MÈTODES NUMÈRICS I

Grau de Matemàtiques. Curs 2015-2016

PRÀCTICA 2

Exercici 1 [Fites de l'error] La funció cosinus està definida per la sèrie infinita

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Per a aquesta sèrie tenim l'estimació:

$$|s_k(x) - \cos x| \leq |a_{k+1}(x)|,$$

on

$$s_k(x) = a_0(x) + a_1(x) + \cdots + a_k(x), \quad a_0(x) = 1, \quad a_k(x) = (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = -\frac{x^2}{(2k-1)2k} a_{k-1}(x).$$

Volem calcular $\cos x$ amb un error relatiu més petit que l'ϵ de la màquina en precisió simple. Per a obtenir això, cerquem $|a_{k+1}| < |s_k|\epsilon$ i donem s_k com l'aproximació cercada de $\cos x$. Feu una taula amb 10000 nombres equidistribuïts en $I = [0, 10\pi]$ amb tres columnes. En la primera posarem el valor de x, en la segona el valor calculat de $\cos x$ i en la tercera l'error relatiu del càlcul del cosinus. Podeu explicar el comportament de l'error relatiu real? Useu **gnuplot** per a dibuixar l'error relatiu.

Exercici 2 [Error en el càlcul de 2π] Per a calcular una aproximació del nombre 2π podem calcular la longitud d'un polígon regular inscrit i un de circumscrit amb k costats, en una circumferència de radi 1. Si c_k és la longitud d'un costat del corresponent polígon circumscrit i s_k la de l'inscrit, es pot veure que $s_4 = \sqrt{2}$ i

$$s_{2k} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_k^2}}, \qquad c_k = \frac{2s_k}{\sqrt{4 - s_k^2}}, \qquad k = 2^j, j \geq 2.$$

Tenim que $(ks_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(kc_k)_{k\in\mathbb{N}}$ són monòtones, tenen límit igual a 2π i $ks_k \leq 2\pi \leq kc_k$. Feu un programa que calculi s_k, $k = 2^j$, fins que la fita de l'error $|c_k - s_k|$ satisfaci $|c_k - s_k| < \epsilon$. Compareu amb l'error relatiu real. Expliqueu el seu comportament. Es pot millorar la fórmula?

Exercici 3 [Cancel·lació de termes en el càlcul d'arrels d'un polinomi quadràtic]

Feu un programa per a resoldre una equació de segon grau

$$ax^2 + bx + c = 0$$

només en el cas que les arrels siguin reals (siguin x_1 i x_2). Treballeu amb variables *float*. Doneu valors dels coeficients de manera que $b^2 \gg 4ac$. Comproveu si es verifiquen les igualtats teòriques $x_1 + x_2 = -b/a$, i $x_1 x_2 = c/a$.