Vzdálenosti v grafu

Mějme souvislý graf $G = (U, H)$, jehož hrany jsou ohodnoceny nezápornými reálnými čísly. Toto ohodnocení zapíšeme jako zobrazení

$$w\colon\ H \to R_0^+$$

kde R_0^+ označuje množinu nezáporných reálných čísel.

Čísla, jimiž jsou jednotlivé hrany ohodnoceny, budeme nazývat délkami těchto hran.

Délkou cesty budeme nazývat součet délek všech hran obsažených na této cestě.

Definice. Vzdálenost $d(u,v)$ dvou uzlů u a v souvislém grafu G je délka nejkratší cesty ze všech cest mezi oběma uzly u a v.

Věta. Jsou-li délky hran v grafu kladná čísla, pak vzdálenost v grafu splňuje axiómy metriky. Tedy pro libovolné tři uzly u, v a w platí:

I. $d(u,v) \geq 0$, přičemž $d(u,v) = 0$ právě když $u = v$

II. $d(u,v) = d(v,u)$

III. $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$

Důkaz:

Vlastnost *I.* je zřejmá. Pokud u a v jsou různé uzly, musí na cestě mezi nimi být aspoň jedna hrana.

Vlastnost *II.* je rovněž zřejmá. Nejkratší cesta z uzlu u do v je zároveň i nejkratší cestou z uzlu v do u.

I vlastnost *III.* je poměrně zřejmá. Neboť spojením cest mezi u a w a mezi w a v dostaneme cestu mezi u a v, jejíž délka, jež je součtem vzdáleností mezi u a w a mezi w a v, nemůže být menší než vzdálenost mezi koncovými uzly cesty u a v, což je délka nejkratší z cest mezi těmito dvěma uzly.

Následující algoritmus hledá nejkratší cestu (a tím i počítá vzdálenost) mezi dvěma zvolenými uzly grafu u a v. Algoritmus pracuje tak, že jeden z koncových uzlů zvolí jako výchozí, nechť je to třeba uzel u, a postupně v ostatních uzlech počítá délky cest mezi nimi a uzlem u. Pro tyto délky má v každém uzlu proměnnou c, ve které je v každém okamžiku uložena délka nejkratší z doposud nalezených cest mezí tímto uzlem a uzlem u. Dále si zavedeme množinu S, ve které budeme mít uzly, u kterých jsme zatím neprovedli výpočet délky cest, jež jdou přes tyto uzly k jejich sousedům.

Aktuální uzel, pro který právě počítáme délky cest jdoucí od uzlu *u* přes tento uzel k jeho sousedům, budeme značit *z*.

Popis algoritmu

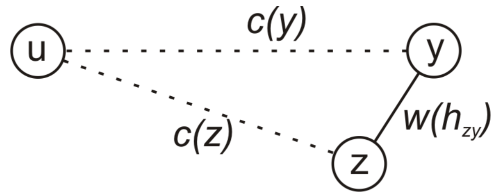
1. Počáteční nastavení.
   - $c(u)=0$ - pro uzel *u* je délka nejkratší nalezené cesty = 0.
   - $c(w)=+\infty$ - pro všechny ostatní uzly $w \neq u$ je délka cesty mezi *w* a *u* na začátku nastavena na nekonečno. Tato hodnota vyjadřuje, že nebyla zatím vypočítána délka žádné cesty od uzlu *u* k uzlu *w*.
   - *S*=*U* - do množiny *S* na začátku dáme všechny uzly grafu.
   - *z*=*u* - aktuální uzel *z*, u kterého právě probíhá výpočet, na začátku nastavíme na výchozí uzel *u*.
2. Výpočet délek cest, jež vedou od uzlu *u* přes aktuální uzel *z* k sousedům aktuálního uzlu *z*. Pro všechny uzly *y*, které
   - jsou sousedé aktuálního uzlu *z*
   - a zároveň patří do množiny *S* ($y \in S$)

   vypočítáme novou délku *c*(*y*) cesty mezi uzlem *y* a výchozím uzlem *u*

   $$c(y)=\min(\,c(y),c(z)+w(h_{zy}))$$

   kde h_{zy} označuje hranu mezi uzly *z* a *y* a $w(h_{zy})$ označuje délku této hrany.

   Což znamená, že je-li nová cesta mezi *u* a *y* přes uzel *z* kratší než doposud nalezená nejkratší cesta mezi uzly *u* a *y*, pak proměnná *c* vyjadřující délku nejkratší doposud nalezené cesty se v uzlu *y* nastaví na délku nové cesty.

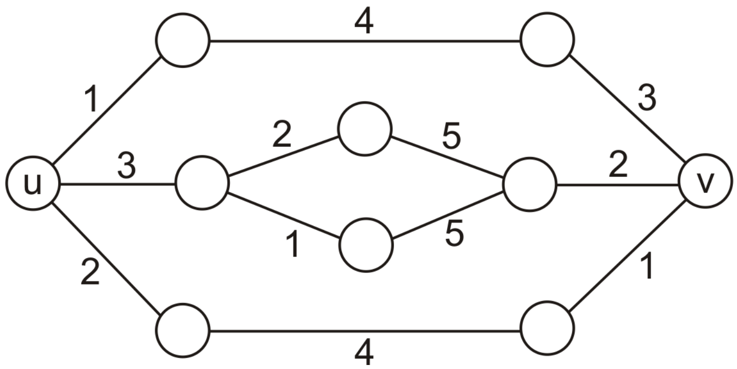
   Aktuální uzel *z* odebereme z množiny *S*, neboť délka cest jdoucích přes tento uzel k jeho sousedům už byla vypočítána:

   $$S=S-\{z\}\ .$$

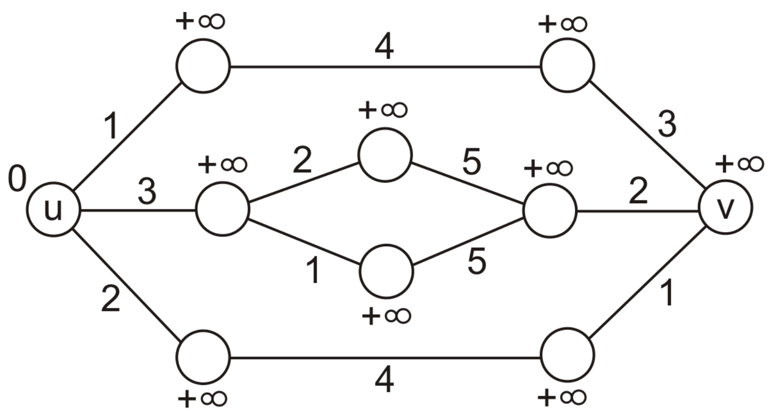
3. V množině *S* najdeme uzel s nejnižší hodnotou *c* a ten učiníme novým aktuálním uzlem *z*. Je-li tímto uzlem druhý koncový uzel hledané cesty *v*, pak výpočet končí a vzdálenost mezi uzly *u* a *v* je rovna hodnotě proměnné *c* v uzlu *v*. Tedy $d(u,v)=c(v)$.

   Jinak přejdeme ke kroku 2.

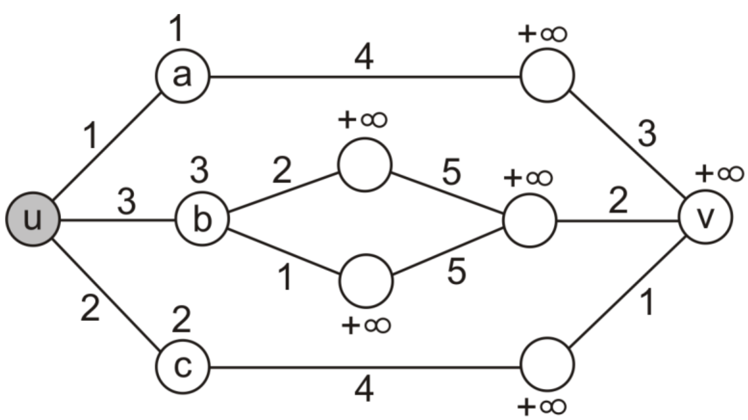
Příklad. V následujícím grafu G máme vypočítat vzdálenost mezi jeho uzly u a v.



Nastavíme příslušně ve všech uzlech počáteční hodnoty proměnné c.

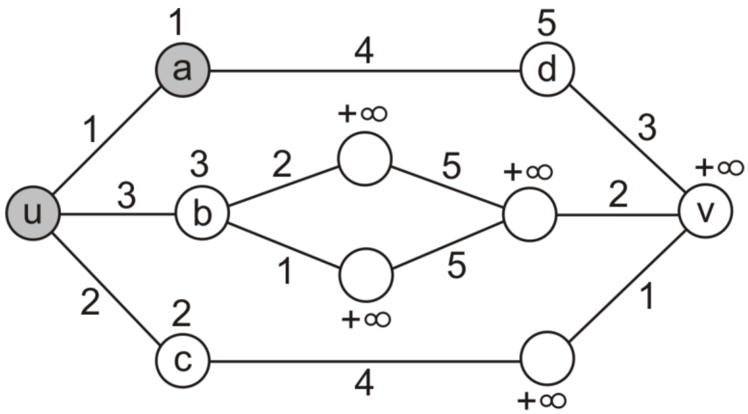


Aktuální uzel je počáteční uzel u. Provedeme pro něj výpočet a jeho vyřazení z množiny S označíme jeho obarvením.



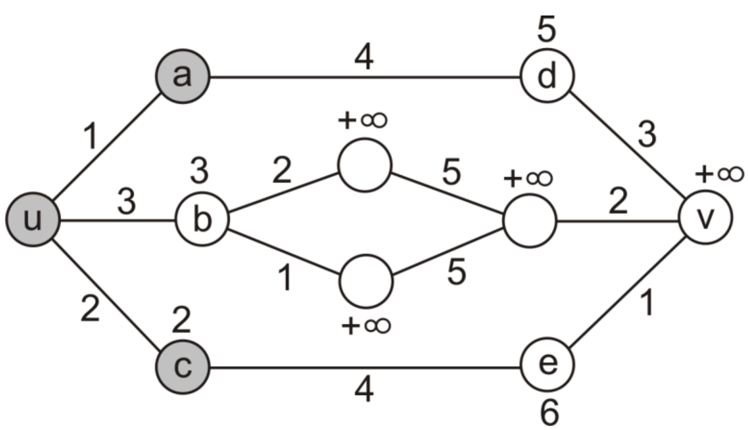
Uzel	a	b	c
Přechozí uzel cesty	u	u	u

Uzel s nejmenší hodnotou c je uzel a s hodnotou *1*. Učiníme ho aktuálním uzlem a provedeme pro něj výpočet.



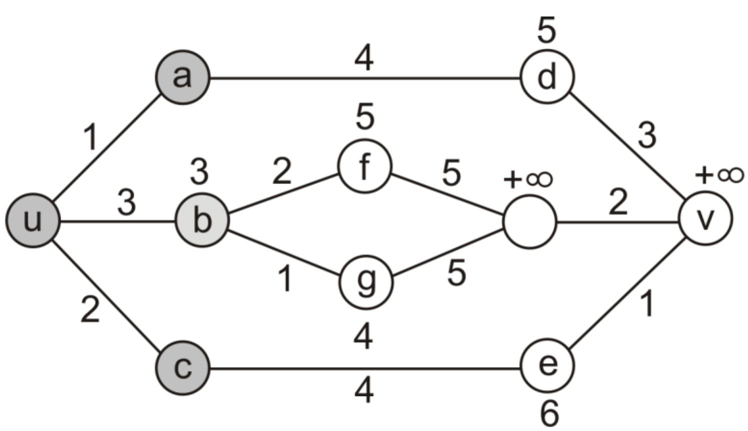
Uzel	a	b	c	d
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *c* s hodnotou 2. Ten bude nyní aktuálním uzlem.



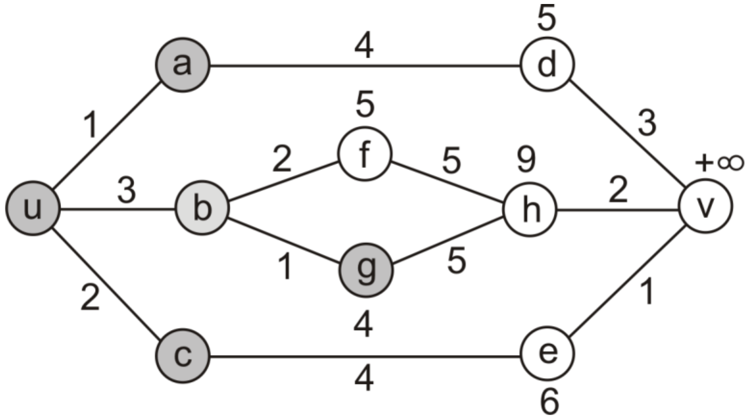
Uzel	a	b	c	d	e
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *b* s hodnotou 3. Učiníme ho aktuálním uzlem.



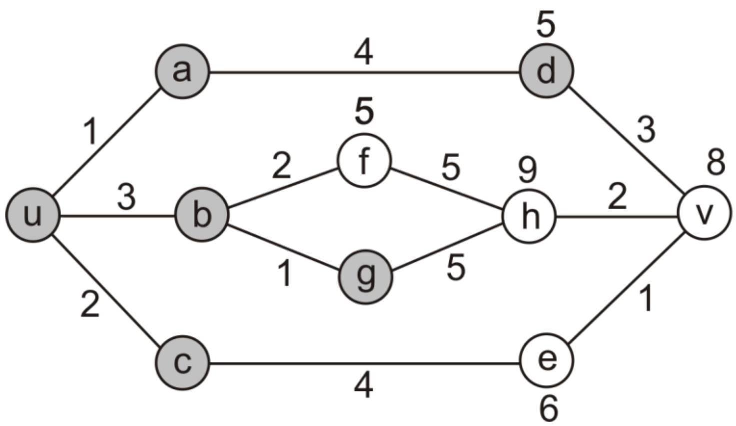
Uzel	a	b	c	d	e	f	g
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *g* s hodnotou 4. Učiníme ho aktuálním uzlem.



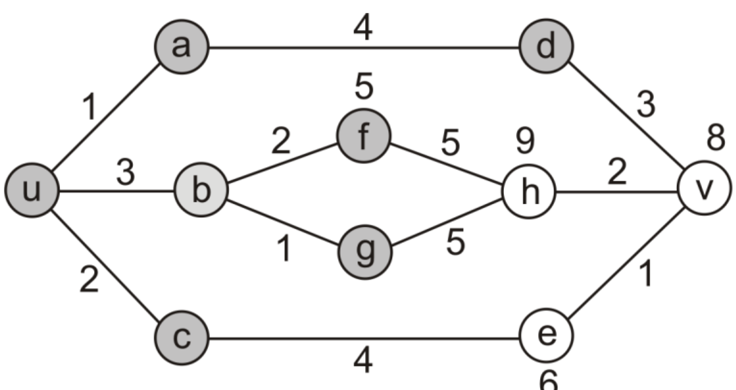
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g

Nyní máme dva uzly *d* a *f* s nejmenší hodnotou *c*. Jako aktuální vezmeme třeba uzel *d*.



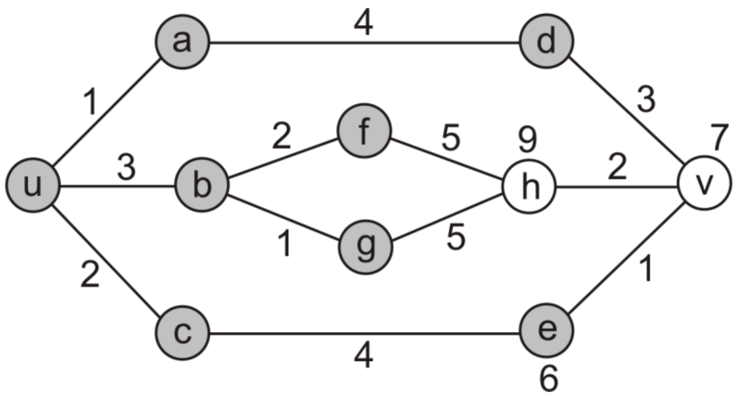
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	d

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *f* s hodnotou 5. Učiníme ho aktuálním uzlem.



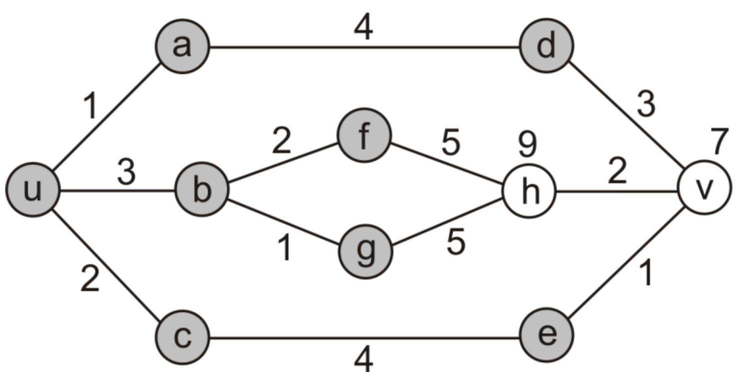
Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	d

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je uzel *e* s hodnotou 6. Učiníme ho aktuálním uzlem.



Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	e

Uzel s nejmenší hodnotou *c* je nyní druhý koncový uzel cesty *v*. Výpočet tím končí a vzdálenost mezi uzly *u* a *v* je rovna 7.



Uzel	a	b	c	d	e	f	g	h	v
Přechozí uzel cesty	u	u	u	a	c	b	b	g	e

Nejkratší cestu lze zjistit dle předchozí tabulky a ukazuje ji následující obrázek.