

Minimální kostry grafu

Kostra je faktor grafu, který:

- má stejný počet komponent
- neobsahuje kružnice.

Připomeňme, že faktor grafu je jeho podgraf, který má stejnou množinu uzlů.

U hranově ohodnocených grafů se v praxi vyskytuje úloha nalezení minimální kostry. Formulace této úlohy:

Máme dán graf $G = (U, H)$, jehož hrany jsou ohodnoceny kladnými reálnými čísly. Tedy existuje zobrazení w

$$w: H \rightarrow R^+ ,$$

kde R^+ označuje množinu kladných reálných čísel.

Máme najít takovou kostru $K = (U, H')$ grafu G , jejíž součet ohodnocení hran

$$s = \sum_{h \in H'} w(h)$$

je minimální ze všech možných koster grafu G .

Existují dva algoritmy. Jeden hrany přidává, nazveme ho zařazovací, a druhý hrany ubírá, nazveme ho vyřazovací.

Zařazovací algoritmus

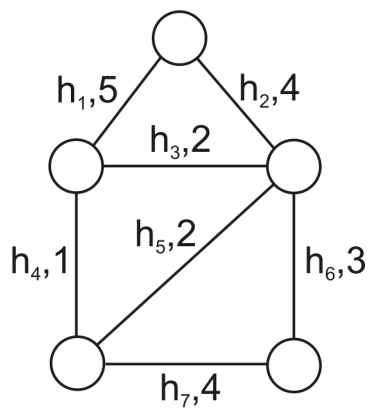
Hrany grafu G uspořádáme tak, že jejich ohodnocení tvoří neklesající posloupnost.

$$h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}$$

$$w(h_{i1}) \leq w(h_{i2}) \leq \dots \leq w(h_{in}) .$$

Vezmeme diskrétní podgraf K výchozího grafu G (podgraf obsahující jen uzly grafu G). Postupně procházíme posloupnost hran od začátku směrem ke konci a u každé hrany ověřujeme, zda jejím přidáním k podgrafu K v něm nevznikne kružnice. Jestliže ne, hranu přidáme ke K .

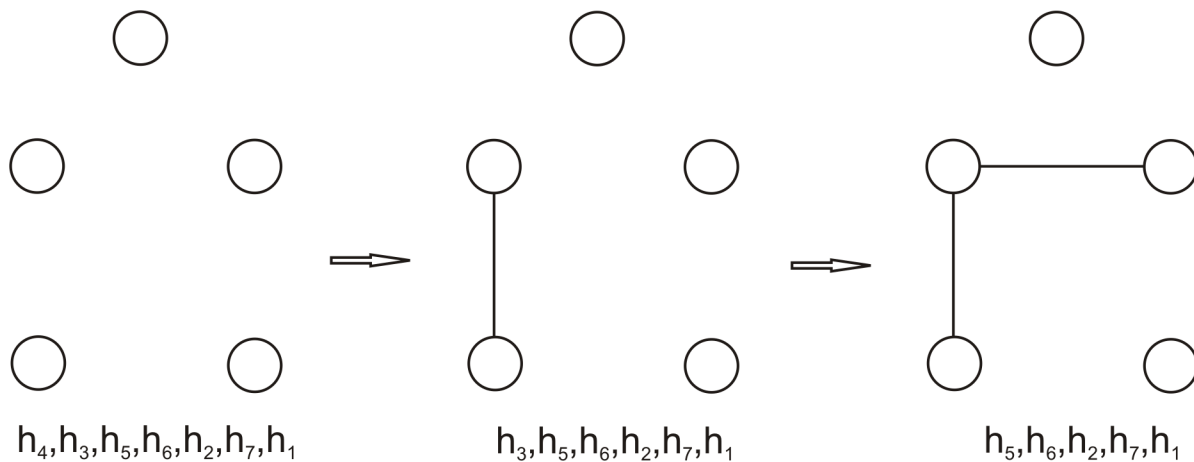
Příklad. V následujícím grafu máme najít jeho minimální kostru. Čísla vedle popisů hran označují ohodnocení hran.



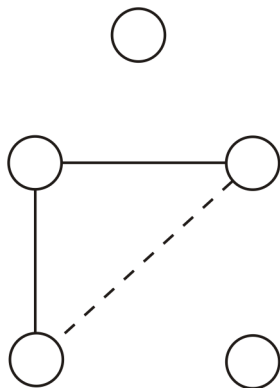
Hrany seřadíme v neklesající posloupnost jejich ohodnocení

$h_4, h_3, h_5, h_6, h_2, h_7, h_1$.

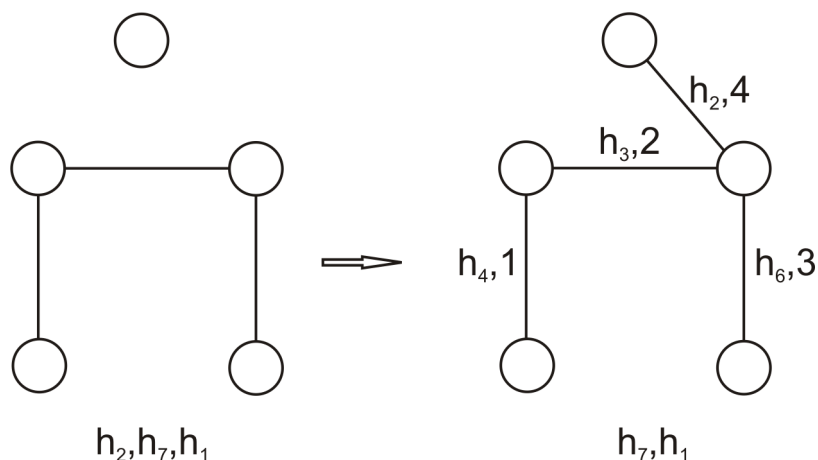
Postup přidávání hran ukazují následující obrázky.



Přidáním hrany h_5 by vznikla kružnice



proto ji nepřidáme a pokračujeme další hranou h_6



Přidáním zbývajících hran h_7 a h_1 by vznikly kružnice, proto je už nepřidáme.

Ohodnocení sestavené kostry je

$$s = w(h_2) + w(h_3) + w(h_4) + w(h_6) = 4 + 2 + 1 + 3 = 10 .$$

Vyřazovací algoritmus

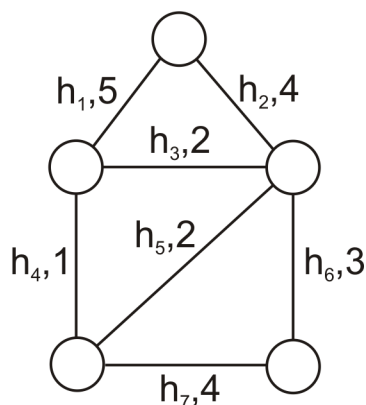
Hrany grafu G uspořádáme tak, že jejich ohodnocení tvoří nerostoucí posloupnost.

$$h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}$$

$$w(h_{i1}) \geq w(h_{i2}) \geq \dots \geq w(h_{in})$$

Na začátku jako podgraf K vezmeme celý výchozí graf G . Postupně procházíme posloupnost hran od začátku směrem ke konci a u každé hrany ověřujeme, zda leží na nějaké kružnici, tj. zda jejím odebráním by se neporušila souvislost podgrafu K . Pokud se souvislost neporuší, hranu odebereme z K .

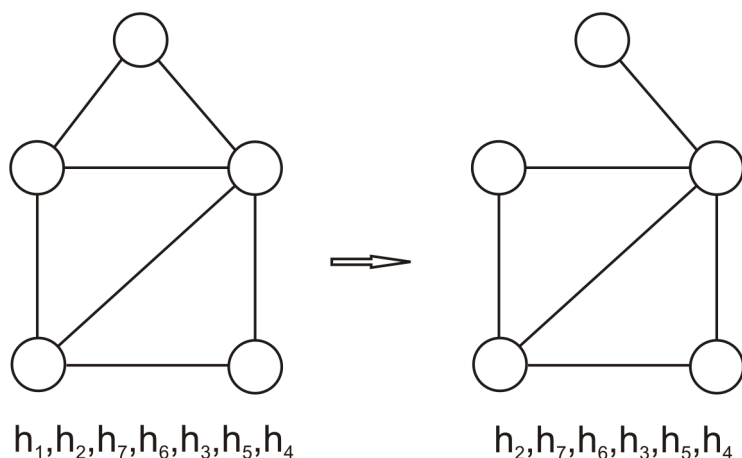
Příklad. Vezmeme stejný výchozí graf jako v příkladu u předchozího algoritmu.



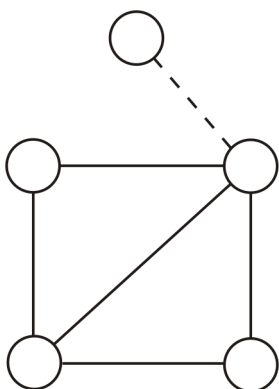
Hrany seřadíme v nerostoucí posloupnost jejich ohodnocení

$$h_1, h_2, h_7, h_6, h_3, h_5, h_4$$

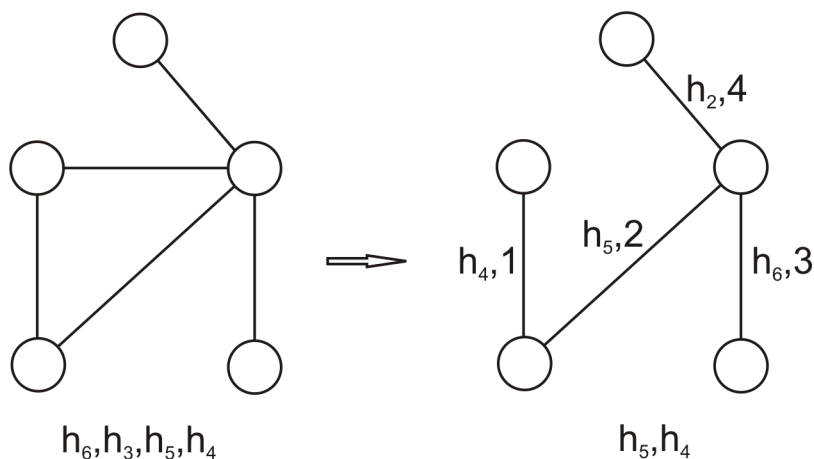
Postup odebírání hran ukazují následující obrázky.



Odebráním hrany h_2 by se porušila souvislost grafu



proto ji neodebereme a pokračujeme další hranou h_7



Zbývající hrany h_5 a h_4 už není možné odebrat, protože by se porušila souvislost grafu. Ohodnocení sestavené kostry je

$$s = w(h_2) + w(h_4) + w(h_5) + w(h_6) = 4 + 1 + 2 + 3 = 10 .$$

Dostali jsme sice jinou kostru než v minulém příkladě, ale její ohodnocení je stejné. Má-li graf více stejně ohodnocených hran, může mít více různých minimálních koster. Kterou kostru sestavíme, ovlivňuje pořadí, ve kterém stejně ohodnocené hrany dáme do posloupnosti pro zařazování nebo vyřazování hran.