

Úvod do informatiky

přednáška osmá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu R. Bělohávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008.

- 1 Kombinatorika: pravidla součtu a součinu
- 2 Kombinatorika: permutace, variace, kombinace

- 1 Kombinatorika: pravidla součtu a součinu
- 2 Kombinatorika: permutace, variace, kombinace

- Kombinatorika se zabývá určováním počtu možností, které mohou nastat za předepsaných podmínek.
- Kombinatorika je jednou z nejužitečnějších oblastí diskrétní matematiky.
- Kombinatorika má použití v mnoha praktických oblastech našeho života.
- Kombinatorika je úzce spjata s bezpečností počítačových systémů (třeba s bezpečností hesla) se šifrováním a dešifrováním zpráv.

Pravidlo součtu

Pravidla součtu a součinu jsou dvě základní kombinatorická pravidla. Mnoho dalších pravidel vzniká jejich kombinováním.

Pravidlo součtu

Lze-li úkol A provést m způsoby a lze-li úkol B provést n způsoby, přičemž žádný z m způsobů provedení úkolu A není totožný s žádným z n způsobů provedení úkolu B , pak provést úkol A **nebo** úkol B lze $m + n$ způsoby.

Příklad

Kolika způsoby můžeme vybrat jeden prvek z množiny $A = \{a, b, c, d\}$ nebo množiny $B = \{e, f, g\}$?

Řešení: $4 + 3 = 7$ způsoby.

Pravidlo součinu

Lze-li úkol C rozložit na po sobě následující úkoly A a B (tj. provést C znamená provést nejdříve A a **potom** B) a lze-li úkol A provést m způsoby a úkol B lze provést n způsoby, pak lze úkol C provést $m \cdot n$ způsoby.

Příklad

Jana má na výletě pět různě barevných triček a tři nestejně sukňe. Kolika způsoby si může vzít tričko a sukni, aby pokaždé vypadala jinak?

Řešení: $5 \cdot 3 = 15$ způsoby.

Příklad

Zřejmě: $|M \times N| = |M| \cdot |N|$.

Pravidlo součtu lze snadno zobecnit na konečný počet úkolů.

Příklad

V knihovně je šest různých knih od Karla Čapka, dvě různé knihy od Boženy Němcové a čtyři různé knihy od Aloise Jiráska. Kolika způsoby si můžeme z této knihovny vybrat knihu, kterou napsal K. Čapek nebo B. Němcová nebo A. Jirásek?

Řešení: $6 + 2 + 4 = 12$ způsoby.

Pravidlo součinu lze snadno zobecnit na konečný počet úkolů.

Příklad

V restauraci mají tři druhy polévek, sedm možností výběru hlavního jídla a dva druhy moučnicku. K pití pak kávu, limonádu nebo pivo. Kolika způsoby si z nabídky host může vybrat oběd, bude-li jíst polévku, hlavní jídlo, moučnick a pít jeden nápoj?

Řešení: $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 126$ způsoby.

Pravidlo součtu lze snadno zobecnit na konečný počet úkolů.

Příklad

V knihovně je šest různých knih od Karla Čapka, dvě různé knihy od Boženy Němcové a čtyři různé knihy od Aloise Jiráska. Kolika způsoby si můžeme z této knihovny vybrat knihu, kterou napsal K. Čapek nebo B. Němcová nebo A. Jirásek?

Řešení: $6 + 2 + 4 = 12$ způsoby.

Pravidlo součinu lze snadno zobecnit na konečný počet úkolů.

Příklad

V restauraci mají tři druhy polévek, sedm možností výběru hlavního jídla a dva druhy moučníku. K pití pak kávu, limonádu nebo pivo. Kolika způsoby si z nabídky host může vybrat oběd, bude-li jíst polévku, hlavní jídlo, moučník a pít jeden nápoj?

Řešení: $3 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3 = 126$ způsoby.

Kolika způsoby lze seřadit určitý počet objektů? Kolika způsoby lze vybrat určitý počet objektů z daných objektů, když na pořadí výběru záleží? Co když na pořadí výběru nezáleží? Co když se prvky ve výběru nemohou opakovat? Co když se opakovat mohou? Tyto a podobné otázky se často objevují v různých kombinatorických úlohách. Odpovědi na ně lze nalézt použitím pravidel součtu a součinu. Protože se však tyto otázky objevují opravdu často, odvodíme si vzorce, které na některé tyto otázky odpovídají. Vzorce, které odvodíme, patří k základům kombinatorického počítání. Avšak pozor, důležitější než vzorce samotné jsou úvahy, které k nim vedou.

Poznámka: Způsobů jak vyřešit kombinatorický problém bývá několik.

- 1 Kombinatorika: pravidla součtu a součinu
- 2 Kombinatorika: permutace, variace, kombinace

Permutace nějakých prvků je jejich seřazení.

Definice

Permutace n (navzájem různých objektů) je libovolné seřazení těchto objektů, tj. seřazení od prvního k n -tému. Počet permutací n objektů budeme značit $P(n)$.

Věta

$$P(n) = n!.$$

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

Kolika různými způsoby lze do řady postavit 20 žáků při nástupu na tělocvik?

Řešení: $20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ způsoby.

Příklad

Kolik různých devíticiferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 1 až 9?

Řešení: $9! = 362\,880$.

Příklad

Kolika způsoby lze postavit do řady na polici deset různých knih českých a pět různých knih anglických tak, že nejprve budou knihy české a vedle nich pak knihy anglické?

Řešení: Snadné.

Seřazujeme-li objekty z nichž některé jsou stejné, provádíme tzv. permutace s opakováním.

Definice

Je dáno n objektů rozdělených do r skupin, které mají po řadě n_1, \dots, n_r objektů, tj. $n_1 + \dots + n_r = n$. Objekty v každé ze skupin jsou navzájem nerozlišitelné. Každé seřazení těchto n objektů se nazývá **permutace s opakováním**. Počet takových permutací značíme $P(n_1, \dots, n_r)$.

Věta

Pro $n_1 + \dots + n_r = n$ je $P(n_1, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_r!}$.

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

V krabičce je 10 pastelek, z toho 4 stejné červené, 3 stejné modré, 2 stejné žluté a jedna zelená pastelka. Kolika způsoby lze pastelky v krabičce uspořádat?

Řešení: Snadné.

Příklad

Kolik slov (i nesmyslných) lze sestavit přerovnáním písmen ve slově MISSISSIPPI?

Řešení: Snadné.

Variace je výběr, u kterého záleží na pořadí vybíraných prvků.

Definice

Je dáno n (navzájem různých objektů) a číslo $r \leq n$. **Variace** r (objektů) z n (objektů) je libovolný výběr r objektů z daných n objektů, ve kterém **záleží** na pořadí vybíraných objektů. Počet takových variací značíme $V(n, r)$.

Věta

$$V(n, r) = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

Důkaz: viz přednáška.

Poznámka: $V(n, n) = n! = P(n)$, tedy počet variací n z n je stejný jako počet permutací n objektů.

Příklad

Konference se zúčastnilo 90 delegátů. Kolika (různými) způsoby mohli zvolit čtyřčlenný výbor ve složení: předseda, místopředseda, jednatel a pokladník?

Řešení: Snadné.

Příklad

Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel s různými ciframi lze sestavit z cifer 3, 4, 5, 6, 8, 9?

Řešení: Snadné.

Výběry, ve kterých záleží na pořadí vybíraných prvků a ve kterých se prvky mohou opakovat, nazýváme variace s opakováním.

Definice

Jsou dány objekty n různých typů. Objektů každého typu je neomezeně mnoho a jsou navzájem nerozlišitelné. **Variace** r (objektů) z n (objektů) **s opakováním** je libovolný výběr r objektů z daných objektů n typů, ve kterém **záleží** na pořadí vybíraných objektů. Počet takových variací značíme $\overline{V}(n, r)$.

Věta

$$\overline{V}(n, r) = n^r.$$

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

Kolik různých přirozených čtyřciferných čísel lze sestavit z cifer 3, 4, 5, 6, 8, 9, jestliže se cifry mohou opakovat?

Řešení: Snadné.

Příklad

Mějme n různých výrokových symbolů. Kolika různými způsoby je můžeme ohodnotit (dvěma pravdivost. hodnotama) 0 a 1?

Řešení: Snadné.

Příklad

Kolik značek Morseovy abecedy lze sestavit z teček a čárek, vytváříme-li skupiny o jednom až čtyřech prvcích?

Řešení: Snadné.

Kombinace je výběr, u kterého nezáleží na pořadí vybíraných prvků.

Definice

Je dáno n (navzájem různých objektů) a číslo $r \leq n$.

Kombinace r (objektů) z n (objektů) je libovolný výběr r objektů z daných n objektů, ve kterém **nezáleží** na pořadí vybíraných objektů. Počet takových kombinací značíme $\binom{n}{r}$.

Čísla $\binom{n}{r}$ se nazývají **kombinační čísla** a označují se také $C(n, r)$ (čte se " n nad r ").

Věta

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)! \cdot r!}, \text{ tedy } C(n, r) = \frac{V(n, r)}{r!}.$$

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

Ve třídě je 30 žáků. Kolika způsoby lze vybrat čtveřici žáků na zkoušení?

Řešení: Snadné.

Příklad

Kolika způsoby lze ze skupiny deseti chlapců a pěti děvčat vybrat trojici, ve které budou dvě děvčata a jeden chlapec?

Řešení: Snadné.

Příklad

Na florbalovém turnaji, kterého se zúčastní 5 týmů, sehraje každý tým s ostatními právě 1 utkání. Kolik zápasů bude celkem sehráno?

Řešení: Snadné.

Tvrzení

$$\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{0} = 1.$$

Tvrzení

Pro $k, n \in \mathbb{N}$, kde $k < n$ platí: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Binomická věta

Pro reálná čísla a, b a nezáporné celé číslo n je

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k.$$

Příslušné binomické koeficienty můžeme snadno najít v tzv. Pascalově trojúhelníku:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & & & & & \binom{0}{0} & & & & & & & & & \\ & & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & & & & & & \\ & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & & & & & & & \\ & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & & & & & & & \\ \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} & & & & & & & \\ \binom{5}{0} & & \binom{5}{1} & & \binom{5}{2} & & \dots & & \binom{5}{3} & & \binom{5}{4} & & \binom{5}{5} & & & \\ & & & & & & \dots & & & & & & & & & \end{array}$$

Vzhledem k tomu, že $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, má trojúhelník po stranách samé jedničky. Z platnosti vztahu $\binom{n}{r} = \binom{n}{n-r}$ musí být trojúhelník souměrný. A na základě platnosti identity $\binom{n}{r} = \binom{n-1}{r-1} + \binom{n-1}{r}$ vznikají neokrajová čísla v řadkách jako součet dvou čísel na předchozím řádku.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|-----|---|----|---|---|---|
| | | | | 1 | | | | | |
| | | | | 1 | | 1 | | | |
| | | | 1 | | 2 | | 1 | | |
| | | 1 | | 3 | | 3 | | 1 | |
| | 1 | | 4 | | 6 | | 4 | | 1 |
| 1 | | 5 | | 10 | | 10 | | 5 | 1 |
| | | | | ... | | | | | |

Příklad

Pomocí binomické věty a s využitím Pascalova trojúhelníka odvod'te vzorec pro $(a + b)^5$.

Řešení: Snadné.

Výběr, ve kterém nezáleží na pořadí prvků a ve kterém se prvky mohou opakovat, se nazývá kombinace s opakováním.

Definice

Jsou dány objekty n různých typů. Objektů každého typu je neomezeně mnoho a jsou navzájem nerozlišitelné. **Kombinace** r (objektů) z n (objektů) **s opakováním** je libovolný výběr r objektů z daných objektů n typů, ve kterém **nezáleží** na pořadí vybíraných objektů. Počet takových kombinací značíme $\overline{C}(n, r)$.

Věta

$$\overline{C}(n, r) = \binom{n+r-1}{n-1} = \binom{n+r-1}{r}.$$

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

Kolika způsoby lze koupit v prodejně 5 sešitů, mají-li 3 druhy sešitů v dostatečném množství?

Řešení: Snadné.

Příklad

V cukrárně mají pět druhů dortů v dostatečném množství. Kolika způsoby si můžeme koupit osm dortů?

Řešení: Snadné.

Poznámka: Zastavme se u pojmů permutace s opakováním, variace s opakováním a kombinace s opakováním. Ve všech případech máme vlastně objekty rozděleny do několika typů. Zatímco však u permutací s opakováním je objektů každého typu předepsaný počet a tyto počty mohou být pro různé typy různé, u variací i kombinací s opakováním je objektů každého typu neomezeně mnoho.

Dirichletův (šuplíkový) princip

Je-li alespoň $r + 1$ objektů rozděleno do r šuplíků, pak musí existovat šuplík s nejméně dvěma objekty.

Příklad

Zřejmě žádné zobrazení z množiny A do množiny B nemůže být prosté, jestliže $|A| > |B|$.

Příklad

Mějme čtverec o straně 3 cm a v něm libovolně umístěných 10 bodů. Dokažte, že existují dva body (z těch deseti daných), které jsou od sebe vzdáleny nejvýše $\sqrt{2}$ cm.

Řešení: Snadné.

Dirichletův (zobecněný) princip

Pro přirozená čísla r a m platí: je-li alespoň $mr + 1$ objektů rozděleno do r šuplíků, pak musí existovat šuplík, který má více než m objektů.

Příklad

Dokažte, že v libovolné skupině 97 lidí je určitě alespoň 9 z nich narozeno ve stejný měsíc.

Řešení: Snadné.