1) Антисимметричный тензор.

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A'_{ik} = \sum_{lm} \alpha_{il}\alpha_{km} A_{lm}$$

$$A'_{ki} = \sum_{lm} \alpha_{kl}\alpha_{im} A_{lm} = \sum_{ml} \alpha_{km}\alpha_{il} A_{ml}$$

В нашей системе $A_{ki} = -A_{ik}$

$$A'_{ki} = -\sum_{ml} \alpha_{km}\alpha_{il} A_{lm} \Rightarrow A'_{ki} = -A_{ik}$$

Тензор ранга k в n-мерном пространстве имеет n^k компонент => тензор 2 ранга имеет $3^2 = 9$ и $2^2 = 4$ независимых компонент в 3-и 2-мерных пространствах соответственно.

2) $$T'_{ij} = A'_{ij} + B'_{ij} = \sum_{lm} \alpha_{il}\alpha_{km} A_{lm} + \sum_{lm} \alpha_{il}\alpha_{km} B_{lm} =$$

$$= \sum_{lm} \alpha_{il}\alpha_{km} \underbrace{(A_{lm} + B_{lm})}_{T_{lm}} \Rightarrow T_{ij} \text{ - тензор 2 порядка.}$$

3) $T_{ijk} = a_i b_j c_k$

По определению ~~если для каждой пары~~

4) S_{ij} - симметричный $\Rightarrow S_{ij} = S_{ji}$

A_{ij} - антисимметричный $\Rightarrow A_{ij} = -A_{ji}$

$S_{ij} A_{ji} = S_{ji}(-A_{ij}) = -S_{ij} A_{ij} \ominus$

Переименуем индексы суммирования:

$\ominus \; -S_{ij} A_{ji} \Rightarrow S_{ij} A_{ij} = -S_{ij} A_{ij} \Rightarrow S_{ij} A_{ij} = 0$