Logique, ensembles et applications.

I Outils du raisonnement mathématique **1**
I.A Assertions et connecteurs logiques 1
I.A.1 Assertions 1
I.A.2 Connecteurs logiques 2
I.A.3 Propriétés des connecteurs logiques 3
I.B Quantificateurs 4
I.C Modes de raisonnement 5
I.C.1 Syllogisme 5
I.C.2 Disjonction des cas 5
I.C.3 Démonstration par contraposée 5
I.C.4 Démonstration par contre-exemple 6
I.C.5 Démonstration par l'absurde 6
I.C.6 Démonstration par récurrence 6
I.C.7 Exemples 7

II Ensembles **7**
II.A La notion d'ensemble 7
II.B Parties d'un ensemble 8
II.C Opérations sur les parties d'un ensemble 9
II.D Ensembles produits 10
II.E Structure algébrique des ensembles 11

III Applications **13**
III.A Généralités 13
III.B Injections, surjections, bijections 14
III.B.1 Notion intuitive d'ensembles en bijection 14
III.B.2 Applications injectives et surjectives 16
III.C Compléments sur les applications 17
III.C.1 Composée de deux applications et application réciproque 17
III.C.2 Prolongement et restriction d'une application 19

I Outils du raisonnement mathématique

I.A Assertions et connecteurs logiques

I.A.1 Assertions

Définition 1. Une *assertion* est un énoncé mathématique (ou propriété) à laquelle on attribue l'une des deux valeurs logiques : le vrai (V) ou le faux (F) (valeurs booléennes).

Exemples 1.
- "$2 + 2 = 4$" est une assertion vraie.
- "$2 + 2 = 5$" est une assertion fausse.
- "π est un nombre entier" est une assertion fausse.

Remarque 1. Pour certaines assertions, on peut décider du caractère vrai ou faux (par exemple, on peut décider que l'assertion $x > 0$ est vraie), mais cela provoque parfois des contradictions. Par exemple, l'assertion "toute règle admet une exception" ne peut pas être vraie. Les deux possibilités sont consignées dans une table de vérité :

$\mathcal{P}$
V
F

I.A.2 Connecteurs logiques

Il existe cinq connecteurs logiques, à la base de tout raisonnement mathématique, dont nous allons faire la liste :

- Négation (non) : À toute assertion $\mathcal{P}$, on peut associer une autre assertion, appelée *négation* de $\mathcal{P}$ et notée $(\text{non}\,\mathcal{P})$, qui prend les valeurs :
  - Vrai si $\mathcal{P}$ est faux.
  - Faux si $\mathcal{P}$ est vrai.

$\mathcal{P}$	$\text{non}\,\mathcal{P}$
V	F
F	V

  Par exemple, si $\mathcal{P}$ est : "l'entier n est pair", $(\text{non}\,\mathcal{P})$ devient : "l'entier n est impair"
- Disjonction (ou) : L'assertion $(\mathcal{P}\,\text{ou}\,\mathcal{Q})$ est vraie si l'une au moins des deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ est vraie.
- Conjonction (et) : L'assertion $(\mathcal{P}\,\text{et}\,\mathcal{Q})$ est vraie si les deux assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont vraies.
- Implication $(\Rightarrow)$: L'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie si l'assertion $((\text{non}\,\mathcal{P})\,\text{ou}\,\mathcal{Q})$ est vraie.
- Équivalence $(\Leftrightarrow)$: L'assertion $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$ est vraie si l'assertion $((\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})\,\text{et}(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}))$ est vraie.

Remarques 2.

1. Le "ou" mathématique n'est pas exclusif : si les assertions $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toutes les deux vraies, alors l'assertion $(\mathcal{P}\,\text{ou}\,\mathcal{Q})$ est vraie.
2. $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ signifie $(\text{non}\,\mathcal{P})$ est vraie *ou* ($\mathcal{P}$ est vraie et dans ce cas) $\mathcal{Q}$ est vraie.

   Cette assertion s'écrit donc aussi "Si $\mathcal{P}$ (vraie), alors $\mathcal{Q}$ (vraie)", ou encore "$\mathcal{P}$ est une condition suffisante pour $\mathcal{Q}$", ou enfin "$\mathcal{Q}$ est une condition nécessaire pour $\mathcal{P}$"
3. $(\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q})$ s'écrit aussi "$\mathcal{P}$ si et seulement si $\mathcal{Q}$", ou encore "$\mathcal{P}$ est une condition nécessaire et suffisante pour $\mathcal{Q}$"

On peut résumer les différentes valeurs logiques prises par ces connecteurs logiques en fonction des valeurs logiques de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ dans la table de vérité suivante :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Remarques 3.

1. Si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont simultanément fausses, alors $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie. Par exemple $((1 > 2) \Rightarrow (2 > 3))$ est une assertion vraie.
2. $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ n'a pas même valeur logique que $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$.
   Par exemple, pour $x \in \mathbb{R}$, $(x = 1 \Rightarrow x > 0)$ est une assertion vraie, mais $(x > 0 \Rightarrow x = 1)$ est une assertion fausse.

I.A.3 Propriétés des connecteurs logiques

Proposition 1. On peut composer des connecteurs logiques :

1. Si $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie et si $(\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R})$ est vraie, alors $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{R})$ est vraie.
2. non(non $\mathcal{P}$) a même valeur logique que $\mathcal{P}$.
3. non($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) a même valeur logique que (non $\mathcal{P}$) ou(non $\mathcal{Q}$)
4. non($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) a même valeur logique que (non $\mathcal{P}$) et(non $\mathcal{Q}$)
5. $\mathcal{P}$ et($\mathcal{Q}$ ou $\mathcal{R}$) a même valeur logique que ($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) ou($\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$)
6. $\mathcal{P}$ ou($\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$) a même valeur logique que ($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{Q}$) et($\mathcal{P}$ ou $\mathcal{R}$)

Démonstration. Toutes ces propriétés se retrouvent à l'aide de tables de vérité. Par exemple, nous allons démontrer 3) :

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$	non($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$)	non $\mathcal{P}$	non $\mathcal{Q}$	(non $\mathcal{P}$) ou(non $\mathcal{Q}$)
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Ce tableau nous permet de constater que les valeurs logiques prises par la propriété non($\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$) coïncident avec celles de la propriété (non $\mathcal{P}$) ou(non $\mathcal{Q}$).

On pourra démontrer le reste de la même façon à titre d'exercice. $\square$

Exercice 1. Montrer que l'assertion $\mathcal{P}$ ou(non $\mathcal{P}$) est toujours vraie.

Remarque 4. Il est essentiel de savoir formuler la négation d'une propriété $\mathcal{P}$. En effet comme les valeurs logiques de la propriété $\mathcal{P}$ et de la propriété non $\mathcal{P}$ sont inverses, il suffit de démontrer que non $\mathcal{P}$ est vraie pour établir que $\mathcal{P}$ est fausse.

Définition 2. Soit E un ensemble. Pour un élément x de E, on note $\mathcal{P}(x)$ une assertion dont la valeur logique dépend d'une variable notée x. $\mathcal{P}(x)$ est appelé un *prédicat*. Par exemple, pour $E = \mathbb{R}$, le prédicat $\mathcal{P}(x)$: "$x > 0$" est vrai pour la valeur $x = 1$, et faux pour la valeur $x = -1$.

I.B Quantificateurs

Définition 3.

1. On définit le *quantificateur universel*, noté $\forall$ (quelque soit) de la manière suivante :
$$\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)$$
signifie que le prédicat $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour toute valeur de x prise dans E, ou encore :
$$\{x \in E / \, \mathcal{P}(x) \text{ est vrai } \} = E$$
2. On définit le *quantificateur existentiel*, noté $\exists$ (il existe) de la manière suivante :
$$\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)$$
signifie que le prédicat $\mathcal{P}(x)$ est vrai pour au moins une valeur de x prise dans E, ou encore :
$$\{x \in E / \, \mathcal{P}(x) \text{ est vrai } \} \neq \emptyset$$

Proposition 2. On exprime la négation des quantificateurs de la manière suivante :

1. L'assertion non$(\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x))$ est logiquement équivalente à $\forall x \in E,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x)$.
2. L'assertion non$(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x))$ est logiquement équivalente à $\exists x \in E,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x)$.

Exemple 2.
$$\begin{aligned}
&\text{non}(\forall x \in E,\ [\exists y \in F,\ (\forall z \in G,\ \mathcal{P}(x,y,z))]) \\
\Leftrightarrow\ \ & \exists x \in E,\ \text{non}[\exists y \in F,\ (\forall z \in G,\ \mathcal{P}(x,y,z))] \\
\Leftrightarrow\ \ & \exists x \in E, \forall y \in F,\ \text{non}(\forall z \in G,\ \mathcal{P}(x,y,z)) \\
\Leftrightarrow\ \ & \exists x \in E, \forall y \in F, \exists z \in G,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x,y,z)
\end{aligned}$$

Proposition 3. On peut inverser deux quantificateurs de même nature :

- $\exists x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)$ équivaut à $\exists y \in F, \exists x \in E,\ P(x,y)$
- $\forall x \in E, \forall y \in F,\ P(x,y)$ équivaut à $\forall y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)$
- $\forall x \in E, \exists y \in F,\ P(x,y)$ n'est en général pas équivalent à $\exists y \in F, \forall x \in E,\ P(x,y)$

Exemples 3.

1. Si $E = \mathbb{R}_-^*$, et $F = \mathbb{R}_+^*$, alors on a $(\forall x < 0, \forall y > 0,\ xy < 0)$, ce qui équivaut à $(\forall y > 0, \forall x < 0,\ xy < 0)$

2. Si $E = F = \mathbb{R}_+^*$, alors l'assertion $(\forall x > 0, \exists y > 0,\ xy = 1)$ est vraie. En effet, pour tout x réel strictement positif, il existe $y = \frac{1}{x} > 0$ tel que $xy = 1$.

   En revanche, l'assertion $(\exists y > 0, \forall x > 0,\ xy = 1)$ est fausse. On peut le prouver à l'aide de la remarque 4. La négation de cette assertion est :

$$\forall y > 0, \exists x > 0,\ xy \neq 1$$

   Cette nouvelle assertion est vraie car pour y réel strictement positif quelconque, il existe $x = \frac{2}{y} > 0$ tel que $xy = 2 \neq 1$.

I.C Modes de raisonnement

Remarque 5. Dans le lexique du raisonnement, un théorème, une proposition, un corollaire ou un lemme sont des assertions vraies. Une hypothèse est une assertion qu'on vérifie ou dont on décide qu'elle est vraie (même si elle peut être fausse, par exemple dans le raisonnement par l'absurde).

I.C.1 Syllogisme

On veut démontrer la proposition $\mathcal{Q}$. On procède en trois étapes :

1. On démontre la proposition $\mathcal{P}$ (celle-ci se vérifie en général directement).
2. On vérifie que l'assertion $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$ est vraie.
3. On en déduit la proposition Q.

C'est le mode de raisonnement le plus couramment utilisé, et qu'on fait souvent sans y penser dans la vie courante. Par exemple :

"Socrate est un homme (proposition $\mathcal{P}$). Tous les hommes sont mortels (proposition $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$). Donc Socrate est mortel (proposition $\mathcal{Q}$).

I.C.2 Disjonction des cas

On veut démontrer la proposition $\mathcal{Q}$. On se donne n assertions $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \ldots, \mathcal{P}_n$ (appelées *cas*) tel que l'une de ces assertions au moins est vraie.

On vérifie alors que les assertions $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{Q}, \mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{Q}, \ldots, \mathcal{P}_n \Rightarrow \mathcal{Q}$ sont vraies, et on en déduit la proposition $\mathcal{Q}$.

Exemple 4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'entier $n(n+1)$ est pair.

I.C.3 Démonstration par contraposée

On veut démontrer une proposition de type $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$. On peut la démontrer directement en supposant $\mathcal{P}$ (vrai) et en déduisant $\mathcal{Q}$ (vrai). On se ramène alors à l'un des autres types de raisonnement.

La *contraposée* de cette proposition est la proposition (non $\mathcal{Q} \Rightarrow$ non $\mathcal{P}$). Elle est logiquement équivalente à la précédente (à titre d'exercice, on pourra construire une table de vérité pour s'en convaincre).

Par exemple, si ABC est un triangle, avec $AB = 3, AC = 4$, et $BC = 6$, on peut déduire de la contraposée du théorème de Pythagore que ABC n'est pas rectangle. En effet, le théorème s'énonce de la façon suivante :

"Si le triangle ABC est rectangle en A, alors $BC^2 = AB^2 + AC^2$"

Sa contraposée devient :

"Si $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A"

Comme $6^2 \neq 3^2 + 4^2$, alors le triangle ABC donné n'est pas rectangle en A.

Attention ! Il ne faut pas confondre la contraposée d'un théorème, qui est une reformulation de ce théorème, et sa réciproque, qui n'est pas toujours vraie. Par exemple, la réciproque du théorème de Pythagore est :

"Si $BC^2 = AB^2 + AC^2$, alors le triangle ABC est rectangle en A"

Pour résumer, on peut aussi démontrer $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ par contraposée en supposant $\mathcal{Q}$ faux, et en en déduisant que $\mathcal{P}$ est faux.

I.C.4 Démonstration par contre-exemple

On veut démontrer qu'une assertion du type : $(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x))$ est fausse, ce qui équivaut à $\text{non}(\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x))$ est vraie, ou encore à $(\exists x \in E,\ \text{non}\,\mathcal{P}(x))$ est vraie. Il s'agit donc de trouver un élément x de E tel que $\mathcal{P}(x)$ est faux (appelé *contre-exemple*).

Par exemple, on va démontrer que la propriété :

$$\text{"}\forall n \in \mathbb{N},\ (n \text{ divisible par 6 et par 4}) \Rightarrow (n \text{ divisible par 24})\text{"}$$

est fausse. La négation de cette propriété est :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \text{non}\left[(n \text{ divisible par 6 et par 4}) \Rightarrow (n \text{ divisible par 24})\right]$$

ce qui peut s'exprimer autrement par définition :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ \text{non}\left[\,\text{non}(n \text{ divisible par 6 et par 4})\,\text{ou}(n \text{ divisible par 24})\right]$$

soit finalement de manière équivalente :

$$\exists n \in \mathbb{N},\ (n \text{ divisible par 6 et par 4})\,\text{et}\,\text{non}(n \text{ divisible par 24})$$

Donc il faut chercher un entier n tel que n est divisible par 6 et par 4, mais pas par 24. L'entier $n = 12$ convient.

I.C.5 Démonstration par l'absurde

On veut démontrer que la propriété $\mathcal{P}$ est vraie. On suppose pour cela qu'elle est fausse, et on essaie d'en déduire qu'il existe une propriété $\mathcal{Q}$ telle que $\mathcal{Q}$ et (non $\mathcal{Q}$) sont vraies, ce qui est contradictoire. Ceci montre alors le résultat, car :

$$\begin{aligned}(\text{non}\,\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\,\text{et}(\text{non}\,\mathcal{Q}))\ \text{vraie} \quad &\Leftrightarrow \quad (\mathcal{P}\,\text{ou}(\mathcal{Q}\,\text{et}(\text{non}\,\mathcal{Q})))\ \text{vraie} \\ &\Leftrightarrow \quad \mathcal{P}\ \text{vraie}\end{aligned}$$

I.C.6 Démonstration par récurrence

Celle-ci sera étudiée dans le chapitre *entiers naturels.*

I.C.7 Exemples

Exercice 2.

1. Soit p un entier. Montrer que si p^2 est pair, alors p est pair (on pourra raisonner par contraposée).
2. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel (on pourra raisonner par l'absurde).
3. Montrer qu'il existe un nombre irrationnel a tel que $a^{\sqrt{2}}$ est rationnel (on pourra raisonner par disjonction des cas en considérant le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$).

Solution.

1. On suppose que p est impair, alors il existe en entier k tel que $p = 2k + 1$. On calcule alors :
$$p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1 = 2k' + 1$$
donc p^2 est impair.
2. Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel, alors on peut écrire :
$$\sqrt{2} = \frac{p}{q}$$
où $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. Par élévation au carré, on obtient $2 = \frac{p^2}{q^2}$ et donc :
$$p^2 = 2q^2$$
ce qui prouve que p^2 est pair. Donc d'après 1), p est pair et on peut alors écrire $p = 2p_1$. Par suite, comme $p^2 = 2q^2$, on obtient $4p_1^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2p_1^2$, ce qui prouve que q^2 est pair, et donc que q est pair ($q = 2q_1$). Finalement, on a :
$$\frac{p}{q} = \frac{2p_1}{2q_1}$$
ce qui contredit le fait que $\frac{p}{q}$ est une fraction irréductible. En conclusion, on a montré par l'absurde que $\sqrt{2}$ est un irrationnel.
3. On considère le nombre $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$:
1^{er} cas : S'il est rationnel, on choisit $a = \sqrt{2}$, ce qui répond à la question.
$2^{ème}$ cas : S'il est irrationnel, alors on choisit $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Dans ce cas :
$$a^{\sqrt{2}} = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2 \in \mathbb{Q}$$
ce qui répond à la question.

□

II Ensembles

II.A La notion d'ensemble

On ne donnera pas la définition mathématique, mais plutôt une définition intuitive de ce qu'est un ensemble. Il s'agit d'une "collection d'objets" mathématiques à laquelle peut appartenir (ou non) un objet donné. Lorsque x appartient à l'ensemble E, on note $x \in E$ et on dit que x est un élément de E. Dans le cas contraire, on note $x \notin E$.

Exemple 5. On peut définir un ensemble E par les méthodes suivantes :

1. En énonçant un à un les éléments. Par exemple, $E_1 = \{A, B, C, D\}$, $E_2 = \{\text{vert,rouge}\}$, $E_3 = \{1, 2, 3, \ldots, 12\}$, $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$.
2. Par une liste de règles (*axiomes*). On peut ainsi définir $\mathbb{N}$ (axiomatique de Péano), et construire les ensembles $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ à partir de $\mathbb{N}$.
3. À l'aide d'un ensemble de référence E_0 et d'un prédicat $\mathcal{P}(x)$.

$$E = \{x \in E_0 / \ \mathcal{P}(x)\}$$

signifie que $x \in E$ si et seulement si $x \in E_0$ et $\mathcal{P}(x)$ est vrai. Par exemple, l'ensemble $\mathbb{N}_p$ des entiers pairs est défini par :

$$\mathbb{N}_p = \{n \in \mathbb{N} / \ \exists k \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2k\}$$

II.B Parties d'un ensemble

Définition 4. Si E et F sont deux ensembles, on dit que F est un sous-ensemble (ou partie) de E, ou que F est inclus dans E, si tout élément de F est un élément de E. Notation : $F \subset E$.

De manière usuelle, on écrit :

- $F \not\subset E$ la négation de $F \subset E$.
- $E = F$ si $E \subset F$ et $F \subset E$
- $F \subsetneq E$ si $F \subset E$ et $F \neq E$.
- $\emptyset$ l'ensemble défini par $\emptyset \subset E$ et $\forall x \in E, \ \ x \notin \emptyset$.
- $\{a\}$ un ensemble ne contenant qu'un élément a (on l'appelle un *singleton*).
- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple, si $E = \{1, 2\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$.

Remarque 6. $F \not\subset E$ si $\exists x \in F, \ \ x \notin E$.

Proposition 4. Soient E, F, G trois ensembles. On a :

(i) $\emptyset \subset E$

(ii) $E \subset E$

(iii) $(E \subset F \text{ et } F \subset G) \Rightarrow E \subset G$

Démonstration.

(i) C'est évident par définition de l'ensemble vide.

(ii) C'est également évident car $\forall x \in E, \ \ x \in E$.

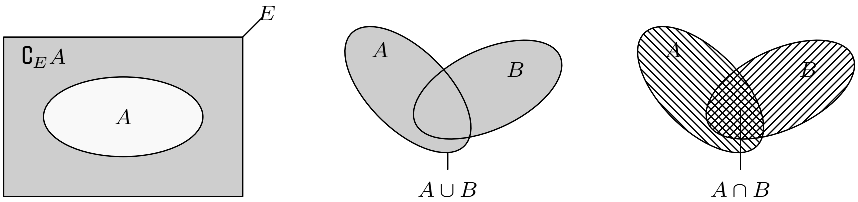
(iii) Soit $x \in E$, alors comme $E \subset F$, on a $x \in F$. De plus, comme $F \subset G$, on a $x \in G$. Donc $E \subset G$.

□

II.C Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 5. Soient E un ensemble et $A, B \in \mathcal{P}(E)$. On définit, à partir de A et B, les parties suivantes de E :

- $A \cup B = \{x \in E/\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, appelé *réunion* des ensembles A et B.
- $A \cap B = \{x \in E/\ x \in A \text{ et } x \in B\}$, appelé *intersection* des ensembles A et B.
- $A \setminus B = \{x \in E/\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$, appelé *différence* A moins B.
- $\complement_E A = E \setminus A$ le *complémentaire* de A dans E.



Définition 6. Deux parties A et B de E sont dites *disjointes* si $A \cap B = \emptyset$.

Proposition 5. Les opérations sur les ensembles respectent les propriétés suivantes :

1. Avec la réunion :
   a) $A \cup \emptyset = \emptyset \cup A = A$
   b) $A \cup A = A$
   c) $A \cup E = E$
   d) $A \cup B = B \cup A$
   e) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
   f) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subset A$
2. Avec l'intersection :
   a) $A \cap \emptyset = \emptyset \cap A = \emptyset$
   b) $A \cap A = A$
   c) $A \cap E = A$
   d) $A \cap B = B \cap A$
   e) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   f) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subset B$
3. Avec le complémentaire :
   a) $\complement_E \emptyset = E$
   b) $\complement_E E = \emptyset$
   c) $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$

Proposition 6. Les opérations sur les ensembles respectent les propriétés suivantes :

1. Les lois de Morgan :
   a) $\complement_E(A \cup B) = (\complement_E A) \cap (\complement_E B)$
   b) $\complement_E(A \cap B) = (\complement_E A) \cup (\complement_E B)$
2. Union et intersection :
   a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ par rapport à $\cup$).
   b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ par rapport à $\cap$).
   c) $A \cap (A \cup B) = A \cup (A \cap B) = A$
3. Différence :
   a) $A \setminus B = \emptyset \Leftrightarrow A \subset B$
   b) $A \setminus \emptyset = A$
   c) $A \setminus B = A \cap \complement_E B = A \setminus (A \cap B)$

Démonstration. Nous allons effectuer une démonstration partielle de ces propriétés. La démonstration des autres propriétés est similaire et pourra être faite à titre d'exercice :

- Montrons d'abord directement par équivalences la propriété 1a). Soit $x \in E$, alors :

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow \mathrm{non}(x \in A \,\mathrm{ou}\, x \in B) \\ &\Leftrightarrow \mathrm{non}(x \in A) \,\mathrm{et}\, \mathrm{non}(x \in B) \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \,\mathrm{et}\, x \in \complement_E B \\ &\Leftrightarrow x \in (\complement_E A) \cap (\complement_E B) \end{aligned}$$

- Montrons maintenant la propriété 2a). On veut montrer une égalité d'ensembles et pour cela, on va montrer les inclusions réciproques :
  - $A \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup (A \cap C)$
    Soit $x \in A \cap (B \cup C)$, alors $x \in A \,\mathrm{et} (x \in B \,\mathrm{ou}\, x \in C)$.
    1^{er} cas : $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in B$, alors $x \in A \cap B$.
    $2^{ème}$ cas : $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in C$, alors $x \in A \cap C$.
    En conclusion, $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$, donc $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.
  - $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subset A \cap (B \cup C)$
    Soit $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, alors $(x \in A \cap B) \,\mathrm{ou} (x \in A \cap C)$.
    1^{er} cas : $x \in A \cap B$, alors $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in B$, donc $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in B \cup C$.
    $2^{ème}$ cas : $x \in A \cap C$, alors $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in C$, donc $x \in A \,\mathrm{et}\, x \in B \cup C$.
    En conclusion, on a démontré que $x \in A \cap (B \cup C)$.

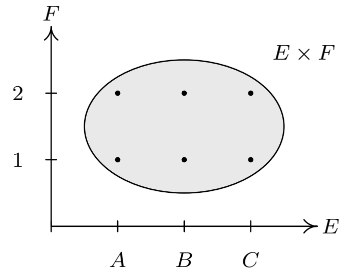
□

II.D Ensembles produits

Définition 7. Soient E et F deux ensembles. On appelle *ensemble produit* de E et F, noté $E \times F$, l'ensemble constitué des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple 6. Si $E = \{A, B, C\}$ et $F = \{1, 2\}$, alors :

$$E \times F = \{(A, 1), (A, 2), (B, 1), (B, 2), (C, 1), (C, 2)\}$$



Définition 8. Soient $E_1, E_2, \ldots, E_n$ des ensembles. On définit de même l'*ensemble produit* $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ de ces ensembles, constitué des n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ où $x_i \in E_i$ pour tout entier $i \in [\![1, n]\!]$.

Remarque 7. Lorsque $E_1 = E_2 = \ldots = E_n = E$, on note :

$$E^n = E \times E \times \cdots \times E$$

II.E Structure algébrique des ensembles

Définition 9. On appelle *loi de composition interne* (ou *opération*) sur un ensemble E une application $\oplus$ de $E \times E$ à valeurs dans E qui, à un couple (x, y), associe son image $x \oplus y$. $\oplus : \left\{ \begin{array}{ccc} E \times E & \rightarrow & E \\ (x, y) & \mapsto & x \oplus y \end{array} \right.$

Exemple 7. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est l'ensemble des couples de coordonnées (x, y), avec x et y dans $\mathbb{N}$.
$+$ est une opération sur l'ensemble $\mathbb{N}$: l'image du couple $(2, 3)$ est $2 + 3 = 5$.
$\times$ est également une opération sur l'ensemble $\mathbb{N}$: l'image du couple $(2, 3)$ est $2 \times 3 = 6$.

Définition 10. On appelle *groupe* un couple $(G, \oplus)$, où G est un ensemble et $\oplus$ une loi de composition interne sur G vérifiant :

1. $\oplus$ est associative (c'est à dire que pour tous $a, b, c \in G$, on a : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$).
2. $\oplus$ possède un élément neutre (c'est à dire qu'il existe un élément e tel que $\forall a \in G, \;\; a \oplus e = e \oplus a = a$)
3. Tout élément de G possède un symétrique pour la loi $\oplus$ (c'est à dire que $\forall a \in G, \exists b \in G$ tel que $a \oplus b = b \oplus a = e$, et on note $b = a^{-1}$ ou $-a$ selon les groupes).

Enfin, si $\forall a, b \in G$, on a : $a \oplus b = b \oplus a$, alors $(G, \oplus)$ est un groupe *commutatif* (ou *abélien*).

Exemples 8.

- $(\mathbb{Z}, +)$,$(\mathbb{Q}, +)$,$(\mathbb{Q}^*, \times)$,$(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.
  Pour le groupe $(\mathbb{R}, +)$, l'élément neutre est 0 et le symétrique de a est $-a$ (appelé *opposé* de a). Pour le groupe $(\mathbb{R}^*, \times)$, l'élément neutre est 1 et le symétrique de a est $\frac{1}{a}$ (appelé *inverse* de a).

– $(\mathbb{N}, +)$ et $(\mathbb{Z}^*, \times)$ ne sont pas des groupes.

On peut donner un exemple plus original et plus imagé de la notion de groupe si on considère l'ensemble des heures d'une pendule noté $\{\overline{0} = \overline{12}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{11}\}$, et muni de la loi d'addition $+$ avec par exemple :

$$\begin{array}{rcl} \overline{1} + \overline{3} & = & \overline{4} \\ \overline{7} + \overline{8} & = & \overline{15} = \overline{3} \end{array}$$

On vérifie très facilement qu'il s'agit d'un groupe (appelé en mathématiques $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$) d'élément neutre $\overline{0}$, et où la notion de symétrique prend un sens géométrique (interpréter).

Définition 11. On appelle *sous-groupe* du groupe $(G, \oplus)$ tout groupe $(H, \oplus)$ contenu dans G (H est muni de la même loi que G).

Remarque 8. Ceci assure en particulier que $\forall a, b \in H, \ \ a \oplus b \in H$, car $\oplus$ est également une loi interne pour H (on dit que H est stable par $\oplus$).

Proposition 7. Soit $(G, \oplus)$ un groupe, dont on note e l'élément neutre et a^{-1} le symétrique de $a \in G$, alors un ensemble H est un sous-groupe de G si et seulement si :

(i) $e \in H$

(ii) Si $a \in H$, alors $a^{-1} \in H$.

(iii) Si $a, b \in H$, alors $a \oplus b \in H$

Dans l'exemple de la pendule, on peut par exemple vérifier que $\{\overline{0}, \overline{3}, \overline{6}, \overline{9}\}$ est un sous-groupe du groupe des heures.

Définition 12. On appelle *corps* un triplet $(\mathbb{K}, \oplus, \otimes)$ vérifiant :

1. $(\mathbb{K}, \oplus)$ est un groupe commutatif d'élément neutre noté 0 (appelé élément nul).
2. $(\mathbb{K}^*, \otimes)$ est un groupe.
3. $\otimes$ est distributive par rapport à $\oplus$.

De plus, ce corps est dit *commutatif* si $(\mathbb{K}^*, \otimes)$ est un groupe commutatif.

Exemples 9. $(\mathbb{Q}, +, \times)$ et $(\mathbb{R}, +, \times)$ sont des corps commutatifs.

Exercice 3.

1. Montrer que l'ensemble $\mathbb{C}$, muni des lois de composition $+$ et $\times$ est un corps commutatif.
2. Montrer que l'ensemble $(\mathbb{U}, \times)$ des nombres complexes de module 1 est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

3. Montrer que l'ensemble $(\mathbb{U}_n, \times)$ des racines n^{imes} de l'unité est un sous-groupe de $\mathbb{U}$.

III Applications

III.A Généralités

On rappelle que f est une application d'un ensemble E vers un ensemble F si tout élément x de E admet une image $f(x)$ dans F, et si cette image est unique. Autrement dit :

$$\forall x \in E,\ \exists! y \in F \text{ tel que } y = f(x) \qquad \text{(! signifie unique)}$$

On note $\mathcal{F}(E, F)$ l'ensemble des applications de l'ensemble E vers l'ensemble F.

Définition 13. Soit $A \subset E$. On appelle *image* de la partie A, le sous-ensemble de F noté $f(A)$, et défini par :

$$f(A) = \{y \in F \ /\ \exists x \in A \text{ tel que } y = f(x)\}$$

C'est l'ensemble des images par f des éléments de la partie A.

Exemple 10. Soit l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$.

On a par exemple $f(\{0,1\}) = \{1,2\}$, et $f(\mathbb{N}) = \mathbb{N}^*$ (car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n = f(n-1)$ et 0 n'a pas d'antécédent par f dans $\mathbb{N}$).

Définition 14. Soit $B \subset F$. On appelle *image réciproque* de la partie B, le sous-ensemble de E noté $f^{-1}(B)$, et défini par :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \ /\ f(x) \in B\}$$

C'est l'ensemble des antécédents par f des éléments de la partie B.

Exemple 11. Considérons l'application $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$

- $f^{-1}(\{1\}) = \{-1; 1\}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 \Leftrightarrow x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $f^{-1}(\mathbb{R}_-^*) = \emptyset$ car l'inéquation $f(x) < 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.
- De même, on a $f^{-1}(\mathbb{R}_-) = \{0\}$, $f^{-1}(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $f^{-1}([0,2]) = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$.

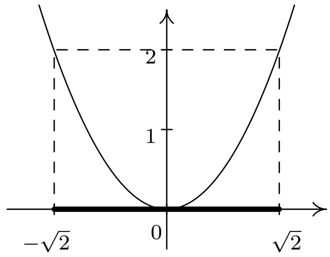


Image réciproque de $[0, 2]$

Remarque 9. Attention à ne pas confondre image réciproque d'une partie par l'application f (celle-ci existe toujours) et application réciproque f^{-1} (qui n'existe que si f est bijective). Dans l'exemple 11, f n'admet pas d'application réciproque sur $\mathbb{R}$, mais $\mathbb{R}$ a une image réciproque par f (il s'agit de $\mathbb{R}$).

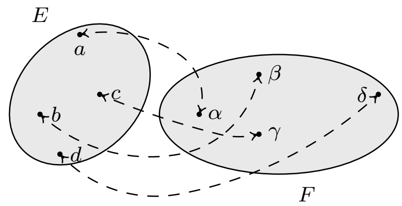
III.B Injections, surjections, bijections

III.B.1 Notion intuitive d'ensembles en bijection

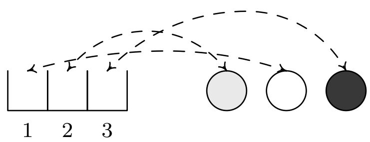
Deux ensembles E et F sont en bijection lorsque "tout élément de E est associé à un unique élément de F et que, de cette manière, tout élément de F se trouve associé à un unique élément de E".

Remarque 10. Deux ensembles finis de même cardinal (i.e. avec le même nombre d'éléments) sont en bijection.

- L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ est en bijection avec l'ensemble $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ (on peut faire les associations $a \leftrightarrow \alpha, b \leftrightarrow \beta, c \leftrightarrow \gamma, d \leftrightarrow \delta$ ou encore $a \leftrightarrow \beta, b \leftrightarrow \alpha, c \leftrightarrow \delta, d \leftrightarrow \gamma$, etc...)



- Un ensemble composé de trois boules de couleurs différentes est en bijection avec l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ (on "numérote" les boules).



Exemples d'ensembles infinis en bijection En respectant la définition donnée, on peut établir que certains ensembles usuels sont en bijection.

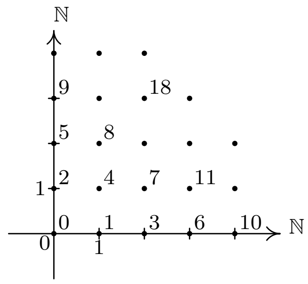
– $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont en bijection par la relation :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N}^* \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right.$$

(On a les associations $0 \leftrightarrow 1, 1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 3, \ldots, n \leftrightarrow n+1, \ldots$)

– $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sont en bijection.
On a les associations (voir schéma pour la suite) :

$$(0,0) \leftrightarrow 0, \ \ (1,0) \leftrightarrow 1, \ \ (0,1) \leftrightarrow 2, \ \ (2,0) \leftrightarrow 3, \ldots$$



Bijection de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ (schéma)

Une autre relation de bijection plus formelle est $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N}^2 & \rightarrow & \mathbb{N} \\ (p,s) & \mapsto & 2^p(2s+1)-1 \end{array} \right.$.

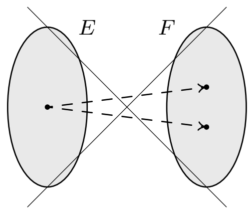
– $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Q}$ sont en bijection.

Exercice 4. Établir que les ensembles $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

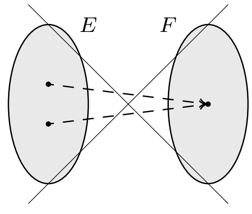
Solution. Il suffit de considérer la relation : $\left\{ \begin{array}{cccl} \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{Z} & \\ n & \mapsto & \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair.} \\ n & \mapsto & -\frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{array} \right.$ □

Définition 15. Un ensemble en bijection avec $\mathbb{N}$ est dit *dénombrable* (on peut "numéroter" ses éléments). L'ensemble $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable (résultat établi par *Cantor*).

Demandons nous maintenant quelle condition nous assure que deux ensembles E et F sont en bijection. Il doit exister une relation $f : E \rightarrow F$ telle que :
1) Tout élément de E admet une image dans F.
2) Cette image est unique.



Donc f est une application, et de plus :
1') Tout élément de F doit avoir un antécédent dans E.
2') Cet antécédent est unique.



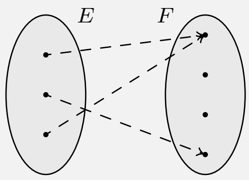
III.B.2 Applications injectives et surjectives

Définition 16. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *injective* (ou une *injection*) si tout élément de F a au plus un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante avec les quantificateurs :

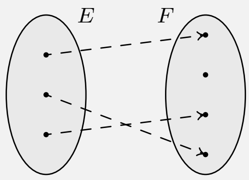
$$\forall x, x' \in E, \;\; f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

ou de manière équivalente, par contraposée :

$$\forall x, x' \in E, \;\; x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$



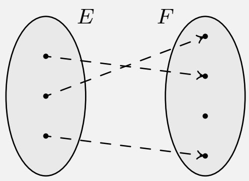
Non injectif



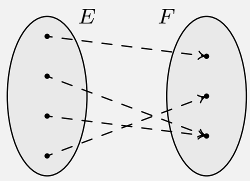
Injectif

Définition 17. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *surjective* (ou une *surjection*) si tout élément de F a au moins un antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante avec les quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists x \in E, \;\; y = f(x)$$



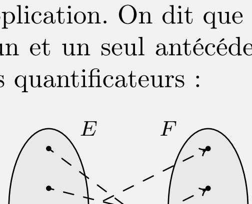
Non surjectif (et injectif)



Surjectif (et non injectif)

Définition 18. Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est *bijective* (ou une *bijection*) si tout élément de F a un et un seul antécédent (par f), ce qui s'énonce de la manière suivante avec les quantificateurs :

$$\forall y \in F, \exists! x \in E, \;\; y = f(x)$$



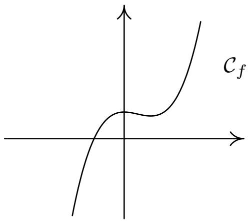
Bijectif (injectif et surjectif)

Avec les définitions précédentes, on constate donc que f est bijective si et seulement si elle est injective et surjective.

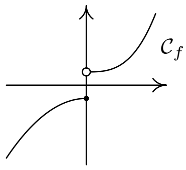
Remarque 11. La propriété de surjectivité traduit l'*existence* d'un antécédent par f de tout élément y de F. La propriété d'injectivité traduit l'*unicité* d'un éventuel antécédent de y. La propriété de bijectivité traduit donc l'*existence et l'unicité* d'un tel antécédent.

Proposition 8. $f : E \to F$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

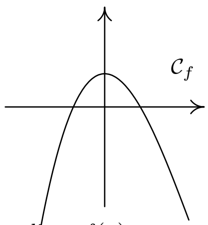
Exercice 5. Reconnaître si les fonctions suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dont les graphes sont donnés, sont injectives, surjectives, bijectives.



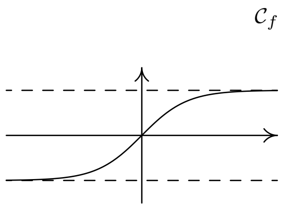
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

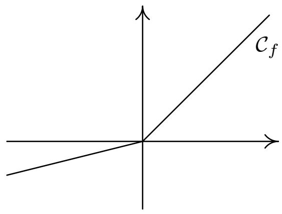


$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = -\infty$





Exercice 6. Discuter de l'injectivité et de la surjectivité des applications suivantes :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. \quad g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array} \right. \quad h : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right.$$

$$i : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x^2 \end{array} \right. \quad j : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array} \right. \quad k : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & 2n+3 \end{array} \right.$$

$$l : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ \theta & \mapsto & e^{i\theta} \end{array} \right. \quad m : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C}^* \\ z & \mapsto & e^z \end{array} \right.$$

III.C Compléments sur les applications

III.C.1 Composée de deux applications et application réciproque

On rappelle les définitions suivantes, déjà données dans les chapitres précédents pour des cas particuliers :

1. Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications, alors on définit la *composée* de f suivie de g par :

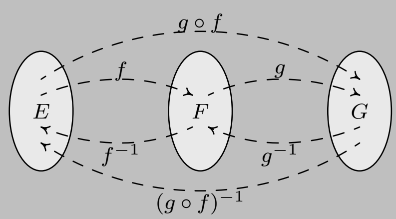
$$g \circ f : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g[f(x)] \end{array} \right.$$

2. Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors tout élément y de F a un unique antécédent x par f, et on définit l'*application réciproque* de f notée f^{-1} par $f^{-1}(y) = x$. De plus :

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

3. L'application $Id_E : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$ est appelée *application identique* (ou *identité*) de E.

Proposition 9. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives.
1. L'application Id_E est bijective et $Id_E^{-1} = Id_E$.
2. $f^{-1} \circ f = Id_E$, et $f \circ f^{-1} = Id_F$
3. $g \circ f : E \to G$ est bijective, et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$



Exercice 7. Soit $f : E \to F$ une application :

1. Montrer que s'il existe $g : F \to E$ tel que $g \circ f = Id_E$, alors f est injective.
2. Montrer que s'il existe $h : F \to E$ tel que $f \circ h = Id_F$, alors f est surjective.
3. Montrer que si les deux conditions précédentes sont réunies, alors f est bijective et $f^{-1} = g = h$.

Définition 19. On dit que l'application $f : E \to E$ est *involutive* (ou une involution) si $f \circ f = Id_E$. Si f est une involution, alors f est bijective et on a $f^{-1} = f$.

III.C.2 Prolongement et restriction d'une application

Définition 20. Soit $f : E \to F$ une application, et A une partie de E. On appelle *restriction* de f à la partie A, l'application notée $f_{|A}$ définie par :

$$f_{|A} : \left\{ \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \right.$$

(L'ensemble de départ de $f_{|A}$ est A).

Remarque 12. $D_{f_{|A}} = D_f \cap A$.

Exemple 12. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$.

On a $f_{|\mathbb{R}_-} = -Id_{\mathbb{R}_-} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_- & \to & \mathbb{R}_- \\ x & \mapsto & -x \end{array} \right.$ et $f_{|\mathbb{R}_+} = Id_{\mathbb{R}_+} : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & x \end{array} \right.$.

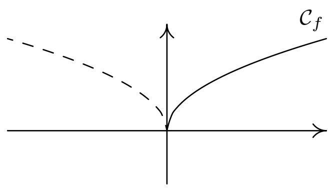
Définition 21. Soit $f : E \to F$ une application, et X un ensemble qui contient E. On dit que l'application $g : X \to F$ est un *prolongement* de f si $g_{|E}$ est la fonction f.

Exemple 13. Soit $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array} \right.$

L'application :

$$g_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{|x|} \end{array} \right.$$

est un prolongement (continu) de f.



L'application g_2 : $\left\{ \begin{array}{cccl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} & \\ x & \mapsto & \sqrt{x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ x & \mapsto & -1 & \text{si } x < 0 \end{array} \right.$ est aussi un prolongement (non continu) de f.

Remarque 13. Dans la plupart des cas, on prolonge une fonction en un point seulement, qui se trouve hors de l'ensemble de définition, et de façon à ce que le prolongement soit continu (prolongement par *continuité*).