Tensores, autovalores y autovectores

Gabriela Sánchez Ariza
Nicolas Toledo Parra
*

Universidad Industrial de Santander
Cl. 9 Cra 27, Bucaramanga, Santander

11 de Febrero de 2022

Índice

Resumen

En el presente trabajo se busca calcular momentos de orden 0, 1 y 2 (μ_0, μ_1, μ_2) para dos distintos problemas. El primero de ellos consiste en una distribución de masa 2D en el plano xy, para la cual se halla la masa total, el centro de masa y el momento de inercia del sistema (μ_0, μ_1, μ_2), esto mismo se halla posteriormente para el caso 3D. El segundo problema está relacionado con una estadística de los datos económicos. El problema consiste en obtener la información del producto interno bruto (PIB) del país en los últimos 15 años para *Ciencia y Tecnología, Defensa, Salud y Educación*, esto se hace a través de la página del *Banco Mundial*. Con estos datos se ha de calcular la matriz de covariancia y correlación con sus correspondientes autovalores, autovectores. Para la resolución de estos problemas fue utilizado *Python*, aquí se realizó el tratamiento de datos y se aprovecharon funciones que hicieron más fácil la tarea de cálculo. [**falta conclusión**]

*e-mail: `gabriela2200816@correo.uis.edu.co; nicolas2200017@correo.uis.edu.co`

1. Introducción

En la modernidad se visualizan a los tensores inicialmente como objetos abstractos, que se han vuelto muy importantes en física porque proporcionan un marco matemático conciso para formular y resolver problemas en áreas como la relatividad general, mecánica o electrodinámica. Este trabajo se centra en la aplicación de los espacios tensoriales en función del tratamiento de dos diferentes conjuntos de datos, el primero correspondiente a un sistema de n partículas [1] y el segundo correspondiente a los datos economicos del Banco Mundial [2], inclinado principalmente al cálculo de masas totales, centros de masa, tensores momentos de inercia, matrices de transformación, covarianza y correlación.

Con el primer conjunto de datos, los cuales correspondían a un sistema de n partículas con masas distintas dispersas en un volumen (3.1), se buscó obtener el momento de orden cero μ_0 (masa total), momento de orden uno μ_1 (centro de masa) y momento de orden dos μ_2 (momento de inercia) del sistema para el caso en 2D y 3D, encontrando adicionalmente los ejes principales de inercia y la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores. Con el segundo conjunto de datos, correspondientes a los datos del producto interno bruto (PIB) que se ha empleado en los últimos 15 años en el país (3.2), se buscó calcular la matriz de correlación, la matriz de covariancia del % del PIB, encontrando en esta última tanto sus autovalores como autovectores, y la matriz de transformación que lleva de la matriz en la base original a la representación de la matriz en la base de autovalores y autovectores.

Los calculos anteriormente mencionados se presentan de una forma más clara en la metodología (2), en donde se hace uso de diferentes expresiones y conocimientos relacionados con operaciones de tensores. También, se presentan los resultados (3) obtenidos de ese tratamiento de datos tanto para el sistema de n partículas (3.1) como para el producto interno bruto (3.2). Finalmente, las conclusiones (4) que se obtuvieron en este trabajo y la bibliografia (4).

2. Metodología

Para llevar a cabo el tratamiento de los dos conjuntos de datos abordados en este trabajo se debe tener conocimiento de los momentos μ_n de una variable, $v_i = F(|x_i\rangle)$, los cuales representan promedios pesados por potencias de las desviaciones de las componenetes aleatorias de un vector $|x\rangle_i$ respecto a su media $|\bar{x}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |x\rangle_i$, que son 3 los relevantes para este trabajo:

- $\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} v_i$: "Valor total"de la variable del sistema
- $\mu_1 = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)$: Promedio ponderado de la variable
- $\mu_2 = \sum_{i=1}^{N} v_i(|x\rangle_i - |\bar{x}\rangle)^2$: Matriz de covarianza

[1] Aquí podrá acceder a los datos del sistema de n partículas.
[2] Aquí podrá acceder a los datos del Banco Mundial.

Sistema de n partículas

Para la primera parte de este trabajo, correspondiente a la distribución de masa de n partículas, μ_0 correspondió a la masa total, μ_1 al centro de masa y μ_2 al tensor momento de inercia del sistema, siendo este último de la forma:

$$I_i^x = \begin{pmatrix} I_x^x & I_y^x & I_z^x \\ I_x^y & I_y^y & I_z^y \\ I_x^z & I_y^z & I_z^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)}^2 + z_{(i)}^2\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)}^z (i)\right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} y_{(i)}\right) & \sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)}^2 + z_{(i)}^2\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) \\ -\sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)} z_{(i)}\right) & -\sum_i m_{(i)} \left(y_{(i)} z_{(i)}\right) & \sum_i m_{(i)} \left(x_{(i)}^2 + y_{(i)}^2\right) \end{pmatrix}$$

Asi que, por medio de *Python* [1] se calcularon los autovectores, autovalores, ejes principales de inercia para la distribución de masas y la matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores conformada por los ejes principales. Todo esto hecho para el caso 2D y el caso 3D.

Producto interno bruto (PIB)

Con respecto a la segunda parte de este trabajo, a través de la web del Banco Mundial [3], se hallaron los porcentajes de PIB para *Ciencia y Tecnología, Defensa, Salud y Educación* en Colombia a lo largo de 15 años (2004-2018).

Luego de esto se procedió a calcular μ_2 por medio de Python de manera análoga a la primera parte del trabajo, obteniendo así la matriz de covarianza, matriz de correlación, los autovalores, autovectores y la matriz de transformación que nos lleva de la matriz en la base original a la representación en base de autovalores y autovectores.

3. El experimento y los resultados

3.1. Sistema de n partículas

3.1.1. Caso 2D

Primero, se consideró el caso 2D, es decir, que la distribución de las diferentes particulas se realiza en el plano xy, obteniendo entonces en primera instancia que el momento de orden cero (μ_0), correspondiente a la masa total del sistema, es de aproximadamente 4627 unidades de masa.

Para el cálculo del centro de masa del sistema o el momento de orden uno (μ_1) se obtuvo lo siguiente $(825{,}815, 776{,}918)$, es decir, $C_x = 825{,}815$ y $C_y = 776{,}918$, lo cual se puede apreciar en la figura 1.

[3] https://data.worldbank.org/

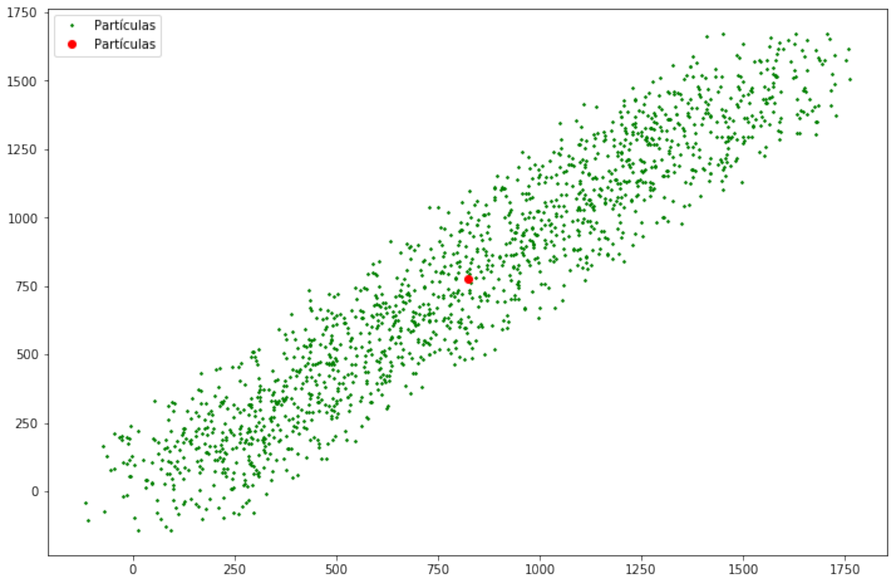


Figura 1: En esta figura se presenta la gráfica de la posición de las diferentes particulas del sistema para el caso en 2D. El centro de masa del sistema (μ_1) se encuentra ubicado en $C_x = 825{,}815$ y $C_y = 776{,}918$, y está representado con un punto rojo.

Finalmente, para el cálculo del tensor momento de inercia del sistema o momento de orden dos (μ_2) se obtuvo que este sería de la forma:

$$\text{Tensor de inercia:}\\ \begin{bmatrix} 3756528404 & -3880390098 \\ -3880390098 & 4114014339 \end{bmatrix}$$

Este tensor momento de inercia permitió calcular los autovalores (eigenvalores) y los autovectores (eigenvectores), estos eigenvectores se encuentran ortonormalizados y pueden verse como los ejes principales de inercia que forman una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma más simple. En este caso los vectores cartesianos no son autovectores del tensor de momento de inercia.

$$\text{Eigenvalores:}\\ \lambda_1 = 5{,}0767x10^7, \lambda_2 = 7{,}8198x10^9$$

$$\text{Matriz de eigenvectores:}\\ \begin{bmatrix} -0{,}72319235 & 0{,}69064667 \\ -0{,}69064667 & -0{,}72319235 \end{bmatrix}$$

Al calcular la inversa de esta última matriz de autovectores se obtiene la matriz de transfromación de la base cartesiana a la base de autovectores, obteniendo lo siguiente:

$$\text{Matriz de transformación:} \begin{bmatrix} -0{,}72319235 & -0{,}69064667 \\ 0{,}69064667 & -0{,}72319235 \end{bmatrix}$$

3.1.2. Caso 3D

En segunda instancia, se consideró el caso 3D, es decir, que la distribución de las diferentes particulas se realiza en el plano xyz, obteniendo entonces de primero que el momento de orden cero (μ_0), correspondiente a la masa total del sistema, es de aproximadamente 4627 unidades de masa.

Para el cálculo del centro de masa del sistema o el momento de orden uno (μ_1) se mantuvieron las coordenadas del caso 2D, pero ahora aparece una coordenada Z: $(825{,}815, 776{,}918, 15{,}503)$, es decir, $C_x = 825{,}815$, $C_y = 776{,}918$ y $C_z = 15{,}503$, lo cual se puede apreciar en la figura 2.

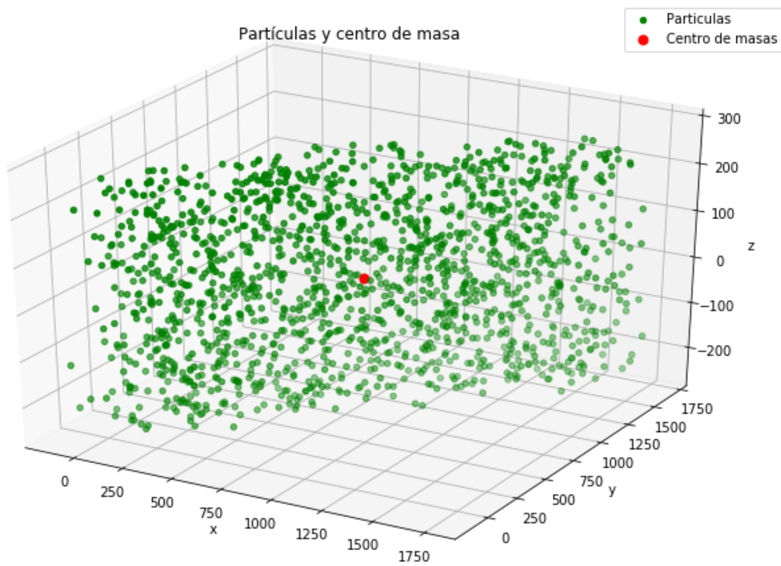


Figura 2: En esta figura se presenta la gráfica de la posición de las diferentes particulas del sistema para el caso en 3D. El centro de masa del sistema (μ_1) se encuentra ubicado en $C_x = 825{,}815$, $C_y = 776{,}918$, y $C_z = 15{,}503$, y está representado con un punto rojo.

Finalmente, como en el caso 2D, para el cálculo del tensor momento de inercia del sistema o momento de orden dos (μ_2) se obtuvo que este sería de la forma:

$$\text{Tensor de inercia:} \begin{bmatrix} 3859483842 & -3880390098 & -52096980 \\ -3880390098 & 4216969777 & -53801876 \\ -52096980 & -53801876 & 7870542743 \end{bmatrix}$$

Este tensor momento de inercia permitió calcular los autovalores (eigenvalores) y los autovectores (eigenvectores), estos eigenvectores se encuentran ortonormalizados y pueden verse como los ejes principales de inercia que forman una base ortogonal respecto a la cual la distribución de las masas se organiza de forma más simple. En este caso, como en el de 2D, los vectores cartesianos no son autovectores del tensor de momento de inercia.

Eigenvalores y matriz de eigenvectores:

Eigenvalores:

$$\lambda_1 = 1{,}53x10^8, \lambda_2 = 7{,}923x10^9, \lambda_3 = 7{,}8711x10^9$$

Matriz de eigenvectores:

$$\begin{bmatrix} -0{,}72315583 & -0{,}68914397 & -0{,}04611112 \\ -0{,}69061685 & 0{,}72240857 & 0{,}03426699 \\ -0{,}00969618 & -0{,}05662549 & 0{,}9983484 \end{bmatrix}$$

Al calcular la inversa de esta última matriz de autovectores se obtiene la matriz de transfromación de la base cartesiana a la base de autovectores, obteniendo lo siguiente:

Matriz de transformación:

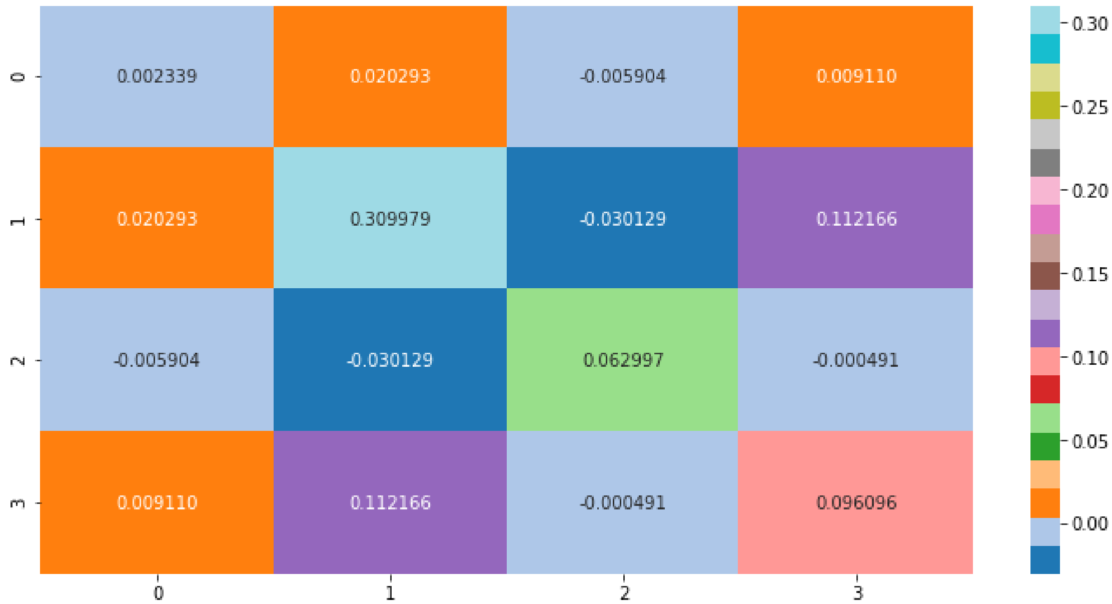
$$\begin{bmatrix} -0{,}72315583 & -0{,}69061685 & -0{,}00969618 \\ -0{,}68914397 & 0{,}72240857 & -0{,}05662549 \\ -0{,}04611112 & 0{,}03426699 & 0{,}9983484 \end{bmatrix}$$

3.2. Producto interno bruto (PIB)

A partir de los datos recolectados en la web del banco mundial se obtuvo para los incisos:

a) Matriz de covarianza y matriz de correlación entre parámetros:

Matriz de covarianza (A):



Matriz de correlación:

	Ciencia y tecnología	**Salud**	**Defensa**	**Educación**
Ciencia y tecnología	1.000000	0.753629	-0.486384	0.607650
Salud	0.753629	1.000000	-0.215604	0.649893
Defensa	-0.486384	-0.215604	1.000000	-0.006307
Educación	0.607650	0.649893	-0.006307	1.000000

b) Autovalores y autovectores de la matriz de covarianza:

$$Eigenvalores:$$
$$\lambda_1 = 0{,}36206251, \lambda_2 = 0{,}0006357, \lambda_3 = 0{,}06728233, \lambda_4 = 0{,}04143003$$

Matriz de autovectores (S):

$$\begin{bmatrix} -0{,}06297087 & -0{,}99534989 & 0{,}04550954 & 0{,}05693992 \\ -0{,}91465725 & 0{,}04146357 & 0{,}12102433 & -0{,}38345273 \\ 0{,}09402548 & -0{,}07384556 & -0{,}85626105 & -0{,}50251671 \\ -0{,}388067 & 0{,}04589344 & -0{,}50009899 & 0{,}77278639 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Al encontrar los autovectores y autovalores, estamos encontrando información sobre la dirección a la que cambia, en este caso, la variación conjunta del % de PIB de las variables estudiadas en los años analizados. Al diagonalizar la matriz de covarianza, se descompone así en autovectores y autovalores. Los autovectores representan la dirección y los autovalores la escala a la que cambia el autovector.

c) Matriz de transformación: (S^{-1})

$$\begin{bmatrix} -0{,}06297087 & -0{,}91465725 & 0{,}09402548 & -0{,}388067 \\ -0{,}99534989 & 0{,}04146357 & -0{,}07384556 & 0{,}04589344 \\ 0{,}04550954 & 0{,}12102433 & -0{,}85626105 & -0{,}50009899 \\ 0{,}05693992 & -0{,}38345273 & -0{,}50251671 & 0{,}77278639 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Matriz diagonal $(S^{-1}AS)$:

$$\begin{bmatrix} 0{,}36206251 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0006357 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}06728233 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}04143003 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Sus eigenvalores forman a la diagonal.

4. Conclusiones

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos a lo largo de este trabajo se llegaron a las siguientes conclusiones:

- Al encontrar los eigenvectores y formar su matriz, se pueden ortogonalizar/ortonormalizar y así encontrar los ejes principales de inercia, en esta base ortogonal la distribución de masas se organiza de una forma más simple.
- La matriz de transformación de la base cartesiana a la base de autovectores es la inversa de la matriz de ejes principales.
- En cuanto a la matriz de covarianza del % de PIB, diagonalizarla es la descomposición de esta misma en autovectores y autovalores.
- Los eigenvalores y eigenvectores nos brindan información de dirección y escala de variación conjunta de las variables analizadas.
- La matriz de correlación 3.2 indica el grado de relación lineal entre cada par de variables.

Referencias

Referencias

[1] Rossum G (2021) Python, . URL https://www.python.org/.