TD1 - Logique, ensembles, applications

Exercice 1. Démontrer que $(1 = 2) \Rightarrow (2 = 3)$.

Exercice 2. Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?
2. Donner leur négation.

Exercice 3. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Nier, de la manière la plus précise possible, les énoncés qui suivent :

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x) \leq 1$.
2. L'application f est croissante.
3. L'application f est croissante et positive.
4. Il existe $x \in \mathbb{R}^+$ tel que $f(x) \leq 0$.
5. Il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que quel que soit $y \in \mathbb{R}$, si $x < y$ alors $f(x) > f(y)$.

On ne demande pas de démontrer quoi que ce soit, juste d'écrire le contraire d'un énoncé.

Exercice 4. Montrer que $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 5. Soit X un ensemble et f une application de X dans l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties de X. On note A l'ensemble des $x \in X$ vérifiant $x \notin f(x)$. Démontrer qu'il n'existe aucun $x \in X$ tel que $A = f(x)$.

Exercice 6.

1. Soit $p_1, p_2, \ldots, p_r$, r nombres premiers. Montrer que l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i.
2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 7. Soit la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $x_0 = 4$ et $x_{n+1} = \dfrac{2x_n^2 - 3}{x_n + 2}$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n > 3$.

2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - 3 > \frac{3}{2}(x_n - 3)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n \geqslant \left(\frac{3}{2}\right)^n + 3$.
4. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

Exercice 8. Montrer que

$$\forall n \geq 2, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 9. Montrer par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k},$$

pour tout réel a et b.

Exercice 10. Montrer par contraposition les assertions suivantes, E étant un ensemble :

1. $\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B$,
2. $\forall A, B, C \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C) \Rightarrow B = C$.

Exercice 11. Soit un ensemble E et deux parties A et B de E. On désigne par $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$. *Dans les questions ci-après il pourra être commode d'utiliser la notion de fonction caractéristique.*

1. Démontrer que $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.
2. Démontrer que pour toutes les parties A, B, C de E on a $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.
3. Démontrer qu'il existe une unique partie X de E telle que pour toute partie A de E, $A \triangle X = X \triangle A = A$.
4. Démontrer que pour toute partie A de E, il existe une partie A' de E et une seule telle que $A \triangle A' = A' \triangle A = X$.

Exercice 12. Montrer que chacun des ensembles suivants est un intervalle, éventuellement vide ou réduit à un point

$$I_1 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[3, 3 + \frac{1}{n^2}\right[\quad \text{et} \quad I_2 = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left]-2 - \frac{1}{n}, 4 + n^2\right].$$

Exercice 13. Est-il vrai que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$? Et $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$?

Exercice 14. Donner la liste des éléments de $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{1,2\}))$.

Exercice 15. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow xe^y = ye^x$$

est une relation d'équivalence. Préciser, pour x fixé dans $\mathbb{R}$, le nombre d'éléments de la classe de x modulo $\mathcal{R}$.

Exercice 16. La relation "divise" est-elle une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$? sur $\mathbb{Z}$? Si oui, est-ce une relation d'ordre total ?

Exercice 17. Un ensemble est dit bien ordonné si toute partie non vide admet un plus petit élément.

1. Donner un exemple d'ensemble bien ordonné et un exemple d'ensemble qui ne l'est pas.
2. Montrer que bien ordonné implique totalement ordonné.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 18. Soit l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $f\colon x \mapsto x^2$.

1. Déterminer les ensembles suivants : $f([-3,-1])$, $f([-2,1])$, $f([-3,-1]\cup[-2,1])$ et $f([-3,-1]\cap[-2,1])$. Les comparer.
2. Mêmes questions avec les ensembles $f^{-1}(]-\infty,2])$, $f^{-1}([1,+\infty[)$, $f^{-1}(]-\infty,2]\cup[1,+\infty[)$ et $f^{-1}(]-\infty,2]\cap[1,+\infty[)$.

Exercice 19. Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto 2n \quad ; \quad f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z},\ n\mapsto -n$$
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto x^2 \quad ; \quad f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+,\ x\mapsto x^2$$
$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C},\ z\mapsto z^2.$$

Exercice 20. On considère quatre ensembles A,B,C et D et des applications $f:A\to B$, $g:B\to C$, $h:C\to D$. Montrer que :

$$g\circ f \text{ injective } \Rightarrow f \text{ injective},$$
$$g\circ f \text{ surjective } \Rightarrow g \text{ surjective}.$$

Montrer que :

$$\big(g\circ f \text{ et } h\circ g \text{ sont bijectives }\big) \Leftrightarrow \big(f,g \text{ et } h \text{ sont bijectives}\big).$$

Exercice 21. Soit $f:X\to Y$. Montrer que

1. $\forall B\subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B\cap f(X)$.
2. f est surjective ssi $\forall B\subset Y\ f(f^{-1}(B)) = B$.
3. f est injective ssi $\forall A\subset X\ f^{-1}(f(A)) = A$.
4. f est bijective ssi $\forall A\subset X\ f(\complement A) = \complement f(A)$.