Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа P3340

Расчётная работа
“Решение задачи построения ПИ-регулятора”
по курсу “Специальные разделы теории управления”

Выполнил Алякин С.П. ____________________ (подпись)
(фамилия. и.о.)

Проверил ____________________ (подпись)
(фамилия, и.о.)

"____" __________ 20 17 г. Санкт-Петербург, 20 17 г.

Работа выполнена с оценкой ____________________

Дата защиты "____" __________ 20 17 г.

Цель работы

Для заданного объекта управления спроектировать пропорционально-интегральный регулятор, обеспечивающий в замкнутой системе требуемое время переходного процесса и значение перерегулирования.

Исходные данные

Задан объект управления, структурная схема которого представлена на рисунке 1.

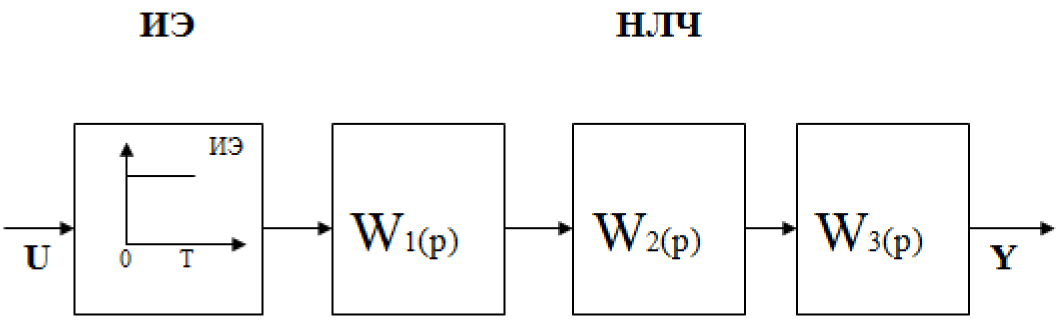

Рисунок 1 – Общая структура объекта управления

Для проектирования были выданные исходные данные, представленные в таблице.

Таблица 1 – Исходные данные

T	W_1		W_2		W_3		Тип регулятора	Время переходного процесса	Перерегулирование
	K_1	T_1	K_2	T_2	K_3	T_3			
[c]	—	[c]	—	[c]	—	[c]		[c]	[%]
0,0040	—	—	500,00	0,10	0,25	Интегратор	ПИ	0,150	30,00

1 Составление уравнения Вход-Состояние-Выход в дискретной форме для объекта управления

Опишем передаточную функцию $\dfrac{500}{0,1s+1}$ в виде интегратора и коэффициентов обратной связи:

$$\dot{x_2} = -k_3k_4x_2 + k_4u \tag{1}$$

$$sx_2 + k_3k_4x_2 = k_4u \tag{2}$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{k_3}u}{\frac{1}{k_3k_4}s+1} \tag{3}$$

Из полученного выражения найдём коэффициенты $k_3 = 0,002, k_4 = 5000$

Опишем систему уравнениями Вход-Состояние-Выход:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\text{н}}x + {}_{\text{н}}U \\ Y = CX \end{cases} \quad, \text{где } A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & -\dfrac{1}{T_2} \end{bmatrix}, B_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{k_1}{T_1} \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^2$ — вектор состояния дискретной системы, $u(k) \in \mathbb{R}^1$ — управляющее воздействие, $y(k) \in \mathbb{R}^2$ — регулируемая переменная, $A_{\text{н}}$ – (2×2) — дискретизированная матрица состояния, определяющая динамические свойства системы, $B_{\text{н}}$ – (2×1) — дискретизированная матрица выходов, определяющая точки приложения к ОУ управляющих воздействий, C – (1×2) — матрица выходов, определяющая связь между переменными состояния и выходными переменными.

Подставив в (4) известные значения параметров $k_1 = 500, k_2 = 0,25, T_1 = 0,1$, получим следующие матрицы:

$$A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5000 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Для перехода от непрерывной модели к дискретной воспользуемся соотношениями

$$A_d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^iT^i}{i!}; \qquad B_d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1}T^i}{i!}B; \qquad C_d = C \tag{6}$$

Чтобы рассчитать дискретизированные матрицы, напишем программу в среде matlab, листинг которой приведён в приложении А. В результате работы программы были получены следующие результаты:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0,009867989404040 \\ 19,605280423838394 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{9}$$

Теперь получим систему уравнений Вход-Состояние-Выход в дискретной форме, подставив матрицы (7), (8) и (9) в уравнение (4):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,009867989404040 \\ 19.605280423838394 \end{bmatrix} \cdot u(k) \\ y(k) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases} \tag{10}$$

2 Переход к передаточной функции объекта управления

Для перехода от уравнений Вход-Состояние-Выход к передаточной функции объекта необходимо воспользоваться следующим соотношением:

$$W(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d \tag{11}$$

Решив данное уравнение при помощи среды Matlab, получим функцию:

$$W(z) = \frac{0,009867989404040z + 0,009737291019798}{z^2 - 1,960789439152323z + 0,960789439152323} \tag{12}$$

Найдём корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 1,9608\lambda + 0,9608 = 0 \tag{13}$$

$$\lambda_1 = 1; \qquad \lambda_2 = 0,9608 \tag{14}$$

Получим переходные характеристики полученной дискредитированной передаточной функции и исходной непрерывной передаточной функции, воспользовавшись функцией Matlab — stepplot. Полученный в ходе работы функции график представлен на рисунке 2.

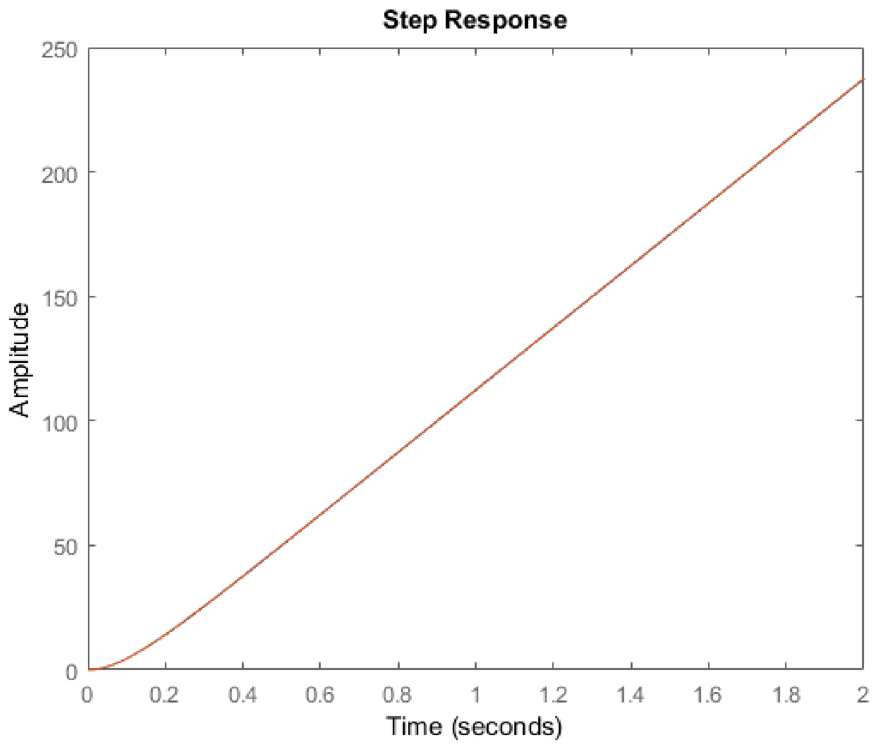

Рисунок 2 – Переходная характеристика

Как видно на представленном графике, переходные процессы совпадают, следовательно расчёт был проведён правильно.

3 Расчёт регулятора и его математическая модель

Сведём задачу к выбору матриц эталонной модели Γ, H и решению уравнения типа Сильвестра:

$$\begin{cases} \overline{M}\Gamma - \overline{AM} = -\overline{B}H \\ \overline{K} = H\overline{M^{-1}} \end{cases} \tag{15}$$

3.1 Проверка дискретного ОУ на управляемость

Найдём матрицу управляемости

$$U_d = \begin{bmatrix} B_d & A_d B_d \end{bmatrix} \tag{16}$$

воспользовавшись функцией ctrb Matlab. Полученная матрица

$$U_d = \begin{bmatrix} 0,009867989404040 & 0,029086340428907 \\ 19,605280423838394 & 18,836546382843710 \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Проверим матрицу на управляемость

$$rank(U_d) = 2 = n, \qquad det(U_d) = -0,384367020497341 \neq 0. \tag{18}$$

Из (18) видно, что пара матриц A_d, B_d полностью управляема.

3.2 Формирование эталонной модели

Исходя из условия о том, что значение перерегулирования не должно превышать 30% и того, что наша система имеет второй порядок, выберем полином Ньютона 3 порядка порядка в качестве требуемого характеристического полинома, имеющего вид

$$\lambda^3 + 3\omega_0\lambda^2 + \omega_0^2\lambda + \omega_0^3 \tag{19}$$

Чтобы найти требуемое значение ω_0 построим переходную характеристику звена с передаточной характеристикой

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \tag{20}$$

при единичном входном воздействии. В ходе моделирования был получен график, представленный на рисунке 3. Из него, учтя, что $\Delta = 0,05$, найдём значение переходного процесса $t_п^* = 6,3c$. Рассчитаем ω_0 по следующей формуле

$$\omega_0 = \frac{t_п^*}{t_п} = \frac{6,3}{0,15} = 42, \tag{21}$$

где $t_п$ — требуемое время переходного процесса. Подставим полученное значение ω_0 в выражение (19).

$$\lambda^3 + 126\lambda^2 + 5292\lambda + 74088 \tag{22}$$

Найдём корни полученной непрерывной эталонной модели

$$\lambda_{1,2,3} = -42 \tag{23}$$

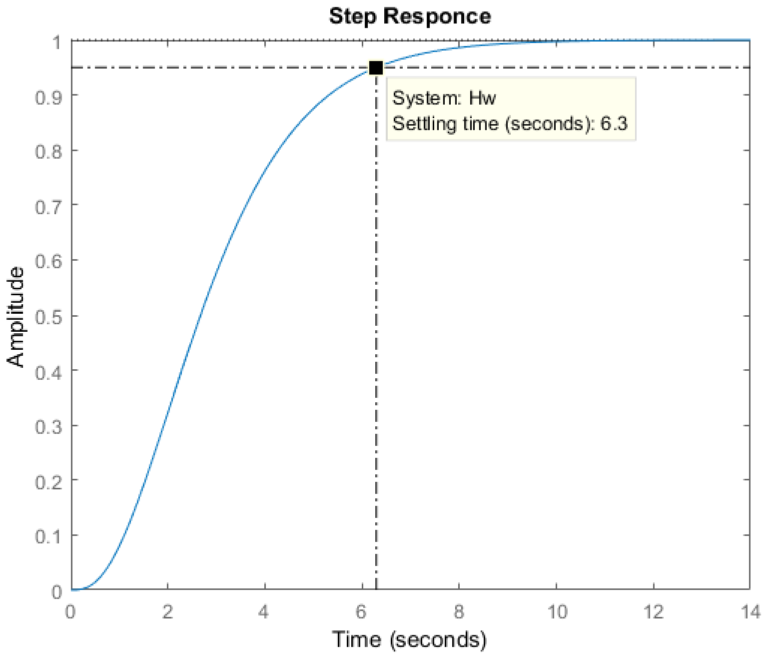

Рисунок 3 – График нормированной переходной функции

Так как мы имеем 3 одинаковых корня вида $\lambda_{1,2,3}$, то матрицы Γ_d и H, построенная из условия наблюдаемости пары Γ_d, H, будут иметь вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & 1 & 0 \\ 0 & -42 & 1 \\ 0 & 0 & -42 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Получим матрицу Γ в дискретном пространстве при помощи функции Matlab Gd = expm(G*0.004):

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 0,845353834684659 & 0,003381415338739 & 0,0000067628306774 77263 \\ 0 & 0,845353834684659 & 0,003381415338739 \\ 0 & 0 & 0,845353834684659 \end{bmatrix} \tag{26}$$

3.3 Нахождение матриц расширенной модели ВСВ

Найдём матрицы:

$$\overline{A_н} = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \tag{27}$$

$$\overline{B_н} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_н \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix} \tag{28}$$

Найдём значения этих матриц в дискретном пространстве, воспользовавшись формулами (6):

$$\overline{A_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0,004 & 0,00001973597880808024 \\ 0 & 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\overline{B_d} = \begin{bmatrix} 0,00001320105959598820 \\ 0,009867989404040 \\ 19,605280423838394 \end{bmatrix} \tag{30}$$

3.4 Решение уравнения типа Сильвестра

Подставив полученные матрицы в первое уравнение системы (15) рассчитаем матрицу $\overline{M}$, воспользовавшись функцией lyap среды Matlab:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} -0,008339994934144 & -0,0004730368613052505 & -0,00001792655436682541 \\ 0,472627512917950 & 0,018467003996024 & 0,0005428609746627452 \\ -107,1352046282408 & -2,295590414147008 & -0,049187709752454 \end{bmatrix} \tag{31}$$

Из второго уравнения системы (15) получим расширенную матрицу линейных стационарных обратных связей:

$$\overline{K} = \begin{bmatrix} 145,5960607704002 & 7,707573360000006 & 0,032002 \end{bmatrix}, \tag{32}$$

где

$$K_I = 145,5960607704002 \tag{33}$$
$$K_1 = 7,707573360000006 \tag{34}$$
$$K_2 = 0,032002 \tag{35}$$

4 Результаты синтеза регулятора

Схема моделирования рассчитанного апериодического регулятора приведена на рисунке 4. Результат реакции системы представлен на рисунке 5.

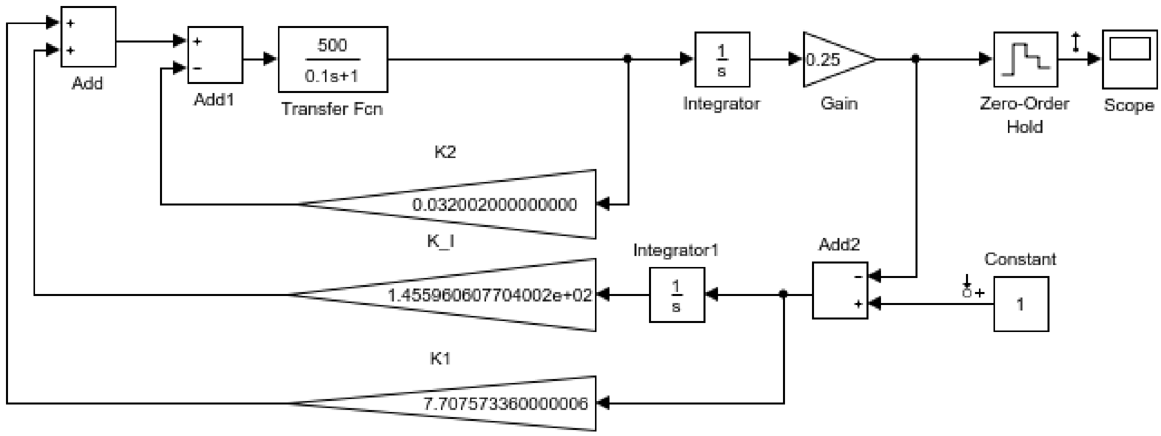

Рисунок 4 – Схема моделирования системы с ПИ регулятором

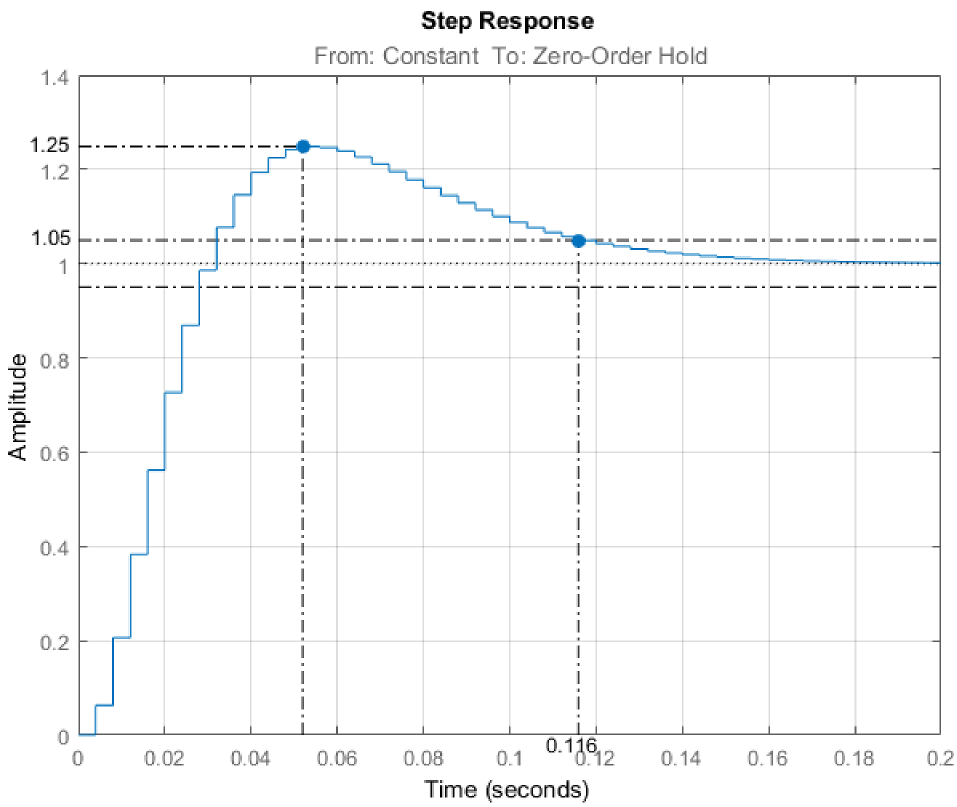

Рисунок 5 – Переходный процесс системы с ПИ регулятором

Вывод

Как указано на рисунке 5 время переходного процесса синтезированной системы $t_{\text{пс}} = 0,116c$, что удовлетворяет заданному условию $t_{\text{п}} = 0,15c$. Так же процент перерегулирования составил $\sigma = \dfrac{1,25 - 1}{1} \cdot 100\% = 25\%$, что не превышает разрешённых 30%.

Исходя из этого, синтез ПИ регулятора, удовлетворяющего заданным показателям качества системы, можно считать успешным.

Приложение А

Листинг 1 — программа нахождения значения матриц в дискретном пространстве

```
T = 0.004;
An = [0, 0.25; 0, -10];
Bn = [0; 5000];
Ad = expm(A * T);
Bd = 0;
for i = 1:00
        Bd = Bd + (A^(i - 1) * T^(i))/(prod(1:i)) * Bn;
end
```