

Дата защиты " _____ " _____ 20__ 17 г.

Цель работы

Для заданного объекта управления спроектировать пропорционально-интегральный регулятор, обеспечивающий в замкнутой системе требуемое время переходного процесса и значение перерегулирования.

Исходные данные

Задан объект управления, структурная схема которого представлена на рисунке 1.

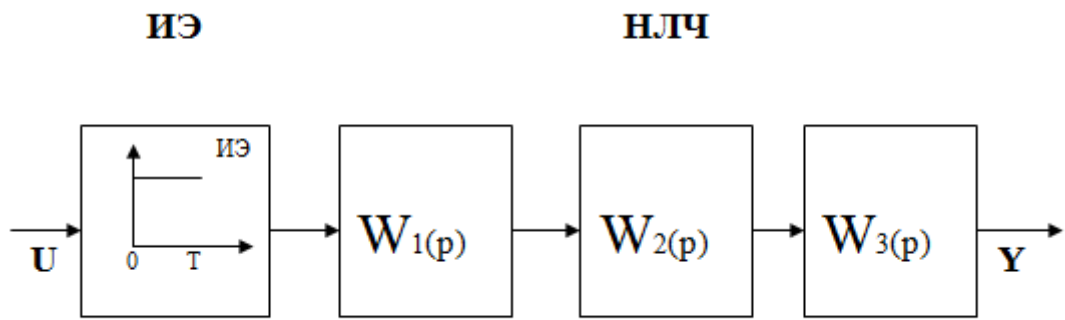


Рисунок 1 – Общая структура объекта управления

Для проектирования были выданные исходные данные, представленные в таблице.

Таблица 1 – Исходные данные

Т	W ₁		W ₂		W ₃		Тип регулятора	Время переходного процесса	Перерегулирование
	K ₁	T ₁	K ₂	T ₂	K ₃	T ₃			
[с]	—	[с]	—	[с]	—	[с]		[с]	[%]
0,0040	—	—	500,00	0,10	0,25	Интегратор	ПИ	0,150	30,00

1 Составление уравнения Вход-Состояние-Выход в дискретной форме для объекта управления

Опишем передаточную функцию $\frac{500}{0,1s+1}$ в виде интегратора и коэффициентов обратной связи:

$$\dot{x}_2 = -k_3 k_4 x_2 + k_4 u \quad (1)$$

$$s x_2 + k_3 k_4 x_2 = k_4 u \quad (2)$$

$$x_2 = \frac{\frac{1}{k_3} u}{\frac{1}{k_3 k_4} s + 1} \quad (3)$$

Из полученного выражения найдём коэффициенты $k_3 = 0,002, k_4 = 5000$

Опишем систему уравнениями Вход-Состояние-Выход:

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{\text{н}} x + B_{\text{н}} U \\ Y = C X \end{cases}, \text{ где } A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 & k_2 \\ 0 & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}, B_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{T_1} \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \quad (4)$$

где $x(k) \in \mathbb{R}^2$ — вектор состояния дискретной системы, $u(k) \in \mathbb{R}^1$ — управляющее воздействие, $y(k) \in \mathbb{R}^2$ — регулируемая переменная, $A_{\text{н}} - (2 \times 2)$ — дискретизированная матрица состояния, определяющая динамические свойства системы, $B_{\text{н}} - (2 \times 1)$ — дискретизированная матрица выходов, определяющая точки приложения к ОУ управляющих воздействий, $C - (1 \times 2)$ — матрица выходов, определяющая связь между переменными состояния и выходными переменными.

Подставив в (4) известные значения параметров $k_1 = 500, k_2 = 0,25, T_1 = 0,1$, получим следующие матрицы:

$$A_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 & 0,25 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}, B_{\text{н}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5000 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \quad (5)$$

Для перехода от непрерывной модели к дискретной воспользуемся соотношениями

$$A_d = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i T^i}{i!}; \quad B_d = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A^{i-1} T^i}{i!} B; \quad C_d = C \quad (6)$$

Чтобы рассчитать дискретизированные матрицы, напомним программу в среде matlab, листинг которой приведён в приложении А. В результате работы программы были получены следующие результаты:

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0,009867989404040 \\ 19,605280423838394 \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$C_d = [1 \ 0]. \quad (9)$$

Теперь получим систему уравнений Вход-Состояние-Выход в дискретной форме, подставив матрицы (7), (8) и (9) в уравнение (4):

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,009867989404040 \\ 19,605280423838394 \end{bmatrix} \cdot u(k) \\ y(k) = [1 \ 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{bmatrix} \end{cases} \quad (10)$$

2 Переход к передаточной функции объекта управления

Для перехода от уравнений Вход-Состояние-Выход к передаточной функции объекта необходимо воспользоваться следующим соотношением:

$$W(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d \quad (11)$$

Решив данное уравнение при помощи среды Matlab, получим функцию:

$$W(z) = \frac{0,009867989404040z + 0,009737291019798}{z^2 - 1,960789439152323z + 0,960789439152323} \quad (12)$$

Найдём корни характеристического уравнения

$$\lambda^2 - 1,9608\lambda + 0,9608 = 0 \quad (13)$$

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 0,9608 \quad (14)$$

Получим переходные характеристики полученной дискретизированной передаточной функции и исходной непрерывной передаточной функции, воспользовавшись функцией Matlab — `stepplot`. Полученный в ходе работы функции график представлен на рисунке 2.

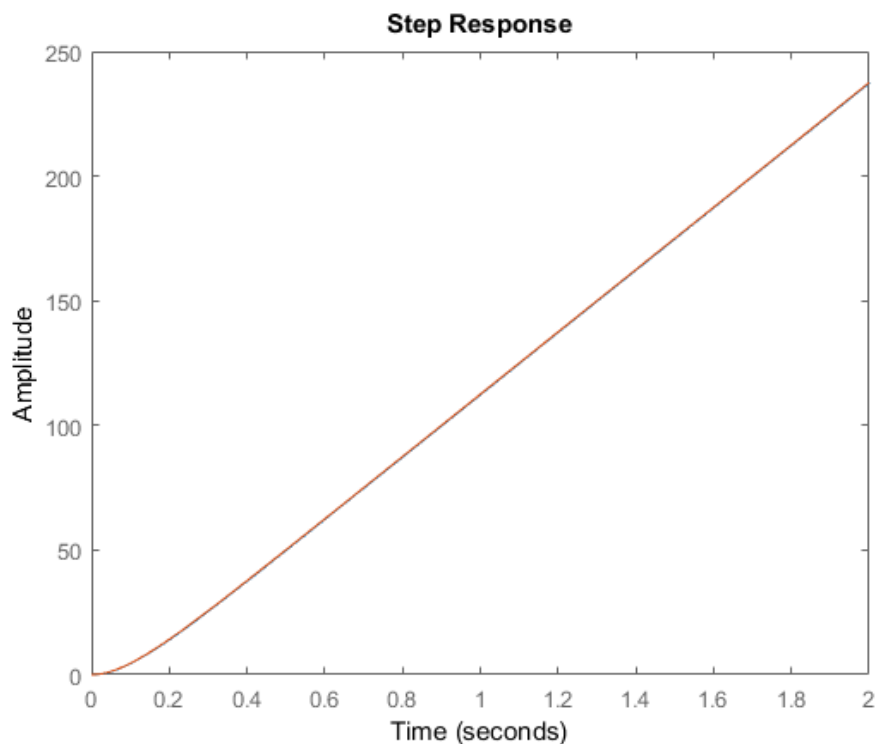


Рисунок 2 – Переходная характеристика

Как видно на представленном графике, переходные процессы совпадают, следовательно расчёт был проведён правильно.

3 Расчёт регулятора и его математическая модель

Сведём задачу к выбору матриц эталонной модели Γ, H и решению уравнения типа Сильвестра:

$$\begin{cases} \overline{M}\Gamma - \overline{A}\overline{M} = -\overline{B}H \\ \overline{K} = H\overline{M}^{-1} \end{cases} \quad (15)$$

3.1 Проверка дискретного ОУ на управляемость

Найдём матрицу управляемости

$$U_d = [B_d \quad A_d B_d] \quad (16)$$

воспользовавшись функцией `ctrb` Matlab. Полученная матрица

$$U_d = \begin{bmatrix} 0,009867989404040 & 0,029086340428907 \\ 19,605280423838394 & 18,836546382843710 \end{bmatrix}. \quad (17)$$

Проверим матрицу на управляемость

$$\text{rank}(U_d) = 2 = n, \quad \det(U_d) = -0,384367020497341 \neq 0. \quad (18)$$

Из (18) видно, что пара матриц A_d, B_d полностью управляема.

3.2 Формирование эталонной модели

Исходя из условия о том, что значение перерегулирования не должно превышать 30% и того, что наша система имеет второй порядок, выберем полином Ньютона 3 порядка в качестве требуемого характеристического полинома, имеющего вид

$$\lambda^3 + 3\omega_0\lambda^2 + \omega_0^2\lambda + \omega_0^3 \quad (19)$$

Чтобы найти требуемое значение ω_0 построим переходную характеристику звена с передаточной характеристикой

$$W(s) = \frac{1}{s^3 + 3s^2 + 3s + 1} \quad (20)$$

при единичном входном воздействии. В ходе моделирования был получен график, представленный на рисунке 3. Из него, учтя, что $\Delta = 0,05$, найдём значение переходного процесса $t_n^* = 6,3c$. Рассчитаем ω_0 по следующей формуле

$$\omega_0 = \frac{t_n^*}{t_n} = \frac{6,3}{0,15} = 42, \quad (21)$$

где t_n — требуемое время переходного процесса. Подставим полученное значение ω_0 в выражение (19).

$$\lambda^3 + 126\lambda^2 + 5292\lambda + 74088 \quad (22)$$

Найдём корни полученной непрерывной эталонной модели

$$\lambda_{1,2,3} = -42 \quad (23)$$

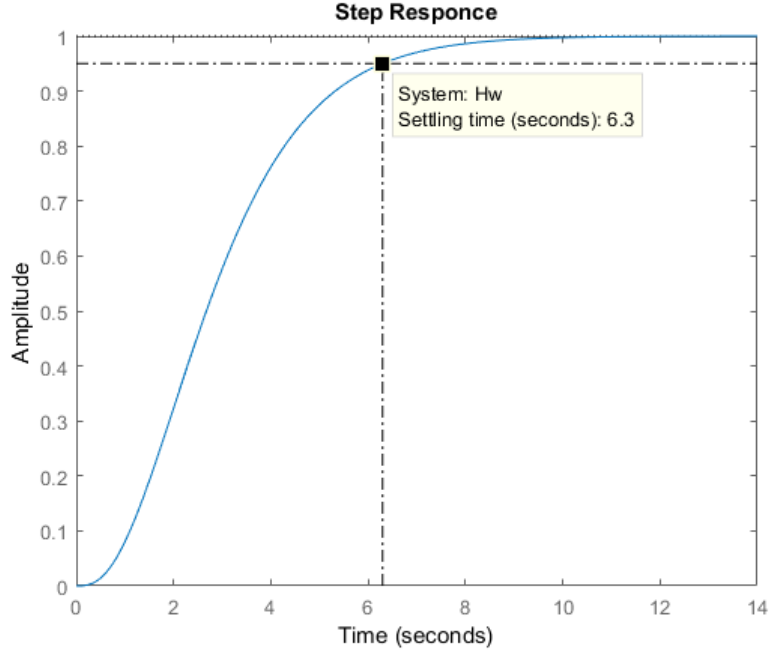


Рисунок 3 – График нормированной переходной функции

Так как мы имеем 3 одинаковых корня вида $\lambda_{1,2,3}$, то матрицы Γ_d и H , построенная из условия наблюдаемости пары Γ_d, H , будут иметь вид

$$\Gamma = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -42 & 1 & 0 \\ 0 & -42 & 1 \\ 0 & 0 & -42 \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$H = [1 \quad 0 \quad 0] \quad (25)$$

Получим матрицу Γ в дискретном пространстве при помощи функции Matlab $Gd = \expm(G*0.004)$:

$$\Gamma_d = \begin{bmatrix} 0,845353834684659 & 0,003381415338739 & 0,000006762830677477263 \\ 0 & 0,845353834684659 & 0,003381415338739 \\ 0 & 0 & 0,845353834684659 \end{bmatrix} \quad (26)$$

3.3 Нахождение матриц расширенной модели ВСВ

Найдём матрицы:

$$\overline{A}_H = \begin{bmatrix} 0 & C \\ 0 & A_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0 & -10 \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\overline{B}_H = \begin{bmatrix} 0 \\ B_H \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5000 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Найдём значения этих матриц в дискретном пространстве, воспользовавшись формулами (6):

$$\overline{A_d} = \begin{bmatrix} 1 & 0,004 & 0,000001973597880808024 \\ 0 & 1 & 0,0009802640211919198 \\ 0 & 0 & 0,960789439152323 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\overline{B_d} = \begin{bmatrix} 0,00001320105959598820 \\ 0,009867989404040 \\ 19,605280423838394 \end{bmatrix} \quad (30)$$

3.4 Решение уравнения типа Сильвестра

Подставив полученные матрицы в первое уравнение системы (15) рассчитаем матрицу \overline{M} , воспользовавшись функцией `lyap` среды Matlab:

$$\overline{M} = \begin{bmatrix} -0,008339994934144 & -0,0004730368613052505 & -0,00001792655436682541 \\ 0,472627512917950 & 0,018467003996024 & 0,0005428609746627452 \\ -107,1352046282408 & -2,295590414147008 & -0,049187709752454 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Из второго уравнения системы (15) получим расширенную матрицу линейных стационарных обратных связей:

$$\overline{K} = [145,5960607704002 \quad 7,7075733600000006 \quad 0,032002], \quad (32)$$

где

$$K_I = 145,5960607704002 \quad (33)$$

$$K_1 = 7,7075733600000006 \quad (34)$$

$$K_2 = 0,032002 \quad (35)$$

4 Результаты синтеза регулятора

Схема моделирования рассчитанного аperiodического регулятора приведена на рисунке 4. Результат реакции системы представлен на рисунке 5.

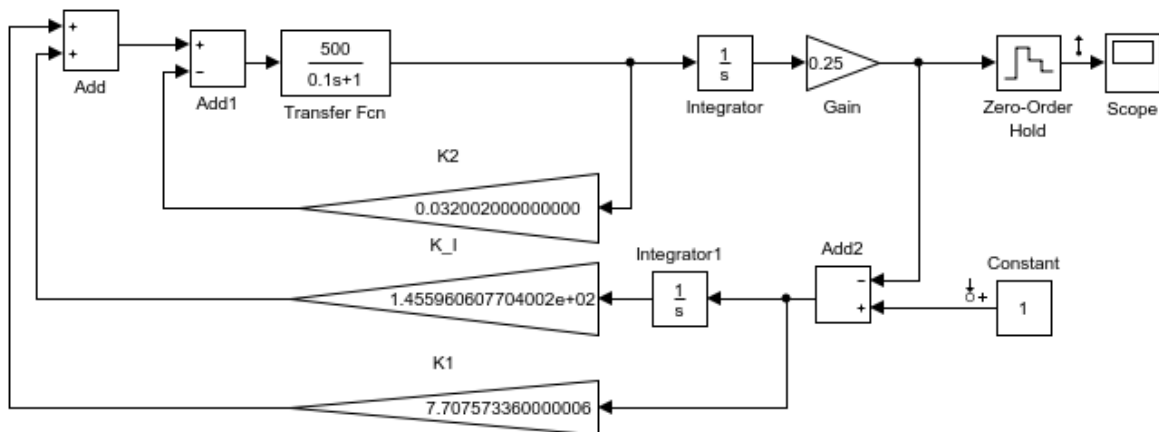


Рисунок 4 – Схема моделирования системы с ПИ регулятором

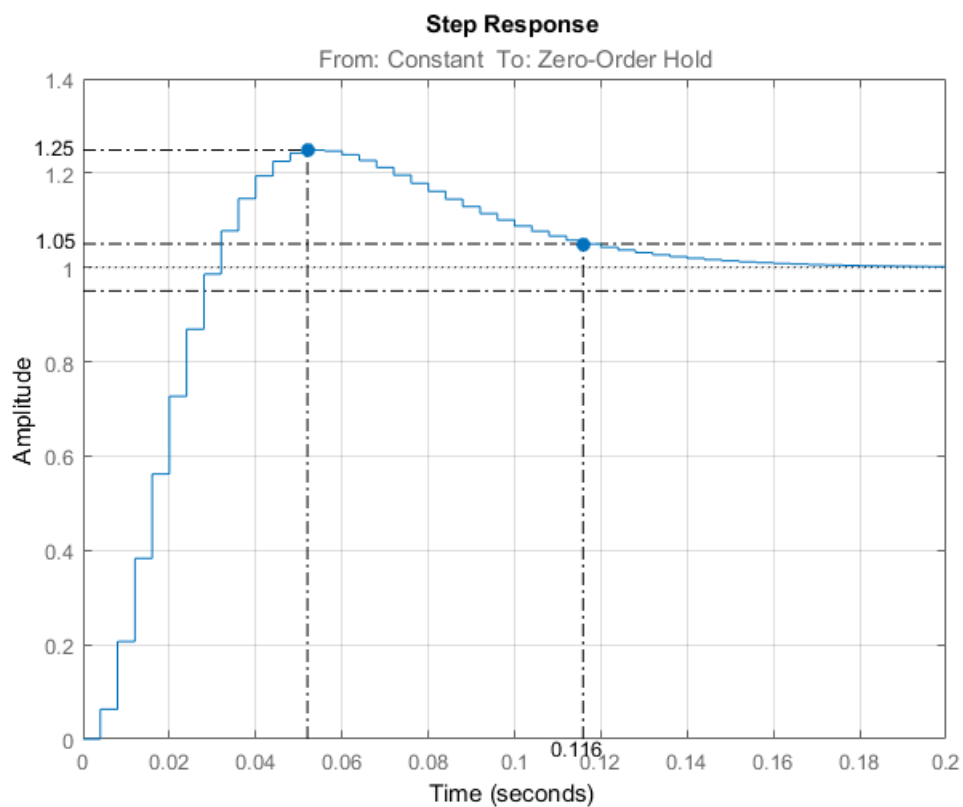


Рисунок 5 – Переходный процесс системы с ПИ регулятором

Вывод

Как указано на рисунке 5 время переходного процесса синтезированной системы $t_{\text{пс}} = 0,116\text{с}$, что удовлетворяет заданному условию $t_{\text{н}} = 0,15\text{с}$. Так же процент перерегулирования составил $\sigma = \frac{1,25 - 1}{1} \cdot 100\% = 25\%$, что не превышает разрешённых 30%.

Исходя из этого, синтез ПИ регулятора, удовлетворяющего заданным показателям качества системы, можно считать успешным.

Приложение А

Листинг 1 — программа нахождения значения матриц в дискретном пространстве

```
T = 0.004;  
An = [0, 0.25; 0, -10];  
Bn = [0; 5000];  
Ad = expm(A * T);  
Bd = 0;  
for i = 1:100  
    Bd = Bd + (A^(i - 1) * T^(i)) / (prod(1:i)) * Bn;  
end
```