TD2 :Ensemble/Applications

Exercice 1 (Logique vs Ensembles)

1. *Prouver les relations logiques*

$$A \vee (B \vee C) = (A \vee B) \vee C$$

$$A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee C)$$

2. *Prouver les relations ensemblistes*

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Exercice 2

Soient A, B, C trois parties d'un ensemble E. Montrer que $Card(A \cup B \cup C) = Card(A) + Card(B) + Card(C) - Card(A \cap B) - Card(A \cap C) - Card(B \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$

Exercice 3 (Un peu de pratique)

Un promeneur mycophile revient de sa cueillette. Avant d'apporter les champignons chez le pharmacien pour les faire identifier, il les répertorie. Il trouve :

- *12 champignons roses*
- *27 champignons à lamelles*
- *39 champignons à chapeau convexe*

Parmi la cueillette, le promeneur remarque que :

- *Parmi les champignons à chapeau convexe, 12 avaient des lamelles et 7 étaient de couleur rose.*
- *Parmi les champignons à lamelle, 6 -dont 2 avec un chapeau convexe- étaient roses.*

1. *Combien de champignons le promeneur a-t'il ramassé ?*
2. *Combien de champignons à chapeau convexe n'ont ni lamelles ni la couleur rose ?*

Exercice 4

Exprimer la relation entre les deux éléments de chacun des couples suivants, à l'aide des signes d'inclusion et appartenance :

$$(\emptyset, \mathbb{R})\ ,\ (1, \mathbb{Z})\ ,\ (\{1\}, 1)\ ,\ (\mathbb{R}, \mathbb{Z}),\ (\{1,2\}, P(\mathbb{Z}))$$

$$(\{1,2\}, \mathbb{Z}),\ (\{\emptyset\}, P(E)),\ (\emptyset, \emptyset)\ ,\ (\emptyset, \{\emptyset\}),\ (\emptyset, P(E))$$

$$(\{f \mid f\ fonction\ continue\ sur\ \mathbb{R}\}, \{f \mid f\ fonction\ dérivable\ sur\ \mathbb{R}\})$$

$$(\mathbb{R}, \{p \in \mathbb{N} \mid p\ nombre\ premier\})$$

Exercice 5 (Différences symétriques)

Soit E un ensemble ; A et B des sous-ensembles de E. On rappelle que $A \setminus B = A \cap B^c$ et on définit la différence symétrique de A et B par

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

1. Faire un dessin pour illustrer cette définition
2. *Soient A, B, C, D des sous-ensembles de E. Prouver que*
   i) $A^c \triangle B^c = A \triangle B$
   ii) $A \triangle B = \emptyset$ *ssi* $A=B$
   iii) Si $A \triangle B = A \triangle C$ *alors* $B = C$
   iv) Si $A \triangle B = A \cap B$ *alors* $A = B = \emptyset$.

Exercice 6 (Rectangles avec un s)

1. *Dans le plan complexe, considérer le rectangle plein délimité par les droites d'équation $x = 1$, $x = 6$, $y = 2$, $y = 5$ comme un produit cartésien et représenter cet ensemble.*
2. *Soient les intervalles $E = [1; 6], F = [2; 5], A = [2; 3] \subset E$ et $B = [3; 4] \subset F$. On sonsidère $E \times F$ et on pose $\bar{A} = E \setminus A$ et $\bar{B} = F \setminus B$. Représenter sur le graphique précédent, les ensembles $A \times B$, $\bar{A} \times B$, $A \times \bar{B}$, $\bar{A} \times \bar{B}$. Vérifier qu'ils forment une partition de $E \times F$*
3. *Ecrire $(E \times F) \setminus (A \times B)$ sous la forme d'une union de produits cartésiens*

Exercice 7 (Ma première application)
Soit $A = \{0, 1, 2, 3\}$ et $B = \{0, 4, 1, 7\}$. On définit des applications f et g de A dans B par :

$$f(0) = 0;\ f(1) = 7;\ f(3) = 1;\ f(2) = 4$$

$$g(0) = 1;\ g(3) = 7;\ g(1) = 1;\ g(2) = 0$$

1. *Que peut-on dire de l'application f ?*
2. *Que peut-on dire de l'application g ?*

Exercice 8 (?-ctive)
Dans chacun des cas suivants, l'application f est-elle injective, bijective, surjective ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Q}^* &\to \mathbb{Q}^* \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{Z} &\to \mathbb{Z} \\ n &\mapsto n+1 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto 2n \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto \begin{cases} \frac{n}{2} & \textit{si } n \textit{ pair} \\ \frac{n+1}{2} & \textit{si } n \textit{ impair} \end{cases} \end{aligned}$$

Exercice 9 (La Partie Entière)
On considére la fonction partie entière E, la fonction identité id, et la fonction carré $f(x) = x^2$, définies sur $\mathbb{R}$.
Déterminer pour chacune de ces fonctions :

1. les image de :
$$\mathbb{R}\ ,\ A = [0, 3]\ ,\ B =]3, 4[\ ,\ ] - 2, 1[$$
2. les images réciproques de :
$$\mathbb{R}\ ,\ \{\frac{1}{2}\}\ ,\ \{5\}\ ,\ ]2, 9]$$
3. Déterminer :
$$E(A \cap B) \textit{ et } E(A) \cap E(B)$$

Exercice 10 (Application caractéristique)
On définit, pour E ensemble, et A partie de E, l'application caractéristique de A par :

$$\begin{aligned}\chi_A\ : E &\longrightarrow \{0,1\}\\ x &\longmapsto \begin{cases}1 & si\ x \in A\\ 0 & sinon\end{cases}\end{aligned}$$

Montrer les propriétés suivantes :

1. *L'application $\mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{F}(E,\{0,1\})$ définie par $A \longmapsto \chi_A$ est bijective.*
2. $A \subset B \Longrightarrow \chi_A \leq \chi_B$
3. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$
4. $\chi_{\bar{A}} = 1 - \chi_A$
5. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \chi_B$
6. $\chi_{A\setminus B} = \chi_A(1-\chi_B)$
7. $\chi_{A\Delta B} = \chi_A + \chi_B - 2\chi_A\chi_B = (\chi_A - \chi_B)^2 = |\chi_A - \chi_B|$

Exercice 11 (Hé, Hé, C pa 6 s1pl)
Soient E et F des ensembles. Soient $f : E \to F$ et $g : E \to F$ deux applications.
Soient X et X' des parties de E. Soient Y,Y' des parties de F. Comparer les ensembles suivants :

1. $f(X \cup X')$ *et* $f(X) \cup f(X')$
2. $f(X \cup X')$ *et* $f(X) \cup f(X')$
3. $f^{-1}(Y \cap Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cap f^{-1}(Y')$
4. $f^{-1}(Y \cup Y')$ *et* $f^{-1}(Y) \cup f^{-1}(Y')$
5. X *et* $f^{-1}(f(X))$
6. Y *et* $f(f^{-1}(Y))$

Exercice 12
Soient E, F et G trois ensembles. Soient deux applications $f : E \to F$ et $g : F \to G$.

1. Montrer que : $g \circ f$ *surjective* $\Rightarrow g$ *surjective*
2. Montrer que : $g \circ f$ *injective* $\Rightarrow f$ *injective*

Exercice 13
Soit E un ensemble et f une application injective de E dans E, c'est à dire une application vérifiant :

$$\forall x_1, x_2 \in E,\ f(x_1) = f(x_2) \Longleftrightarrow x_1 = x_2.$$

On définit par récurrence sur $n \geq 1$ des applications f^n par

$$f^1 = f \qquad\qquad f^n = f \circ f^{n-1}$$

où $f \circ g$ désigne la fonction composé de g par f définie par

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big)$$

pour tout $x \in E$ et toute application $g : E \longrightarrow E$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est injective.
2. Montrer que si f surjective, on a de même pour tout $n \geq 1$ l'application f^n est surjective.