MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015-2016

PRÀCTICA 7

Exercici 1 [Interpolació i sistemes lineals 1] Donada una funció real de variable real $f = f(x)$, volem trobar un polinomi $p(x)$ que la interpoli en els punts (x_i, f_i), $i = 0, \dots, n$, on $f_i = f(x_i)$ i els valors x_i (nodes) són tots diferents. Si escrivim el polinomi p com $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, llavors hem de resoldre el sistema $Aa = f$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}, \qquad a = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Tot i que es pot demostrar que aquest sistema té solució única, no es recomana usar aquest mètode per trobar el polinomi interpolador p. Per a veure això feu un programa que, donats el grau del polinomi interpolador i els vector de nodes $(x_0, \dots .x_n)$ i el vector de valors de la funció en els nodes $(f_0, \dots, f_n)$, calculi el nombre de condició de la matriu A, usant la norma del suprem, i els coeficients del polinomi interpolador. Useu les funcions `lupp` i `solveLU`, per a trobar el coeficients del polinomi. La funció `lupp` es pot fer sense pivotatge (per què?). Doneu exemples en els que es vegi l'efecte del nombre de condició sobre les solucions.

Exercici 2 [Interpolació i sistemes lineals 2] Si suposem que el polinomi interpolador té la forma

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

llavors, si imposem que $p(x_i) = f_i$ hem de resoldre un sistema $Lb = f$, on L és triangular superior i

$$l_{i0} = 1, \qquad l_{ij} = (x_i - x_0)(x_i - x_1)\cdots(x_i - x_{j-1}), \quad j = 1, \dots, i.$$

Com abans, calculeu el nombre de condició de la matriu L, i avalueu el polinomi interpolador en diversos punts, per a veure l'efecte del nombre de condició sobre la solució. Compareu-lo amb l'altre procediment.

Nota: Per a avaluar un polinomi de la forma

$$p(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1}),$$

usarem l'algorisme de Horner: Sigui $u_n = b_n$. Si definim

$$u_i = u_{i+1}(x - x_i) + b_i, \qquad i = n - 1, \dots, 0,$$

llavors $p(x) = u_0$. Per tant, haureu de fer una funció amb prototipus

```
double horner(int n, double *b, double *x, double z)
```

que retorni $p(z)$, usant el mètode de Horner.