Katedra informatiky
Přírodovědecká fakulta
Univerzita Palackého v Olomouci

Úvod do informatiky: řešené příklady ke cvičením

RNDr. Miroslav Kolařík, Ph.D.

Olomouc 2014

Toto skriptum je určeno zejména studentům Katedry informatiky Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého. Text sestává z řešených příkladů, které se obsahově shodují se sylabem povinného předmětu Úvod do informatiky. Potřebnou teorii lze nalézt ve skriptech profesora Bělohlávka: Úvod do informatiky, Olomouc, 2008. Všem čtenářům přeji, ať je jim text ku prospěchu.

V Olomouci, 7. ledna 2014

Miroslav Kolařík

Poznámka. Chyby a překlepy, kterých si všimnete, pošlete prosím na autorův e-mail: miroslav.kolarik@upol.cz

Obsah

1 Matematická logika

Příklad 1 Rozhodněte o pravdivosti následujících výroků s kvantifikátory:

(a) $(\forall x \in \mathbb{R})\ x^2 > 0$;

(b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ \sqrt{x^2} = |x|$;

(c) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = 10$;

(d) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ (x = y \Leftrightarrow x^2 = y^2)$;

(e) $(\exists x \in \mathbb{R})\ (\forall y \in \mathbb{R})\ x \cdot y = y$;

(f) $(\forall x \in \mathbb{R})\ (\exists y \in \mathbb{R})\ x + y = 10$;

(g) $(\exists y \in \mathbb{R})\ (\forall x \in \mathbb{R})\ x + y = 10$.

Řešení.

(a) Není pravdivý pro $x = 0$.

(b) Je pravdivý.

(c) Není pravdivý pro $x = 0$.

(d) Není pravdivý, např. pro $x = 3$, $y = -3$.

(e) Je pravdivý pro $x = 1$.

(f) Je pravdivý.

(g) Není pravdivý.

Poznamenejme, že z úloh (f) a (g) je vidět, že záleží na pořadí různých kvantifikátorů.

Příklad 2 Určete, zda jsou uvedené výrokové formule tautologiemi:

(a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$;

(b) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$.

Řešení. Je-li formule tautologií, pak je pravdivá při každém ohodnocení všech výrokových symbolů, které se v ní vyskytují. V případě (a) i (b) jsou ve formulích jen dva různé výrokové symboly: p a q. Stačí tedy zjistit pravdivostní hodnoty pro čtyři různá ohodnocení výrokových symbolů p a q, konkrétně pro ohodnocení e_1 takové, že $e_1(p) = 0$, $e_1(q) = 0$, pro ohodnocení e_2 takové, že $e_2(p) = 0$, $e_2(q) = 1$, pro ohodnocení e_3 takové, že $e_3(p) = 1$, $e_3(q) = 0$ a nakonec pro ohodnocení e_4 takové, že $e_4(p) = 1$, $e_4(q) = 1$. Přehledně situaci znázorňují následující tabulky:

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
0	0	1	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	1	1	0	0

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$	φ
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

Z posledního sloupce první tabulky vidíme, že formule $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$ je kondradikcí, t.j. není splnitelná, ani tautologií. Z posledního sloupce druhé tabulky vidíme, že formule $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$ (označena v tabulce písmenem φ) je tautologie, neboť je pravdivá při každém ohodnocení e_1, e_2, e_3 a e_4.

Příklad 3 Mějme dánu tříhodnotovou logiku s pravdivostními hodnotami $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$. Definujme na ní spojky negace a implikace takto:

a	$\neg a$
0	1
$\frac{1}{2}$	0
1	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$	1

Určete, zda je formule $\neg(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$ splnitelná.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme pravdivostní hodnotu zadané formule při všech možných ohodnoceních. Vzhledem k tomu, že se v zadané formuli vyskytují právě dva různé výrokové symboly (p a q), bude mít tabulka (kromě záhlaví) $3 \cdot 3 = 9$ řádků.

p	q	$\neg p$	$\neg p \Rightarrow q$	$p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q)$	$\neg(p \Rightarrow (\neg p \Rightarrow q))$
0	0	1	0	1	0
0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	1	1	0
$\frac{1}{2}$	0	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0
1	$\frac{1}{2}$	0	1	1	0
1	1	0	1	1	0

Z posledního sloupce v tabulce je patrné, že zadaná formule je kondradikcí, a tedy není splnitelná.

Příklad 4 Rozhodněte, zda formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ sémanticky vyplývá z formulí $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme, pro která pravdivostní ohodnocení jsou zároveň pravdivé formule $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$. Poté se podíváme, je-li při těchto (dvou) pravdivostních ohodnoceních pravdivá i formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$.

p	q	$\neg(p \Leftrightarrow q)$	$p \vee q$	$\neg(q \wedge p)$	$(p \Rightarrow q) \wedge q$
0	0	0	0	1	0
0	1	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	**1**	**1**	**1**	**0**
1	1	0	1	0	1

Z tabulky vidíme, že formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ sémanticky nevyplývá z formulí $\neg(p \Leftrightarrow q)$, $p \vee q$ a $\neg(q \wedge p)$, neboť při ohodnocení e takovém, že $e(p) = 1$, $e(q) = 0$ je formule $(p \Rightarrow q) \wedge q$ nepravdivá.

Příklad 5 Rozhodněte, jestli formule φ ve tvaru $p \Rightarrow q$ sémanticky vyplývá z množiny formulí $T = \{\neg q \Rightarrow \neg r, p \Rightarrow r\}$.

Řešení. Pomocí tabelace zjistíme, při kterých pravdivostních ohodnoceních jsou současně všechny formule z množiny T pravdivé. Poté se podíváme, je-li při stejných pravdivostních ohodnoceních pravdivá i formule φ.

p	q	r	$\neg q$	$\neg r$	$\neg q \Rightarrow \neg r$	$p \Rightarrow r$	$p \Rightarrow q$
0	0	0	1	1	**1**	**1**	**1**
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	1	**1**	**1**	**1**
0	1	1	0	0	**1**	**1**	**1**
1	0	0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0	1	0
1	1	0	0	1	1	0	1
1	1	1	0	0	**1**	**1**	**1**

Z tabulky vidíme, že formule φ sémanticky vyplývá z množiny formulí T, tedy $\neg q \Rightarrow \neg r, p \Rightarrow r \models p \Rightarrow q$.

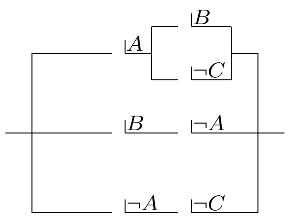
Příklad 6 Formuli $((p \Rightarrow \neg q) \wedge r) \vee (\neg p \Leftrightarrow r)$ převeďte do úplné disjunktivní a úplné konjunktivní normální formy.

Řešení. Nejprve pomocí tabulkové metody (tabelací) zjistíme, při kterých možných ohodnoceních je zadaná formule φ pravdivá a při kterých nepravdivá. Poté sestrojíme odpovídající úplné elementární konjunkce (ÚEK) a úplné elementární disjunkce (ÚED), ze kterých již snadno získáme úplnou disjunktivní normální formu (ÚDNF) a úplnou konjunktivní normální formu (ÚKNF).

p	q	r	$p \Rightarrow \neg q$	$(p \Rightarrow \neg q) \wedge r$	$\neg p \Leftrightarrow r$	φ	ÚEK	ÚED
0	0	0	1	0	0	0		$p \vee q \vee r$
0	0	1	1	1	1	1	$\neg p \wedge \neg q \wedge r$	
0	1	0	1	0	0	0		$p \vee \neg q \vee r$
0	1	1	1	1	1	1	$\neg p \wedge q \wedge r$	
1	0	0	1	0	1	1	$p \wedge \neg q \wedge \neg r$	
1	0	1	1	1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	
1	1	0	0	0	1	1	$p \wedge q \wedge \neg r$	
1	1	1	0	0	0	0		$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$

ÚDNF: $(\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge \neg r)$
ÚKNF: $(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee \neg q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$.

Příklad 7 S využitím zákonů logiky, zjednodušte následující logický obvod:



Řešení. Nejprve si logický obvod přepíšeme do odpovídající formule φ výrokové logiky:

$$((A \wedge (B \vee \neg C)) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

Podformuli ve tvaru $A \wedge (B \vee \neg C)$ přepíšeme pomocí distributivního zákona do tvaru $(A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)$. Výchozí formule φ je tedy ekvivalentní s formulí:

$$(((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg C)) \vee (B \wedge \neg A) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

S využitím asociativního a komutativního zákona (pro spojku $\vee$) je předchozí formule ekvivalentní s následující formulí ψ:

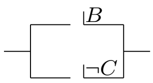
$$((A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)) \vee ((A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)).$$

Dále aplikujeme distributivní a komutativní zákon, a to na podformuli $(A \wedge B) \vee (B \wedge \neg A)$ a na podformuli $(A \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg C)$ a obdržíme formuli χ ve tvaru:

$$((B \wedge (A \vee \neg A)) \vee (\neg C \wedge (A \vee \neg A))),$$

která je ekvivalentní s formulí ψ a tedy i s výchozí formulí φ (což snadno plyne z tranzitivity ekvivalence).

Jelikož $A \vee \neg A$ je tautologie a platí, že tautologie v konjukci s nějakou formulí je ekvivalentní s touto formulí, víme, že $(B \wedge (A \vee \neg A)) \Leftrightarrow B$ a podobně $(\neg C \wedge (A \vee \neg A)) \Leftrightarrow \neg C$. Odsud je χ (a tedy) i φ ekvivalentní s formulí $B \vee \neg C$, kterou již dále nelze zjednodušovat. Výsledný zjednodušený logický obvod (sémanticky ekvivalentní s výchozím obvodem) vypadá tedy takto:



Příklad 8 Nahraďte spojku negace a spojku implikace spojkou

(a) $\Uparrow$ (Sheffer – NAND);

(b) $\Downarrow$ (Nicod – NOR).

Řešení. Připomeňme, že

$$a \Uparrow b \Leftrightarrow \neg(a \wedge b),$$

$$a \Downarrow b \Leftrightarrow \neg(a \vee b).$$

S využitím toho, že $a \Leftrightarrow (a \wedge a)$ a toho, že $a \Leftrightarrow (a \vee a)$ máme:

$$\neg a \Leftrightarrow \neg(a \wedge a) \Leftrightarrow (a \Uparrow a);$$

$$\neg a \Leftrightarrow \neg(a \vee a) \Leftrightarrow (a \Downarrow a).$$

Zbývá nám vyjádřit spojku implikace jen pomocí spojky $\Uparrow$ (resp. $\Downarrow$). K tomu využijeme výše napsané a některých zákonů výrokové logiky. Dostaneme tak:

$$\begin{aligned}
(a \Rightarrow b) \quad &\Leftrightarrow \quad (\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(a \wedge \neg b) \Leftrightarrow (a \Uparrow \neg b) \Leftrightarrow (a \Uparrow (b \Uparrow b));\\
(a \Rightarrow b) \quad &\Leftrightarrow \quad (\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg\neg(\neg a \vee b) \Leftrightarrow \neg(\neg a \Downarrow b) \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow \quad \neg((a \Downarrow a) \Downarrow b) \Leftrightarrow (((a \Downarrow a) \Downarrow b) \Downarrow ((a \Downarrow a) \Downarrow b)).
\end{aligned}$$

2 Množiny

Příklad 9 Jsou dány množiny $M_1 = \{x \in \mathbb{N};\ x|60\}$, $M_2 = \{x \in \mathbb{N};\ 7 < x \leq 12\}$. Zapište výsledek operací $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2$, $M_2 - M_1$.

Řešení. Nejprve vyjádříme množiny M_1 a M_2 výčtem prvků. Množina M_1 obsahuje přirozená čísla, která (beze zbytku) dělí číslo 60; množina M_2 obsahuje přirozená čísla, která jsou větší než 7 a menší nebo rovno 12. Zřejmě tedy $M_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ a $M_2 = \{8, 9, 10, 11, 12\}$. Odtud již snadno určíme, že $M_1 \cup M_2 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 20, 30, 60\}$, $M_1 \cap M_2 = \{10, 12\}$, $M_2 - M_1 = \{8, 9, 11\}$.

Příklad 10 Najděte množiny A, B, pro které platí: $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ a $B - A = \{5, 6\}$.

Řešení. Prvky $1, 2, 3$ zřejmě patří do obou množin. Z podmínky $B - A = \{5, 6\}$ je očividné, že prvky $5, 6$ patří do množiny B a nepatří do množiny A. Máme tedy $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$. Z podmínky $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ je nyní patrné, že v množině A budou kromě prvků $1, 2, 3$ ještě navíc prvky $0, 4, 7$, které nepatří do množiny B. Tedy $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$.

Příklad 11 V $\mathbb{R}$ jsou dány tři intervaly $A = \langle -7; 2\rangle$, $B = \langle -2; 5)$, $C = \langle 2; \infty)$. Pomocí intervalů zapište:

(a) $A \cap B$;

(b) $A \cap C$;

(c) $(A \cup B) \cap C$;

(d) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$;

(e) $\bar{A}$;

(f) $A - B$.

Řešení. Intervaly jsou množiny, čili k obdržení spravných výsledků stačí aplikovat standardní definice operací s množinami. Máme:

(a) $A \cap B = \langle -2; 2\rangle$;

(b) $A \cap C = \{2\}$, zde je výsledkem jednoprvková množina;

(c) $(A \cup B) \cap C = \langle 2; 5)$;

(d) $(A \cap C) \cup (B \cap C) = \langle 2; 5)$, muselo vyjít stejně jako (c);

(e) $\bar{A} = (-\infty; -7) \cup (2; \infty)$, kde $\bar{A}$ je doplněk množiny A do množiny reálných čísel $\mathbb{R}$;

(f) $A - B = \langle -7; -2)$.

Příklad 12 Dokažte, že pro všechny množiny A, B platí $A \cap (A \cup B) = A$.

Řešení. Podle definice rovnosti dvou množin, stačí dokázat, že pro $\forall x$ platí: $x \in (A \cap (A \cup B)) \Leftrightarrow (x \in A)$. Jelikož: $x \in A \cap (A \cup B)$, právě když $x \in A$ a $x \in (A \cup B)$, právě když $x \in A$ a ($x \in A$ nebo $x \in B$), což je dle jedné tautologie výrokové logiky právě když $x \in A$, je důkaz hotov. Poznamenejme, že zde využitá tautologie výrokové logiky, obecně ve tvaru $(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$, se jmenuje zákon absorpce. Pomocí tabelace lze snadno ověřit, že je skutečně tautologií:

p	q	$p \vee q$	$p \wedge (p \vee q)$	$(p \wedge (p \vee q)) \Leftrightarrow p$
0	0	0	0	**1**
0	1	1	0	**1**
1	0	1	1	**1**
1	1	1	1	**1**

Příklad 13 Dokažte, že pro libovolné množiny A, B, C platí

(a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$;

(b) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

Řešení. Pro ověření rovnosti dvou množin, budeme postupovat (stejně jako v předchozím příkladě) tzv. metodou neurčitého prvku. Několikrát použijeme definice pro operace s množinami a známé tautologie výrokové logiky:

(a) $[x \in (A - (B \cup C))] \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin (B \cup C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge x \notin B \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [x \in (A - B) \wedge x \in (A - C)] \Leftrightarrow [x \in (A - B) \cap (A - C)]$.

(b) $[x \in (A \cup B) - C] \Leftrightarrow [x \in A \cup B \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [(x \in A \vee x \in B) \wedge x \notin C] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge x \notin C) \vee (x \in B \wedge x \notin C)] \Leftrightarrow [x \in (A - C) \cup (B - C)]$.

Příklad 14 Výčtem prvků vypište všechny prvky potenční množiny $C = \{a, b, c, d\}$.

Řešení. Potenční množina je množina všech podmnožin dané množiny. Obecně, n-prvková množina má 2^n-prvkovou potenční množinu. V tomto příkladě bude tedy mít potenční množina čtyřprvkové množiny C právě šestnáct prvků:

$$\begin{aligned} 2^C = \; & \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{b,c\}, \{b,d\}, \{c,d\}, \{a,b,c\}, \\ & \{a,b,d\}, \{a,c,d\}, \{b,c,d\}, \{a,b,c,d\}\}. \end{aligned}$$

Příklad 15 Dokažte, že $2^A \cup 2^B \subseteq 2^{(A \cup B)}$.

Řešení. Dokážeme standardně metodou neurčitého prvku: $[x \in 2^A \cup 2^B] \Leftrightarrow [x \in 2^A \vee x \in 2^B] \Leftrightarrow [(x \subseteq A) \vee (x \subseteq B)] \Rightarrow [x \subseteq (A \cup B)] \Leftrightarrow x \in 2^{(A \cup B)}$. Poznamenejme, že (v důkaze jediná) implikace nemůže být nahrazena ekvivalencí, což znamená, že obecně neplatí rovnost $2^A \cup 2^B = 2^{(A \cup B)}$.

3 Úvod do relací

Příklad 16 Nechť $A = \{\{x\}, y\}$, $B = \{z, y, \{x, y\}\}$. Určete $(A \times B) \cap (B \times A)$.

Řešení. Nejprve určíme výčtem prvků množiny $A \times B$ a $B \times A$. Poté již snadno spočítáme hledaný průnik. Máme:

$$A \times B = \{\langle\{x\}, z\rangle, \langle\{x\}, y\rangle, \langle\{x\}, \{x, y\}\rangle, \langle y, z\rangle, \langle y, y\rangle, \langle y, \{x, y\}\rangle\},$$

$$B \times A = \{\langle z, \{x\}\rangle, \langle z, y\rangle, \langle y, \{x\}\rangle, \langle y, y\rangle, \langle\{x, y\}, \{x\}\rangle, \langle\{x, y\}, y\rangle\}.$$

Odtud $(A \times B) \cap (B \times A) = \{\langle y, y\rangle\}$.

Příklad 17 Dokažte vlastnosti kartézského součinu:

(a) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;

(b) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$;

(c) $(A \subseteq C \wedge B \subseteq D) \Rightarrow (A \times B) \subseteq (C \times D)$.

Řešení. Budeme postupovat metodou neurčitého prvku, kterým bude uspořádaná dvojice $\langle x, y\rangle$.

(a) $[\langle x, y\rangle \in A \times (B \cup C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in (B \cup C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in C)] \Leftrightarrow [(\langle x, y\rangle \in (A \times B)) \vee (\langle x, y\rangle \in (A \times C))] \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in (A \times B) \cup (A \times C)]$.

(b) $[\langle x, y\rangle \in A \times (B - C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge y \in (B - C)] \Leftrightarrow [x \in A \wedge (y \in B \wedge y \notin C)] \Leftrightarrow [(x \in A \wedge y \in B) \wedge (x \in A \wedge y \notin C)] \Leftrightarrow [(\langle x, y\rangle \in (A \times B)) \wedge (\langle x, y\rangle \notin (A \times C))] \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in (A \times B) - (A \times C)]$.

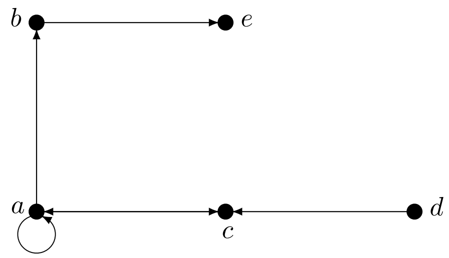
(c) Nechť $A \subseteq C$, $B \subseteq D$. Pak pro $\langle x, y\rangle \in A \times B$ máme: $x \in A \wedge y \in B$, odtud (dle předpokladu) $x \in C \wedge y \in D$, tedy $\langle x, y\rangle \in C \times D$.

Příklad 18 Nechť A={a,b,c,d,e}. Na množině A definujme binární relaci R takto:

$$R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, c\rangle, \langle b, e\rangle\}.$$

Znázorněte relaci R orientovaným grafem a určete výčtem prvků relaci $R \circ R$.

Řešení. Relaci $R \subseteq A \times A$ odpovídá následující orientovaný graf:



Relace $R \circ R = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle a, e\rangle, \langle c, a\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle, \langle d, a\rangle\}$.

Příklad 19 Nechť $R, S \subseteq X \times Y$, $U \subseteq Y \times Z$, $X = \{1, 2, 3\}$, $Y = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $Z = \{\triangle, \square, \star\}$, $R = \{\langle 1, \alpha\rangle, \langle 1, \gamma\rangle, \langle 2, \gamma\rangle, \langle 3, \beta\rangle\}$, $S = \{\langle 1, \gamma\rangle, \langle 3, \alpha\rangle, \langle 3, \beta\rangle\}$, $U = \{\langle \alpha, \star\rangle, \langle \gamma, \triangle\rangle, \langle \gamma, \star\rangle\}$. Určete matice M_R, M_S, M_U, $M_{R\cup S}$, $M_{R\cap S}$, M_{R-S}, $M_{R\circ U}$, $M_{R^{-1}}$.

Řešení. Nejprve určíme matice M_R, M_S a M_U odpovídající relacím R, S a U. Zřejmě:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dále určíme matici $M_{R\cap S}$, která odpovídá průniku relací R a S, matici $M_{R\cup S}$, která odpovídá sjednocení relací R a S a matici M_{R-S}, která odpovídá rozdílu relací R a S. Máme:

$$M_{R\cup S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R\cap S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R-S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nakonec vypočítáme matici $M_{R\circ U}$ korespondující se složením relací R a U a matici $M_{R^{-1}}$, která koresponduje s maticí příslušnou k (inverzní) relaci R^{-1}:

$$M_{R\circ U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{R^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Příklad 20 Dokažte vlastnosti relací $R, S, T \subseteq A \times A$:

(a) $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$;

(b) $(S \cup T) \circ R = (S \circ R) \cup (T \circ R)$.

Řešení. Potřebujeme ověřit rovnost dvou množin. Důkaz provedeme metodou neurčitého prvku. Vzhledem k tomu, že R, S, T jsou binární relace, neurčitým prvkem bude uspořádaná dvojice $\langle x, y\rangle$.

(a) $[\langle x, y\rangle \in (R \cup S)^{-1}] \Leftrightarrow [\langle y, x\rangle \in (R \cup S)] \Leftrightarrow [\langle y, x\rangle \in R \vee \langle y, x\rangle \in S] \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in R^{-1} \vee \langle x, y\rangle \in S^{-1}] \Leftrightarrow [\langle x, y\rangle \in (R^{-1} \cup S^{-1})]$.

(b) $[\langle x, y\rangle \in (S \cup T) \circ R] \Leftrightarrow [\exists z \in A : (\langle x, z\rangle \in S \vee \langle x, z\rangle \in T) \wedge \langle z, y\rangle \in R] \Leftrightarrow [\exists z \in A : (\langle x, z\rangle \in S \wedge \langle z, y\rangle \in R) \vee (\langle x, z\rangle \in T \wedge \langle z, y\rangle \in R)] \Leftrightarrow [(\langle x, y\rangle \in S \circ R) \vee (\langle x, y\rangle \in T \circ R)] \Leftrightarrow \langle x, y\rangle \in (S \circ R) \cup (T \circ R)]$.

4 Zobrazení (funkce)

Příklad 21 Určete, které z následujících relací mezi množinami X a Y jsou zobrazení z X do Y. Pokud je daná relace zobrazením, určete, zda je injektivní či surjektivní. Máme:

(a) $R_1 = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y;\ x^2 + y^2 = 1\}$, $X = \langle -1; 1\rangle$, $Y = \mathbb{R}$;

(b) $R_2 = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y;\ x^2 = y\}$, $X = Y = \mathbb{R}$;

(c) $R_3 = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y;\ x = y^2\}$, $X = \mathbb{R}_0^+$, $Y = \mathbb{R}$;

(d) $R_4 = \{\langle x, y\rangle \in X \times Y;\ x^3 = y\}$, $X = Y = \mathbb{Q}$;

(e) $R_5 = \{\langle a, c\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, d\rangle\}$, $X = \{a, b, c\}$, $Y = \{a, b, c, d\}$;

(f) $R_6 = \{\langle d, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, d\rangle, \langle c, c\rangle\}$, $X = Y = \{a, b, c, d\}$.

Řešení.

(a) R_1 není zobrazení. Jedná se o kružnici se středem v počátku a poloměrem 1.

(b) R_2 (tzv. kvadratická funkce) je zobrazení, které není ani injektivní, ani surjektivní.

(c) R_3 není zobrazení. Jedná se o parobolu (otevřenou směrem doprava s vrcholem v počátku).

(d) R_4 je zobrazení, které je injektivní a není surjektivní (například pro $y = \frac{1}{2}$, neexistuje takové racionální číslo x, že $\langle x, \frac{1}{2}\rangle \in R_4$).

(e) R_5 není zobrazení.

(f) R_6 je zobrazení, které je injektivní i surjektivní. R_6 je tedy bijekce.

Příklad 22 Které z následujících funkcí f_1 až f_4 jsou injektivní? Které surjektivní? Máme:

(a) $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f_1(n) = n + 1$;

(b) $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f_1(z) = z + 1$;

(c) $f_3 : \{1, 2, \ldots, k\} \to \{1, 2, \ldots, k\}$, $f(i) = \begin{cases} i + 1, & \text{pro } 1 \leq i < k \\ 1, & \text{pro } i = k; \end{cases}$

(d) $f_4 : \mathbb{N} \to \{0, 1, 2, 3\}$, kde $f(j) = \begin{cases} 0, & \text{jestliže } j \text{ je dělitelné 3, ale ne 7} \\ 1, & \text{jestliže } j \text{ je dělitelné 7, ale ne 3} \\ 2, & \text{jestliže } j \text{ je dělitelné 21} \\ 3, & \text{jestliže } j \text{ v ostatních případech.} \end{cases}$

Řešení. Injektivní jsou funkce f_1, f_2 a f_3. Funkce f_4 není injektivní, neboť například čísla 21 a 42 se obě zobrazí na stejnou hodnotu (na 2). Surjektivní jsou funkce f_2, f_3 a f_4. Funkce f_1 není surjektivní, protože na číslo 1 se nezobrazuje žádné přirozené číslo (nulu za přirozené číslo neuvažujeme). Podotkněme ještě, že bijekcemi jsou tedy funkce f_2 a f_3.

Příklad 23 Najděte příklady zobrazení f a g tak, aby g nebyla injekce, ale $f \circ g$ ano, f nebyla surjekce, ale $f \circ g$ ano.

Řešení. Všimneme si, že pro zobrazení $f : X \to Y$ a $g : Y \to Z$, musí být zobrazení $f \circ g$ bijekcí mezi X a Z. Pro vyřešení úlohy pak stačí například vzít: $X = \{x\}$, $Y = \{y_1, y_2\}$, $Z = \{z\}$, $f = \{\langle x, y_1 \rangle\}$, $g = \{\langle y_1, z\rangle, \langle y_2, z\rangle\}$.

Příklad 24 Nechť X a Y jsou konečné množiny. Jaký vztah musí platit mezi $|X|$ a $|Y|$, aby existovalo zobrazení $f : X \to Y$, které je

(a) injekcí;

(b) surjekcí;

(c) bijekcí?

Řešení.

(a) Pro injekci: $|X| \leq |Y|$. Totiž, pokud by počet prvků v množině X byl větší než počet prvků v množině Y, musely by se nějaké (nejméně) dva různé prvky z množiny X zobrazit na jeden prvek z množiny Y, což injekce vylučuje.

(b) Pro surjekci: $|X| \geq |Y|$. Totiž, pokud by počet prvků v množině X byl menší než počet prvků v množině Y, musel by v množině Y existovat (alespoň jeden) prvek, na který by se nezobrazoval žádný prvek z množiny X, což surjekce vylučuje.

(c) Pro bijekci: $|X| = |Y|$. Totiž bijekce (= injekce a surjekce) musí současně splňovat obě nutné podmínky uvedené v řešení (a) a (b).

Příklad 25 Určete všechna zobrazení z množiny $\{a, b, c\}$ do množiny $\{a, b\}$. Která z nich nejsou surjektivní?

Řešení. Následuje seznam všech osmi zobrazení f_1 až f_8:
$f_1(a) = a,\ f_1(b) = a,\ f_1(c) = a;$ $f_2(a) = a,\ f_2(b) = a,\ f_2(c) = b;$
$f_3(a) = a,\ f_3(b) = b,\ f_3(c) = a;$ $f_4(a) = b,\ f_4(b) = a,\ f_4(c) = a;$
$f_5(a) = a,\ f_5(b) = b,\ f_5(c) = b;$ $f_6(a) = b,\ f_6(b) = a,\ f_6(c) = b;$
$f_7(a) = b,\ f_7(b) = b,\ f_7(c) = a;$ $f_8(a) = b,\ f_8(b) = b,\ f_8(c) = b.$
Surjektivní nejsou f_1 a f_8.

5 Vlastnosti binárních relací na množině

Příklad 26 Rozhodněte, které z následujících relací $R \subseteq X \times X$ jsou ekvivalence nebo uspořádání:

(a) $X = \{0, 1, 2, 3\}$, $R = \{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$;

(b) $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 1, 4\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 4, 4\rangle\}$;

(c) $X = \mathbb{Q}$, $R = \{\langle x, y\rangle;\ x, y \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq y^2\}$;

(d) $X = \mathbb{N}$, $R = \{\langle x, y\rangle;\ x, y \in \mathbb{N},\ x \text{ dělí } y\}$;

(e) $X = \{a, b, c, d\}$, $R = \{\langle d, d\rangle, \langle c, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle a, a\rangle\}$.

Řešení.

(a) Relace R není ekvivalence, protože není symetrická, není uspořádání, protože není antisymetrická. Poznamenejme ještě, že R není ani tranzitivní, neboť $\langle 3, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle \in R$, ale $\langle 3, 1\rangle \notin R$.

(b) Relace R není reflexivní, tedy není ani uspořádání ani ekvivalence.

(c) Relace R není symetrická, není antisymetrická ($\langle -1, 1\rangle \in R, \langle 1, -1\rangle \in R$, ale $-1 \neq 1$), tedy R není relace ekvivalence, R není uspořádání.

(d) Relace R je uspořádání. Relace R není ekvivalence, neboť není symetrická.

(e) Relace R je uspořádání i ekvivalence. Jedná se o relaci identity ω_X, která je reflexivní, symetrická, antisymetrická a tranzitivní.

Příklad 27 Na množině $A = \{a, b, c\}$ určete binární relace $R_i \subseteq A \times A$ tak, aby současně měly/neměly čtyři z následujících čtyř vlastností: reflexivita, symetrie, tranzitivita, antisymetrie.

Řešení. Nejprve sestavíme tabulku pro všech 16 možných různých relací R_i:

relace	reflexivita	symetrie	tranzitivita	antisymetrie
R_1	ne	ne	ne	ne
R_2	ne	ne	ne	ano
R_3	ne	ne	ano	ne
R_4	ne	ne	ano	ano
R_5	ne	ano	ne	ne
R_6	ne	ano	ne	ano
R_7	ne	ano	ano	ne
R_8	ne	ano	ano	ano
R_9	ano	ne	ne	ne
R_{10}	ano	ne	ne	ano
R_{11}	ano	ne	ano	ne
R_{12}	ano	ne	ano	ano
R_{13}	ano	ano	ne	ne
R_{14}	ano	ano	ne	ano
R_{15}	ano	ano	ano	ne
R_{16}	ano	ano	ano	ano

Tedy například relace R_{11} má být reflexivní a tranzitivní a zároveň nemá být ani symetrická, ani antisymetrická. Nyní již výčtem prvků vyřešíme úlohu pro jednotlivé případy:

$R_1 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle\}$;

$R_2 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$;

$R_3 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, c\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$;

$R_4 = \{\langle a, b\rangle\}$;

$R_5 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$;

R_6 neexistuje;

$R_7 = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$;

$R_8 = \emptyset$;

$R_9 = R_1 \cup \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$;

$R_{10} = R_2 \cup \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$;

$R_{11} = R_3 \cup \{\langle c, c\rangle\}$;

$R_{12} = R_4 \cup \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$;

$R_{13} = (A \times A) \setminus \{\langle a, c\rangle, \langle c, a\rangle\}$;

R_{14} neexistuje;

$R_{15} = R_7 \cup \{\langle c, c\rangle\}$;

$R_{16} = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$.

Na závěr poznamenejme, že relace R_6 a R_{14} neexistují, neboť, aby nebyly tranzitivní musí obsahovat alespoň dvě uspořádané dvojice, které tranzitivitu porušují (například $\{\langle a,b\rangle, \langle b,c\rangle\}$). Jak R_6, tak i R_{14} mají být navíc symetrické a současně antisymetrické, čehož (při porušení tranzitivity) nelze nijak docílit.

Příklad 28 Které relace z řešení předchozího příkladu jsou

(a) ireflexivní;

(b) asymetrické;

(c) úplné?

Řešení.

(a) Ireflexivní jsou relace R_1, R_2, R_4, R_5 a R_8.

(b) Asymetrické jsou relace R_2, R_4 a R_8.

(c) Úplná je pouze relace R_{11}.

Příklad 29 Nechť $R = \{\langle b,c\rangle, \langle c,c\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$ je binární relace na množině $X = \{a,b,c,d\}$. Určete její reflexivní, symetrický a tranzitivní uzávěr. Dále pak graficky znázorněte relaci $E = \mathrm{Tra}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Ref}(R)))$.

Řešení.

Reflexivní uzávěr: $\mathrm{Ref}(R) = R \cup \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle\}$.

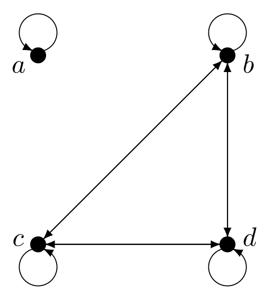
Symetrický uzávěr: $\mathrm{Sym}(R) = R \cup \{\langle c,b\rangle\}$.

Tranzitivní uzávěr: $\mathrm{Tra}(R) = R \cup \{\langle b,d\rangle\}$.

Relace $E = \mathrm{Tra}(\mathrm{Sym}(\mathrm{Ref}(R)))$ je nejmenší ekvivalence (vzhledem k $\subseteq$) obsahující relaci R. Vznikne tak, že se k $\mathrm{Ref}(R)$ vytvoří symetrický uzávěr a k němu pak ještě tranzitivní uzávěr. Zřejmě tedy

$$E = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,d\rangle, \langle b,c\rangle, \langle c,b\rangle, \langle b,d\rangle, \langle d,b\rangle, \langle c,d\rangle, \langle d,c\rangle\}.$$

Grafické znázornění relace E (pomocí orientovaného grafu) je na následujícím obrázku:



6 Ekvivalence a rozklady

Příklad 30 Určete, zda na množině $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ tvoří následující systémy množin rozklady:

(a) $\Pi_1 = \{\{a\}, \{b, c, d\}, \{d, e, f\}, \{g\}\}$;

(b) $\Pi_2 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{e, f, g\}\}$;

(c) $\Pi_3 = \{\{d, a\}, \{g, b, c\}, \{e, f\}\}$;

(d) $\Pi_4 = \{\{d, a\}, \{g, b, c\}, \emptyset, \{e, f\}\}$.

Řešení.

(a) Množina Π_1 rozklad netvoří, neboť množiny $\{b, c, d\}$ a $\{d, e, f\}$ nejsou disjunktní (jejich průnikem je $\{d\}$).

(b) Množina Π_2 rozklad netvoří, protože se prvek b nevyskytuje v žádné z množin Π_2, tedy $\bigcup \Pi_2 \neq X$.

(c) Množina Π_3 je rozkladem množiny X, neboť je jejím disjunktním pokrytím a žádná ze tříd rozkladu není $\emptyset$.

(d) Množina Π_4 není rozkladem množiny X (kvůli $\emptyset$).

Příklad 31 Nechť $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,

$$R = \{\langle x, y\rangle \in B^2;\ |x - y| = \{0, 2, 4, 6\}\},$$

$$S = \{\langle x, y\rangle \in B^2;\ |x - y| = \{0, 4\}\}.$$

Určete, zda R a S jsou ekvivalence. Pokud ano, určete příslušné rozklady Π_R, Π_S k ekvivalencím R a S.

Řešení. Binární relace $R, S \subseteq B \times B$ jsou reflexivní (díky nule); jsou také symetrické (díky absolutní hodnotě) a jsou i tranzitivní (díky vhodně zvoleným hodnotám). Tedy jak R, tak S jsou ekvivalence na množině B. Příslušné rozklady následují:

$$\Pi_R = \{[x]_R;\ x \in B\} = \{\{0, 2, 4, 6\}, \{1, 3, 5, 7\}\},$$

$$\Pi_S = \{[x]_S;\ x \in B\} = \{\{0, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 7\}\}.$$

Příklad 32 K následujícím rozkladům Π nalezněte příslušné ekvivalence E_Π:

(a) $\Pi = \{\{a, b, c\}, \{d\}, \{e, f\}, \{g\}\}$;

(b) $\Pi = \{\{1, 3, 5, 7, \dots\}, \{2\}, \{4\}, \{6\}, \{8\}, \dots\}$, kde Π je rozkladem na $\mathbb{N}$.

Řešení. Ekvivalence mají následující tvar:

(a) $\{\langle a,b\rangle,\langle a,c\rangle,\langle b,a\rangle,\langle b,c\rangle,\langle c,a\rangle,\langle c,b\rangle,\langle e,f\rangle,\langle f,e\rangle\}\cup\omega_{\{a,b,c,d,e,f,g\}}$;

(b) $\{\langle x,y\rangle;\ x,y\in\mathbb{N},\ x,y$ jsou obě lichá nebo $x=y\}$.

Příklad 33 K následujícím ekvivalencím E na X nalezněte příslušné rozklady Π_E.

(a) $E=\{\langle 0,2\rangle,\langle 0,4\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 2,4\rangle,\langle 4,0\rangle,\langle 4,2\rangle,\langle 5,6\rangle,\langle 6,5\rangle\}\cup\omega_X$,
$X=\{0,1,2,3,4,5,6\}$;

(b) $E=\{\langle x,y\rangle$; rozdíl $x-y$ je dělitelný čtyřmi beze zbytku$\}$,
$X=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$.

Řešení. Rozklady mají následující tvar:

(a) $\Pi_E=\{\{0,2,4\},\{1\},\{3\},\{5,6\}\}$;

(b) $\Pi_E=\{\{0,4,8\},\{1,5,9\},\{2,6,10\},\{3,7\}\}$.

7 Uspořádání

Příklad 34 Na množině $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ mějme dánu relaci uspořádání

$$\begin{aligned} R_{\leq} \ = \ & \{\langle 1,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 1,7\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,4\rangle, \\ & \langle 4,7\rangle, \langle 5,5\rangle, \langle 5,7\rangle, \langle 6,6\rangle, \langle 7,7\rangle\}. \end{aligned}$$

Výčtem prvků určete odpovídající relaci pokrytí $R_{\prec}$.

Řešení. Relace pokrytí $R_{\prec} = \{\langle 1,3\rangle, \langle 1,4\rangle, \langle 1,5\rangle, \langle 2,6\rangle, \langle 3,7\rangle, \langle 4,7\rangle, \langle 5,7\rangle\}$.

Příklad 35 K následujícím relacím R_i, které jsou uspořádáním na $X = \{x;\ \langle x,x\rangle \in R_i\}$ nakreslete odpovídající Hasseovy diagramy:

(a) $R_1 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$;

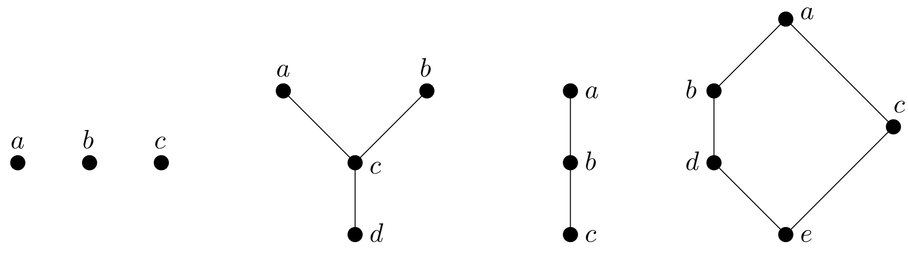
(b) $R_2 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle d,c\rangle, \langle d,d\rangle\}$;

(c) $R_3 = \{\langle a,a\rangle, \langle b,a\rangle, \langle b,b\rangle, \langle c,a\rangle, \langle c,b\rangle, \langle c,c\rangle\}$;

(d) $R_4 = \{\langle b,a\rangle, \langle c,a\rangle, \langle d,a\rangle, \langle d,b\rangle, \langle e,a\rangle, \langle e,b\rangle, \langle e,c\rangle, \langle e,d\rangle, \} \cup \omega_{\{a,b,c,d,e\}}$.

Dále určete, které prvky jsou maximální (minimální), respektive největší (nejmenší). Určete také všechny nesrovnatelné prvky.

Řešení. Nejprve znázorníme příslušné Hasseovy diagramy:



R_1 R_2 R_3 R_4

Nyní určíme maximální, minimální, největší, nejmenší a nesrovnatelné prvky u jednotlivých relací uspořádání.

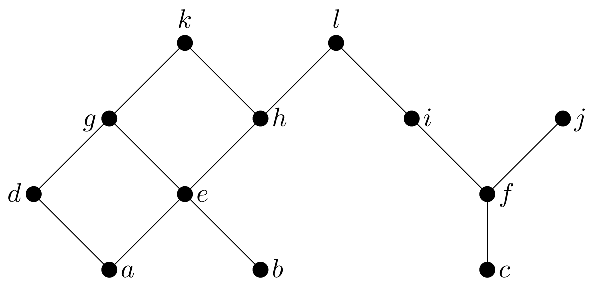
(a) Uspořádání R_1 je antiřetězec. Nemá ani největší, ani nejmenší prvek. Všechny prvky a, b, c jsou současně maximální a minimální. Všechny po dvou různé prvky jsou nesrovnatelné, tedy $a \| b$, $a \| c$ a $b \| c$.

(b) U uspořádání R_2 je d nejmenším prvkem (t.j. i jediným minimálním prvkem), maximální jsou prvky a, b (ty jsou také jediné nesrovnatelné). Největší prvek R_2 nemá.

(c) Uspořádání R_3 je řetězec s největším (maximálním) prvkem a a nejmenším (minimálním) prvkem c. Nesrovnatelné prvky R_3 nemá.

(d) U uspořádání R_4 je největším (maximálním) prvkem a a nejmenším (minimálním) prvkem e. Nesrovnatelné prvky: $c \| d$ a $c \| b$.

Příklad 36 Pro Hasseův diagram znázorněný na následujícím obrázku vyřešte úkoly (a) – (d).



(a) Určete dolní kužely pro množiny $\{g, h, e\}$ a $\{g, i\}$.

(b) Určete horní kužely pro množiny $\{a, b, c\}$ a $\{a, b\}$.

(c) Stanovte infimum pro prvky d, l a infimum pro prvky e, g.

(d) Stanovte supremum pro prvky i, j a supremum pro prvky e, g.

Řešení.

(a) $L(g, h, e) = \{a, b, e\}$, $L(g, i) = \emptyset$;

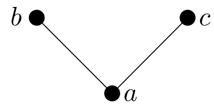
(b) $U(a, b, c) = \{l\}$, $U(a, b) = \{e, g, h, k, l\}$;

(c) $\inf(d, l) = a$, $\inf(e, g) = e$;

(d) $\sup(i, j) =$ neexistuje, $\sup(e, g) = g$.

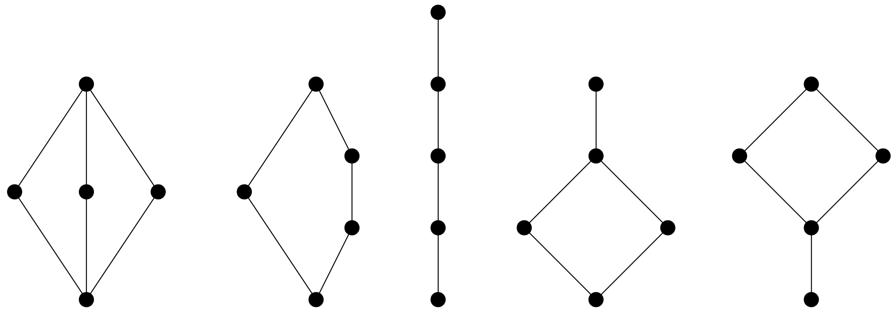
Příklad 37 Vymyslete nejmenší relaci uspořádání tak, aby byla průsekovým polosvazem a současně nebyla spojovým polosvazem. Poté ji znázorněte Hasseovým diagramem.

Řešení. Pro vyřešení příkladu je třeba uvažovat nejméně tříprvkovou množinu. Na jednoprvkové či dvouprvkové množině obdržíme buď řetězec nebo antiřetězec, což zadání nevyhovuje. Řešení zachycuje následující Hasseův diagram.



Příklad 38 Pomocí Hasseových diagramů znázorněte všechny neizomorfní (různé) pětiprvkové svazy.

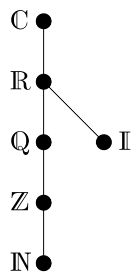
Řešení. Na pětiprvkové množině lze definovat uspořádání, které je svazem, právě pěti neizomorfními (různými) způsoby. Řešení zachycují následující Hasseovy diagramy.



8 Úvod do teorie čísel, princip indukce

Příklad 39 S pomocí Hasseova diagramu znázorněte uspořádání číselných oborů $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C})$ vzhledem k množinové inkluzi.

Řešení. Víme, že $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$. Dále zřejmě $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$ a $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$. Hasseův diagram má tedy následující podobu:



Příklad 40 Rozhodněte, zda je číslo $\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{3}$ racionální či iracionální.

Řešení. Zřejmě

$$7 + 4\sqrt{3} = 4 + 4\sqrt{3} + 3 = (2 + \sqrt{3})^2.$$

Odtud

$$\sqrt{7+4\sqrt{3}} - \sqrt{3} = (2 + \sqrt{3}) - \sqrt{3} = 2.$$

Zadané číslo je tedy racionální (dokonce přirozené) číslo.

Příklad 41 Ukažte, že existují dvě různá iracionální čísla a, b taková, že a^b je racionální číslo.

Řešení. Čísla $\sqrt{2}$, $\sqrt{6}$ jsou iracionální. Ačkoli o čísle $\sqrt{2}^{\sqrt{6}}$ neumíme rozhodnout, zda je iracionální či racionální, jedna z těchto možností nastat musí. Je-li $\sqrt{2}^{\sqrt{6}}$ racionální jsme hotovi. Pokud $\sqrt{2}^{\sqrt{6}}$ není racionální, pak $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{6}}\right)^{\sqrt{6}} = \sqrt{2}^{6} = 8$. Stačí tedy položit $a = \sqrt{2}^{\sqrt{6}}$, $b = \sqrt{6}$.

Příklad 42 Dokažte, že pro každé přirozené číslo n platí: $6 | (n^3 + 11n)$.

Řešení. Zřejmě

$$n^3 + 11n = n^3 - n + 12n = (n-1)n(n+1) + 12n.$$

Ovšem výraz $(n-1)n(n+1)$ je dělitelný šesti, neboť se jedná o součin tří (bezprostředně) po sobě jdoucích přirozených čísel (právě jedno z nich je dělitelné třemi a nejméně jedno z nich je sudé). Tedy i výraz $(n-1)n(n+1) + 12n$ je dělitelný šesti, což jsme chtěli dokázat. Poznamenejme ještě, že lze tento příklad řešit i indukcí.

Příklad 43 Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}_0$, že $2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

Řešení. Budeme postupovat indukcí. Nejprve ověříme platnost vztahu pro $n = 0$. To je jednoduché, neboť platí rovnost: $2^0 = 2^1 - 1$. Dále za předpokladu, že platí

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \qquad (*)$$

dokážeme platnost

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 1.$$

Zřejmě, s využitím $(*)$:

$$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \cdot 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1,$$

což zbývalo dokázat.

Příklad 44 Dokažte $\forall n \in \mathbb{N}$, že číslo 21 dělí číslo $4^{n+1} + 5^{2n-1}$.

Řešení. Budeme postupovat indukcí. Nejprve ověříme platnost vztahu pro $n = 1$. To platí, protože $4^{1+1} + 5^{2\cdot 1-1} = 16 + 5 = 21$ a $21|21$. Nechť dále číslo 21 je dělitelem čísla $4^{n+1} + 5^{2n-1}$. Pak číslo

$$4^{(n+1)+1} + 5^{2(n+1)-1} = 4 \cdot 4^{n+1} + 25 \cdot 5^{2n-1} = 4(4^{n+1} + 5^{2n-1}) + 21 \cdot 5^{2n-1}$$

je dle předpokladu (beze zbytku) dělitelné 21.

Příklad 45 Dokažte užitím indukce, že $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 5$: $2^n > n^2$.

Řešení. Pro $n = 5$ dostáváme $2^5 > 5^2$, neboli $32 > 25$, což samozřejmě platí. Předpokládejme nyní, že $2^n > n^2$ (pro $n \geq 5$). Pak ale

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n^2 > (n+1)^2,$$

tedy platí $2^{n+1} > (n+1)^2$, což zbývalo dokázat. Poznamenejme ještě, že $2n^2$ je skutečně větší než $(n+1)^2$ a to pro každé $n \geq 3$ (což se snadno ověří vyřešením příslušné kvadratické nerovnosti).

Příklad 46 Dokažte indukcí, že pro každé přirozené číslo n platí následující vlastnost $V(n)$:

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Řešení. Ověříme indukční předpoklad, t.j. $V(1)$:

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2}\right)^2.$$

Dále ověříme platnost indukčního kroku, t.j. $V(n) \Rightarrow V(n+1)$. Nechť platí $V(n)$. Dokažme $V(n+1)$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} k^3 + (n+1)^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 = \\ &= \frac{(n+1)^2(n^2+4(n+1))}{4} = \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2.\end{aligned}$$

Příklad 47 Dokažte indukcí, že $\forall n \in \mathbb{N}$ je výraz

$$v(n) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6}$$

přirozeným číslem.

Řešení. Zřejmě

$$v(1) = \frac{1^3}{3} + \frac{1^2}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2+3+1}{6} = 1 \in \mathbb{N},$$

tedy indukční předpoklad platí. Dále ověříme platnost indukčního kroku. Nechť $v(n) \in \mathbb{N}$. Pak

$$\begin{aligned}v(n+1) &= \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{(n+1)^2}{2} + \frac{n+1}{6} = \\ &= \frac{n^3+3n^2+3n+1}{3} + \frac{n^2+2n+1}{2} + \frac{n+1}{6} = \\ &= \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + \frac{2(3n^2+3n+1)+3(2n+1)+1}{6} = \\ &= v(n) + \frac{6n^2+12n+6}{6} \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Příklad 48 Převeďte číslo x ze soustavy o základu b_1 do soustavy o základu b_2, je-li:

(a) $x = AE$, $b_1 = 16$, $b_2 = 10$;

(b) $x = 101110$, $b_1 = 2$, $b_2 = 10$;

(c) $x = 45$, $b_1 = 10$, $b_2 = 12$;

(d) $x = 25$, $b_1 = 10$, $b_2 = 4$;

(e) $x = 131$, $b_1 = 5$, $b_2 = 15$.

Řešení.

(a) $(AE)_{16} = (174)_{10}$;

(b) $(101110)_2 = (46)_{10}$;

(c) $(45)_{10} = (39)_{12}$;

(d) $(25)_{10} = (121)_4$;

(e) $(131)_5 = (2B)_{15}$.

9 Kombinatorika

Příklad 49 Dokažte, že pro všechna přirozená čísla k, n taková, že $k < n$ platí:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Řešení. K ověření platnosti zadané identity stačí provést následující výpočet:

$$\begin{aligned}
\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} = \\
&= \frac{k(n-1)! + (n-k)(n-1)!}{(n-k)!k!} = \\
&= \frac{(n-1)!(k+n-k)}{(n-k)!k!} = \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.
\end{aligned}$$

Příklad 50 Odvoďte vzorec pro $(a+b)^4$ a pro $(a-b)^3$.

Řešení. Podle binomické věty máme:

$$\begin{aligned}
(a+b)^4 &= \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} a^{4-k} b^k = \\
&= \binom{4}{0} a^4 b^0 + \binom{4}{1} a^3 b^1 + \binom{4}{2} a^2 b^2 + \binom{4}{3} a^1 b^3 + \binom{4}{4} a^0 b^4 = \\
&= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4.
\end{aligned}$$

Analogicky:

$$\begin{aligned}
(a+(-b))^3 &= \sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} (-b)^k = \\
&= \binom{3}{0} a^3 (-b)^0 + \binom{3}{1} a^2 (-b)^1 + \binom{3}{2} a^1 (-b)^2 + \binom{3}{3} a^0 (-b)^3 = \\
&= a^3 - 3a^2 b + 3ab^2 - b^3.
\end{aligned}$$

Příklad 51 Řešte rovnici:

$$\binom{x+2}{x} + \binom{x+3}{x+1} = 64.$$

Řešení. Ihned ze zadání vidíme, že x musí být nezáporné celé číslo. Snadno spočítáme, že $\binom{x+2}{x} = \binom{x+2}{2} = \frac{(x+2)(x+1)}{2\cdot 1}$ a $\binom{x+3}{x+1} = \binom{x+3}{2} = \frac{(x+3)(x+2)}{2\cdot 1}$. Zadaná rovnice je tedy ekvivalentní s následující rovnicí:

$$\frac{(x+2)(x+1)}{2\cdot 1} + \frac{(x+3)(x+2)}{2\cdot 1} = 64,$$

kterou převedeme na kvadratickou rovnici. Totiž, po roznásobení čitatelů a vynásobení obou stran rovnice dvěma obdržíme

$$x^2 + 3x + 2 + x^2 + 5x + 6 = 128,$$

odkud

$$x^2 + 4x - 60 = 0,$$

což je ekvivalentní s

$$(x+10)(x-6) = 0.$$

Odtud již dostáváme řešení $x = 6$. Poznamenejme, že číslo -10 není řešením, neboť $-10 \notin \mathbb{N}_0$.

Příklad 52 Na nohejbalový turnaj přijely čtyři týmy. Kolik se bude hrát celkem zápasů, jestliže každý tým bude hrát se všemi ostatními týmy právě jeden zápas?

Řešení. Bude odehráno $\binom{4}{2} = 6$ zápasů.

Příklad 53 Kolik různých šesticiferných čísel lze sestavit z následujících šesti cifer: $1, 1, 1, 2, 2, 3$?

Řešení. Úloha vede na permutace s opakováním, neboť seřazujeme šest objektů z šesti, přičemž některé z nich se opakují. Po dosazení do vzorce obdržíme výsledek: $\frac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = 60$.

Příklad 54 V cukrárně si lze vybrat z deseti druhů zákusků, přičemž od každého druhu mají nejméně 20 zákusků. Kolika způsoby lze koupit

(a) 4 zákusky?

(b) 4 různé zákusky?

Řešení. Zřejmě půjde o kombinace, neboť na pořadí zakoupených zákusků nezáleží. V případě (a) použijeme vzorec pro kombinace s opakováním, v případě (b) vzorec pro kombinace bez opakování. Tedy:

(a) $\binom{10+4-1}{4} = \binom{13}{4} = \frac{13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 715$;

(b) $\binom{10}{4} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210$.

Příklad 55 Šest spolužáků si vzájemně poslalo SMS zprávu z prázdnin. Kolik zpráv celkem poslali?

Řešení. Poslali si $6 \cdot 5 = 30$ SMS zpráv (každý z nich pěti ostatním).

Příklad 56 Kolik úhlopříček má konvexní n-úhelník?

Řešení. Každý z n vrcholů tvoří s $n-3$ vrcholy úhlopříčku (ne se sebou, ne se sousedními vrcholy). Takto je ale započítána každá úhlopříčka dvakrát, tedy výsledek je $n(n-3) \cdot \frac{1}{2}$.

Příklad 57 Kolik existuje různých kvádrů takových, že délka každé hrany (v cm) je přirozené číslo z množiny $M = \{5, 7, 10, 11, 12, 15\}$?

Řešení. Kvádr je jednoznačně určen třemi hodnotami: délkou, šířkou a výškou. Hodnoty (je jich k dispozici šest) se mohou opakovat a na jejich pořadí nezáleží, tedy např. čísla $12, 12, 7$ a $7, 12, 12$ určují stejný kvádr (stačí jej vhodně natočit). Proto pro výpočet použijeme vzorec na kombinace s opakováním. Celkem tedy existuje $\binom{6+3-1}{3} = \binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$ různých kvádrů.

Příklad 58 Kolika způsoby lze rozdělit šest dětí na finále v běhu na 60 metrů do šesti drah?

Řešení. Celkem $6! = 720$ způsoby.

Příklad 59 Kolika způsoby je možno na (čtvercové) šachovnici s 64 poli vybrat tři pole tak, aby

(a) měla stejnou barvu?

(b) neležela v jednom sloupci?

Řešení. Na pořadí vybraných polí nezáleží, vybraná pole se neopakují. Pro vyčíslení výsledku tedy použijeme kombinace (bez opakování).

(a) Buď se vyberou tři bílá pole, to lze $\binom{32}{3}$ způsoby, nebo tři černá pole, to lze opět $\binom{32}{3}$ způsoby, odtud celkem máme $2 \cdot \binom{32}{3} = 9920$ možností.

(b) Od všech možností, kterých je $\binom{64}{3}$ odečteme možnosti, které nevyhovují zadání. V jednom konkrétním sloupci lze vybrat tři stejná pole právě $\binom{8}{3}$ různými způsoby. Sloupců je osm, a proto řešením je číslo $\binom{64}{3} - 8 \cdot \binom{8}{3} = 41216$.

Příklad 60 Matěj má devět různých učebnic: tři z matematiky, dvě z fyziky a čtyři z angličtiny. Kolika způsoby je může všechny seřadit do jedné řady tak, aby učebnice z jednotlivých oborů byly vedle sebe?

Řešení. Zřejmě n učebnic lze seřadit právě $n!$ způsoby. Tři obory (matematika, fyzika a angličtina) lze seřadit $3! = 6$ způsoby. Celkem tak dostáváme $3! \cdot 2! \cdot 4! \cdot 6 = 1728$ způsoby.

Příklad 61 Máme krabičku pro šest pastelek a v ní žlutou, oranžovou, červenou, modrou, zelenou a šedou pastelku.

(a) Kolika různými způsoby lze pastelky dát do krabičky?

(b) Kolika různými způsoby lze pastelky dát do krabičky tak, aby modrá a zelená byly vedle sebe?

(c) Kolika různými způsoby lze pastelky dát do krabičky tak, aby oranžová pastelka byla na kraji?

(d) Kolika různými způsoby lze pastelky dát do krabičky tak, aby žlutá a červená byly vedle sebe a šedá pastelka byla na kraji?

Řešení.

(a) $6! = 720$ způsoby.

(b) $2 \cdot 5! = 240$ způsoby.

(c) $5! + 5! = 240$ způsoby.

(d) $2 \cdot 4! + 2 \cdot 4! = 96$ způsoby.

Příklad 62 Mějme n výrokových symbolů. Kolika různými způsoby je můžeme ohodnotit (dvěma pravdivostníma hodnotama) 0 a 1?

Řešení. Celkem 2^n způsoby.

Příklad 63 Máme k dispozici cifry: 0,3,4,5,6,9. Kolik různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti lze z nich vytvořit,

(a) mohou-li se cifry opakovat?

(b) nemohou-li se cifry opakovat?

Řešení.

(a) Na první pozici může být jakákoli cifra kromě nuly, na druhé a třetí pozici může být libovolná z šesti cifer a na poslední pozici může být jen 0 nebo 5 (aby bylo číslo dělitelné pěti). Podle zobecněného pravidla součinu můžeme tedy vytvořit celkem $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 2 = 360$ různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti.

(b) Poslední cifra může být jen nula nebo pětka. Je-li poslední cifra nula, pak existuje $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 60$ různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti. Je-li poslední cifra pětka, pak (protože na první pozici nemůže být nula) existuje $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 = 48$ různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti. Celkem (dle pravidla součtu) můžeme vytvořit $60 + 48 = 108$ různých čtyřciferných čísel dělitelných pěti.

Příklad 64 Ve třídě je 30 dětí, mezi nimi i jedna dívka jménem Ema a jeden kluk jménem Filip. Kolika způsoby lze z této třídy vybrat 7 dětí tak, aby mezi vybranými

(a) byla Ema?

(b) nebyl Filip?

(c) byla Ema a byl Filip?

(d) nebyla ani Ema ani Filip?

Řešení.

(a) K Emě zbývá vybrat 6 dětí z 29, tedy celkem je $\binom{29}{6}$ možností.

(b) Vybírá se 7 dětí z 29, t.j. $\binom{29}{7}$ různých možností.

(c) K Emě a Filipovi zbývá vybrat 5 dětí z 28, tedy celkem je $\binom{28}{5}$ možností.

(d) Vybírá se 7 dětí z 28, t.j. $\binom{28}{7}$ různých možností.

Příklad 65 Kolika způsoby lze zamíchat 32 různých karet?

Řešení. Celkem $32! = 263130836933693530167218012160000000$ způsoby.

Příklad 66 Kolika různými způsoby lze přeskládat všechna písmena ve slově REGRESE?

Řešení. Všimneme si, že slovo REGRESE obsahuje dvakrát písmeno „R“ a třikrát písmeno „E“. Úloha zřejmě vede na permutace s opakováním. Celkem tedy máme $\frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$ možností.

Příklad 67 Kolik přímek určuje deset různých bodů v rovině, z nichž

(a) žádné tři neleží v přímce?

(b) právě šest leží v přímce?

Řešení. Každá přímka je jednoznačně určena dvěma různými body (na jejichž pořádí nezáleží). Úloha tedy vede na kombinace.

(a) Pokud žádné tři body neleží v přímce, existuje v rovině právě $\binom{10}{2} = 45$ různých přímek.

(b) Pokud právě šest bodů leží v přímce, tak od všech možných přímek (viz (a)) odečteme $\binom{6}{2}$ přímek a přičteme jednu přímku (tu, na které leží těch šest bodů). Výsledek je tedy: $\binom{10}{2} - \binom{6}{2} + 1 = 31$ přímek.

Příklad 68 Určete počet všech přirozených čísel větších než 700 a menších než 40000, v jejichž zápisech se vyskytují pouze cifry $2, 3, 4, 7, 8$, a to každá nejvýše jednou.

Řešení. Trojciferných čísel máme: $2 \cdot 4 \cdot 3 = 24$, jelikož na místě stovek může být pouze cifra 7 nebo 8, na místě desítek a stovek, pak může být libovolná dosud nepoužitá cifra. Čtyřciferných čísel je $5 \cdot 4 \cdot\ 3 \cdot 2 = 120$ (zde stačilo dosadit do vzorce pro variace bez opakování). Pěticiferných čísel máme: $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$ (na místě desetitisíců může být pouze cifra 2 nebo 3). Dle zobecněného pravidla součtu zadání splňuje celkem $24 + 120 + 48 = 192$ různých čísel.

Příklad 69 Ze 71 studentů se anglicky učí 39, německy 27 a rusky 15. Přitom anglicky a německy se současně učí 7 studentů, anglicky a rusky 5 studentů a německy a rusky 6 studentů. Současně všem třem jazykům se učí 3 studenti. Určete kolik z těchto 71 studentů se neučí ani anglicky, ani německy a ani rusky.

Řešení. Podle principu inkluze a exkluze pro tři množiny nejprve vypočítáme, kolik studentů se učí alespoň jeden z výše uvedených cizích jazyků:

$$\begin{aligned} |A \cup N \cup R| &= |A| + |N| + |R| - |A \cap N| - |A \cap R| - |N \cap R| + |A \cap N \cap R| = \\ &= 39 + 27 + 15 - 7 - 5 - 6 + 3 = 66. \end{aligned}$$

Odtud již snadno spočítáme, že studentů, kteří se neučí ani anglicky, ani německy a ani rusky je $71 - 66 = 5$.

Příklad 70 Kolik je přirozených čísel v intervalu $\langle 1, 3900 \rangle$, která jsou dělitelná dvěma nebo třema nebo pěti a nebo třinácti.

Řešení. Příklad budeme řešit s využitím principu inkluze a exkluze pro následující čtyři množiny:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3900, 2 \mid n\}, \\ A_2 &= \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3900, 3 \mid n\}, \\ A_3 &= \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3900, 5 \mid n\}, \\ A_4 &= \{n \in \mathbb{N}; 1 \leq n \leq 3900, 13 \mid n\}. \end{aligned}$$

Zřejmě počet prvků množiny A_1 je $|A_1| = \frac{3900}{2} = 1950$, podobně $|A_2| = \frac{3900}{3} = 1300$, $|A_3| = \frac{3900}{5} = 780$, $|A_4| = \frac{3900}{13} = 300$. Analogicky určíme, že $|A_1 \cap A_2| = 650$, $|A_1 \cap A_3| = 390$, $|A_1 \cap A_4| = 150$, $|A_2 \cap A_3| = 260$, $|A_2 \cap A_4| = 100$, $|A_3 \cap A_4| = 60$, dále $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 130$, $|A_1 \cap A_2 \cap A_4| = 50$, $|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = 30$, $|A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 20$ a konečně $|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = 10$. Nyní už jen stačí dosadit do vzorce a (dle principu inkluze a exkluze) vypočítat $A = |A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4|$. Tedy

$$\begin{aligned} A = {} & |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - \\ & -|A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| - |A_2 \cap A_3| - |A_2 \cap A_4| - |A_3 \cap A_4| + \\ & +|A_1 \cap A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_4| + |A_1 \cap A_3 \cap A_4| + |A_2 \cap A_3 \cap A_4| - \\ & -|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \\ = {} & 1950 + 1300 + 780 + 300 - 650 - 390 - 150 - 260 - 100 - 60 + 130 + \\ & +50 + 30 + 20 - 10 = 2940. \end{aligned}$$

Přirozených čísel v intervalu $\langle 1, 3900 \rangle$, která jsou dělitelná dvěma nebo třema nebo pěti a nebo třinácti je 2940.

10 Pravděpodobnost

Příklad 71 Je výhodnější si vsadit na to, že na třech kostkách padne součet 11 nebo 12?

Řešení. Nejprve vyřešíme rovnici $a + b + c = 11$, kde $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $a \geq b \geq c$. Řešením jsou zřejmě uspořádané trojice:

$$\langle 6, 4, 1\rangle, \langle 6, 3, 2\rangle, \langle 5, 5, 1\rangle, \langle 5, 4, 2\rangle, \langle 5, 3, 3\rangle, \langle 4, 4, 3\rangle.$$

Trojici $\langle 6, 4, 1\rangle$ pak odpovídá situace, kdy na první kostce padne 6, na druhé 4 a na třetí 1, což je jeden z případů, kdy součet bodů na kostkách je 11. Podobně dá součet 11 ale i jiná permutace čísel $6, 4, 1$. Odtud, pro čísla $6, 4, 1$ máme $3! = 6$ různých možností jak dosáhnout součet bodů 11 (na našich třech kostkách). Analogicky to bude pro čísla $6, 3, 2$ a $5, 4, 2$. Pro trojici, kde jsou dvě čísla stejná, např. $\langle 5, 5, 1\rangle$ pak máme tři různé možnosti jak dosáhnout součet bodů 11 (číslo jedna padne buď na první, nebo na druhé, nebo na třetí kostce, pětky pak padnou na dvou zbývajících kostkách). Podobně to bude pro čísla $5, 3, 3$ a $4, 3, 3$. Tedy celkem máme $6+6+6+3+3+3 = 27$ různých možností, jak na třech kostkách může padnout součet 11. Celkem lze na třech kostkách hodit $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$ různých variant hodů (variace s opakováním). Pravděpodobnost, že součet bodů bude právě 11 je tedy $\frac{27}{216}$.

Jak to bude pro součet 12? Nyní už rychleji: $12 = 6 + 5 + 1 = 6 + 4 + 2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4$, přičemž (vezmeme-li v potaz pořadí čísel) na kostkách obdržíme $6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1 = 25$ různých možností, jak na třech kostkách může padnout součet 12. (K tomu poznamenejme, že pro tři 4 existuje skutečně jen jedna možnost.) Proto pravděpodobnost, že součet bodů (na třech kostkách) bude právě 12 je $\frac{25}{216}$. Vzhledem k tomu, že $27 > 25$ a tedy i $\frac{27}{216} > \frac{25}{16}$ je pravděpodobnější, že padne součet bodů 11, a proto je výhodnější si na tuto variantu vsadit.

Příklad 72 Uvažme dětskou obrázkovou skládanku s 12 kostkami (tři řady po čtyřech kostkách), s níž můžeme postavit šest různých obrázků. Jaká je pravděpodobnost, že tyto náhodně zamíchané kostky vytvoří konkrétní obrázek (řekněme Krtečka)?

Řešení. Všechny kostky je třeba mít ve správném pořadí, natočené správným obrázkem nahoru (Krtečkem) a ještě správně otočené, tedy

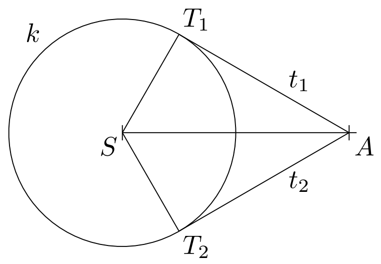
$$P(A) = \frac{1}{12!} \cdot \frac{1}{6^{12}} \cdot \frac{1}{4^{12}}.$$

Příklad 73 Jaká je pravděpodobnost, že polopřímka vedená z bodu A má s kružnicí $k(S; 3\text{cm})$ alespoň jeden společný bod, je-li

(a) $|AS| = 6\text{cm}$?

(b) $|AS| = 3\text{cm}$?

Řešení. (a) Z bodu A lze vést ke kružnici k dvě různé tečny t_1, t_2, viz následující obrázek.



Vzhledem k tomu, že $|ST_1| = 3\text{cm}$, $|AS| = 6\text{cm}$ a úhel ST_1A je pravý, můžeme snadno určit velikost úhlu T_1AS. Platí

$$\sin\alpha = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ,$$

kde α označuje velikost úhlu T_1AS. Zřejmě i velikost úhlu T_2AS je 30°. Vedeme-li polopřímku z bodu A mezi body T_1 a T_2 (přes kružnici k), dostáváme množinu příznivých jevů, které odpovídá úhel o velikosti $2\alpha = 60^\circ$. Množině všech možných jevů odpovídá úhel 360° (polopřímku můžeme vést z bodu A libovolným směrem), tedy $P(A) = \frac{30^\circ}{60^\circ} = \frac{1}{6}$.

(b) Vzhledem k tomu, že nyní bod A leží na kružnici k, musí mít každá polopřímka vedená z bodu A alespoň jeden společný bod s kružnicí k. Jedná se tedy o pravděpodobnost jistého jevu, t.j. $P(A) = 1$.

Příklad 74 Kolikrát musíme hodit klasickou (šestistěnou) hrací kostkou, aby alespoň jedna šestka padla s pravděpodobností větší než 75 procent?

Řešení. Jev takový, že po n hodech kostkou nepadne ani jedna šestka má pravděpodobnost $\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Odtud: jev takový, že po n hodech padne alespoň jedna šestka má pravděpodobnost $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$. Nyní již snadno sestavíme nerovnici, která nám po vyřešení dá kýžený výsledek:

$$1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geq 0,75.$$

Nejprve upravíme nerovnici na tvar

$$\frac{1}{4} \geq \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

Jelikož je neznámá n v exponentu, obě strany nerovnice zlogaritmujeme. Máme:

$$\log\frac{1}{4} \geq n \log\frac{5}{6},$$

neboť $\log\left(\frac{5}{6}\right)^n = n\log\frac{5}{6}$. Nyní obě strany nerovnice vynásobíme číslem $a = \frac{1}{\log\frac{5}{6}}$. Poněvadž je $a < 0$ musíme změnit znaménko nerovnosti (násobení záporným číslem). Obdržíme

$$\frac{\log\frac{1}{4}}{\log\frac{5}{6}} \leq n,$$

odkud $n \doteq 7,6$. Tedy, hodíme-li kostkou osm a vícekrát, padne alespoň jedna šestka s pravděpodobností větší než 75 procent.

Příklad 75 V osudí je 7 červených koulí a 10 modrých koulí. Namátkou vybereme 4 koule. Jaká je pravděpodobnost, že

(a) vybrané koule budou stejné barvy?

(b) mezi nimi budou aspoň 3 červené?

Řešení. Na pořadí vybraných koulí nezáleží a koule se do osudí nevrací. Pro výpočet pravděpodobnosti (počtu příznivých jevů ku počtu možných jevů) tedy použijeme kombinace (bez opakování). Odtud

(a)
$$P(A) = \frac{\binom{7}{4} + \binom{10}{4}}{\binom{17}{4}}.$$

Zde příznivým jevem je vybrání buď 4 červených (ze všech červených), nebo 4 modrých (ze všech modrých) koulí. Všech možných jevů je $\binom{17}{4}$, neboť vybíráme 4 koule ze všech 17 koulí.

(b)
$$P(B) = \frac{\binom{7}{3} \cdot \binom{10}{1} + \binom{7}{4} \cdot \binom{10}{0}}{\binom{17}{4}}.$$

Zde příznivým jevem je vybrání buď 3 červených a jedné modré koule, nebo 4 červených koulí (a žádné modré koule). Všech možných jevů je $\binom{17}{4}$, neboť opět vybíráme 4 koule ze všech 17 koulí.

Příklad 76 Házíme červenou kostkou a pak dvěma modrými kostkami. Jaká je pravděpodobnost, že na červené kostce padne menší číslo, než na obou modrých kostkách?

Řešení. Spočítejme nejprve počet příznivých jevů. Padne-li na červené kostce jednička, pak na první modré kostce může padnout číslo $2, 3, 4, 5$ nebo 6 a to samé platí pro druhou modrou kostku. Celkem je tedy v tomto případě $5 \cdot 5$ příznivých možností. Padne-li na červené kostce dvojka, pak na obou modrých kostkách může padnout jedno z čísel $3, 4, 5, 6$, t.j. $4 \cdot 4$ příznivých možností pro tento případ. Podobně to bude pro případy, kdy na červené kostce padne trojka:

$3 \cdot 3$ možnosti, padne čtverka: $2 \cdot 2$ možnosti, padne pětka: $1 \cdot 1$ možnost. Padne-li na červené kostce šestka, pak na modrých kostkách nelze hodit větší číslo, počet příznivých možností v tomto případě je tedy roven nule. Dohromady máme $5 \cdot 5 + 4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 0 = 55$ příznivých možností (jevů). Odtud $P(A) = \frac{55}{216}$, kde $6^3 = 216$ je počet všech možných jevů.

Příklad 77 Určete kolik nejméně lidí je třeba uvažovat, aby pravděpodobnost, že aspoň dva z nich budou narozeni ve stejný den, byla $\geq 0,5$.

Řešení. Úloha je známa pod názvem narozeninový problém či narozeninový paradox. Nejprve spočítáme pravděpodobnost doplňkového jevu $P(\overline{A})$, t.j. toho, že (v uvažované skupině) žádní dva lidé nejsou narozeni ve stejný den. V čitateli odpovídajícího zlomku tedy budou variace bez opakování (příznivé jevy) a ve jmenovateli zlomku pak budou variace s opakováním (možné jevy). Pravděpodobnost doplňkového jevu pak jednoduše odečteme od 1:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{\frac{365!}{(365-n)!}}{365^n} \geq \frac{1}{2}.$$

Vyřešením nerovnice (např. zkoušením konkrétních hodnot pro n) dostaneme výsledek $n = 23$. Podotkněme, že jsme (pro jednoduchost) nebrali v potaz přestupný rok, dvojčata atp., zkrátka, že jsme uvažovali, že jsou data narození rozprostřena rovnoměrně v průběhu roku. Poznamenejme ještě, že pro 57 a více lidí je ona pravděpodobnost už více než 99 procent.

11 Ostatní: algoritmy, grafy, konečné automaty, složitost algoritmů

Příklad 78 Rozhodněte, které z následujících posloupností vrcholů a hran (z obrázku neorientované grafu uvedeného níže) jsou sledy. U všech sledů pak dále určete, které jsou kružnicí, tahem či cestou.

(a) v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5, e_5, v_1;

(b) v_4, e_3, v_5, e_1, v_6;

(c) v_5, e_8, v_4;

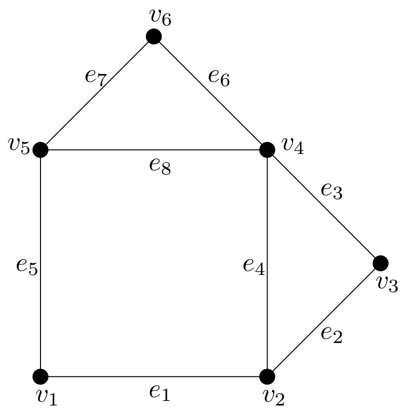
(d) v_2, e_4, v_4, e_4, v_2, e_4, v_4, e_4, v_2;

(e) v_6, v_4, e_1;

(f) v_5, e_5, v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_6, v_6, e_7, v_5, e_8, v_4, e_4, v_2;

(g) v_3, e_4, e_3;

(h) v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2.



Řešení.

(a) Posloupnost v_1, e_1, v_2, e_4, v_4, e_8, v_5, e_5, v_1 je sledem, který je kružnicí a tahem (a není cestou).

(b) Posloupnost v_4, e_3, v_5, e_1, v_6 není sledem.

(c) Posloupnost v_5, e_8, v_4 je cestou a tahem (a není kružnicí).

(d) Daná posloupnost je sledem, který není ani tahem, ani cestou, ani kružnicí.

(e) Posloupnost v_6, v_4, e_1 není sledem.

(f) Daná posloupnost je tahem (a není kružnicí, ani cestou).

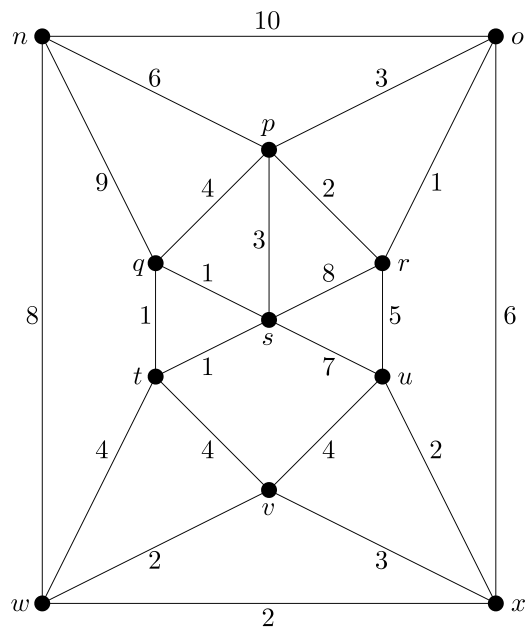
(g) Nejedná se o sled.

(h) Posloupnost v_2, e_2, v_3, e_3, v_4, e_4, v_2 je sledem, který je kružnicí a tahem (a není cestou).

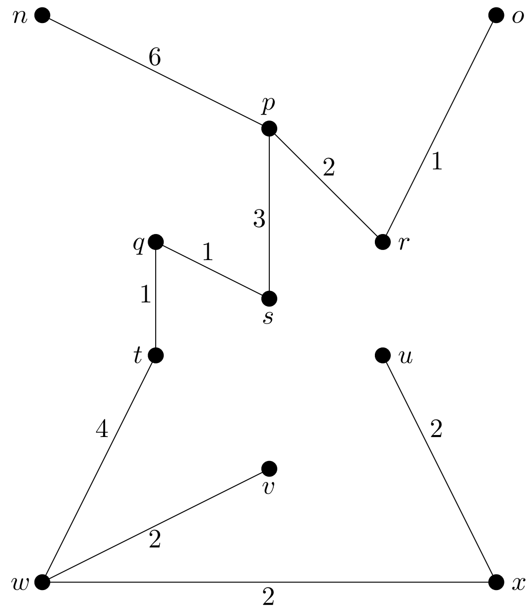
Příklad 79 Určete chromatické číslo grafu z předchozího příkladu.

Řešení. Chromatické číslo je rovno třem. Například lze první barvou obarvit vrcholy v_2, v_6, druhou barvou obarvit vrcholy v_3, v_5 a poslední barvou pak obarvit zbývající vrcholy v_1 a v_4. (To, že dvě barvy nestačí je evidentní.)

Příklad 80 Nalezněte minimální kostru následujícího (neorientovaného, hranově ohodnoceného) grafu $\mathcal{G}$.



Řešení. S využitím Kruskalova algoritmu dostaneme následující minimální kostru grafu $\mathcal{G}$.

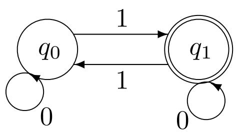


Příklad 81 Na grafu $\mathcal{G} = \langle V, E \rangle$ z předchozího příkladu určete nejkratší vzdálenosti (minimální cesty) z vrcholu s do všech vrcholů z V.

Řešení. Aplikací Dijkstrova algoritmu obdržíme následující výsledky: $d(s) = 0$, $d(q) = 1$, $d(t) = 1$, $d(p) = 3$, $d(r) = 5$, $d(v) = 5$, $d(w) = 5$, $d(o) = 6$, $d(u) = 7$, $d(x) = 7$, $d(n) = 9$.

Příklad 82 Nechť $T = \{0, 1\}$ je abeceda. Graficky znázorněte deterministický konečný automat, který přijme všechna slova, která obsahují lichý počet jedniček a libovolný počet nul.

Řešení. Pro vyřešení úlohy nám stačí uvažovat automat se dvěma stavy: s počátečním stavem q_0 a s koncovým stavem q_1. Přechodová funkce δ je definována takto: $\delta(q_0, 0) = q_0$, $\delta(q_0, 1) = q_1$, $\delta(q_1, 0) = q_1$, $\delta(q_1, 1) = q_0$, viz následující obrázek.



Příklad 83 Nechť množina $T = \{a, b, c, d\}$ je abeceda. Sestavte deterministický konečný automat, který přijme všechna slova, která obsahují podřetězec *dbca* nebo podřetězec *dbcd*.

Řešení. Pro vyřešení úlohy nám stačí automat s pěti stavy: q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, kde q_0 je počáteční stav a q_4 je (jediný) koncový stav. Přechodová funkce δ je pak dána následovně:

$$\begin{array}{lllll}
\delta(q_0,a)=q_0, & \delta(q_1,a)=q_0, & \delta(q_2,a)=q_0, & \delta(q_3,a)=q_4, & \delta(q_4,a)=q_4,\\
\delta(q_0,b)=q_0, & \delta(q_1,b)=q_2, & \delta(q_2,b)=q_0, & \delta(q_3,b)=q_0, & \delta(q_4,b)=q_4,\\
\delta(q_0,c)=q_0, & \delta(q_1,c)=q_0, & \delta(q_2,c)=q_3, & \delta(q_3,c)=q_0, & \delta(q_4,c)=q_4,\\
\delta(q_0,d)=q_1, & \delta(q_1,d)=q_1, & \delta(q_2,d)=q_1, & \delta(q_3,d)=q_4, & \delta(q_4,d)=q_4.
\end{array}$$

Příklad 84 Zjistěte, zda platí $3^n = O(2^n)$.

Řešení. Jelikož $O(2^n) = 2^{O(n)}$, stačí vyřešit následující nerovnici:

$$3^n \leq 2^{Kn},$$

která je ekvivalentní s nerovnicí $n \log_2 3 \leq Kn \log_2 2$. Odtud $K \geq \log_2 3$. Vztah $3^n = O(2^n)$ tedy platí (pro každé přirozené číslo n a pro libovolné $K \geq \log_2 3$).

Příklad 85 Ověřte, že platí

(a) $\log_2 n = O(n)$;

(b) $5n^3 - 3n^2 + 7 = O(n^3)$.

Řešení. (a) Zřejmě (dle definice) $\log_2 n = O(n)$, pokud existuje kladná konstanta K a existuje přirozené číslo n_0 tak, že $\log_2 n \leq Kn$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Z nerovnice

$$K \geq \frac{log_2 n}{n},$$

vidíme, že v tomto případě stačí zvolit třeba $K = 100$ a $n_0 = 1$.

(b) Podobně, $5n^3 - 3n^2 + 7 = O(n^3)$ pokud existuje kladná konstanta K a existuje přirozené číslo n_0 tak, že $5n^3 - 3n^2 + 7 \leq Kn^3$ pro každé $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$. Z nerovnice

$$K \geq 5 - \frac{3}{n} + \frac{7}{n^3},$$

vidíme, že v tomto případě stačí například položit $K = 5$ a $n_0 = 2$.

Příklad 86 Zjistěte, zda platí $n^2 = O(n \ln^2 n)$.

Řešení. Poznamenejme, že asymptotickou notaci lze definovat i přes limitu a to následovně:

$$f(n) = O(g(n)) \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \langle 0; \infty).$$

Jelikož

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{ln^2 n} = \infty,$$

neplatí $n^2 = O(n \ln^2 n)$.