Úvod do informatiky

přednáška šestá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu R. Bělohlávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008

a dle učebního textu R. Bělohlávka a V. Vychodila:
Diskrétní matematika pro informatiky II, Olomouc 2006.

Obsah

Obsah

Ekvivalence je binární relace, kterou lze interpretovat jako matematický protějšek nerozlišitelnosti.
Poznamenejme, že ztotožněním nerozlišitelných prvků (některou svou vlastností) získáme "zjednodušený náhled" na množinu.

Pro ekvivalenci E na množině X definujeme pro každý $x \in X$ množinu $[x]_E = \{y \in X \mid \langle x, y \rangle \in E\}$, kterou nazýváme **třída ekvivalence prvku** x.

Zřejmě $[x]_E$ obsahuje právě ty prvky z X, které nelze od x rozlišit ekvivalencí E.

Poznámka: Ve smyslu množinové inkluze $\subseteq$ je ω_X nejmenší ekvivalence na X a naopak ι_X největší ekvivalence na X.

Příklad

Na $X = \{a, b, c\}$ existuje pět vzájemně různých ekvivalencí:

ω_X, ι_X,
$E_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
$E_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
$E_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$.

Příklad

Na $\mathbb{Q}$ můžeme uvažovat binární relaci

$$E = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Q}, |x| = |y|\}.$$

Relace E je evidentně ekvivalencí na $\mathbb{Q}$, přitom pro každé $x \in \mathbb{Q}$ máme $[x]_E = \{x, -x\}$. Speciálně máme $[0]_E = \{0\}$.

Příklad

Na $X = \{a, b, c\}$ existuje pět vzájemně různých ekvivalencí:
ω_X, ι_X,
$E_1 = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
$E_2 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
$E_3 = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$.

Příklad

Na $\mathbb{Q}$ můžeme uvažovat binární relaci

$$E = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathbb{Q},\ |x| = |y|\}.$$

Relace E je evidentně ekvivalencí na $\mathbb{Q}$, přitom pro každé $x \in \mathbb{Q}$ máme $[x]_E = \{x, -x\}$. Speciálně máme $[0]_E = \{0\}$.

Rozklad

Definice

Nechť $X \neq \emptyset$. Systém množin $\Pi \subseteq 2^X$ splňující

(i) $Y \neq \emptyset$ pro každou $Y \in \Pi$,

(ii) pro každé $Y_1, Y_2 \in \Pi$ platí: pokud $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$, pak $Y_1 = Y_2$,

(iii) $\bigcup \Pi = X$,

se nazývá **rozklad na množině** X. Množiny $Y \in \Pi$ nazýváme **třídy rozkladu** Π. Pro prvek $x \in X$ označíme $[x]_\Pi$ tu třídu rozkladu Π, která obsahuje x.

Poznámka: Rozklad na množině je matematický protějšek shluků nerozlišitelných prvků.

Poznámka: Rozklad na X je **disjunktní pokrytí** X.

Na množině X existují dva mezní rozklady. Prvním z nich je rozklad Π, kde $[x]_\Pi = \{x\}$ pro každé $x \in X$, tj. všechny třídy rozkladu Π jsou jednoprvkové. Druhým mezním případem je rozklad $\Pi = \{X\}$, tj. Π obsahuje jedinou třídu, která je rovna celé X, tedy $[x]_\Pi = X$ pro každé $x \in X$.

Příklad

Na $X = \{a, b, c\}$ existuje pět vzájemně různých rozkladů: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b, c\}\}$.

Příklad

Na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ můžeme uvažovat rozklad Π takový, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ máme $[q]_\Pi = \{q, -q\}$.
Jiným rozkladem na $\mathbb{Q}$ může být např. systém $\Pi = \{Z, \{0\}, K\}$, kde $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$, $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Na množině X existují dva mezní rozklady. Prvním z nich je rozklad Π, kde $[x]_\Pi = \{x\}$ pro každé $x \in X$, tj. všechny třídy rozkladu Π jsou jednoprvkové. Druhým mezním případem je rozklad $\Pi = \{X\}$, tj. Π obsahuje jedinou třídu, která je rovna celé X, tedy $[x]_\Pi = X$ pro každé $x \in X$.

Příklad

Na $X = \{a, b, c\}$ existuje pět vzájemně různých rozkladů: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b, c\}\}$.

Příklad

Na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ můžeme uvažovat rozklad Π takový, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ máme $[q]_\Pi = \{q, -q\}$.
Jiným rozkladem na $\mathbb{Q}$ může být např. systém $\Pi = \{Z, \{0\}, K\}$, kde $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$, $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Na množině X existují dva mezní rozklady. Prvním z nich je rozklad Π, kde $[x]_\Pi = \{x\}$ pro každé $x \in X$, tj. všechny třídy rozkladu Π jsou jednoprvkové. Druhým mezním případem je rozklad $\Pi = \{X\}$, tj. Π obsahuje jedinou třídu, která je rovna celé X, tedy $[x]_\Pi = X$ pro každé $x \in X$.

Příklad

Na $X = \{a, b, c\}$ existuje pět vzájemně různých rozkladů: $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, b\}, \{c\}\}$, $\{\{a, c\}, \{b\}\}$, $\{\{a\}, \{b, c\}\}$, $\{\{a, b, c\}\}$.

Příklad

Na množině racionálních čísel $\mathbb{Q}$ můžeme uvažovat rozklad Π takový, že pro každé $q \in \mathbb{Q}$ máme $[q]_\Pi = \{q, -q\}$.
Jiným rozkladem na $\mathbb{Q}$ může být např. systém $\Pi = \{Z, \{0\}, K\}$, kde $Z = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$, $K = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0\}$.

Dále si ukážeme, že rozklady a ekvivalence vyjadřují de facto totéž.

Věta

Nechť Π je rozklad na X. Pak binární relace E_Π na X definovaná $\langle x, y\rangle \in E_\Pi$, právě když $[x]_\Pi = [y]_\Pi$ je ekvivalence.

Důkaz: Pro každý $x \in X$ platí $[x]_\Pi = [x]_\Pi$ triviálně, tj. $\langle x, x\rangle \in E_\Pi$. Dále nechť $\langle x, y\rangle \in E_\Pi$, tedy $[x]_\Pi = [y]_\Pi$, odtud zřejmě $[y]_\Pi = [x]_\Pi$, tedy $\langle y, x\rangle \in E_\Pi$. Nechť $\langle x, y\rangle \in E_\Pi$ a $\langle y, z\rangle \in E_\Pi$, pak $[x]_\Pi = [y]_\Pi = [z]_\Pi$, tj. $\langle x, z\rangle \in E_\Pi$.

Definice

Ekvivalence E_Π definovaná v předchozí větě se nazývá **ekvivalence příslušná rozkladu** Π.

Nyní víme, že každému rozkladu přísluší ekvivalence. Dále uvidíme, že také ke každé ekvivalenci přísluší rozklad a navíc, že rozklady a ekvivalence jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci.

Věta

Nechť E je ekvivalence na X. Pak systém množin $\Pi_E \subseteq 2^X$ definovaný $\Pi_E = \{[x]_E \mid x \in X\}$ je rozklad na množině X.

Definice

Rozklad Π_E definovaný v předchozí větě se nazývá **rozklad příslušný ekvivalenci** E.

Rozklady a ekvivalence jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci – pro ekvivalenci E na X a pro rozklad Π na X máme $E_{\Pi_E} = E$, $\Pi_{E_\Pi} = \Pi$.

Poznámka: Rozklad na množině X příslušný ekvivalenci E označujeme běžně X/E místo Π_E a nazýváme jej **faktorová množina** X **podle** E.

Pro ekvivalenci E na X můžeme uvažovat zobrazení $f_E : X \to X/E$, kde $f_E(x) = [x]_E$ pro každý $x \in X$; nazýváme jej **přirozené (kanonické) zobrazení**.

Poznámka: Zřejmě každé přirozené zobrazení je vždy surjektivní.

Rozklady a ekvivalence jsou ve vzájemně jednoznačné korespondenci – pro ekvivalenci E na X a pro rozklad Π na X máme $E_{\Pi_E} = E$, $\Pi_{E_\Pi} = \Pi$.

Poznámka: Rozklad na množině X příslušný ekvivalenci E označujeme běžně X/E místo Π_E a nazýváme jej **faktorová množina** X **podle** E.

Pro ekvivalenci E na X můžeme uvažovat zobrazení $f_E : X \to X/E$, kde $f_E(x) = [x]_E$ pro každý $x \in X$; nazýváme jej **přirozené** (**kanonické**) **zobrazení**.

Poznámka: Zřejmě každé přirozené zobrazení je vždy surjektivní.

Faktorová množina X/E představuje "zjednodušující pohled" na výchozí množinu X, při kterém jsme ztotožnili ty prvky X, které od sebe nebyly rozlišitelné ekvivalencí E. Pro konečnou X a $E \neq \omega_X$ navíc platí, že faktorová množina X/E je ostře menší než výchozí množina X, tj. platí $|X/E| < |X|$.

Faktorizace jako obecná metoda zmenšení výchozí množiny (třeba souboru dat) má aplikace v informatice například při analýze dat a shlukování.

Obsah

Kromě ekvivalencí a rozkladů existují další přirozené pohledy na to "jak zjednodušit nazírání" na výchozí množinu. Jedním z nich je **surjektivní zobrazení**. Pokud je zobrazení $f : X \to Y$ surjektivní, pak lze obraz $f(x)$ prvku x chápat jako vyjádření: "prvek x nahradíme (zjednodušíme) prvkem $f(x)$".

Ukážeme, že surjektivní zobrazení a ekvivalence mají zvláštní vztah. Pro zobrazení $f : X \to Y$ definujme binární relaci E_f na X předpisem

$$\langle x, y\rangle \in E_f \quad \text{právě když} \quad f(x) = f(y).$$

Zřejmě E_f je ekvivalence, tzv. **ekvivalence indukovaná zobrazením** f.

Věta (o přirozeném zobrazení)

Nechť $g : X \to Y$ je zobrazení. Pak existuje injektivní zobrazení $h : X/E_g \to Y$ takové, že $g = f_{E_g} \circ h$. Pokud je navíc g surjektivní, pak h je bijekce.

Ve smyslu "zjednodušení pohledů" a "nerozlišitelnosti" jsou tedy ekvivalence a surjektivní zobrazení vzájemně nahraditelné.

Příklad

Vezměme surjektivní zobrazení $g : \mathbb{Z} \to \{-1, 0, 1\}$, které každému celému číslu $z \in \mathbb{Z}$ přiřazuje prvek z $\{-1, 0, 1\}$ předpisem

$$g(z) = -1 \text{ pokud } z < 0,$$
$$g(z) = 1 \text{ pokud } z > 0,$$
$$g(z) = 0 \text{ jinak.}$$

Zobrazení g tedy reprezentuje funkci **signum**. Faktorová množina X/E_g se skládá ze tří tříd rozkladu: $\{x \in \mathbb{Z} \mid x < 0\}$, $\{0\}$ a $\{x \in \mathbb{Z} \mid x > 0\}$. Z intuitivního pohledu g i X/E_g reprezentují zjednodušení množiny celých čísel, které jsme získali "odhlédnutím od konkrétní číselné hodnoty a soustředěním se pouze na znaménko".

Obsah

Uspořádání je v informatice zcela zásadní ačkoliv si to někdy neuvědomujeme. Mezi základní výbavu každého informatika patří znalost problému třídění a typických třídících algoritmů. Problém třídění jako takový však de facto nemá smysl uvažovat pokud bychom na množině klíčů, podle kterých třídíme, nezavedli nějakou smysluplnou relaci uspořádání – obvykle ji však chápeme jako "určenou daným kontextem" a explicitně ji nezdůrazňujeme. Uspořádání množin může výrazně zvýšit efektivitu některých algoritmů, například vyhledávání.

Definice

Reflexivní, antisymetrická a tranzitivní binární relace R na X se nazývá **uspořádání**. Úplné uspořádání se nazývá **lineární uspořádání** neboli **řetězec**. Pokud je R uspořádání na X, pak se $\langle X, R \rangle$ nazývá **uspořádaná množina**.

Relaci uspořádání na X obvykle značíme $\leq$ v souladu s intuitivním chápáním uspořádání a místo $\langle x, y \rangle \in \leq$ píšeme $x \leq y$. Zdůrazněme ale, že označení $\leq$ v tuto chvíli nemá (obecně) nic společného se srovnáváním čísel, na které jsme zvyklí. Pro vyjádření faktu $x \leq y$ a $x \neq y$ budeme používat stručný zápis $x < y$.

Uspořádání pořád ještě není formálním protějškem "uspořádání" na které jsme zvyklí při porovnávání čísel. Je-li $\langle X, \leq \rangle$ uspořádaná množina, pak mohou existovat $x, y \in X$, pro které neplatí ani $x \leq y$ ani $y \leq x$ (definice to nevylučuje). V tomto případě říkáme, že prvky $x, y \in X$ jsou **nesrovnatelné**, což někdy značíme $x \parallel y$. V opačném případě (buď $x \leq y$ nebo $y \leq x$) řekneme, že prvky $x, y \in X$ jsou **srovnatelné**. Je-li $\leq$ lineární uspořádání na X, pak je $\leq$ úplná relace, což znamená, že každé dva prvky jsou srovnatelné. Lineární uspořádání tedy lze chápat jako matematický protějšek "tradičního srovnávání čísel".

Každá relace identity ω_X je uspořádání, které nazýváme **antiřetězec**. Je-li $\leq$ na X antiřetězec (jinými slovy: $\leq = \omega_X$), pak pro každé dva různé $x, y \in X$ máme $x \parallel y$. Antiřetězce jsou v jistém smyslu nejmenší uspořádání, protože každé uspořádání $\leq$ na X obsahuje ω_X.

Příklad

Následující relace R jsou uspořádání na $X = \{x | \langle x, x\rangle \in R\}$:

a) $\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
b) $\{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle \langle d, b\rangle, \langle d, c\rangle, \langle d, d\rangle\}$,
c) $\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$,
d) $\{\langle a, a\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle, \langle d, b\rangle, \langle d, d\rangle,$ $\langle e, a\rangle, \langle e, b\rangle, \langle e, c\rangle, \langle e, d\rangle \langle e, e\rangle\}$.

Příklad

Číselné množiny $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \ldots$ jsme běžně zvyklí uspořádávat relací "menší rovno", přitom tato relace je zřejmě reflexivní, antisymetrická, tranzitivní i úplná – jedná se tedy o lineární uspořádání, kterému budeme říkat **přirozené uspořádání čísel** (přirozených, celých, racionálních, ...). Uvědomme si však, že přirozené uspořádání čísel není jediné možné uspořádání číselných množin! Vezměme si například množinu $\mathbb{N}$ a pro $x, y \in \mathbb{N}$ položme $x \leq y$, právě když x dělí y. Pak například $2 \leq 4$, ale $2 \not\leq 3$. Snadno nahlédneme, že takto zavedené $\leq$ je rovněž uspořádání na $\mathbb{N}$, které není lineární (například $2 \parallel 3$). Na $\mathbb{N}$ ale existují i lineární uspořádání různá od přirozeného uspořádání, dokonce je jich nekonečně mnoho. Označíme-li například $\leq$ přirozené uspořádání $\mathbb{N}$, pak $R = (\leq - \{\langle 1, 2\rangle\}) \cup \{\langle 2, 1\rangle\}$ je lineární uspořádání, ve kterém jsme oproti $\leq$ "zaměnili dvojku za jedničku", tj. $2 < 1 < 3 < 4 < \ldots$.

Příklad

Uvažujme nyní množinu pravdivostních hodnot $X = \{0, 1\}$. Pro $x, y \in X$ položíme $x \leq y$, právě když $x \to y = 1$. Z vlastností logické operace $\to$ plyne, že $\leq$ je lineární uspořádání na X, pro které platí $0 \leq 1$, to jest slovně: "nepravda je menší než pravda".

Příklad

Množinová inkluze $\subseteq$ je uspořádání, které není obecně lineární.

Věta – princip duality

Nechť $\leq$ je uspořádání na X. Pak $\leq^{-1}$ je uspořádání na X, které označujeme $\geq$.

Konečné uspořádání $\leq$ na X je relace, můžeme ji tedy reprezentovat binární maticí nebo příslušným orientovaným grafem. Díky speciálním vlastnostem konečných uspořádání je však můžeme znázorňovat mnohem přehledněji pomocí speciálních diagramů. Ke každému uspořádání $\leq$ na X lze uvažovat odvozenou relaci $\prec$ definovanou předpisem

$$x \prec y \text{, právě když } x < y \text{ a } \forall z \in X \text{ platí:}$$
$$\text{pokud } x \leq z \leq y \text{, pak } z \in \{x, y\}.$$

Relaci $\prec$ nazýváme **pokrytí** příslušné $\leq$, výraz $x \prec y$ čteme "x je pokryt y" nebo "y pokrývá x". Zřejmě máme $\prec \subseteq \leq$, to jest relace $\prec$ je obsažena v uspořádání $\leq$. Relace pokrytí je dle definice irreflexivní, asymetrická (plyne z vlastností $<$) a obecně není tranzitivní.

Na relaci pokrytí je založena jedna z metod jak znázornit konečnou uspořádanou množinu, tak zvané **Hasseovy diagramy** uspořádaných množin. Diagramy jsou složeny z uzlů reprezentujících prvky množiny X a hran, které vyznačují relaci pokrytí $\prec$ příslušnou danému uspořádání $\leq$ na X. Podrobněji, prvky množiny X znázorníme jako uzly (to jest "body") v rovině tak, aby v případě, kdy $x < y$, ležel bod x níže než bod y. Dva body $x, y \in X$ spojíme v diagramu hranou (úsečkou), právě když $x \prec y$. Horizontální umístění bodů je vhodné volit tak, aby pokud možno nedocházelo ke křížení hran.

Nyní se budeme zabývat existencí speciálních prvků v uspořádaných množinách a jejich vzájemnému vztahu. Například vezmeme-li přirozené uspořádání $\leq$ na množině $\mathbb{N}$, pak o čísle 1 říkáme, že je "nejmenší". Správně bychom ale měli říkat "nejmenší vzhledem k uspořádání $\leq$", protože vlastnosti jako jsou "být nejmenší", "být minimální" a podobně, jsou těsně vázány k uvažovanému uspořádání. Nyní si tyto a analogické speciální prvky uspořádaných množin přesně zavedeme.

Definice

Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina. Prvek $x \in X$ se nazývá

- **minimální**, jestliže $\forall y \in X$ platí: pokud $y \leq x$, pak $x = y$,
- **nejmenší**, jestliže $x \leq y$ pro každý $y \in X$,
- **maximální**, jestliže $\forall y \in X$ platí: pokud $y \geq x$, pak $x = y$,
- **největší**, jestliže $x \geq y$ pro každý $y \in X$.

Věta

Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina. Pak platí

(i) v $\langle X, \leq \rangle$ existuje nejvýše jeden největší a nejvýše jeden nejmenší prvek;

(ii) je-li $x \in X$ největší (nejmenší) prvek, pak je také maximální (minimální);

(iii) pokud je $\leq$ lineární uspořádání, pak je $x \in X$ největší (nejmenší) prvek, právě když je maximální (minimální).

Příklad

Budeme-li uvažovat číselnou množinu $\mathbb{N}$ a její přirozené uspořádání $\leq$, pak číslo 1 je nejmenším a zároveň minimálním prvkem v $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$. Žádný největší ani maximální prvek v $\langle \mathbb{N}, \leq \rangle$ neexistuje. Pokud bychom uvažovali množinu $\mathbb{N} - \{1\}$ a pokud bychom na ní zavedli uspořádání $\leq$ předpisem: $x \leq y$, právě když x dělí y, pak by $\langle \mathbb{N} - \{1\}, \leq \rangle$ měla nekonečně mnoho minimálních prvků, kterými by byla právě všechna prvočísla. Na druhou stranu $\langle \mathbb{N} - \{1\}, \leq \rangle$ by neměla žádný nejmenší prvek, ani žádný největší či maximální prvek. Například $\mathbb{Q}$ uspořádaná přirozeným uspořádáním nemá žádný ze speciálních prvků uvedených v předchozí definici.

Příklad

Potenční množina 2^U uspořádaná množinovou inkluzí $\subseteq$ má nejmenší a zároveň minimální prvek, kterým je $\emptyset$ a dále má i největší a zároveň maximální prvek, kterým je množina U.

Nyní obrátíme naši pozornost k prvkům uspořádané množiny $\langle X, \leq \rangle$, které mají speciální význam vzhledem k některým podmnožinám X.

Definice

Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a nechť $Y \subseteq X$. Definujeme množiny

$$L(Y) = \{x \in X \,|\, x \leq y \text{ platí pro každé } y \in Y\},$$

$$U(Y) = \{x \in X \,|\, x \geq y \text{ platí pro každé } y \in Y\}.$$

$L(Y)$ se nazývá **dolní kužel množiny Y v** $\langle X, \leq \rangle$. $U(Y)$ se nazývá **horní kužel množiny Y v** $\langle X, \leq \rangle$.

Dolní kužel množiny Y v $\langle X, \leq \rangle$ obsahuje tedy právě ty prvky z X, které jsou menší nebo rovny všem prvkům obsaženým v Y, analogicky pro horní kužel.

Snadno nahlédneme, že kužely jsou opět uspořádáné množiny.

Definice

Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina a nechť $Y \subseteq X$. Pokud má $L(Y)$ největší prvek, pak se nazývá **infimum** Y a označuje se $\inf(Y)$. Pokud má $U(Y)$ nejmenší prvek, pak se nazývá **supremum** Y a označuje se $\sup(Y)$.

Označení: Speciálně pro $\{x, y\} \subseteq X$ píšeme $\inf(x, y)$ místo $\inf(\{x, y\})$, analogicky pro suprémum.

Poznámka: Suprémum a infimum dané množiny obecně nemusí existovat, viz přednáška.

Na základě existence infima či supréma ke každým dvěma prvkům definujeme speciální uspořádané množiny zvané polosvazy a svazy.

Definice

Nechť $\langle X, \leq \rangle$ je uspořádaná množina. Pokud pro každé $x, y \in X$ existuje $\inf(x, y)$, pak $\langle X, \leq \rangle$ nazveme **průsekový polosvaz**. Pokud pro každé $x, y \in X$ existuje $\sup(x, y)$, pak $\langle X, \leq \rangle$ nazveme **spojový polosvaz**. Je-li $\langle X, \leq \rangle$ průsekový i spojový polosvaz, pak $\langle X, \leq \rangle$ nazveme **svaz**.

Svaz je tedy uspořádaná množina, kde ke každým dvěma prvkům existuje jejich infimum i supremem.

Poznámka: Každý konečný svaz má nejmenší a největší prvek. U nekonečných svazů to obecně neplatí, viz přednáška.