Grau de Matemàtiques. Curs 2015-2016. Semestre de tardor
MÈTODES NUMÈRICS I

PRÀCTICA 10: Integració numèrica: fórmula dels trapezis i mètode de Romberg

Exercici 1

Feu un programa per a calcular integrals definides aproximadament, pel **mètode dels trapezis**:

$$I \equiv \int_a^b f(x)dx \approx T_0(h) \equiv h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + \frac{1}{2}f(b)\right) ,$$

on $h = \frac{b-a}{n}$, $x_i = a + ih$, $\forall i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Per fer això, definirem una funció

```
double trap(int n, double h, double integral, double a)
```

on com a variables d'entrada tenim: el nombre de subintervals `n` en que es divideix l'interval inicial $[a, b]$, el pas `h` i el valor aproximat de la integral `integral` pel pas $2h$. La funció retornarà l'aproximació de la integral pel pas h.

El programa principal llegirà els extrems de l'interval $[a, b]$, la precisió amb que es vol obtenir la integral, i el nombre màxim de subdivisions. Començant per la fórmula dels trapezis simple, el programa dividirà el pas h per 2, i cridarà a la funció `trap` per calcular les aproximacions de la integral. Aquest procés es repetirà fins que la diferència entre les dues darreres aproximacions en valor absolut sigui menor que la precisió donada, o s'arribi al màxim de subdivisions.

La funció a integrar `double f(double)`, es posarà en un fitxer apart.

Exercici 2

Feu un programa que implementi el **mètode de Romberg**, el qual és una combinació del **mètode d'integració per trapezis** i del **mètode d'extrapolació repetida de Richardson**.

El resultat bàsic és la **fórmula d'Euler-McLaurin**, la qual dóna una expressió en sèrie de potències de l'error de la fórmula dels trapezis:
si $f(x)$ és suficientment diferenciable, llavors es verifica

$$T_0(h) = I + a_1h^2 + a_2h^4 + \cdots + a_kh^{2k} + O(h^{2k+2}) ,$$

on els coeficients a_i són independents del pas h.

Per tant, es pot càlcular $T_0(h)$ per a passos diferents $h = b - a$, $h/2$, $h/4$, $h/8$, ..., i fer extrapolació de Richardson per a anar *eliminant* termes successius de l'expressió de l'error.

La fórmula per a la primera etapa d'extrapolació és

$$T_1(h/2) = \frac{4T_0(\frac{h}{2}) - T_0(h)}{4-1} .$$

La fórmula general és

$$T_j(h/2) = \frac{4^j T_{j-1}(\frac{h}{2}) - T_{j-1}(h)}{4^j - 1} \ \forall j \geq 1 \ .$$

Aquest procés es pot estructurar en un esquema triangular

$$\begin{array}{lll} T_0(h) & & \\ T_0(h/2) & T_1(h/2) & \\ T_0(h/4) & T_1(h/4) & T_2(h/4) \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

S'avança fila a fila i d'esquerra a dreta. Per a calcular la primera columna de cada fila s'usa la fórmula dels trapezis (amb el mateix estalvi d'avaluacions de f(x) que al primer exercici). Per a la resta de columnes, s'usen els últims dos valors ja coneguts de la columna anterior.

S'atura el procés quan, o bé els dos últims elements d'una fila difereixen menys que una precisió demanada `prec`, o bé s'ha arribat a un valor màxim de files calculades `num`.

Comentari: Apliqueu els dos mètodes a un mateix exemple per a observar quin és més eficient. Heu de pensar que, en moltes aplicacions pràctiques, l'avaluació de la funció pot tardar molt temps.