Úvod do informatiky

přednáška sedmá

Miroslav Kolařík

Zpracováno dle učebního textu R. Bělohlávka:
Úvod do informatiky, KMI UPOL, Olomouc 2008.

Obsah

Obsah

Přirozená čísla

Jsou to čísla $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$. Množinu všech přirozených čísel označujeme $\mathbb{N}$.

Celá čísla

Jsou to čísla $0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, 4, -4, 5, -5, \ldots$. Množinu všech celých čísel značíme $\mathbb{Z}$.

Racionální čísla

Jsou to čísla, která lze vyjádřit ve tvaru zlomku $\frac{m}{n}$, kde m je celé číslo a n je přirozené číslo. Množinu všech racionálních čísel označujeme $\mathbb{Q}$. Racionální čísla jsou tedy např. $\frac{1}{3}$, $\frac{-2}{5}$, $\frac{21}{37}$, $\frac{-6}{12}$ atd. Poznamenejme, že $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{6}{18}$ jsou různé zápisy téhož racionálního čísla. Racionální čísla zapisujeme také pomocí tzv. desetinného rozvoje. Např. číslo $\frac{3}{2}$ zapisujeme jako $1{,}5$. Číslo $\frac{1}{3}$ má tzv. nekonečný desetinný rozvoj a je jím $0{,}3333\ldots$, což také zapisujeme jako $0{,}\overline{3}$.

Reálná čísla
Jsou to všechna čísla, která se nacházejí na číselné ose. Kromě racionálních čísel zahrnují reálná čísla i tzv. **čísla iracionální**. To jsou čísla, která nelze vyjádřit ve tvaru zlomku. Příkladem iracionálních čísel jsou $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π, e. Množinu všech reálných čísel označujeme $\mathbb{R}$.

Komplexní čísla
Množinu všech uspořádaných dvojic reálných čísel $\langle a, b\rangle$ zapisovaných obvykle ve tvaru $a+bi$, kde symbolem i označujeme tzv. imaginární jednotku, pro niž platí $i^2=-1$, nazýváme komplexní čísla; značíme $\mathbb{C}$. Zásluhou K.F. Gausse se od roku 1831 znázorňují komplexní čísla v rovině. Každé komplexní číslo $z=a+bi$ můžeme vyjádřit i v tzv. goniometrickém tvaru $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, kde číslo $r=\sqrt{a^2+b^2}$ je tzv. absolutní hodnota a úhel φ argument komplexního čísla.

Obsah

Princip (matematické) indukce

Princip indukce umožňuje dokazovat tvrzení tvaru "pro každé přirozené číslo n platí $V(n)$", kde $V(n)$ je nějaké tvrzení, které závisí na n (např. $1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).

Věta (princip indukce)

Nechť je pro každé $n\in\mathbb{N}$ dáno tvrzení $V(n)$. Předpokládejme, že platí

- $V(1)$ $\quad\ldots\quad$ **indukční předpoklad (1. krok)**
- $\forall n\in\mathbb{N}$: z $V(n)$ plyne $V(n+1)$ $\quad\ldots\quad$ **indukční krok.**

Pak $V(n)$ platí pro každé $n\in\mathbb{N}$.

Princip dobrého uspořádání:
Dále budeme předpokládat, že každá neprázdná podmnožina $K\subseteq\mathbb{N}$ má nejmenší prvek (což je pravdivý a intuitivně jasný předpoklad).

Důkaz:
Princip indukce dokážeme sporem. Předpokládejme, že princip indukce neplatí, tj. existují tvrzení $V(n)$, $n \in \mathbb{N}$, která splňují oba předpoklady principu indukce, ale pro nějaké $n' \in \mathbb{N}$ tvrzení $V(n')$ neplatí. Označme $K = \{m \in \mathbb{N} \mid V(m) \text{ neplatí}\}$ množinu všech takových n'. K je tedy neprázdná, neboť $n' \in K$. Množina K má tedy nejmenší prvek k (dle principu dobrého uspořádání) a ten je různý od 1 (dle indukčního předpokladu $1 \notin K$). Pak tedy $k - 1 \notin K$, tedy $V(k-1)$ platí. Z indukčního kroku plyne, že platí i $V(k)$, tedy $k \notin K$, což je spor s $k \in K$.

Příklad

Dokažme výše uvedený vztah $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Podle principu indukce stačí ověřit indukční předpoklad a indukční krok.

Indukční předpoklad: $V(1)$ je tvrzení $1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}$, a to platí.

Indukční krok: Předpokládejme, že platí $V(n)$ a dokažme $V(n+1)$.

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 =$$

$$= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6},$$

což je právě tvrzení $V(n+1)$. Podle principu indukce je tedy tvrzení dokázané.

Příklad

Dokažte, že počet úhlopříček pravidelného n-úhelníka ($n \geq 3$) je $\frac{n(n-3)}{2}$.

Řešení: viz přednáška.

Obsah

Dělitelnost

Definice

Pro $m, n \in \mathbb{Z}$ říkáme, že m **dělí** n, píšeme $m \mid n$, právě když $\exists k \in \mathbb{Z}$ tak, že $m \cdot k = n$. Když $m \mid n$, říkáme také, že m **je dělitelem** n nebo n **je dělitelné** m.
(Fakt, že m nedělí n zapisujeme $m \nmid n$.)

Věta

Pro $a, b, c \in \mathbb{Z}$ platí

a) Jestliže $a \mid b$ a $b \mid c$, pak $a \mid c$.
b) Jestliže $a \mid b$ a $a \mid c$, pak $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ platí $a \mid (bx + cy)$.

Důkaz: viz přednáška.

Příklad

Dokažte indukcí, že pro $\forall n \in \mathbb{N}$ platí: $7 \mid (2^{n+2} + 3^{2n+1})$.

Řešení: viz přednáška.

Věta (o jednoznačnosti dělení se zbytkem)

Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ existují jednoznačně určená $q, r \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = bq + r$ a $0 \leq r < b$.

Číslo r se nazývá **zbytek po celočíselném dělení čísla** a **číslem** b. Píšeme také $(a \bmod b) = r$.

Definice

Přirozené číslo n se nazývá **prvočíslo**, jestliže $n \neq 1$ a jestliže n je dělitelné jen čísly 1 a n.

Věta

Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Důkaz: Sporem, viz přednáška.

Věta (o jednoznačnosti dělení se zbytkem)

Pro $a, b \in \mathbb{Z}$ existují jednoznačně určená $q, r \in \mathbb{Z}$ tak, že $a = bq + r$ a $0 \leq r < b$.

Číslo r se nazývá **zbytek po celočíselném dělení čísla** a **číslem** b. Píšeme také $(a \bmod b) = r$.

Definice

Přirozené číslo n se nazývá **prvočíslo**, jestliže $n \neq 1$ a jestliže n je dělitelné jen čísly 1 a n.

Věta

Existuje nekonečně mnoho prvočísel.

Důkaz: Sporem, viz přednáška.

Věta

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz: Sporem, viz přednáška.

Věta

Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná.

Důkaz: Najdeme bijekci $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{N}$, viz přednáška.

Věta

Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Důkaz: Najdeme bijekci $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{N}$, viz přednáška.

Věta

$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Důkaz: Sporem, viz přednáška.

Věta

Množina $\mathbb{Z}$ je spočetná.

Důkaz: Najdeme bijekci $\mathbb{Z}$ na $\mathbb{N}$, viz přednáška.

Věta

Množina $\mathbb{Q}$ je spočetná.

Důkaz: Najdeme bijekci $\mathbb{Q}$ na $\mathbb{N}$, viz přednáška.

Věta

Interval $(0,1) \subseteq \mathbb{R}$ je nespočetná množina.

Důkaz: Tzv. Cantorovou diagonální metodou, viz přednáška.

Důsledek

Množina $\mathbb{R}$ je nespočetná.

Důsledek

Množina všech iracionálních čísel je nespočetná.

Základní věta aritmetiky

Každé přirozené číslo větší než jedna lze vyjádřit jednoznačně až na pořadí činitelů jako součin prvočísel.

Věta o jednoznačnosti zápisu přirozeného čísla v soustavě o základu b

Nechť $b > 1$ je přirozené číslo. Pro každé $x \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená čísla $a_n, a_{n-1} \dots, a_1, a_0$, přičemž $0 \leq a_i < b$, $a_n \neq 0$ tak, že $x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

Poznámka: Pro zápis čísel ve dvojkové soustavě ($b = 2$) používáme symboly 0 a 1. Pro zápis čísel v šestnáctkové soustavě používáme symboly $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$.

Základní věta aritmetiky

Každé přirozené číslo větší než jedna lze vyjádřit jednoznačně až na pořadí činitelů jako součin prvočísel.

Věta o jednoznačnosti zápisu přirozeného čísla v soustavě o základu b

Nechť $b > 1$ je přirozené číslo. Pro každé $x \in \mathbb{N}$ existují jednoznačně určená čísla $a_n, a_{n-1} \dots, a_1, a_0$, přičemž $0 \leq a_i < b$, $a_n \neq 0$ tak, že $x = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0$.

Poznámka: Pro zápis čísel ve dvojkové soustavě ($b = 2$) používáme symboly 0 a 1. Pro zápis čísel v šestnáctkové soustavě používáme symboly $0, 1, \dots, 9, A, B, C, D, E, F$.