \\ \cos x \, \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{bmatrix} = \int u \, \mathrm{d}u = \frac{u^2}{2} + C = \frac{1}{2} \sin^2 x + C.$

Zde bylo $f(u) = u$, $\varphi(x) = \sin x$. □

Úloha 9.2.3. *Vypočtěte* $I = \int \sin^3 x \, \mathrm{d}x$.

Řešení.

$I = \sin^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \int (1 - \cos^2 x) \sin x \, \mathrm{d}x = \int \sin x \, \mathrm{d}x - \int \cos^2 x \sin x \, \mathrm{d}x = \cdots .$

První z integrálů je tabulkový, ve druhém položíme $\cos x = u$. □

Vybrané typické příklady na použití 1. věty o substituci:

$$I = \int \sin^m x \cos x \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\ln^m x}{x} \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\operatorname{arctg}^m x}{1 + x^2} \, \mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{e}^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x, \ldots$$

Úloha 9.2.4. *Vyřešte speciální případ integrace složené funkce, kde vnitřní funkce je lineární.*

Řešení. Je-li vnitřní funkce lineární, dostáváme z 1. věty o substituci

$$\int f(ax + b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax + b) + C,$$

takže například

$$\int \mathrm{e}^{2x+3} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \mathrm{e}^{2x+3} + C, \quad \int \cos \frac{x}{3} \, \mathrm{d}x = 3 \sin \frac{x}{3} + C.$$

□

Úloha 9.2.5. *Vyřešte speciální případ integrace složené funkce ve tvaru zlomku, kde čitatel je derivací jmenovatele.*

Řešení. Pro $f(x) \neq 0$: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{d}x = \ln |f(x)| + C$, takže například

$\int \operatorname{tg} x \, \mathrm{d}x = -\ln|\cos x| + C$, $\int \frac{2x - 1}{x^2 - x + 3} \, \mathrm{d}x = \ln(x^2 - x + 3) + C$, atd. □

Věta 9.2.6 (2. věta o substituci)**.** *Nechť* $\varphi' \neq 0$ *na* I, $\varphi(I) = J$. *Je-li funkce* F *funkcí primitivní k funkci* $f \circ \varphi \cdot \varphi'$ *na* I, *pak funkce* $F \circ \varphi^{-1}$ *je funkce primitivní k funkci* f *na* J *(kde* φ^{-1} *je funkce inverzní k* φ*).*

Důkaz. Nechť $x = \varphi(t)$, tj. $t = \varphi^{-1}(x)$. Pak $[(F \circ \varphi^{-1})(x)]' = [(F(\varphi^{-1}(x))]' = F_t'(t) \cdot [\varphi^{-1}(x)]' = f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) \cdot (1/\varphi'(t)) = f(x)$. □

Úloha 9.2.7. *Užitím 2. věty o substituci počítejte* $I = \sin\sqrt{x}\ \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \begin{bmatrix} x = t^2 \\ \mathrm{d}x = 2t\ \mathrm{d}t \end{bmatrix} = 2\int t \sin t\ \mathrm{d}t$, a dále se postupuje metodou per partes dle 9.3. □

Podle 2. věty o substituci se postupuje v mnoha speciálních případech, např. při integraci některých iracionálních funkcí (D.2) nebo u goniometrických a hyperbolických substitucí (D.5).

9.3 Metoda per partes

Věta 9.3.1. *Nechť funkce f, g jsou definovány a mají derivaci na intervalu J. Jestliže Ψ je funkce primitivní k $f \cdot g'$ na J, pak $\Phi = f \cdot g - \Psi$ je primitivní funkcí k funkci $f' \cdot g$ na J.*

Důkaz. Věta o per partes plyne ze vzorce pro derivaci součinu: $\Phi' = (f \cdot g - \Psi)' = f' \cdot g + f \cdot g' - \Psi' = f' \cdot g$. □

Jiný přístup: Pro $u = f(x)$, $v = g(x)$ je $(uv)' = u'v + uv'$, tj. $u'v = (uv)' - uv'$, takže $\int u'v\ \mathrm{d}x = uv - \int uv'\ \mathrm{d}x$.

Úloha 9.3.2. *Vypočtěte* $I = \int x \cos x\ \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \cos x & v = \sin x \end{bmatrix} = x \sin x - \int \sin x\ \mathrm{d}x = x \sin x + \cos x + C$. □

Úloha 9.3.3. *Vypočtěte* $I = \int x^2 \sin x\ \mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \begin{bmatrix} u = x^2 & u' = 2x \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = -x^2 \cos x + 2\int x \cos x\ \mathrm{d}x = \cdots$ znovu se použije metoda per partes, viz předchozí příklad. □

Typické příklady na metodu per partes:

$$\int x^n \cos x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \sin x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \ln x\ \mathrm{d}x,\ \int x^n \operatorname{arctg} x\ \mathrm{d}x,\ \ldots$$

Zvláštní případy použití metody per partes

(1) *Výpočet integrálů*

$$I_c = \int e^{ax} \cos bx \, dx, \quad I_s = \int e^{ax} \sin bx \, dx$$

(budeme počítat primitivní funkce pro $C = 0$).

Řešení. V integrálu I_c se použije dvěma způsoby metoda per partes: pro $u' = e^{ax}$, $v = \cos bx$ a pak pro $u' = \cos bx$, $v = e^{ax}$. Tím dostaneme soustavu

$$I_c = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b} I_s, \quad I_c = \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} I_s,$$

jejímž řešením vyjde

$$I_c = \frac{b \sin bx + a \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}, \quad I_s = \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax}.$$

□

(2) *Rekurentní vzorec pro integrál* $I_n = \int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^n}$, $n \geq 2$.

Řešení. V integrálu I_m, kde $m \geq 1$, položíme $u = \frac{1}{(a^2 + x^2)^n}$, $v' = 1$ a dostaneme $I_m = \frac{x}{(a^2 + x^2)^m} + 2mI_m - 2ma^2 I_{m+1}$, odkud vyjádříme I_{m+1}. Položíme-li pak $m = n - 1$, dostaneme

$$I_n = \frac{1}{2(n-1)a^2} \frac{x}{(a^2 + x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} I_{n-1}.$$

□

— ∗ —

Kapitola 10

Riemannův určitý integrál

10.1 Definice Riemannova integrálu

Riemannův integrál lze definovat v podstatě dvojím způsobem: užitím (Cauchyových) integrálních součtů nebo pomocí dolních a horních integrálů.

Užití integrálních součtů

Uvažujeme funkci f omezenou na intervalu $\langle a, b\rangle$, kde $a < b$. Dále uvedeme pojmy používané při definici integrálu:

- *Dělení intervalu* (označíme D) — každá konečná posloupnost bodů x_0, $x_1, \dots, x_n$ (zvaných *dělicí*), kde $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.
- *Element dělení* $\Delta_i = \langle x_{i-1},\, x_i\rangle$, $i = 1, \dots, n$, jeho délka je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.
- *Norma dělení* $\nu(D) = \max \Delta x_i$, stručné označení ν.

Definice 10.1.1 (Riemannova určitého integrálu)**.** Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Ke každému dělení D vytvoříme integrální součet

$$\sigma(f, D) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \quad \text{kde} \quad \xi_i \quad \text{je libovolný bod z elementu} \quad \Delta_i.$$

Řekneme, že číslo I je Riemannovým (určitým) integrálem funkce f na $\langle a, b\rangle$, právě když $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tak, že pro všechna dělení D, pro něž $\nu(D) < \delta$, a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i dělení, platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$.

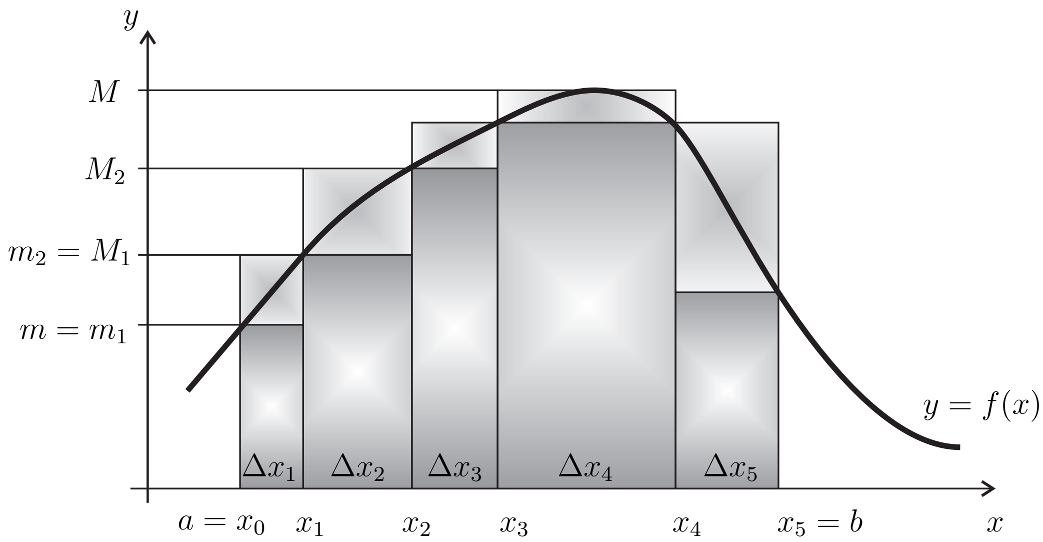
Označení: $I = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Funkce f se pak nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, $\langle a, b\rangle$ je *obor integrace*, čísla a, b *dolní* resp. *horní mez integrace*, x *integrační proměnná*.

Znak $\int\limits_a^b$ je symbol pro součet od a do b, $f(x)$ pro $f(\xi_i)$, $\mathrm{d}x$ pro Δx_i. Název *Riemannův integrál* používáme hlavně pro jeho odlišení od jiných typů integrálů. Není-li třeba zdůrazňovat (Riemannovu) metodu definice integrálu, lze používat jen historický název *určitý integrál.* Vedle *funkce Riemannovsky integrovatelná* říkáme též *integrovatelná* (*integrace schopná*) *podle Riemanna.* Množinu všech funkcí integrovatelných na $\langle a, b\rangle$ označíme $R(\langle a, b\rangle)$, a proto můžeme používat stručný zápis $f \in R(\langle a, b\rangle)$. Zvláště si uvědomíme, že Riemannův integrál funkce $f \in R(\langle a, b\rangle)$ je nějaké reálné číslo.

Geometrický význam součinu $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ pro $f > 0$:

– obsah obdélníku o stranách Δx_i, $f(\xi_i)$.



Obrázek 10.1:

Geometrický význam integrálního součtu $\sigma(f, D)$:

– přibližný obsah tzv. *základního obrazce*, tj. křivočarého lichoběžníku, jehož hranice leží na přímkách $x = a$, $x = b$, na ose x a na grafu funkce f.

Geometrický význam určitého integrálu:

– obsah základního obrazce.

Uvedenou definici Riemannova integrálu lze vyslovit i pomocí pojmu limita. Nejprve však pojednejme o zjemnění dělení.

Definice 10.1.2. Dělení D' nazveme *zjemnění dělení D*, právě když každý dělicí bod dělení D je dělicím bodem i dělení D'.

Poznámka 10.1.3. (1) Ke každým dvěma dělením existuje jejich společné zjemnění, i „nejhrubší“ společné zjemnění. Množina všech dělení intervalu $\langle a, b\rangle$ tvoří svaz.

(2) Jestliže postupně zjemňujeme dělení, tak z toho neplyne, že $\nu(D) \to 0$, dokonce se přitom ν nemusí ani zmenšovat (proč?).

Druhou část výše uvedené definice lze pak vyslovit takto:

Definice 10.1.4. Řekneme, že integrální součty $\sigma(f, D)$ mají limitu $I \in \mathbb{R}$ a píšeme $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sigma(f, D) = I$, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists$ dělení D_0 tak, že pro všechna jeho zjemnění D a pro libovolnou volbu bodů ξ_i v elementech Δ_i platí $|\sigma(f, D) - I| < \varepsilon$. Číslo I pak nazýváme Riemannův integrál funkce f, funkce f se nazývá *Riemannovsky integrovatelná*, atd.

Dolní a horní integrál

Mějme funkci f omezenou na $\langle a, b\rangle$ a libovolné dělení D. Označme pro $x \in \langle x_{i-1}, x_i\rangle$: $m_i = \inf f(x)$, $M_i = \sup f(x)$.

Vytvoříme součty:

$$s(f, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i, \quad S(f, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i,$$

které nazveme *dolní* resp. *horní integrální součet* příslušný k funkci f a dělení D.

Vlastnosti:

(1) Libovolný dolní integrální součet není větší než libovolný horní integrální součet (příslušný třeba i k jinému dělení).

(2) Množina všech dolních integrálních součtů je (shora) omezená, množina všech horních integrálních součtů je (zdola) omezená: Jestliže pro $x \in \langle a, b\rangle$ označíme $m = \inf f(x)$, $M = \sup f(x)$, platí

$$m(b-a) \le s(f, D) \le S(f, D) \le M(b-a).$$

Proto existuje supremum množiny všech dolních a infimum množiny všech horních integrálních součtů.

Definice 10.1.5. Číslo $\mathrm{I}_* f = \sup\limits_D s(f, D)$ ($\mathrm{I}^* f = \inf\limits_D S(f, D)$) nazýváme *dolní* (*horní*) *Riemannův integrál.*

Zřejmě platí $s(f, D) \le \mathrm{I}_* f \le \mathrm{I}^* f \le S(f, D)$.

Úloha 10.1.6. *Najděte dolní i horní integrál Dirichletovy funkce na intervalu $\langle 0, 1\rangle$.*

Řešení. Máme

$$s(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \Delta x_i = 0, \quad \mathrm{I}_* \chi = 0,$$

$$S(\chi, D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_i = 1, \quad \mathrm{I}^* \chi = 1.$$

□

Definice 10.1.7. Nechť f je funkce omezená na $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že funkce f je na $\langle a, b\rangle$ Riemannovsky integrovatelná, právě když $\mathrm{I}_* f = \mathrm{I}^* f$.

Společnou hodnotu $\mathrm{I}f$ dolního a horního integrálu nazveme Riemannův integrál funkce f na $\langle a, b\rangle$ a píšeme

$$\mathrm{I}f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dá se dokázat ekvivalence obou definic Riemannova integrálu.

Geometrický význam dolního součtu

– obsah jistého mnohoúhelníku vepsaného do základního obrazce,

geometrický význam horního součtu

– obsah jistého mnohoúhelníku, do nějž je základní obrazec vepsán (nakreslete obrázek).

V souladu s definicí míry rovinného obrazce je geometrickým významem Riemannova integrálu obsah (míra) základního obrazce.

I v tomto případě lze využít pojmu limita. K tomu si uvědomíme ještě jednu vlastnost horních a dolních součtů:

(3) Zjemníme-li dělení, pak dolní integrální součet se nezmenší a horní integrální součet se nezvětší.

Důsledek 10.1.8. *Pro každou normální posloupnost $\{D_n\}$ dělení, tj. kde $\nu(D_n) \to 0$ a přitom každý další člen je zjemněním předchozího, je odpovídající posloupnost $\{s(f, D_n)\}$ neklesající a $\{S(f, D_n)\}$ nerostoucí.*

Integrovatelnost funkcí

Z teoretických důvodů (tj. pro použití v důkazech vlastností funkcí integrovatelných) se formuluje následující nutná a postačující podmínka integrovatelnosti, v níž se vyskytuje pojem oscilace funkce f na intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle : \omega_i = M_i - m_i$.

Věta 10.1.9 (Nutná a postačující podmínka integrovatelnosti podle Riemanna)**.** *Funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$, právě když je $\lim\limits_{\nu(D)\to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = 0$, tj. $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall D$ platí:*

$$\nu(D) < \delta \quad \Longrightarrow \quad \left| \sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i \right| < \varepsilon.$$

Princip důkazu. Dá se ukázat, že

$$\mathrm{I}_* f = \lim_{\nu(D)\to 0} s(f,D), \quad \mathrm{I}^* f = \lim_{\nu(D)\to 0} S(f,D)$$

(definujte pomocí ε a δ) a dále, že

$$s(f,D) = \inf_{\xi} \sigma(f,D), \quad S(f,D) = \sup_{\xi} \sigma(f,D).$$

Důkaz pak spočívá na vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = S(f,D) - s(f,D).$$

□

Z praktických důvodů byla formulována kritéria (tj. jednoduché postačující podmínky) integrovatelnosti podle Riemanna. Dá se dokázat, že do množiny $R(\langle a,b\rangle)$ patří tyto třídy funkcí:

- třída všech funkcí *spojitých* na $\langle a,b\rangle$,
- třída všech funkcí *spojitých po částech* na $\langle a,b\rangle$,
- třída všech funkcí *monotónních a omezených* na $\langle a,b\rangle$.

V množině $R(\langle a,b\rangle)$ však existují i funkce, které nesplňují žádnou z uvedených podmínek. Jestliže se funkce g liší od funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$ v konečném počtu bodů a nabývá v nich konečných hodnot, pak i $g \in R(\langle a,b\rangle)$ a oba integrály jsou si rovny.

10.2 Newtonův vzorec

Věta 10.2.1 (Newtonův vzorec)**.** *Nechť funkce f je integrovatelná na $\langle a, b\rangle$ a má tu (zobecněnou) primitivní funkci F. Pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F(x)\Big]_{x=a}^b = F(b) - F(a).$$

Princip důkazu. Volíme takové dělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, aby uvnitř každého elementu (x_{i-1}, x_i) měla funkce F derivaci. Platí:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n}\Big[F(x_i) - f(x_{i-1}\Big].$$

Na rozdíly $F(x_i) - F(x_{i-1})$ použijeme Lagrangeovu větu, podle níž na každém intervalu (x_{i-1}, x_i) existuje takový bod ξ_i, že

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i.$$

Ježto f je integrovatelná, můžeme v integrálních součtech vzít právě tato ξ_i a tvrzení plyne z definice Riemannova integrálu. □

Newtonův vzorec je základní metodou výpočtu Riemannova integrálu.

Úloha 10.2.2. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \Big[\sin x\Big]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\dfrac{\pi}{2} - \sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 - (-1) = 2.$ □

Úloha 10.2.3. *Vypočtěte* $I = \displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x}$.

Řešení. Nejprve určíme primitivní funkci: $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln^2 x} = \text{(substitucí)} = -\frac{1}{\ln x} + C.$
Pak $I = \left[-\dfrac{1}{\ln x}\right]_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^2} = -\dfrac{1}{2} - \left(\dfrac{1}{1}\right) = \dfrac{1}{2}.$ □

10.3 Základní vlastnosti určitého integrálu

Hodnota integrálu závisí jednak na integrované funkci (integrandu) a jednak na intervalu integrování. Dostáváme tak několik skupin vlastností integrovatelných funkcí a integrálu.

Vlastnosti závislé na integrované funkci

Věta 10.3.1 (lineární vlastnosti)**.**

(1) Je-li $f \in R(\langle a, b\rangle)$*,* $k \in \mathbb{R}$*, pak* $kf \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) Je-li $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$*, pak* $(f+g) \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí*

$$\int_a^b \big[f(x) + g(x)\big]\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu. Použijí se vlastnosti integrálních součtů. □

Věta 10.3.2 (vlastnosti vyjádřené nerovnostmi)**.** *Nechť* $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$*.*

(3) Je-li $f(x) \geq 0$ *na* $\langle a, b\rangle$*, pak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$.

(4) Je-li $f(x) \leq g(x)$ *na* $\langle a, b\rangle$*, pak* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

(5) $|f(x)| \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí* $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

Princip důkazu. (3) plyne z definice, (4) ze (3) a (5) ze (4), neboť $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$. □

Věta 10.3.3 (o součinu funkcí)**.** *Je-li* $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$*, pak i* $fg \in R(\langle a, b\rangle)$*.*

Princip důkazu. Důkaz je založen na odhadu

$$|f(x'')g(x'') - f(x')g(x')| \leq |f(x'') - f(x')| \cdot L + |g(x'') - g(x')| \cdot K,$$

kde K, L jsou konstanty, pro něž $|f(x)| \leq K$, $|g(x)| \leq L$. □

Vlastnosti závislé na intervalu integrování

Věta 10.3.4 (aditivita integrálu)**.** *Nechť* $a < c < b$*. Pak* $f \in R(\langle a, b\rangle)$*, právě když* $f \in R(\langle a, c\rangle) \wedge f \in R(\langle c, b\rangle)$*. Přitom platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Princip důkazu. Plyne z vlastností integrálních součtů, když bod c vezmeme za dělicí bod. □

Tuto vlastnost lze rozšířit na konečný počet bodů $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{n} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 10.3.5. *Vypočtěte* $I = \int_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 = \cdots$ □

Rozšíření definice Riemannova integrálu pro případ, že $a \geq b$:

Pro $a = b$ definujeme $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

Pro $a > b$ definujeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

Pak pro *libovolné* uspořádání bodů a, b, c platí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$, pokud je funkce f integrovatelná v nejširším intervalu určeném body a, b, c.

10.4 Výpočet určitých integrálů

K výpočtu používáme zpravidla Newtonova vzorce, tj. najdeme primitivní funkci a pak použijeme Newtonův vzorec, viz úlohy 1 a 2 v kapitole 10.2.

Výpočet užitím substituce nebo per partes

Máme-li při výpočtu primitivní funkce použít substituci, pak můžeme postupovat přímo jako v 10.2, úloha 2, nebo můžeme provést *transformaci mezí.*

Věta 10.4.1. *Je-li* $f \in R(\langle a, b\rangle)$, φ *má spojitou derivaci na* $\langle \alpha, \beta\rangle$, *přičemž* $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *pak platí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f\big[\varphi(t)\big]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 10.4.2. *Vypočtěte* $I = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \left[\begin{array}{cc} x = \sin t & x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ \mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t & x = 1 \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array}\right] = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t + \sin 2t\right]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$. □

Podobně pro per partes platí

Věta 10.4.3. *Jsou-li u', v' spojité na $\langle a, b\rangle$, pak*

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{x=a}^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Úloha 10.4.4. *Vypočtěte* $I = \int_0^\pi x \sin x \,\mathrm{d}x$.

Řešení.

$$I = \begin{bmatrix} u = x & u' = 1 \\ v' = \sin x & v = -\cos x \end{bmatrix} = [-\cos x]_{x=0}^\pi + \int_0^\pi \cos x \,\mathrm{d}x = \cdots = \pi.$$

□

Integrál komplexní funkce reálné proměnné

Pojem určitého integrálu lze jednoduše rozšířit i na komplexní funkce reálné proměnné. Nechť $f_1, f_2 \in R(\langle a, b\rangle)$ a $f = f_1 + i f_2$. Pak definujeme

$$\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f_1(t)\,\mathrm{d}t + i\int_\alpha^\beta f_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 10.4.5. *Rozhodněte, které vlastnosti integrálů reálných funkcí zůstávají zachovány i pro integrály komplexních funkcí.*

Úloha 10.4.6. *Vypočtěte* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^{it}\,\mathrm{d}t$.

Řešení. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Big(\cos t + i \sin t\Big)\,\mathrm{d}t = [\sin t - i\cos t]_{t=0}^{\frac{\pi}{2}} = 1 + i.$ □

— ∗ —

Kapitola 11

Užití Riemannova integrálu

11.1 Přibližné metody výpočtu Riemannova integrálu

Existuje více přibližných metod, kterými lze provádět výpočet Riemannova integrálu. Označení „přibližná metoda“ není žádnou degradací příslušné metody, neboť zejména s využitím výpočetní techniky lze takto provádět výpočet Riemannova integrálu prakticky s libovolnou přesností. Takže v aplikacích má tento postup stejnou hodnotu a rozsáhlejší uplatnění než klasický výpočet užitím Newtonova vzorce, protože — jak bylo naznačeno již v kapitole ?? — primitivní funkcí ve tvaru pro použití Newtonova vzorce lze získat jen v některých speciálních případech.

Předpokládáme-li $f(x) \geq 0$ na $\langle a, b\rangle$, jde při výpočtu Riemannova integrálu o výpočet obsahu základního obrazce, viz ??

Metoda obdélníková

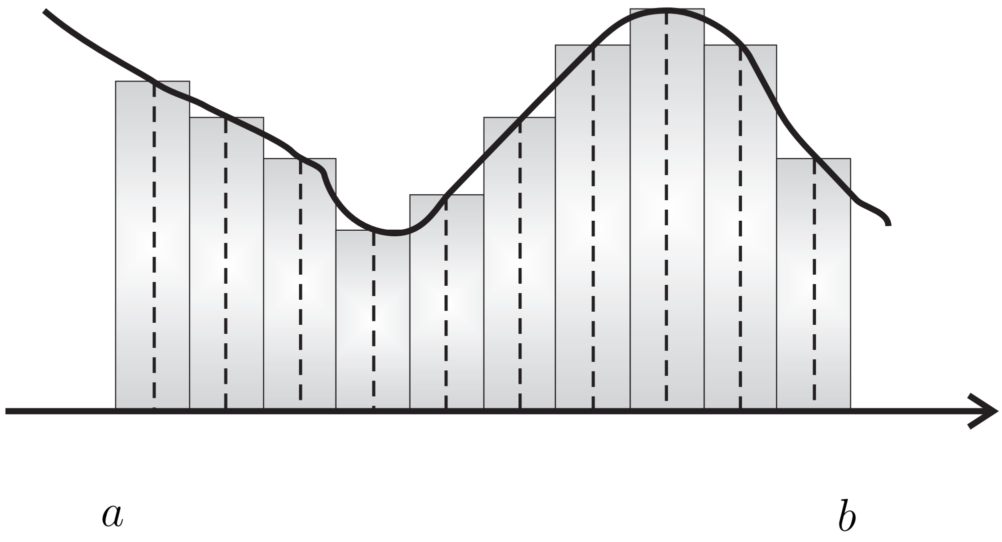
Princip této metody spočívá v tom, že určitý integrál nahradíme vhodným integrálním součtem (tj. s dostatečně jemným dělením a s vhodnými body ξ_i v elementech dělení, viz obr. 11.1).

Zpravidla volíme dělení na n stejných elementů, tedy délka jednoho elementu (tzv. *krok* h) je

$$h = \Delta x_i = \frac{b-a}{n},$$

za ξ_i volíme středy elementů. Obsah základního obrazce pokládáme přibližně roven integrálnímu součtu, tedy součtu obsahů obdélníků o stranách $f(\xi_i)$ a h. Pro obdélníkovou metodu tak máme vzorec

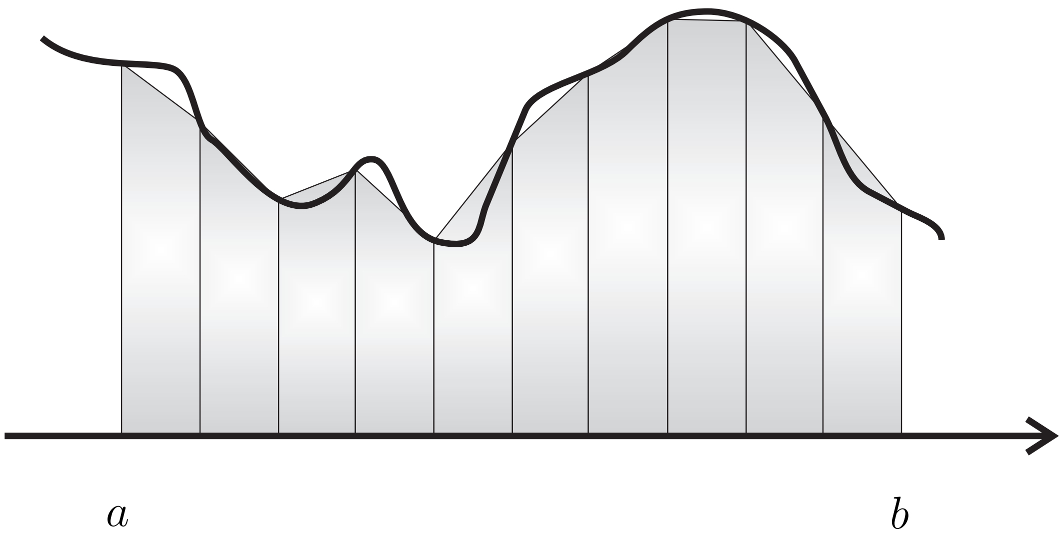
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i).$$



Obrázek 11.1: Obdélníková metoda

Chybu metody lze stanovit např. užitím horních součtů a dolních součtů (viz 11.1) což je zvlášť jednoduché pro monotónní funkce.

Metoda lichoběžníková



Obrázek 11.2: Lichoběžníková metoda

Princip této metody spočívá v tom, interval $\langle a, b \rangle$ rozdělíme na n stejných elementů a funkci nahradíme lomenou čarou (viz obr. 11.2). Obsah základního obrazce pak přibližně nahradíme součtem obsahů elementárních lichoběžníků se základnami $f(x_{i-1}), f(x_i)$ a s výškou $h = \dfrac{b-a}{n}$. Tedy

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{n}\Big[f(x_{i-1}) + f(x_i)\Big] = h\left[\frac{f(x_0)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{f(x_n)}{2}\right].$$

Metoda Simpsonova

Interval $\langle a, b\rangle$ rozdělíme na sudý počet $2n$ elementů o šířce $\dfrac{b-a}{2n}$, z nichž vytvoříme dvojice elementů o šířce $h = \dfrac{b-a}{n}$. V každé dvojici pak funkci f nahradíme kvadratickou funkcí (která je dané funkci f rovna na krajích a uprostřed těchto „dvojelementů"), takže k výpočtu obsahu vzniklých „křivočarých lichoběžníků" lze využít Simpsonova vzorce.

$$P = \frac{1}{6}\sum_{i=0}^{n-1}(x_{2i+2} - x_{2i})\Big[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})\Big].$$

Provedeme-li sčítání přes všechny elementy, dostaneme výslednou formuli pro Simpsonovu metodu:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}\Big\{\Big[f(x_0) + f(x_{2n})\Big] + 2\Big[f(x_2) + f(x_4) + \cdots + f(x_{2n-2})\Big] + \\ +4\Big[f(x_1) + f(x_3) + \cdots + f(x_{2n-1})\Big]\Big\}.$$

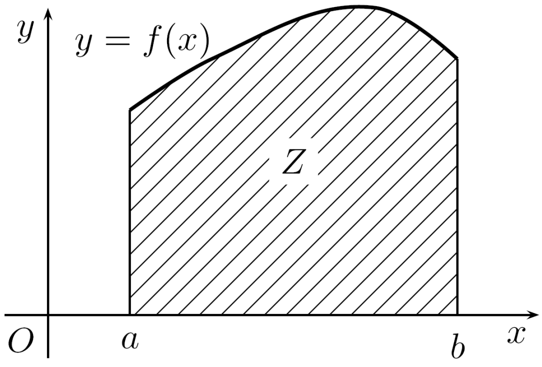
11.2 Užití určitého integrálu v geometrii

Obsah rovinného obrazce

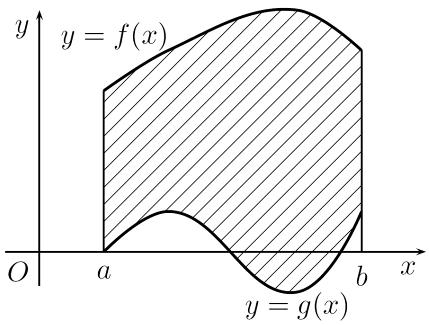
Uvažujme dále jen spojité funkce. Z geometrického významu Riemannova integrálu plyne, že pro funkci $f(x) \geq 0$ definovanou na $\langle a, b\rangle$ je obsah křivočarého lichoběžníku (základního obrazce) roven

$$P = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Pozor! Je-li $f(x) < 0$ (tato část grafu funkce je pod osou x), dostaneme obsah se záporným znaménkem. Pokud bychom použili předchozí vzorec na funkci, která na $\langle a, b\rangle$ střídá znaménka, dostaneme rozdíl obsahů částí základního obrazce nad osou x a pod osou x, tedy výsledek, který nás zpravidla nezajímá. (Interpretujte takto např. fakt, že $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$.)



Obrázek 11.3: Obsah rovinného obrazce — křivočarý lichoběžník



Obrázek 11.4: Obsah rovinného obrazce — normalita vzhledem k x.

Platí-li na intervalu $\langle a, b\rangle$ vztah $0 \leq g(x) \leq f(x)$, je přímkami $x = a$, $x = b$ a grafy obou funkcí ohraničena oblast *normální vzhledem k x* a její obsah se vypočte vzorcem

$$P = \int_a^b \Big[f(x) - g(x)\Big]\,\mathrm{d}x.$$

Je-li rovinný obrazec ohraničen křivkou danou parametricky $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, pak

$$P = \left|\int_\alpha^\beta \psi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t\right|.$$

Obsah obrazce ohraničeného křivkami v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$ od φ_1 do φ_2 je dán vzorcem

$$P = \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \rho^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi.$$

K tomuto vzorci dojdeme využitím vztahu

$$\Delta P = \frac{1}{2}\rho(\varphi)\rho(\varphi + \Delta\varphi)\Delta\varphi.$$

Úloha 11.2.1. *Vypočtěte obsah kruhu o poloměru r.*

Řešení. a) Z rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 = r^2$$

vyjádříme horní polokružnici

$$f(x) = y = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r, r\rangle,$$

dolní polokružnici

$$g(x) = y = -\sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in \langle -r, r\rangle,$$

a použijeme je do druhého z výše uvedených vzorců:

$$\begin{aligned} P &= \int_{-r}^{r}\left(\sqrt{r^2 - x^2} - \left(-\sqrt{r^2 - x^2}\right)\right)\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} x = r\sin\varphi \\ \mathrm{d}x = r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{bmatrix} = \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2r|\cos\varphi| r\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = r^2\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\Big(1 + \cos 2\varphi\Big)\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= r^2\left[\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right]_{\varphi=-\pi/2}^{\pi/2} = \pi r^2. \end{aligned}$$

b) V parametrickém vyjádření máme $x = r\cos t$, $y = r\sin t$, $t \in \langle 0, 2\pi\rangle$ a odsud

$$P = \left|-\int_0^{2\pi} r^2\sin^2 t\,\mathrm{d}t\right| = \cdots.$$

c) Nejjednodušší je zde výpočet užitím polárních souřadnic, neboť kružnice o středu O a poloměru r má rovnici $\rho = r$ pro $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Proto

$$P = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\varphi = \cdots = \pi r^2.$$

$\square$

Objem tělesa

Pomocí Riemannova integrálu funkce jedné proměnné lze počítat objemy ve dvou případech.

a) Těleso leží mezi rovinami $x = a$, $x = b$ a známe funkci $P(x)$, jejíž hodnoty znamenají obsah řezu tělesa rovinou kolmou k ose x.

Element objemu je

$$\Delta V = P(x) \cdot \Delta x, \quad \text{tj.} \quad \mathrm{d}V = P(x) \cdot \mathrm{d}x,$$

a objem tělesa je

$$V = \int_a^b P(x) \, \mathrm{d}x.$$

b) Rotační těleso, kde osou rotace je osa x a které vznikne rotací křivočarého lichoběžníku ohraničeného grafem funkce f na intervalu $\langle a, b \rangle$. Zde je řezem kruh o obsahu $\pi [f(x)]^2$ a platí

$$V = \pi \int_a^b \Big[f(x) \Big]^2 \, \mathrm{d}x = \pi \int_a^b y^2 \, \mathrm{d}x.$$

Úloha 11.2.2. *Určete objem koule o poloměru r.*

Řešení. Koule vznikne rotací grafu funkce $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ kolem osy x a proto

$$V = \pi \int_{-r}^{r} \left(r^2 - x^2 \right) \mathrm{d}x = \cdots = \frac{4}{3} \pi r^3.$$

$\square$

Délka křivky

Nechť je křivka l dána parametricky:

$$\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t), \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle, \\ z &= \chi(t), \end{aligned}$$

kde $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\chi'(t)$ jsou spojité a $\forall t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ platí

$$[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2 > 0.$$

Křivka l je prostorová nebo rovinná (to když je některá z funkcí φ, ψ, χ konstantní).

Uvažujme libovolné dělení D intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$:

$$\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = \beta,$$

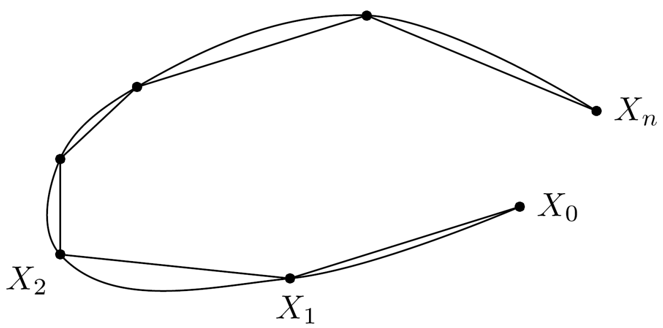
označme dělicí body křivky l:

$$X_i = [\varphi(t_i), \psi(t_i), \chi(t_i)], \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

a dále délku lomené čáry $X_0 X_1 \ldots X_n$ označme

$$\sigma(l, D) = \sum_{i=1}^{n} \Big| X_{i-1} X_i \Big|.$$

Délka křivky l se pak definuje:



Obrázek 11.5: Délka křivky

$$s(l) = \sup_D \sigma(l, D).$$

Uvažujme dále rovinnou křivku. Délka jedné strany lomené čáry je

$$\Delta s = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} \Delta t,$$

takže

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}.$$

Pro $\Delta t \to 0$ pak máme

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2},$$

tedy

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

Ježto $\sigma(l, D) = \sum_{i=1}^{n} \Delta s_i$, dá se vyvodit, že $s(l) = \int_\alpha^\beta \mathrm{d}s$. Odsud

$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Úloha 11.2.3. *Vypočtěte délku kružnice o poloměru r.*

Řešení. Kružnici vyjádříme v parametrickém tvaru

$$\begin{aligned} x &= r\cos t, \\ y &= r\sin t, \end{aligned} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Vypočteme

$$\mathrm{d}s = \cdots = r\,\mathrm{d}t, \quad \text{takže} \quad s(l) = \int_0^{2\pi} r\,\mathrm{d}t = 2\pi r.$$

□

Je-li křivka dána explicitně rovnicí $y = f(x)$, je to vlastně zvláštní případ parametrického zadání $x = x$, $y = f(x)$, $x \in \langle a, b \rangle$. Z toho plyne

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}t, \quad \text{takže} \quad s(l) = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Je-li křivka dána v polárních souřadnicích $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle$, platí $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, odkud

$$\mathrm{d}x = (\rho'\cos\varphi - \rho\sin\varphi)\,\mathrm{d}\varphi, \qquad \mathrm{d}y = (\rho'\sin\varphi + \rho\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi,$$

takže

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Nakonec tedy

$$s(l) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\left[\rho(\varphi)\right]^2 + \left[\rho'(\varphi)\right]^2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Pro prostorovou křivku zadanou parametricky máme

$$s(l) = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 + \left[\chi'(t)\right]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Povrch rotační plochy

Jde o plochy vzniklé rotací křivky l kolem osy x. Element povrchu plochy je

$$\Delta S = 2\pi y \Delta s,$$

takže diferenciál povrchu plochy je

$$\mathrm{d}S = 2\pi y \,\mathrm{d}s.$$

Je-li křivka l dána parametricky:

$$\begin{array}{l} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{array} \quad t \in \langle \alpha, \beta \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2} \,\mathrm{d}t,$$

je-li křivka l dána explicitně:

$$y = f(x), \quad x \in \langle a, b \rangle,$$

je

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left[f'(x)\right]^2} \,\mathrm{d}x.$$

11.3 Užití určitého integrálu ve fyzice

Hmotnost rovinné desky

Mějme spojitou kladnou funkci f a uvažujme rovinnou desku ve tvaru základního obrazce (křivočarého lichoběžníku) pro $x \in \langle a, b \rangle$; nechť σ je plošná konstantní hustota materiálu.

Je-li deska homogenní, tj. $\sigma =$ konst., je hmotnost této desky rovna

$$m = \sigma \int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Je-li hustota desky funkcí x, je

$$\int_a^b \sigma(x) f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Těžiště rovinné desky

Nyní uvažujme jeden element desky, který má šířku $\Delta x (= \mathrm{d}x)$.

Statický moment tohoto elementu vzhledem k ose x je

$$\mathrm{d}M_x = (y\,\mathrm{d}x) \cdot \sigma \cdot \frac{1}{2}y$$

(hmotnost elementu násobená ramenem síly), podobně

$$\mathrm{d}M_y = (y\,\mathrm{d}x) \cdot \sigma \cdot x.$$

Statický moment celé (homogenní) desky vzhledem k osám je

$$M_x = \frac{1}{2}\sigma \int_a^b y^2\,\mathrm{d}x, \quad M_y = \sigma \int_a^b xy\,\mathrm{d}x.$$

Těžiště $T[\xi, \eta]$ rovinné desky je bod, který má vzhledem k souřadnicovým osám stejný statický moment jako celá deska, pokud za jeho hmotnost považujeme hmotnost m celé desky.

Proto

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

a z toho (po zkrácení σ)

$$\xi = \frac{\displaystyle\int_a^b xy\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y\,\mathrm{d}x}, \qquad \eta = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b y^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b y\,\mathrm{d}x}.$$

Pokud má deska tvar oblasti normální vzhledem k ose x, tj. je-li

$$a \le x \le b, \quad y_1 \le y \le y_2,$$

pak lze podobně odvodit vzorce pro souřadnice těžiště; dostaneme je z předchozích záměnou $y_2 - y_1$ za y (ve jmenovatelích obou zlomků a v čitateli prvního zlomku) a $y_2^2 - y_1^2$ za y^2 (v čitateli druhého zlomku).

Hmotnost křivky

Uvažujme rovinnou homogenní křivku danou parametricky s konstantní délkovou hustotou σ. Pak

$$m = \sigma \int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Těžiště křivky

Při odvození vzorců se postupuje podobně jako u těžiště rovinné desky. Je zde

$$\mathrm{d}M_x = \sigma y\,\mathrm{d}s, \qquad \mathrm{d}M_y = \sigma x\,\mathrm{d}s,$$

tedy

$$M_x = \sigma \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$M_y = \sigma \int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z rovností

$$m\xi = M_y, \quad m\eta = M_x$$

pak plyne, že rovinná homogenní křivka zadaná parametricky má těžiště $T[\xi, \eta]$, kde

$$\xi = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \varphi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}, \qquad \eta = \frac{\displaystyle\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{\big[\varphi'(t)\big]^2 + \big[\psi'(t)\big]^2}\,\mathrm{d}t}.$$

Vidíme, že těžiště homogenní rovinné desky ani těžiště homogenní křivky nezávisí na hustotě.

– * –

Příloha A

Číselná osa, supremum a infimum

A.1 Základní číselné množiny

Uvedeme si přehled základních číselných množin a jejich označení. Uvažují se zejména tyto číselné množiny:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$ je množina všech *přirozených* čísel.

  Přirozená čísla se používají např. jako pořadová čísla, třeba při zápisu členů posloupnosti: $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$.

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots, n, ...\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$

  je pro některé autory také množinou všech *přirozených* čísel a zapisuje se jimi především počet prvků neprázdných množin.

- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ je množina všech *celých* čísel.

  Celá čísla se používají např. pro zápisy vztahující se k periodičnosti funkcí; např. funkce $y = \operatorname{cotg} x$ není definována pro $x = k\pi$, kde $k \in \mathbb{Z}$ je libovolné (celé) číslo.

- $\mathbb{Q}$ — množina všech zlomků $\left\{\frac{k}{n},\ \text{kde } k \in \mathbb{Z} \text{ a } n \in \mathbb{N}\right\}$ je množinou všech čísel *racionálních.*

  Používá se např. při konstrukci některých méně obvyklých matematických objektů (viz dále). Množina $\mathbb{Q}$ je na číselné ose hustě uspořádána, mezi každými dvěma racionálními čísly leží další racionální číslo (např. jejich aritmeticky průměr); též mezi každými dvěma reálnými čísly leží racionální číslo. Desetinný rozvoj racionálních čísel je ukončený nebo periodický, dostaneme jej ze zlomku k/n dělením. Obrácený postup je již náročnější.

Úloha A.1.1. *Číslo $a = 1{,}5\overline{72}$ převeďte na obyčejný zlomek.*

První způsob řešení. Periodická část desetinného rozvoje čísla a je vlastně geometrická řada, tedy:

$$a = 1,5 + \frac{72}{10^3} + \frac{72}{10^5} + \frac{72}{10^7} + \cdots = 1,5 + \frac{72}{10^3}\frac{1}{1-\frac{1}{100}} = \cdots = \frac{173}{110}.$$

□

Druhý způsob řešení. Využijeme nekonečného periodického opakování:

$$a = 1,5\overline{72},$$
$$100a = 157,2\overline{72},$$

odkud po odečtení je

$$100a - a = 99a = 157,2\overline{72} - 1,5\overline{72} = 155,7,$$

tedy $a = \frac{1557}{990} = \frac{173}{110}$. □

- $\mathbb{R}$ — množina všech čísel *reálných*, je pro základní kurs matematické analýzy základní číselnou množinou (pokud není řečeno jinak, budeme rozumět pod pojmem číslo vždy číslo reálné). Dostaneme ji tak, že vhodným způsobem zavedeme iracionální čísla.

  Reálná čísla zobrazujeme na číselné (reálné) ose: je to přímka, na níž zvolíme bod O jako obraz čísla 0 (počátek číselné osy) a bod J jako obraz čísla 1, a pomocí těchto dvou bodů pak na ní zobrazujeme všechna reálná čísla; body na číselné ose označujeme zpravidla přímo zobrazovanými čísly.

Při rozšiřování pojmu *číslo* z Q na R vznikají dvě otázky:

- zda existuje potřeba iracionálních čísel (a jak je zavést),
- zda zobrazení množiny R na číselnou osu je bijekce, tj. zda i každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla.

Věta A.1.2. *Neexistuje racionální číslo, jehož druhá mocnina by byla rovna 2.*

Důkaz (sporem). Předpokládejme, že není splněno tvrzení věty, že tedy existuje $r \in \mathbb{Q} : r^2 = 2$. Číslo r je zřejmě kladné; vyjádříme je jako zlomek v základním tvaru $r = \frac{p}{q}$, tedy p, q jsou čísla nesoudělná a platí $rq = p$. Tuto rovnost umocníme: $r^2q^2 = p^2$, tj. $2q^2 = p^2 \Rightarrow p^2$ je sudé, tedy i p je sudé, což zapíšeme $p = 2k \Rightarrow 2q^2 = 4k^2 \Rightarrow q^2 = 2k^2 \Rightarrow q^2$ je sudé $\Rightarrow q$ je sudé $\Rightarrow$ zlomek $\frac{p}{q}$ lze krátit dvěma, a to je spor s předpokladem, že tento zlomek je v základním tvaru. □

Bez iracionálních čísel (tj. v množině $\mathbb{Q}$) bychom tak např. nedovedli změřit úhlopříčku jednotkového čtverce (neměla by délku). Existuje tedy potřeba čísel, která nejsou racionální a která jsme nazvali iracionální.

Logika rozšiřování číselných oborů říká, že nový druh čísel zavádíme pomocí čísel již dříve definovaných. Při zavádění čísel reálných (tedy vlastně iracionálních, jen ta jsou nová) lze postupovat tak, že definujeme tzv. *řez* v množině Q jako každý rozklad množiny Q na dvě třídy, dolní a horní, kde tedy každé racionální číslo patří právě do jedné z těchto tříd a každé číslo z horní třídy je větší než každé číslo z dolní třídy. Iracionální číslo pak ztotožníme s takovým řezem, kde v dolní třídě není největší prvek a v horní třídě není prvek nejmenší. Např. číslo $\sqrt{2}$ je dáno řezem v $\mathbb{Q}$, kde do dolní třídy patří všechna čísla záporná a ta x z nezáporných, pro něž je $x^2 < 2$, do horní třídy patří všechny zbývající racionální čísla.

- Množinu všech *iracionálních* čísel označíme $\mathbb{Q}'$.

  Platí:
  $$\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset \quad \text{a} \quad \mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'.$$
  Všimněme si dekadického rozvoje: racionální čísla mají dekadický rozvoj ukončený nebo periodický, iracionální čísla mají svůj dekadický rozvoj neukončený a neperiodický (pro iracionální čísla často známe jen konečný počet míst jejich dekadického rozvoje (např. pro číslo π)), ale není to pravidlo.

Úloha A.1.3. *Napište dekadický rozvoj takového iracionálního čísla, u něhož dovedeme jednoduše určit číslici na libovolném místě rozvoje.*

Poznámka A.1.4. Důležitá cesta k poznání množiny $\mathbb{Q}'$ vede přes *mohutnosti množin*. Víme, že množiny $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, a $\mathbb{Q}$ jsou spočetné (prvky těchto množin lze uspořádat do posloupnosti), zatímco množina $\mathbb{R}$ (a tedy i $\mathbb{Q}'$) spočetná není; říkáme, že $\mathbb{R}$ má *mohutnost kontinua*.

- $\mathcal{C}$ — množina všech čísel *komplexních*; komplexní čísla zobrazujeme v Gaussově rovině.

Pro uvedené číselné množiny platí:
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathcal{C}.$$

A.2 Vlastnosti číselných množin

O relacích a operacích v číselných množinách a o jejich přirozeném uspořádání pojednává podrobně algebra. Avšak i v matematické analýze se zabýváme mnoha významnými číselnými množinami. Při vyšetřování číselných množin se zabýváme jejich vlastnostmi, o nichž dále pojednáme.

Definice A.2.1. Množina M se nazývá ***shora omezená*** $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}$ tak, že $\forall x \in M$ platí $x \leq L$. Toto číslo L se nazývá ***horní odhad*** (resp. horní závora).

Množina M se nazývá ***zdola omezená*** $\Leftrightarrow \exists K \in R$tak, že $\forall x \in M$ platí $x \geq K$. Toto číslo K se nazývá ***dolní odhad*** (resp. dolní závora).

Množina M se nazývá ***omezená*** $\Leftrightarrow$ je omezená shora i zdola.

Úloha A.2.2. *Kolik horních (dolních) odhadů má číselná množina? Vyjádřete, co znamená, že daná množina M není omezená shora, zdola, že není omezená.Co znamená, že číslo B není horním odhadem dané množiny?*

Pokud některý horní odhad množiny M patří do množiny M, pak jej nazýváme největší prvek množiny M a označujeme jej $\max M$. Podobně nejmenší prvek množiny M (definujte) označujeme $\min M$.

Úloha A.2.3. *Určete největší a nejmenší prvek množiny*

$$M_1 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\right\}, \quad M_2 = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{3}{4}, \dots\right\}, \quad M_3 = \left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}.$$

Řešení. Množina M_1 má největší a nemá nejmenší prvek, M_2 nemá největší ani nejmenší prvek, M_3 má prvek největší i nejmenší. □

K nejdůležitějším číselným množinám patří *intervaly.*

Definice A.2.4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, definujeme

uzavřený interval $\langle a, b\rangle = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$,

otevřený interval $(a, b) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$,

a podobně $\langle a, b)$ a $(a, b\rangle$.

Všechny tyto intervaly mají délku $b - a$.

Definice A.2.5. Množinu $\langle a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$ nazýváme **neomezený interval**. Podobně $(a, +\infty)$, $(-\infty, b\rangle$, $(-\infty, b)$.

Množinu $\mathbb{R}$ zapisujeme též jako $(-\infty, +\infty)$.

Někdy uvažujeme též *degenerované intervaly*: $\langle a, a\rangle = \{a\}$, $(a, a) = \emptyset$ (prázdná množina). Pojmem interval budeme však dále vždy rozumět nedegenerovaný interval.

Definice A.2.6. Absolutní hodnota čísla $a \in \mathbb{R}$ se označuje $|a|$ a je definována takto:

$$\forall a \in \mathbb{R} : |a| = \begin{cases} a & \text{pro } a \geq 0, \\ -a & \text{pro } a < 0. \end{cases}$$

Věta A.2.7 (vlastnosti absolutní hodnoty)**.** $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *platí*

1. $|a| \geq 0$*, přičemž* $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$*,*

2. $|-a| = |a|$*,*

3. $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(trojúhelníkovou nerovnost),*

4. $|a-b| \geq |a| - |b|$*,*

5. $|ab| = |a| \cdot |b|$*,*

6. pro $b \neq 0$ *je* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

Vlastnost 3 můžeme zobecnit (důkaz matematickou indukcí):
(3') $\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall a_i \in \mathbb{R} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$, nebo zkráceně

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

Geometrický význam absolutní hodnoty: $|a|$ značí vzdálenost obrazu čísla a od počátku číselné osy, $|a-b|$ $(= |b-a|)$ vzdálenost obrazů čísel a,b na číselné ose.

Úloha A.2.8. *Řešte nerovnice a rovnici:*

a) $|x-3| < 2$*,*

b) $2|x+2| - 3|x| - 2x \geq 4$*,*

c) $-3 - \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{2}|x+1| - \dfrac{3}{4}|x-2| = 0.$

A.3 Supremum a infimum

Definice A.3.1. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\beta \in \mathbb{R}$ nazýváme **supremum** množiny M a píšeme $\beta = \sup M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \leq \beta$,

(2) $\forall \beta\prime < \beta \exists x' \in M : x' > \beta\prime$.

Vlastnost (1) znamená, že β je horní odhad, vlastnost (2) říká, že β je ze všech horních odhadů nejmenší, tedy: $\sup M$ je *nejmenší horní odhad* (závora) množiny M. Z definice ovšem nijak neplyne, že takový nejmenší horní odhad existuje.

Definice A.3.2. Nechť $M \subset \mathbb{R}$, $M \neq \emptyset$. Číslo $\alpha \in \mathbb{R}$ nazýváme **infimum** množiny M a píšeme $\alpha = \inf M$, právě když má tyto dvě vlastnosti:

(1) $\forall x \in M : x \geq \alpha$,

(2) $\forall \alpha\prime > \alpha \exists x' \in M : x' < \alpha\prime$.

Vlastnost (1) znamená, že α je dolní odhad, vlastnost (2) říká, že α je ze všech dolních odhadů největší, tedy: $\inf M$ je *největší dolní odhad* (závora) množiny M. Z definice opět nijak neplyne, že takový největší dolní odhad existuje.

Úloha A.3.3. *Určete* $\sup M$ *a* $\inf M$ *pro množinu* $M = \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

Důkaz. Platí $\sup M = 1$, neboť všechny prvky množiny M jsou pravé zlomky a jsou tedy menší než 1; jestliže však vezmeme libovolné číslo $r < 1$, existuje vždy v M prvek $\frac{n}{n+1}$, který je větší než r. Dále $\inf M = \frac{1}{2}$, neboť žádný prvek M není menší než $\frac{1}{2}$, a když zvolíme libovolné číslo $s > \frac{1}{2}$, pak vždy právě pro prvek $\frac{1}{2}$ platí $\frac{1}{2} < s$. Přitom $\sup M$ není a $\inf M$ je prvkem zadané množiny M. $\square$

Tedy: supremum a infimum množiny mohou, ale nemusí být prvky této množiny. Pokud $\sup M$ je prvkem množiny M, je jejím největším prvkem; podobně pro $\inf M$. Také naopak, pokud má M největší prvek, je to současně $\sup M$; podobně pro nejmenší prvek.

Věta A.3.4 (o existenci suprema a infima)**.** *1) Každá neprázdná shora omezená množina reálných čísel má supremum.*

2) Každá neprázdná zdola omezená množina reálných čísel má infimum.

Tuto větu budeme považovat za axiom vyjadřující základní vlastnost číselné osy. Tedy: existuje bijekce množiny $\mathbb{R}$ na číselnou osu — každé reálné číslo lze zobrazit na číselné ose a každý bod číselné osy je obrazem nějakého reálného čísla. Říkáme též: *číselná osa je spojitá.* Pojmy „číslo“ a „bod číselné osy“ považujeme za synonyma a říkáme např. „bod x_0“ místo „číslo x_0“ apod.

Pojmy supremum a infimum a věta o existenci suprema a infima jsou pro matematickou analýzu velmi důležité. Hrají podstatnou roli v řadě důkazů (viz např. důkaz Věty A.4.5 o vložených intervalech) a při definici dalších důležitých matematických pojmů.

Reálná čísla a realita

Matematika svými prostředky modeluje realitu a přitom používá metody abstrakce: abstrahuje od mnoha vlastností reálných objektů (které mohou být pro realitu velmi významné) a ponechává jen ty, které upotřebí při vytváření matematických modelů. Vytváří tak různé abstraktní objekty, jako je bod, čtverec, číslo, funkce, řada ad. Tyto abstraktní modely jsou velmi vhodné pro popis a studium reality, ale přesto nesmíme zaměňovat model a realitu. V určitých případech se naše reálné představy a zkušenosti dostávají do rozporu s některými matematicky zcela přesně definovanými pojmy a vlastnostmi. Např. v reálném životě není nekonečno, takže některé jeho vlastnosti odporují našim praktickým zkušenostem, třeba to, že nekonečná množina je ekvivalentní s některou svou pravou částí; např. množina všech lichých přirozených čísel „má týž počet prvků" (tj. stejnou mohutnost) jako množina $\mathbb{N}$. Podobně na základě zkušeností z reálného světa je nepředstavitelné, že $\mathbb{Q}'$ má větší mohutnost než $\mathbb{Q}$ (že iracionálních čísel „je více" než čísel racionálních. Naše zkušenost říká, že když vedle sebe jsou umístěny nějaké objekty, tak mezer mezi nimi je tak nějak stejně jako objektů (plaňkový plot), ale u čísel racionálních a iracionálních je to úplně a nepředstavitelně jinak. Mezi každými dvěma čísly racionálními je alespoň jedno číslo iracionální a mezi každými dvěma čísly iracionálními je alespoň jedno číslo racionální, přičemž těch iracionálních mezi dvěma racionálními je množina mohutnosti kontinua, zatímco racionálních mezi dvěma iracionálními je jen spočetná množina. Definice iracionálních čísel, ať už použijeme jakoukoli metodu, vytváří jen matematický model a nikoli realitu. Spojitost číselné osy, která se skládá z racionálních a iracionálních bodů, si nelze představit; snad i proto, že v reálném světě je to jinak, tam neexistuje žádná přímka a pohodu číselné osy jako dobře fungujícího matematického modelu narušují různé fyzikální částice.

A.4 Několik vět o reálných číslech a číselných množinách

Věta A.4.1 (o aritmetickém a geometrickém průměru)**.** *Jsou-li a, b libovolná reálná nezáporná čísla, pak jejich aritmetický průměr ($\frac{a+b}{2}$) je větší nebo roven jejich průměru geometrickému ($\sqrt{ab}$), přičemž rovnost průměrů nastává právě při rovnosti obou čísel a, b.*

Princip důkazu. Je tu vhodný důkaz *přímý syntetický*, přičemž se vyjde z platné nerovnosti $\sqrt{a} - \sqrt{b} \geq 0$, jejíž úpravou dostaneme tvrzení. □

Úloha A.4.2. *Všimněte si slovní formulace věty. Přepište ji do formy převážně symbolické a do formy zcela symbolické.*

Věta A.4.3 (Bernoulliova nerovnost)**.** $\forall h \in \mathbb{R}$ *,* $h > -1$*,* $h \neq 0$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*,* $n \geq 2$ *platí*

$$V(n): \quad (1+h)^n > 1 + nh.$$

Princip důkazu. Matematickou indukcí v 1. kroku dokazujeme $V(2) : (1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, a ve druhém kroku dokazujeme implikaci $V(n) \Rightarrow V(n+1)$ a to tak, že ve $V(n)$ násobíme obě strany nerovnosti výrazem $(1+h)$ a pak na pravé straně vynecháme člen nh^2. □

Bernoulliova nerovnost se používá např. při některých důkazech vlastností posloupností.

Věta A.4.4 (o rovnosti reálných čísel)**.** *Nechť p, $q \in \mathbb{R}$. Jestliže $\forall \varepsilon > 0$ platí $|p - q| < \varepsilon$, pak $p = q$.*

Důkaz (sporem). Kdyby $p \neq q$, bylo by $|p - q| > 0$. Zvolíme-li $\varepsilon = |p - q|$, dostáváme, že $|p - q| < \varepsilon$ a současně $|p - q| = \varepsilon$, což dává spor. Proto $p = q$. □

Tato jednoduchá věta usnadňuje některé důkazy, např. důkaz následující věty.

Věta A.4.5 (o vložených intervalech)**.** *Nechť $\{J_n\}$ je posloupnost omezených uzavřených intervalů $J_n = \langle a_n, b_n \rangle$ takových, že $J_1 \supset J_2 \supset J_3 \supset \cdots$. Pak existuje bod x_0, který leží ve všech intervalech J_n, $n \in \mathbb{N}$. Jestliže navíc $\forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $|J_n| < \varepsilon$, je takový bod x_0 jediný.*

Princip důkazu. Uvažujeme množinu A všech levých krajních bodů a_n intervalů J_n a množinu B jejich pravých krajních bodů b_m; pro všechna $m, n \in \mathbb{N}$ platí $a_n < b_m$. Podle věty o existenci suprema tedy existuje $\alpha = \sup A$, pro něž $\alpha \leq b_m$; podobně existuje $\beta = \inf B$ a pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $a_n \leq \alpha \leq \beta \leq b_n$, tedy $\forall n \in \mathbb{N} : \langle \alpha, \beta \rangle \subset \langle a_n, b_n \rangle$. Pro důkaz tvrzení věty stačí volit $x_0 \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Je-li interval $\langle \alpha, \beta \rangle$ degenerovaný, dostáváme x_0 jednoznačně. To nastává právě tehdy, když je splněna druhá podmínka věty, tedy když $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N}$ tak, že $b_n - a_n < \varepsilon$. Jelikož je $\beta - \alpha \leq b_n - a_n < \varepsilon$, je podle věty o rovnosti reálných čísel $\alpha = \beta$. □

Podmínka věty, zajišťující jednoznačnost společného bodu x_0 může být formulována i takto: „Jestliže posloupnost $\{|J_n|\}$ délek intervalů J_n je nulová …“

Větu o vložených intervalech používáme při důkazech některých důležitých vlastností posloupností a funkcí, zejména ve spojení s tzv. Bolzanovou metodou důkazu.

A.5 Klasifikace bodů vzhledem k množině

Definice A.5.1. Okolím bodu a nazveme každý otevřený interval (c, d) konečné délky, který obsahuje bod a (tj. kde $a \in (c, d)$); označení okolí bodu a: $U(a)$.

Tato definice je formulována ve smyslu topologickém.

Věta A.5.2 (vlastnosti okolí)**.** *Okolí bodu a má tyto vlastnosti:*

(1) Pro každé $U(a)$ je $a \in U(a)$.

(2) Ke každým dvěma okolím $U_1(a)$, $U_2(a)$ existuje okolí $U(a)$ tak, že $U(a) \subset U_1(a) \cap U_2(a)$.

(3) Je-li $b \in U(a)$, pak existuje $U_1(b)$ tak, že $U_1(b) \subset U(a)$.

(4) Pro libovolná $a \neq b$ existují $U_1(a)$, $U_2(b)$ tak, že $U_1(a) \cap U_2(b) = \emptyset$.

Pro důkazy některých vět je vhodnější definovat okolí bodu a ve smyslu metrickém.

Definice A.5.3. **ε-okolím bodu** a, kde $\varepsilon \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, nazýváme interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$; označení: $U(a, \varepsilon)$ nebo též $U(a)$.

Lehce ověříme, že ε-okolí má všechny uvedené vlastnosti okolí. Místo $x \in U(a, \varepsilon)$ lze rovněž psát $|x - a| < \varepsilon$.

Definice A.5.4. **Prstencovým** (**redukovaným**) **okolím** bodu a nazýváme množinu $P(a) = U(a) \setminus \{a\}$.

Podobně $P(a, \varepsilon) = U(a, \varepsilon) \setminus \{a\}$. Dále se definuje levé resp. pravé okolí bodu a jako interval $(c, a\rangle$ nebo $(a - \varepsilon, a\rangle$ resp. $\langle a, d)$ nebo $\langle a, a + \varepsilon)$; jsou to tzv. **jednostranná okolí**. Ještě uvažujeme *jednostranná prstencová* (*redukovaná*) okolí — to když z jednostranného okolí vypustíme bod a.

Užitím pojmu okolí bodu lze klasifikovat body z $\mathbb{R}$ vzhledem k dané číselné množině M. Uvedeme si nyní zkrácené definice některých důležitých pojmů, používaných v matematické analýze.

- ***Vnitřní bod množiny*** M: Bod množiny M, který do M patří i s některým svým okolím.
- ***Vnitřek množiny*** M: Množina všech vnitřních bodů množiny M.
- ***Hraniční bod množiny*** M: V každém jeho okolí existuje bod množiny M a též bod, který do M nepatří. (Hraniční bod může, ale nemusí patřit do M.)
- ***Hranice množiny*** M: Množina všech hraničních bodů množiny M.
- ***Vnější bod množiny*** (*vzhledem k množině*) M: Bod číselné osy, který není vnitřním ani hraničním bodem množiny M.
- ***Vnějšek množiny*** M: Množina všech vnějších bodů množiny M.
- Množina M je ***otevřená***: Každý její bod je jejím vnitřním bodem.
- Množina M je ***uzavřená***: Obsahuje svou hranici.
- ***Uzávěr*** $\overline{M}$ ***množiny*** M: Sjednocení množiny M a její hranice.
- ***Hromadný bod*** a ***množiny*** M: V každém jeho prstencovém okolí leží alespoň jeden bod množiny M.
- ***Izolovaný bod množiny*** M: Bod množiny M, který není jejím hromadným bodem.

- ***Diskrétní množina***: Všechny její body jsou izolované.
- ***Derivace*** M' ***množiny*** M: Množina všech hromadných bodů množiny M.

Jelikož všechny tyto pojmy jsou založeny vlastně jen na pojmu okolí, setkáváme se s nimi ve všech prostorech, kde se pracuje s okolím. Na číselné ose (na rozdíl např. od roviny) však pracujeme i s pojmy „levé okolí" a „pravé okolí" a můžeme tedy např. definovat *i levý hromadný bod* a *pravý hromadný bod* a těchto pojmů skutečně využíváme při definování jednostranných limit funkce.

Úloha A.5.5. *Všechny uvedené pojmy použijte pro množinu* $M = \langle -1, 0) \cup \left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \dots\right\}$.

A.6 Rozšířená reálná osa

Je to model číselné osy, kterou rozšíříme o dva nové prvky: *nevlastní číslo* $+\infty$ a nevlastní číslo $-\infty$. Označení rozšířené reálné osy: $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Zavedení nevlastních čísel nám umožňuje hlouběji, lépe a jednodušeji formulovat mnohé poznatky matematické analýzy.

Vlastnosti nevlastních čísel

Na rozšířené reálné ose definujeme přirozené uspořádání a početní operace tak, že rozšíříme příslušná pravidla platná na $\mathbb{R}$.

- *Uspořádání*: $\forall x \in R$: -$\infty < x < +\infty$, zvláště -$\infty < +\infty$; -(-∞) = $+\infty$, -($+\infty$) = -∞ , $|+\infty| = |-\infty| = +\infty$.
- *Okolí*: $U(+\infty)$ toto označení budeme používat pro každý interval $\langle c, +\infty\rangle \subset \mathbb{R}^*$, ale pokud budeme pracovat na $\mathbb{R}$, použijeme toto označení (pro zjednodušení vyjadřování) též pro intervaly $(c, +\infty) \subset \mathbb{R}$, což jsou vlastně prstencová okolí $P(+\infty)$ na $\mathbb{R}^*$. Podobně pro $U(-\infty)$ a $P(-\infty)$.
- *Supremum* a *infimum*: Pro množinu M, která není shora omezená, je $\sup M = +\infty$, pro množinu M, která není zdola omezená, je $\inf M = -\infty$.
- *Hromadné body*: Definice je formálně stejná, tedy $+\infty$ nazveme hromadným bodem množiny $M \subset \mathbb{R}^* \Leftrightarrow$ v každém jeho okolí $P(+\infty)$ leží alespoň jeden bod množiny M. Podobně pro $-\infty$.

  Např. množina $\mathbb{Z}$ všech celých čísel má hromadné body $+\infty$ a $-\infty$, $\sup \mathbb{Z} = +\infty$, $\inf \mathbb{Z} = -\infty$, ale samozřejmě $+\infty \notin \mathbb{Z}$, $-\infty \notin \mathbb{Z}$.

Početní operace s nevlastními čísly

- *Sčítání a odčítání*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\pm x+(+\infty) = (+\infty)\pm x = \pm x-(-\infty) = (+\infty)+(+\infty) = (+\infty)-(-\infty) = +\infty,$$

$$\pm x+(-\infty) = (-\infty)\pm x = \pm x-(+\infty) = (-\infty)+(-\infty) = (-\infty)-(+\infty) = -\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)-(+\infty), \quad (+\infty)+(-\infty), \quad (-\infty)+(+\infty), \quad (-\infty)-(-\infty).$$

- *Násobení*: $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ definujeme

$$x \cdot (+\infty) = (+\infty)\cdot x = (+\infty)\cdot(+\infty) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty,$$

$$x \cdot (-\infty) = (-\infty)\cdot x = (+\infty)\cdot(-\infty) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty.$$

  Podobně pro $x < 0$.

- *Nedefinujeme*

$$0\cdot(+\infty), \quad (+\infty)\cdot 0, \quad 0\cdot(-\infty), \quad (-\infty)\cdot 0.$$

- *Dělení*: $\forall x \in \mathbb{R}$ definujeme

$$\frac{x}{(+\infty)} = \frac{x}{(-\infty)} = 0.$$

  Pro $x > 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty,$$

  pro $x < 0$ je

$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty.$$

- *Nedefinujeme*

$$\frac{+\infty}{+\infty}, \quad \frac{+\infty}{-\infty}, \quad \text{atd.,} \quad \frac{x}{0} \quad \text{pro žádné } x \in \mathbb{R}, \text{ tj. ani } \frac{0}{0} \quad \text{nebo} \quad \frac{\pm\infty}{0}.$$

- *Mocniny*: $\forall n \in \mathbb{N}$ definujeme

$$(+\infty)^n = +\infty, \quad (+\infty)^{-n} = 0, \quad (-\infty)^n = (-1)^n \cdot (+\infty).$$

- *Nedefinujeme*

$$(+\infty)^0, \quad (-\infty)^0, \quad 0^0, \quad 1^{+\infty}, \quad 1^{-\infty}.$$

Poznámka A.6.1. Z praktických důvodů se někdy píše místo $+\infty$ jen ∞, takže např. místo výrazu $(+\infty)+(+\infty)$ lze napsat jen $\infty+\infty$. Jestliže však pracujeme v komplexním oboru, kde se zavádí jediné komplexní nekonečno označované ∞, musíme dát pozor na jeho odlišení od $+\infty$ z rozšířené reálné osy $\mathbb{R}^*$.

Úloha A.6.2. *Vypočtěte*

$$a = +\infty \cdot 5 - \frac{(-\infty)}{3} + (-\infty)^3 \cdot (100 - \infty) - \frac{1200!}{+\infty}.$$

$- * -$

Příloha B

Číselné posloupnosti

B.1 Některé významné limity

Věta B.1.1. $\forall a > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$

Princip důkazu. Pro $a > 1$ položíme $\sqrt[n]{a} = 1 + u_n$, tedy $u_n > 0$. Podle Bernoulliovy nerovnosti je $a = (1 + u_n)^n > 1 + n \cdot u_n$, odkud $0 < u_n < \dfrac{a-n}{n}$ a podle věty o třech limitách je $u_n \to 0$. Pro $a < 1$ použijeme předchozí výsledek na číslo $\dfrac{1}{a}$, pro $a = 1$ je výsledek zřejmý. $\square$

Podobně lze užitím vhodných odhadů odvodit následující limity:

Věta B.1.2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$

Věta B.1.3. $\forall a > 1, \forall k > 0 : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n^k} = +\infty.$

(Říkáme, že exponenciála a^n roste k $+\infty$ rychleji *než mocnina n^k.)*

Úloha B.1.4. *Dokažte, že* $\forall a > 1 : \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\log_a n}{n} = 0.$

Řešení. Pro $\forall \varepsilon > 0$ je $a^\varepsilon > 1$, takže pro skoro všechna n platí $1 < \sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$, odkud po zlogaritmování nerovnosti při základu a plyne uvedené tvrzení. $\square$

Úloha B.1.5. *Vypočtěte* $\lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!}$, *kde* $q > 0$.

Řešení. Pro $q \leq 1$ je tato limita rovna 0. Pro $q > 1$ má čitatel i jmenovatel limitu $+\infty$, takže nelze použít větu o limitě podílu. Uvedený výraz označme a_n; pak

$$(*) \qquad a_{n+1} = \frac{q}{n+1} a_n,$$

proto pro skoro všechna n je posloupnost $\{a_n\}$ klesající a zdola omezená (nulou), takže má limitu; označme ji a. Přejdeme-li v rovnosti (*) k limitě, máme $a = 0$. Říkáme, že faktoriál roste k $+\infty$ rychleji než exponenciála q^n. $\square$

Úloha B.1.6. *Ukažte, že každé iracionální číslo je limitou neklesající posloupnosti racionálních čísel; najděte tyto posloupnosti pro $r = \pi$, $s = \sqrt{2}$.*

Řešení. Lze uvažovat například posloupnost dolních desetinných aproximací. □

Poznámka B.1.7. Kromě číselných posloupností pracujeme v matematické analýze i s dalšími typy posloupností; uvažují se třeba posloupnosti množin (např. intervalů), posloupnosti funkcí, ad. Definice těchto posloupností vytvoříme podle stejného schématu. Např. posloupnost funkcí definujeme jako zobrazení množiny $\mathbb{N}$ do množiny všech funkcí. Pracujeme-li s jinými posloupnostmi než s posloupnostmi číselnými, je třeba dbát na korektnost definice posloupnosti, případně její limity.

B.2 Číslo e

Funkce $y = \mathrm{e}^x$ a funkce $y = \ln x$ $(= \log_{\mathrm{e}} x)$ patří k nejdůležitějším funkcím v matematické analýze; v obou případech je základem Eulerovo číslo e.

Číslo e je definováno jako limita posloupnosti $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$. Abychom tuto definici mohli považovat za korektní, je třeba dokázat, že uvedená posloupnost je konvergentní; její členy označujme dále a_n. Důkaz existence limity posloupnosti $\{a_n\}$ lze provést ve dvou krocích:

1. dokážeme, že tato posloupnost je rostoucí,
2. dokážeme, že je shora omezená.

Existence konečné limity pak plyne z věty o limitě monotónní posloupnosti.

ad 1) Podle binomické věty je

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \cdots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}$$

První dva členy součtu na pravé straně jsou rovny 1, pro každý další člen provedeme úpravu

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!} =$$
$$= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Pro posloupnost $\{a_n\}$ tak platí, že každý její člen a_n je součtem $n+1$ kladných výrazů, v nichž jsou činitelé tvaru $\left(1-\frac{j}{n}\right)$. Jestliže nyní přejdeme od n k $n+1$, je a_{n+1} součtem $n+2$ výrazů s činiteli tvaru $\left(1 - \dfrac{j}{n+1}\right)$. Jelikož $\left(1 - \dfrac{j}{n+1}\right) > \left(1 - \dfrac{j}{n}\right)$ a navíc v a_{n+1} je o jeden kladný sčítanec víc, je $a_{n+1} > a_n$, posloupnost $\{a_n\}$ je rostoucí.

ad 2) Ve výrazu pro a_n nahradíme všechny „závorky“ $\left(1 - \dfrac{j}{n+1}\right)$ číslem 1, takže platí

$$a_n < b_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} < 3.$$

Závěr: Podle věty o limitě monotónní posloupnosti existuje limita posloupnosti $\{a_n\}$; nazýváme ji Eulerovo číslo a označujeme ji e; z předchozího plyne, že $2 < \mathrm{e} < 3$.

Výpočet čísla e

Hodnotu čísla e lze vcelku snadno určit jako součet číselné řady. Vidíme, že pro konstantní $k < n$ platí

$$a_n > 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.$$

Odsud pro $n \to +\infty$ máme $\mathrm{e} \geq b_k$, takže platí $a_n < b_n \leq \mathrm{e}$; podle věty o třech limitách pak je $\lim_{n\to+\infty} b_n = \mathrm{e}$. Přitom b_n je podle své definice tzv. n-tým částečným součtem řady, takže

$$\mathrm{e} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots = 2{,}718\,281\,828\,459\,0\ldots$$

Tato řada „dosti rychle“ konverguje a má jednoduchý algoritmus výpočtu členů, takže výpočet hodnoty čísla e na zadaný počet desetinných míst lze provést vcelku rychle.

Příloha C

Spojitost funkce

C.1 Stejnoměrná spojitost

Jako jsme vlastnost spojitosti „zmírnili“ spojitostí po částech, můžeme tuto vlastnost zase „zpřísňovat“.

Definice C.1.1. Funkce f se nazývá ***stejnoměrně spojitá*** na množině $M \iff \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0$ tak, že pro každé dva body $x', x'' \in M$ platí:

$$|x' - x''| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

Předně uvážíme, že stejnoměrná spojitost má smysl jen na množině (zejména na intervalu), neexistuje nějaká stejnoměrná spojitost v bodě. Je to tedy vlastnost globální.

V definici si dále uvědomíme, že δ závisí pouze na ε, tj. nezávisí na poloze bodů x', x'' v M; u spojitosti na množině M obecně δ závisí také na bodu x_0, tedy i když je funkce spojitá v každém bodě množiny M, nelze obecně k danému $\varepsilon > 0$ najít takové $\delta > 0$, které by bylo stejné, ať zvolíme x_0 kdekoli na M.

Například u funkce $y = \operatorname{tg} x$ na $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, když volíme x_0 „stále blíže“ k $\frac{\pi}{2}$, pak pro dané ε (třeba $= 1$) musíme volit δ stále menší a menší, aby pro $x \in U(x_0, \delta)$ zůstaly funkční hodnoty $f(x)$ v ε-okolí hodnoty $f(x_0)$.

Stejnoměrnou spojitost lze charakterizovat také ještě pomocí tzv. *oscilace funkce.*

Definice C.1.2. Nechť funkce f je definovaná a omezená na množině M. Číslo

$$\omega = \sup_{x \in M} f(x) - \inf_{x \in M} f(x)$$

se nazývá ***oscilace funkce*** f na množině M.

Je-li funkce spojitá na uzavřeném intervalu, pak místo rozdílu suprema a infima můžeme vzít rozdíl maxima a minima.

Věta C.1.3 (o oscilaci stejnoměrně spojité funkce)**.** *Funkce f je stejnoměrně spojitá na intervalu J, právě když $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že na každém podintervalu $I \subset J$ délky menší než δ je oscilace funkce menší než ε.*

Vztah spojitosti a stejnoměrné spojitosti řeší následující dvě věty.

Věta C.1.4 (vztah stejnoměrné spojitosti a spojitosti na množině M)**.** *Je-li funkce f stejnoměrně spojitá na M, pak je na M spojitá.*

Princip důkazu. Ze stejnoměrné spojitosti plyne spojitost v libovolném bodě x_0, neboť $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tak, že $\forall x \in D(f)$ platí:

$$|x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

$\square$

Věta C.1.5 (Cantorova věta)**.** *Je-li funkce f spojitá na intervalu $\langle a, b\rangle$, pak je na tomto intervalu stejnoměrně spojitá.*

Důkaz se provádí užitím Borelovy věty o pokrytí: Je-li uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ pokryt systémem S_ν otevřených intervalů, pak existuje konečný podsystém $S_k \subset S_\nu$, který také pokrývá interval $\langle a,b\rangle$.

Příloha D

Metody integrace pro funkce jedné proměnné

D.1 Integrace racionálních funkcí

Základní typy racionálních funkcí a jejich integrace:

(1) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-k} = \ln|x-k| + C,}$

Úloha D.1.1. $\displaystyle\int \frac{2\,\mathrm{d}x}{x+3} = 2\ln|x+3| + C.$

Úloha D.1.2. $\displaystyle\int \frac{5\,\mathrm{d}x}{3x+2} = \frac{5}{3}\ln|3x+2| + C.$

(2) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-k)^s} = \frac{1}{1-s}\frac{1}{(x-k)^{s-1}} + C, \quad \text{kde} \quad s \neq 1.}$

Úloha D.1.3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+2)^3} = \frac{1}{-2(x+2)^2} + C.$

(3) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+px+q}}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom, vede po úpravě jmenovatele na funkci arctg x.

Úloha D.1.4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+6x+13} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+3)^2+4} = \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\left(\frac{x+3}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+3}{2} + C.$

(4) $\boxed{\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+px+q)^s}}$, kde ve jmenovateli je nerozložitelný kvadratický polynom a $s \neq 1$, vede na použití rekurentního vzorce, viz 9.3(2).

Úloha D.1.5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+6x+13)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{[(x+3)^2+4]^2} = \begin{bmatrix} x+3 = z \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}z \end{bmatrix} =$ $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}z}{(z^2+2^2)^2} = \frac{1}{2\cdot 4}\frac{z}{z^2+2^2} + \frac{1}{2\cdot 4}\int \frac{\mathrm{d}z}{z^2+2^2}.$

Podle (3) vede tento integrál na funkci $\operatorname{arctg} x$ *a pak se vrátíme k původní proměnné* x *dosazením* $z = x+3$.

Racionální funkce $P(x)/Q(x)$***, kde*** $P(x)$, $Q(x)$ ***jsou polynomy:***

Při jejich integrování převádíme racionální funkci na uvedené základní typy, přičemž využíváme poznatků z algebry.

Algoritmus:

(1) Je-li stupeň čitatele menší než stupeň jmenovatele, přejdeme na krok (2). Jinak užitím dělení upravíme funkci na tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

kde $A(x)$ je polynom, který již dovedeme integrovat a $R(x)$ (zbytek dělení) je polynom stupně nižšího než $Q(x)$; tedy: *snížíme stupeň čitatele pod stupeň jmenovatele.*

(2) Je-li jmenovatel rozložen na lineární kořenové činitele a nerozložitelné kvadratické polynomy, přejdeme na bod (3), jinak tento *rozklad jmenovatele* provedeme.

(3) Je-li ve jmenovateli jen jeden kořenový činitel nebo jeho mocnina nebo jen jeden nerozložitelný kvadratický polynom nebo jeho mocnina, přejdeme na bod (4); jinak provedeme *rozklad zlomku* $R(x)/Q(x)$ *na parciální zlomky.*

(4) *Integrujeme* všechny komponenty rozkladu funkce $y = P(x)/Q(x)$.

Úloha D.1.6. *Upravte integrál* $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (3).*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{3x-2}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x-\frac{4}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-1-\frac{4}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+1-\frac{7}{3}}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+3}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\cdot\frac{7}{3}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3} =$$

$$= \frac{3}{2}\ln(x^2+x+3) - \frac{7}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+x+3}.$$ □

Úloha D.1.7. *Upravte integrál* $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x$ *na základní typ (4) a dvojnásobným použitím rekurentního vzorce 9.3 (2) pak na základní typ (3).*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{4x+3}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{2x-1+1+\frac{3}{2}}{(x^2-x+3)^3}\,\mathrm{d}x =$

$$= -\frac{1}{(x^2-x+3)^2} + 5\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+3)^3} = \cdots \qquad \square$$

Na integraci racionálních funkcí vede výpočet integrálů mnoha dalších typů funkcí, viz dále.

D.2 Integrace některých iracionálních funkcí

(1) $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x,$ kde $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ a $R(x,y)$ je racionální funkce.

Substitucí $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ se integrál převede na integrál z funkce racionální, viz D.1.

Úloha D.2.1. *Převeďte* $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x$ *na integrál z racionální funkce.*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x-1}}{2x+7}\,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sqrt{2x-1} = t \\ x = \frac{1}{2}(t^2+1) \\ \mathrm{d}x = t\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t}{t^2+1+7}t\ \mathrm{d}t = \cdots.$ $\square$

(2) $\displaystyle\int R\left(x, x^{\frac{p_1}{q_1}}, \ldots, x^{\frac{p_m}{q_m}}\right)\mathrm{d}x,$ kde $R(x, y_1, y_2, \ldots, y_m)$ je racionální funkce.
Substitucí $x = t^n$, kde $n = n(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ je nejmenší společný násobek, se daný integrál převede na integrál z funkce racionální.

Úloha D.2.2. *Převeďte* $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}$ *na integrál z racionální funkce.*

Řešení. $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}} = \begin{bmatrix} x = t^6 \\ \mathrm{d}x = 6t^5\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^6 \cdot 6t^5\,\mathrm{d}t}{t^3+t^2} = \cdots\ .$ $\square$

D.3 Eulerovy substituce

Používají se pro výpočet integrálů typu $\displaystyle\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right)\mathrm{d}x$, kde R je racionální funkce dvou proměnných. Účelem substituce je převést integrování iracionální funkce na integrování funkce racionální. Eulerovy substituce jsou tři:

(1) $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x + t$ [pro $a > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy ax^2.

(2) $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$ [pro $c > 0$]; hlavní myšlenka: po umocnění se na obou stranách rovnosti ruší členy c a rovnost lze dělit x.

(3) $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-\lambda)$ [kde λ je reálný kořen]; hlavní myšlenka: po umocnění lze rovnost dělit kořenovým činitelem $(x-\lambda)$.

Úloha D.3.1. *Ověřte, že při výpočtu* $\int x\sqrt{4x^2+5x+1}\,\mathrm{d}x$ *lze použít všechny tři substituce. Ve všech případech převeďte integrál na integrál z funkce racionální.*

Řešení. Je $a = 4 > 0$, $c = 1 > 0$, a uvedený trojčlen má reálné kořeny.

Při použití 1. substituce máme $\sqrt{4x^2+5x+1} = 2x + t$,

při použití 2. substituce $\sqrt{4x^2+5x+1} = xt + 1$

a při použití 3. substituce je $\sqrt{4x^2+5x+1} = t(x+1)$. V tomto případě po umocnění rovnosti a zkrácení kořenového činitele $(x+1)$ dostáváme $4x+1 = t^2(x+1)$ a z toho

$$x = \frac{t^2-1}{4-t^2},\ t(x+1) = \frac{3t}{4-t^2},\ \mathrm{d}x = \frac{6t}{(4-t^2)^2}\,\mathrm{d}t,\ \ldots \qquad \square$$

Po nalezení integrálu z příslušné racionální funkce se vracíme k původní proměnné, tj. dosadíme při 1. substituci $t = \sqrt{ax^2+bx+c} - \sqrt{a}x$, při 2. substituci to je $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}-\sqrt{c}}{x}$, a při 3. dosadíme $t = \dfrac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x-\lambda}$.

D.4 Integrace goniometrických a hyperbolických funkcí

Přehled substitucí pro $\int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x$,
kde R je racionální funkce dvou proměnných:

(1) $\sin x = t$, pokud $R(-\cos x, \sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(2) $\cos x = t$, pokud $R(\cos x, -\sin x) = -R(\cos x, \sin x)$,

(3) $\operatorname{tg} x = t$, pokud $R(-\cos x, -\sin x) = R(\cos x, \sin x)$,

(4) $\operatorname{tg} \dfrac{x}{2} = t$ lze použít vždy (univerzální substituce). Univerzální substituce přináší zpravidla složitější výpočty, proto se dává přednost substitucím předchozím, pokud je lze použít.

Účelem substitucí je převést integrování goniometrických funkcí na integrování funkcí racionálních.

Úloha D.4.1. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \operatorname{tg} x \sin x \,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \int \operatorname{tg} x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \,\mathrm{d}x$; $\frac{\sin^2 x}{-\cos x} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$, takže provedeme substituci $\sin x = t$; $I = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{1-\sin^2 x} \cos x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \sin x = t \\ \cos x \,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int \frac{t^2}{1-t^2} \,\mathrm{d}t = \cdots.$ □

Úloha D.4.2. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \operatorname{tg}^2 x \sin x \,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \int \operatorname{tg}^2 x \sin x \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x$; ježto $\frac{(-\sin x)^3}{\cos^2 x} = -\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}$, použijeme substituci $\cos x = t$, takže $I = \int \frac{(1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \sin x \,\mathrm{d}x = \begin{bmatrix} \cos x = t \\ \sin x \,\mathrm{d}x = -\,\mathrm{d}t \end{bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{t^2} \,\mathrm{d}t = \cdots.$ □

Úloha D.4.3. *Vhodnou substitucí převeďte* $\int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x} \,\mathrm{d}x$ *na integrál z funkce racionální.*

Řešení. $I = \int \frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^4 x} \,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} \,\mathrm{d}x$; platí $\frac{(-\sin x)^2}{(-\cos x)^6} = \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x}$, takže použijeme substituci $\operatorname{tg} x = t$; při úpravách používáme často vztah $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$I = \int \operatorname{tg}^2 x \left(1 + \operatorname{tg}^2 x\right) \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \begin{bmatrix} \operatorname{tg} x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \mathrm{d}t \end{bmatrix} = \int t^2(1+t^2) \,\mathrm{d}t = \cdots. \qquad \square$$

Při použití univerzální substituce $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$ je třeba znát či umět odvodit, čemu jsou rovny $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\mathrm{d}x$.

Předně platí $x = 2 \operatorname{arctg} t$, odkud $\mathrm{d}x = \frac{2\,\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

Ze vztahu $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$ a vztahů mezi goniometrickými funkcemi plyne $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\operatorname{tg} x = \frac{2t}{1-t^2}$.

Integrace součinu goniometrických funkcí

Používá se vzorců

$\sin nx \sin mx = \frac{1}{2}[\cos(n-m)x - \cos(n+m)x$,

$\sin nx \cos mx = \frac{1}{2}[\sin(n-m)x + \sin(n+m)x]$,

$\cos nx \cos mx = \frac{1}{2}[cos(n-m)x + \cos(n+m)x]$,

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}.$$

Úloha D.4.4. *Vypočtěte* $\int \sin 5x \cos 4x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. $\int \sin 5x \cos 4x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\int (\sin x + \sin 9x)\,\mathrm{d}x\right] = -\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{18}\cos 9x + C$ □

Integrace hyperbolických funkcí

Postupujeme podle analogických vzorců jako pro funkce goniometrické.

Úloha D.4.5. *Vypočtěte* $\int \frac{\mathrm{ch}^2 x + 1}{\mathrm{ch}^4 x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int \frac{\mathrm{ch}^2 x + 1}{\mathrm{ch}^4 x}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \int \left(1 + 1 - \mathrm{th}^2 x\right)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \left[\begin{array}{c} \mathrm{th}\, x = t \\ \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{d}t \end{array}\right] = \int \left(2 - t^2\right)\,\mathrm{d}t = 2t - \frac{1}{3}t^3 + C = 2\,\mathrm{th}\, x - \frac{1}{3}\mathrm{th}^3 x + C.$ □

D.5 Goniometrické a hyperbolické substituce

Přehled substitucí:

(1) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)\,\mathrm{d}x$, substituce $x = a \sin t$ (nebo $x = a\,\mathrm{th}\, t$),

(2) $\int R\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)\,\mathrm{d}x$, substituce $x = a\,\mathrm{tg}\, t$ (nebo $x = a\,\mathrm{sh}\, t$),

(3) $\int R\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)\,\mathrm{d}x$, substituce $x = \frac{a}{\cos t}$ (nebo $x = a\,\mathrm{ch}\, t$).

Úloha D.5.1. *Vypočtěte* $I = \int \sqrt{x^2 + 4x}\,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int \sqrt{x^2 + 4x}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{x^2 + 4x + 4 - 4}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{(x+2)^2 - 2^2}\,\mathrm{d}x = \left[\begin{array}{c} x + 2 = u \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}u \end{array}\right] = \int \sqrt{u^2 - 2^2}\mathrm{d}u$ a dále se provede výše uvedená substituce (3). □

D.6 Užití Eulerových vzorců pro výpočet některých integrálů

Pro komplexní funkci $w(x)$ reálné proměnné x se derivace a integrál definují stejně jako pro reálné funkce s tím, že imaginární jednotka i se chová jako konstanta. Je-li $a \neq 0$ komplexní číslo, je např. $(\mathrm{e}^{ax})' = a\,\mathrm{e}^{ax}$, $\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax} + C$.

Elementární funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$ se definují i pro komplexní proměnnou z; jejich vzájemný vztah je vyjádřen *Eulerovými vzorci*, podle nichž je

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^i\, x + \mathrm{e}^{-ix}\right), \quad \sin x = \frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right).$$

Těchto vzorců lze využít pro výpočet některých integrálů.

Úloha D.6.1. *Vypočtěte* $I = \int \sin^4 x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int \sin^4 x \,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(2i)^4}\left(\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}\right)^4 \mathrm{d}x = \frac{1}{16}\int \left(\mathrm{e}^{4ix} - 4\,\mathrm{e}^{2ix} + 6 - 4\,\mathrm{e}^{-2ix} + \mathrm{e}^{-4ix}\right) \mathrm{d}x =$
$\cdots = \frac{1}{32}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{4ix} - \mathrm{e}^{-4ix}\right) - \frac{1}{4}\frac{1}{2i}\left(\mathrm{e}^{2ix} - \mathrm{e}^{-2ix}\right) + \frac{3}{8}x + C = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x +$
$\frac{3}{8}x + C$. □

Úloha D.6.2. *Vypočtěte (užitím Eulerových vzorců)* $I = \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x$.

Řešení. $I = \int \mathrm{e}^x \cos x \,\mathrm{d}x = \int \mathrm{e}^x \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\mathrm{e}^{(1+i)x} + \mathrm{e}^{(1-i)x}\right) \mathrm{d}x =$
$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+i}\,\mathrm{e}^{(1+i)x} + \frac{1}{1-i}\,\mathrm{e}^{(1-i)x}\right) + C = \cdots = \frac{1}{2}\,\mathrm{e}^x(\cos x + \sin x) + C$. (Srovnej s výsledkem dle vzorce pro I_c, viz 9.3.) □

Příloha E

Riemannův určitý integrál

E.1 Další vlastnosti určitého integrálu

Věty o střední hodnotě

Věta E.1.1 (o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť* $f \in R(\langle a, b\rangle)$ *a platí* $m \leq f(x) \leq M$*. Pak existuje číslo* $\mu \in \langle m, M\rangle$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a).$$

Je-li f *spojitá, pak existuje číslo* $\xi \in \langle a, b\rangle$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = (b-a)f(\xi).$$

Princip důkazu. Nerovnost $m \leq f(x) \leq M$ integrujeme na $\langle a, b\rangle$ a výraz $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ označíme μ. Je-li m, M minimum a maximum funkce f spojité na $\langle a, b\rangle$, pak podle věty o mezihodnotě nabývá f hodnoty $\mu \in \langle m, M\rangle$ v nějakém bodu $\xi \in \langle a, b\rangle$. $\square$

Věta E.1.2 (zobecněná věta o střední hodnotě integrálního počtu)**.** *Nechť* $f, g \in R(\langle a, b\rangle)$, $g(x) \geq 0$, $m \leq f(x) \leq M$*. Pak platí*

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

a existuje číslo $\mu \in \langle m, M\rangle$ *tak, že platí*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \mu\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Je-li f *spojitá, pak existuje číslo* $\xi \in \langle a, b\rangle$ *tak, že*

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Integrál jako funkce horní meze

Je-li $f \in R(\langle a,b\rangle)$, pak pro každé $x \in \langle a,b\rangle$ je $f \in R(\langle a,x\rangle)$ a $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \Phi(x)$ je integrál, který je funkcí své horní meze x. Vzhledem k rozšířené definici integrálu lze za dolní mez zvolit libovolné číslo $c \in \langle a,b\rangle$.

Věta E.1.3. *Nechť funkce $f \in R(\langle a,b\rangle)$, $c \in \langle a,b\rangle$. Pak funkce $\Phi(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá na $\langle a,b\rangle$ a v každém bodě $x_0 \in \langle a,b\rangle$, v němž je f spojitá, má Φ derivaci (v krajních bodech a, b jednostrannou), pro niž $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.*

Princip důkazu.

$$\Phi(x_0+h) - \Phi(x_0) = \int_c^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_c^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t = \mu h,$$

kde $\mu \in \langle m,M\rangle$ je střední hodnota, odkud plyne spojitost funkce Φ. Ve druhém případě se odvodí, že $\forall\varepsilon > 0\ \exists U(x_0)$ tak, že $\forall x \in U(x_0)$ platí (t je mezi x a x_0):

$$\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| \le \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| <$$

$$< \frac{1}{|x - x_0|}\left|\int_{x_0}^{x} \varepsilon\,\mathrm{d}t\right| < \cdots < \varepsilon.$$

□

Důsledky:

(1) Každá funkce f spojitá na $\langle a,b\rangle$ má na tomto intervalu primitivní funkci Φ.

(2) Každá funkce omezená a po částech spojitá na $\langle a,b\rangle$ má na tomto intervalu zobecněnou primitivní funkci; jednou z nich je funkce Φ (integrál jako funkce horní meze).

Příloha F

Technické křivky

Dále uvádíme příklady technických křivek, které se často vyskytují ve výpočtech s využitím integrálu. Kuželosečky v tomto přehledu neuvádíme.

Řetězovka

Řetězovku vytváří nepružná nit (řetěz) zavěšená ve dvou bodech. Je to graf funkce:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}, \quad \text{kde} \quad a > 0.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \operatorname{ch} \frac{x}{a} \, \mathrm{d}x.$$

Kotálnice

Při kotálení křivky h (tzv. tvořící křivky nebo *hybné polodie*) bez skluzu po pevné křivce p (tzv. základní křivce nebo *pevné polodii*) opíše každý bod roviny křivku, kterou nazýváme *kotálnice*.

Důležité jsou případy, kdy hybná polodie je kružnice a pevná polodie přímka nebo kružnice.

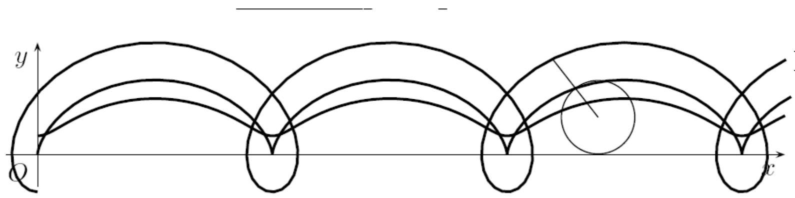
Cykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po přímce p, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) cykloidu.

Prostá cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = a(t - \sin t),$$
$$y = a(1 - \cos t);$$



Obrázek F.1: Cykloidy

jednu větev dostaneme pro $t \in \langle 0, 2\pi \rangle$.

Platí

$$\mathrm{d}s = 2a \sin \frac{t}{2} \,\mathrm{d}t.$$

Prodloužená (zkrácená) cykloida

Parametrické rovnice:

$$x = at - r \sin t,$$
$$y = a - r \cos t.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + r^2 - 2ar \cos t} \,\mathrm{d}t.$$

Epicykloidy a hypocykloidy

Jestliže se kružnice h o poloměru a kotálí po vnějším resp. vnitřním obvodu kružnice p o poloměru A, pak každý (vnější, vnitřní) bod kružnice h (vzdálený o r od středu kružnice h) pevně spojený s touto kružnicí vytváří tzv. *prostou* (*prodlouženou*, *zkrácenou*) *epicykloidu* resp. *hypocykloidu*.

Parametrické rovnice prosté epicykloidy (platí horní znaménko) a hypocykloidy (platí dolní znaménko):

$$x = (A \pm a) \cos t \mp a \cos \frac{A \pm a}{a} t,$$
$$y = (A \pm a) \sin t - a \sin \frac{A \pm a}{a} t.$$

Asteroida

Zvaná též *astroida* patří mezi kotálnice; asteroidu opisuje každý bod kružnice o poloměru $\frac{a}{4}$, která se bez smyku kotálí zevnitř po kružnici o poloměru a.

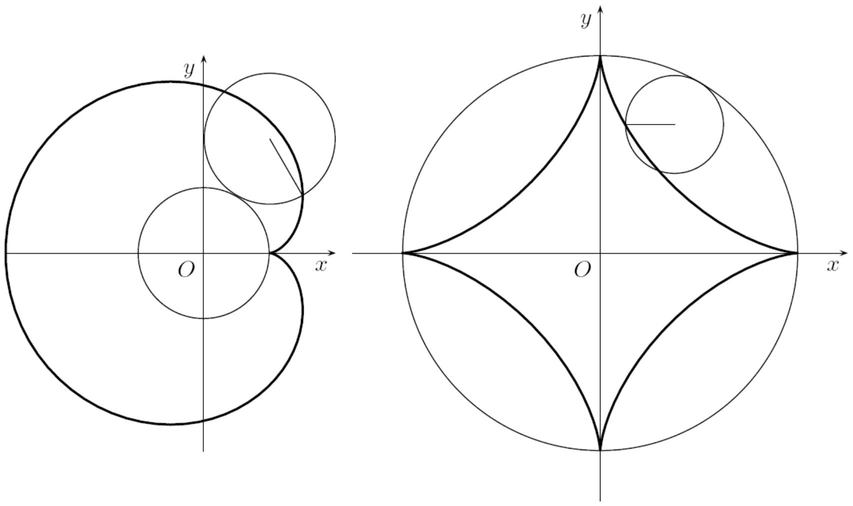
Je to tedy prostá hypocykloida, kde $A = \frac{a}{4}$.

Parametrické rovnice:

$$x = a\cos^3 t, \quad y = a\sin^3 t, \qquad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = 3a \sin t \cos t \,\mathrm{d}t.$$



Obrázek F.2: Kardioida a asteroida

Kardioida

Patří mezi kotálnice; kardioidu opisuje každý bod kružnice o poloměru a, která se bez smyku kotálí vně po kružnici o poloměru a. Je to tedy prostá epicykloida, kde $A = a$. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a(1 + \cos\varphi), \quad \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = 2\cos\frac{\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi.$$

Evolventa kružnice

Lze ji zařadit mezi kotálnice (kde h je přímka a p je kružnice) i mezi spirály. Jako každá evolventa křivky vznikne tak, že počínaje počátečním bodem nanášíme na tečnu délku oblouku mezi počátečním bodem a bodem dotyku tečny s křivkou. (Evolventu kružnice tedy vytváří konec napjaté niti odmotávané z kruhové cívky.)

Parametrické rovnice:

$$x = a(t \sin t + \cos t),$$
$$y = a(\sin t - t \cos t).$$

Platí

$$\mathrm{d}s = at \, \mathrm{d}t.$$

Archimédova spirála

Je to spirála s konstantní šířkou jednotlivých závitů. Je vytvořena rovnoměrným pohybem bodu po průvodiči, který se rovnoměrně otáčí kolem pólu.

Rovnice v polární soustavě:

$$r = a\varphi.$$

Platí

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + \varphi^2} \, \mathrm{d}\varphi.$$

Logaritmická spirála

Rovnice v polární soustavě:

$$\rho = a \, \mathrm{e}^{m\varphi} .$$

Vyskytuje se např. v kresbě ulit plžů.

Platí

$$\mathrm{d}s = a\sqrt{1 + m^2} \, \mathrm{e}^{m\varphi} \, \mathrm{d}\varphi.$$

Lemniskáta

Je to množina bodů které mají od dvou daných pevných bodů stálý součin vzdáleností. Rovnice v polární soustavě:

$$\rho^2 = 2a^2 \cos 2\varphi.$$

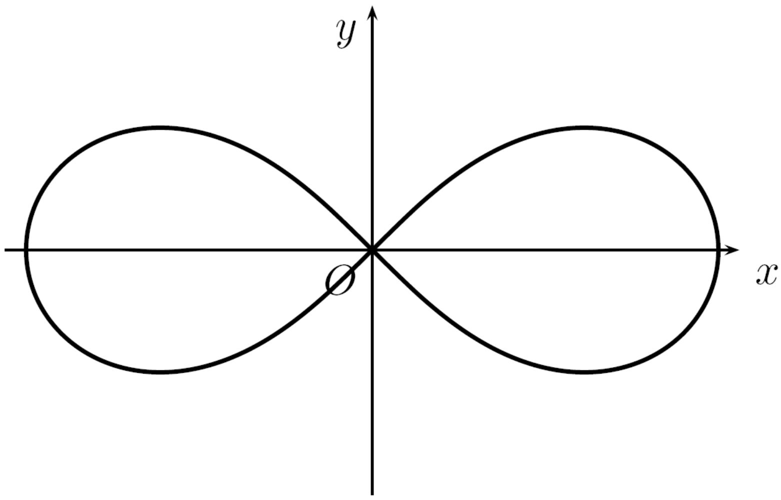
Délku nelze vyjádřit užitím elementárních funkcí.

Šroubovice

Je to příklad prostorové křivky. Šroubovice leží na válcové ploše

$$x^2 + y^2 = a^2.$$

Rozvinutím válcové plochy přejde každý závit šroubovice v úsečku.



Obrázek F.3: Lemniskáta

Parametrické rovnice:

$$
\begin{aligned}
x &= a\cos t,\\
y &= a\sin t, \quad \text{jeden závit pro} \quad t \in \langle 0, 2\pi \rangle.\\
z &= ct,
\end{aligned}
$$

Platí

$$\mathrm{d}s = \sqrt{a^2 + c^2}\,\mathrm{d}t.$$