TD Algèbre 3 – Série N° 1

Filière STPI – S3 – Année 2015-16

*****

Exercice 1 : Soient $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par u(P) =((X+1)P)'.

a) Ecrire la matrice représentant u dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.

b) En déduire que l'équation différentielle (x+1)y'+y=f, où f est une fonction polynomiale, admet une solution polynomiale (de même degré)

Exercice 2 : Calculer par la méthode du pivot de Gauss l'expression du rang de la matrice :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & \alpha & 2 & 3 \\ \alpha & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{où } \alpha \text{ est un scalaire.}$$

Discuter suivant les valeurs du paramètre α.

Exercice 3 : Soit $A = (a_{ij})_n$ la matrice carrée d'ordre n définie par $a_{ii=}\ \alpha\ et\ a_{ij=}\ \beta\ si$ i $\neq j$, où α et β sont deux scalaires. Montrer on effectuant des opérations élémentaires sur A que :

$$\det(A) = \begin{vmatrix} \alpha+(n-1)\beta & \beta & \cdots & \cdots & \beta \\ 0 & & \alpha-\beta & 0 \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \cdots & \alpha-\beta & \ldots \\ 0 & \ldots & \cdots & 0 & \alpha-\beta \end{vmatrix}$$

Calculer det(A) et discuter suivant les valeurs des paramètres α et β.

Exercice 4 : Soit Aϵ $\mathcal{M}_n$ ($\mathbb{K}$) , montrer que pour tout p ϵ $\mathbb{N}^*$:

$$(A+I_n)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k \ , \quad A^p - I_n = (A-I_n)\sum_{k=0}^{p-1} A^k$$

Pour $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, montrer que :

a) $A^p = (-1)^p \begin{pmatrix} 1 & -p \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. En déduire l'expression de la matrice $\sum_{k=0}^{p} A^k$

b) $(A+I_n)$ est idempotente. En déduire que

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0 \ et\ \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} k \binom{p}{k} = 0$$

Exercice 5 : Soit la matrice $\mathrm{A}_n = (a_{ij})_n$ où $a_{ii} = 0,\ a_{ij} = 1\ \ si\ i \neq j$

a) Montrer en utilisant une propriété des déterminants que pour tout n>2 :

$$\det(\mathrm{A}_n) = -\frac{n-1}{n-2}\det(A'_n)$$

où A'_n est la matrice carrée d'ordre n obtenue à partir de la matrice A_n en remplaçant son premier vecteur colonne par le vecteur canonique e_1 de $\mathbb{K}^n$.

b) En déduire, en utilisant la méthode de Laplace (des cofacteurs), que pour tout n>2:

$\det(\mathrm{A}_n) = -\frac{n-1}{n-2}\det(A_{n-1})$ et calculer $\det(\mathrm{A}_n)$.

Exercice 6 : Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

a) Montrer que si AX=BX pour tout vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$, Alors A=B.

b) En déduire si A et B sont deux matrices carrées de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que le système AX =Y est équivalant au système X=BY où X et Y sont des vecteurs colonnes quelconques de $\mathbb{K}^n$, alors A est inversible et $B=A^{-1}$

c) En utilisant b), calculer les matrices inverses des matrices suivantes :

$$A = (a_{ij})_n \quad \text{où } a_{ii} = 0,\ a_{ii+1} = -\alpha \ \ et\ a_{ij} = 0\ si\ i \neq j\ et\ i \neq j+1 \quad , \alpha \in \mathbb{K}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

c) En déduire $\det(A_n)$

Exercice 7 : On se propose de résoudre un problème d'interpolation qui consiste à trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ qui prend des valeurs données aux points 0, 1, 2 , 3 .
On considère application linéaire u : $\mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par u(P) =(P(0), P(1) , P(2), P(3)).

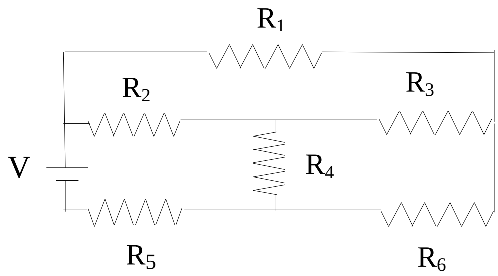
a) Déterminer les matrices M_u et M'_u de u respectivement dans les bases $\mathcal{B}=(1, X, X^2, X^3)$ et $\mathcal{B}'=(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2)\}$ de $\mathbb{R}_3[X]$ ($\mathbb{R}^4$ étant muni de sa base canonique)

b) Vérifier que M'_u est inversible et en déduire que M_u l'est aussi.

c) Calculer l'inverse de M'_u.

d) Quel est le polynôme P de $\mathbb{R}_3[X]$ qui prend les valeurs 1, 0, 2, 4 aux points 0, 1 , 2, 3 ?

Exercice 8 : Le problème consiste à étudier comment réagissent les intensités du courant et la différence de potentiel dans le circuit électrique suivant :



a) En utilisant les lois de Kirchhoff, formuler et analyser le problème.

b) Dans le cas où toutes les résistances R_i sont égales, exprimer les intensités du courant dans les différentes branches du circuit en fonction de la tension V.

Exercice 9 : Dans l'analyse des signaux, il est souvent nécessaire de décomposer un signal f (t) en une superposition d'ondes exponentielles $e^{i\mu t}$.
Après avoir mesuré m fois le signal f (t) à des temps t = 0, 1,..., m −1, nous connaissons les valeurs f (0), f (1)..., f (m −1). Nous cherchons à trouver une fonction de la forme :

$$g(t) = \lambda_0 + \lambda_1 e^{\frac{2\pi i t}{m}} + \lambda_2 e^{\frac{4\pi i t}{m}} + \cdots + \lambda_1 e^{\frac{2(m-1)\pi i t}{m}}$$

qui interpole les m valeurs mesurées f (i), (c.a.d. telle que f (i) = g (i) pour i=0,1, …, m-1)

a) Montrer que ceci est le cas si et seulement si $A\lambda=F$ où A est la matrice $(a_{j,k})_m$ avec $a_{j,k} = e^{\frac{2(j-1)(k-1)\pi i}{m}}$, λ et F sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{R}^n$ dont les composante dans la base canonique sont respectivement $(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{(m-1)})$ et (f(0), f(1), ..., f(m-1))

b) Soient A^j et A^k les j-ieme et k-ieme vecteurs colonnes de A. Montrer que

$$A_j A_k = \sum_{l=0}^{m-1} (e^{2(j+k-2)\pi i/m})^l$$

c) En déduire que $A^j A^k = 0$ si j + k −2 n'est pas un multiple de m et $A^j A^k = m$ sinon.

d) Montrer que si M et N sont des matrices de $\mathcal{M}_m(\mathbb{K})$ telles que $M^j N^k = 1$ si j = k et $M^j N^k = 0$ sinon alors ${}^tNM = I_m$. En déduire la matrice inverse de A.

e) Donner les valeurs λ_i en fonction des f(i) i=0,1,…,m.