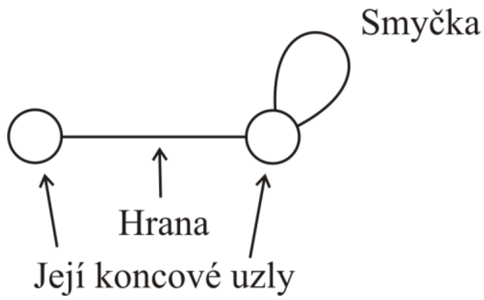
Grafy

Graf je poměrně obecný pojem. Vyskytuje se v různých významech. Zde bude tento pojem označovat grafický způsob vyjádření vztahů mezi nějakými objekty.

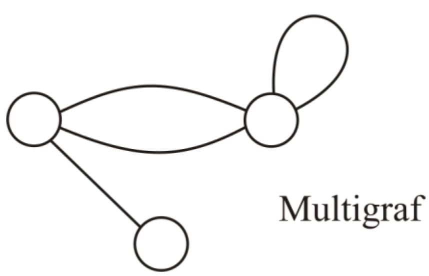
Objekty jsou v grafu reprezentovány uzly. Vedle pojmu uzel se také rovněž používá pojem vrchol. Vztahy jsou v grafu reprezentovány hranami. Skutečnost, že dva objekty jsou v určitém vztahu, se v grafu vyjádří spojením příslušných uzlů (vrcholů), jež tyto objekty v grafu reprezentují, hranou.

Na kreslení uzlů a hran nejsou žádná zvláštní omezení. Uzly zpravidla kreslíme kružnicemi, ale někdy také elipsami, obdélníky. Hrany kreslíme přímými čárami, oblouky nebo lomenými čárami. Způsob kreslení volíme především tak, aby graf byl přehledný.

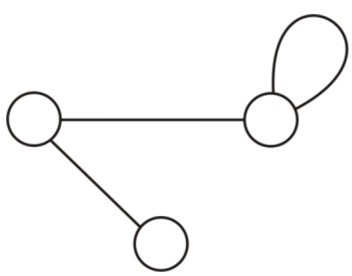
Hrana vždy začíná a končí v nějakém uzlu. Většinou jsou koncové uzly hrany různé, ale může to být i stejný uzel, pak takové hraně říkáme smyčka.



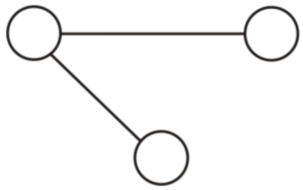
Dva uzly mohou být spojeny více hranami – takovým hranám říkáme násobné. Graf, ve kterém mezi některými uzly je více hran, nazýváme multigraf.



Graf bez násobných hran se nazývá prostý graf.



Prostý graf bez smyček je obyčejný graf.



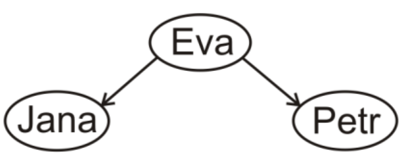
V praxi lze běžně vystačit s obyčejnými grafy. Proto my se v tomto materiálu budeme zabývat jen tímto typem grafů. Od tohoto okamžiku pojem graf bude označovat obyčejný graf.

Hrany v grafu mohou být:

- Neorientované – reprezentují symetrické vztahy mezi uzly. Například v situaci, kdy Petr a Jana jsou bratr a sestra a hrana nám bude v grafu vyjadřovat tento vztah, že jsou sourozenci, tato hrana bude neorientovaná.

Neorientovaná hrana

- Orientované – reprezentují jednosměrné, nesymetrické vztahy mezi uzly. Orientace hrany je vyznačena šipkou na jednom jejím konci. Například je-li Eva matkou Petra a Jany a hrany nám budou vyjadřovat vztah, že Eva je jejich rodičem, bude tyto hrany orientované.

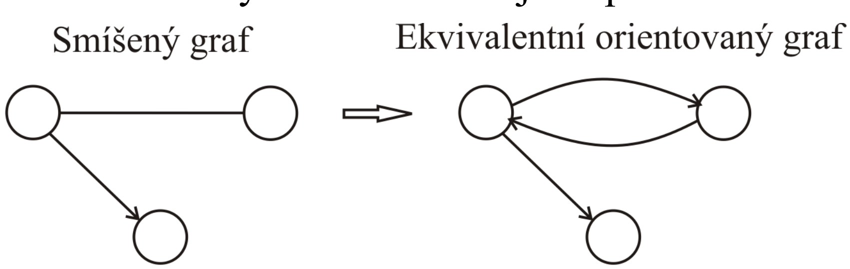


Orientované hrany

Podle typu hran dělíme grafy na:

- Neorientované – všechny jejich hrany jsou neorientované,
- Orientované – všechny jejich hrany jsou orientované.
- Smíšené – obsahují neorientované i orientované hrany.

Smíšené grafy se v praxi nepoužívají. Nahrazují se orientovanými grafy tak, že neorientované hrany se nahradí dvojicí opačně orientovaných hran.

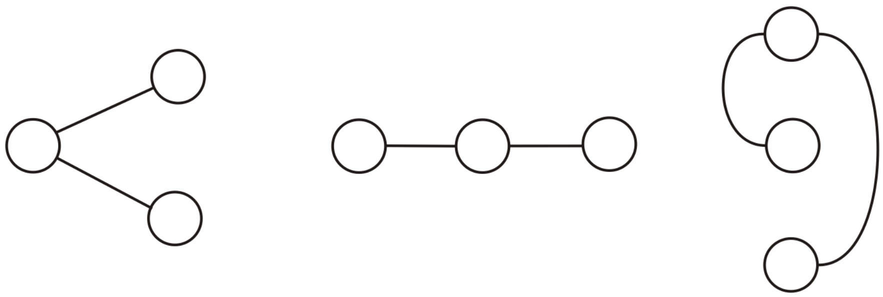


Nahrazení smíšeného grafu orientovaným grafem

V dalším textu pod pojmem graf budeme rozumět neorientovaný graf. Pokud se budeme zabývat orientovaným grafem, bude to explicitně uvedeno.

Definice grafu

Zatím jsme grafy reprezentovali jejich nakreslením. Tentýž graf můžeme nakreslit různě. Na následujícím obrázku je stejný graf třikrát různě nakreslen.



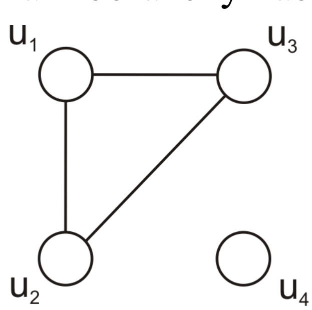
Všechna tři nakreslení vyjadřují stejné vztahy mezi uzly. Aby se odlišilo vlastní nakreslení grafu od vztahů, které graf reprezentuje, někdy se konkrétnímu nakreslení grafu říká diagram grafu. Dále se zavádí formální definice grafu, která je nezávislá na nakreslení grafu (diagramu) a popisuje strukturu grafu a vztahy reprezentované grafem.

Definice grafu. Graf je dvojice $G = (U, H)$, kde

- U je množina uzlů $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$
- H je množina hran $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$
    - u neorientovaného grafu jsou hrany určeny neuspořádanými dvojicemi svých koncových uzlů $h_i = \{u_j, u_k\}$, kde $u_j, u_k \in U$.
    - u orientovaného grafu jsou hrany určeny uspořádanými dvojicemi svých koncových uzlů $h_i = \langle u_j, u_k \rangle$, kde $u_j, u_k \in U$.

Pro počet hran v množině H používáme zápis $|H|$ (v předchozí definici je $|H| = n$) a pro počet uzlů v množině U používáme zápis $|U|$ (v předchozí definici je $|U| = m$).

Příklad. Graf zobrazený následujícím diagramem

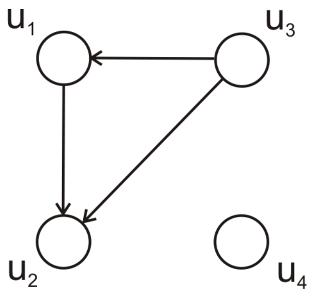


lze definicí zapsat

U = { u_1, u_2, u_3, u_4 }

H = { {u_1, u_2}, {u_1, u_3}, {u_2, u_3} } .

Příklad. Orientovaný graf zobrazený následujícím diagramem



lze definicí zapsat

U = { u_1, u_2, u_3, u_4 }

H = { $<u_1, u_2>$, $<u_3, u_1>$, $<u_3, u_2>$ } .

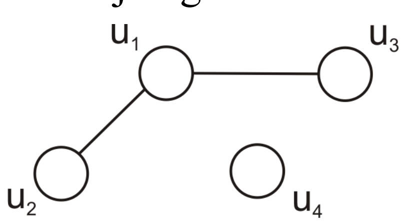
Definice. Stupeň uzlu je počet hran, které jsou s tímto uzel spojeny - mají tento uzel jako koncový. Pro skutečnost, že hrana má daný uzel jako koncový, používáme termín hrana s tímto uzlem *inciduje*.

Pro označení stupně uzlu *u* používáme zápis

$$d(u)$$

Písmeno *d* je zde od anglického slova *degree* – stupeň.

Příklad. Následující graf



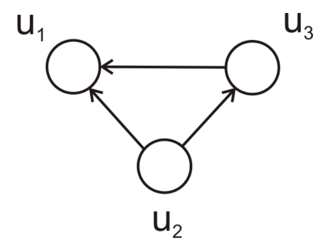
má stupně uzlů

$$d(u_1)=2 \quad d(u_2)=1 \quad d(u_3)=1 \quad d(u_4)=0 \text{ .}$$

U orientovaného grafu navíc rozeznáváme výstupní stupeň uzlu, což je počet hran, které z něho vychází, označujeme ho $d^-(u)$, a vstupní stupeň uzlu, což je počet hran, které do něho vchází, označuje ho $d^+(u)$. Zřejmě pro stupeň uzlu v orientovaném grafu platí

$$d(u) = d^-(u) + d^+(u) \text{ .}$$

Příklad. Následující graf



má stupně uzlů

$d^-(u_1)=0 \quad d^+(u_1)=2 \quad d(u_1)=2$

$d^-(u_2)=2 \quad d^+(u_2)=0 \quad d(u_2)=2$

$d^-(u_3)=1 \quad d^+(u_3)=1 \quad d(u_3)=2$

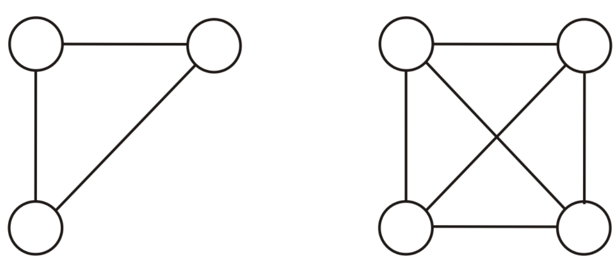
Věta. Součet stupňů všech uzlů v grafu je sudé číslo.

Důkaz: Každá hrana inciduje se dvěma uzly. Tedy součet stupňů všech uzlů v grafu je roven dvojnásobku počtu hran v grafu, čímž je sudé číslo.

Definice. V teorii grafů se používají termíny:

- Pro uzel, jehož stupeň je nulový, používáme označení diskrétní uzel.
- Graf, jehož všechny uzly jsou diskrétní, nazveme diskrétním grafem.
- Dva uzly, jež jsou spojeny hranou, nazveme sousedními uzly.
- Pro graf, jehož všechny uzly jsou sousední (má při daném počtu uzlů maximální počet hran), se používá označení úplný graf.

Příklad. Na následujícím obrázku jsou dva úplné grafy, první se 3 uzly a druhý se 4 uzly.



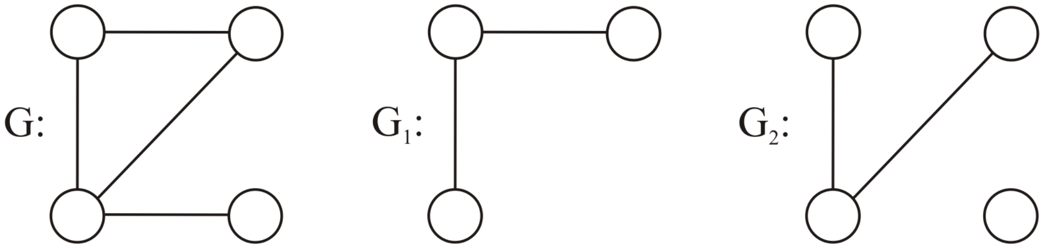
Definice podgrafu. Nechť je dán graf $G = (U, H)$. Pak graf $G_1 = (U_1, H_1)$ takový, že

- $U_1 \subseteq U$ (množina uzlů grafu G_1 je podmnožinou množiny uzlů grafu G) a
- $H_1 \subseteq H$ (množina hran grafu G_1 je podmnožinou množiny hran grafu G) ,

nazveme podgrafem grafu G.

V případě, kdy je $U_1=U$ (množina uzlů zůstane zachována), se pro podgraf G_1 používá název faktor grafu G.

Příklad. Na následujícím obrázku je graf G a jeho dva podgrafy G_1 a G_2. Přičemž podgraf G_2 je zároveň i faktorem grafu G (zachovává jeho množinu uzlů).



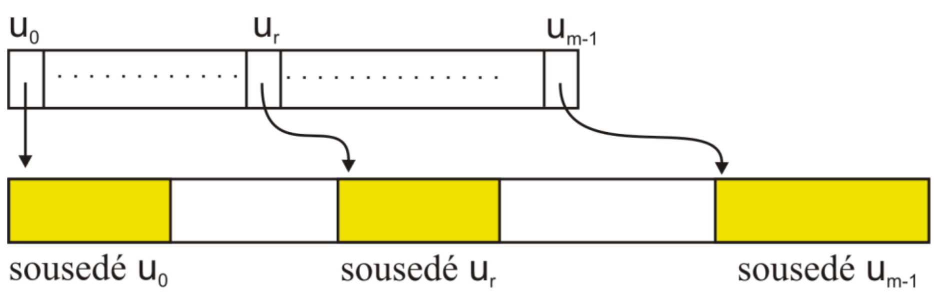
Reprezentace grafu v programech

Graf si můžeme v programu reprezentovat různými způsoby. Můžeme si ho například uložit jako matici sousednosti. Ovšem u rozsáhlejších grafů s větším počtem uzlů je tato matice značně velká a navíc její použití v algoritmech je poměrně neefektivní, neboť v ní musíme pracně hledat. Uveďme dva často používané způsoby reprezentace grafu v programech.

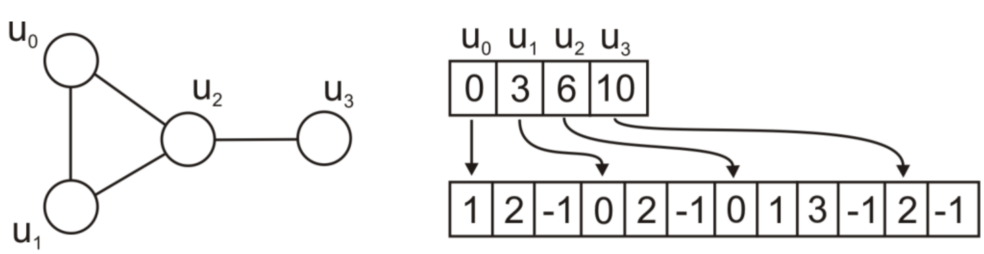
Reprezentace pomocí polí

Struktura grafu je uložena ve dvou polích. První pole má stejný počet prvků, jako je počet uzlů v grafu. Každému uzlu odpovídá jeden prvek pole. V něm je uložena hodnota indexu, od kterého v druhém poli začíná výčet uzlů, jež jsou sousedé tohoto uzlu.

Přepokládejme že množina uzlů grafu je $U=\{u_0,u_2,\dots,u_{m-1}\}$. Tedy uzly jsou číslovány od 0 do m-1, kde $m=|U|$. Dále předpokládejme, že počáteční indexy polí jsou 0.



Na následujícím příkladu je graf se 4 uzly a jeho reprezentace pomocí polí. Hodnoty -1 na konci výčtu sousedů slouží k tomu, aby se poznalo, kde jednotlivé výčty sousedů končí.



Reprezentace dynamickou datovou strukturou

Další možnost je uzel grafu reprezentovat jako strukturovaný datový typ. Každý uzel obsahuje pole ukazatelů na sousední uzly.