**Министерство образования и науки Российской Федерации**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа P3340

# Лабораторная работа №12 "Анализ линейных непрерывных систем с использованием прикладного пакета Matlab Control System Toolbox"

Вариант - 2

Выполнил Алякин С.П. (подпись)
(фамилия, и.о.)

Проверил ______________________ (подпись)
(фамилия, и.о.)

"___" ________ 20 17 г. Санкт-Петербург, 20 17 г.

Работа выполнена с оценкой ______________________

Дата защиты "___" ________ 20 17 г.

## Цель работы

Исследование динамических и частотных характеристик, анализ структурных свойств и устойчивости линейных непрерывных систем с помощью прикладного пакета Matlab Control System Toolbox.

## Исходные данные

Исходная модель разомкнутой системы представляется в форме вход-выход и описывается передаточной функцией вида:

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s \cdot (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}. \tag{1}$$

Значения коэффициентов $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$ выбираются самостоятельно произвольно их условия $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$. Выбранные для проведения работы значения коэффициентов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

| $a_0$ | $a_1$ | $a_2$ | $b_0$ | $b_1$ |
|---|---|---|---|---|
| 6 | 4 | 1 | 10 | 1 |

Во второй части работы требуется перейти от исходной разомкнутой системы к замкнутой системе с жёсткой отрицательной обратной связью и провести её анализ. Другими словами

$$\lim_{s \to 0} W_{\text{OC}}(s) = 0, \tag{2}$$

где $W_{\text{OC}}(s)$ — передаточная функция обратной связи.

Для простоты вычислений в качестве звена обратной связи выберем усилитель, передаточная функция которого $W_{\text{OC}}(s) = K_{\text{OC}}$ постоянна при всех значениях $s$ и, следовательно, удовлетворяет условию (2).

# 1 Анализ исходной разомкнутой системы

Исходя из выбранных нами исходных значений передаточная функция разомкнутой системы принимает вид:

$$W(s) = \frac{s+10}{s\cdot(s^2+4s+6)}. \tag{3}$$

Найдём нули и полюса полученной передаточной функции аналитически при помощи функций Matlab `pole` и `zero`, результат работы которых в виде графика приведён на рисунке 1.

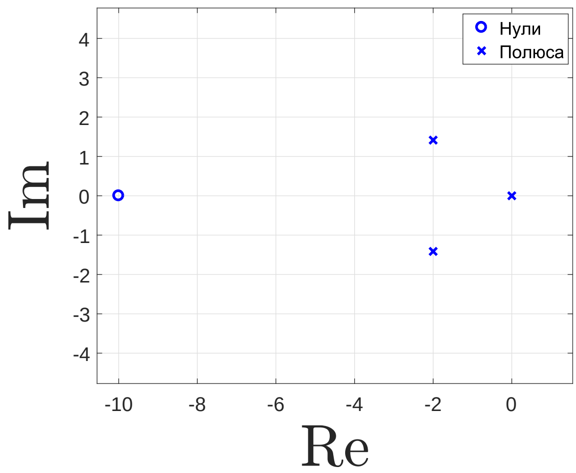



Рисунок 1 – Нули и полюса разомкнутой системы

Полюсами функции являются корни её характеристического уравнения её знаменателя, а нулями — корни числителя. Таким образом

$$z_1 = -10, \qquad p_1 = 0, \tag{4}$$

$$p_2 = -2 + j\sqrt{2}, \qquad p_3 = -2 - j\sqrt{2}, \tag{5}$$

где $z_1$ ноль функции, а $p_i, i = \overline{1,3}$ — полюса.

Для определения устойчивости системы обратимся к корневому критерию, в соответствии с которым система находится на нейтральной границе устойчивости, так как имеет чисто нулевой полюс и не имеет полюсов с положительной вещественной частью, что отчётливо видно на рисунке 1.

Для определения определения логарифмических амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик воспользуемся функцией `bode`. График, полученный в результате работы функции, приведён на рисунке 2.

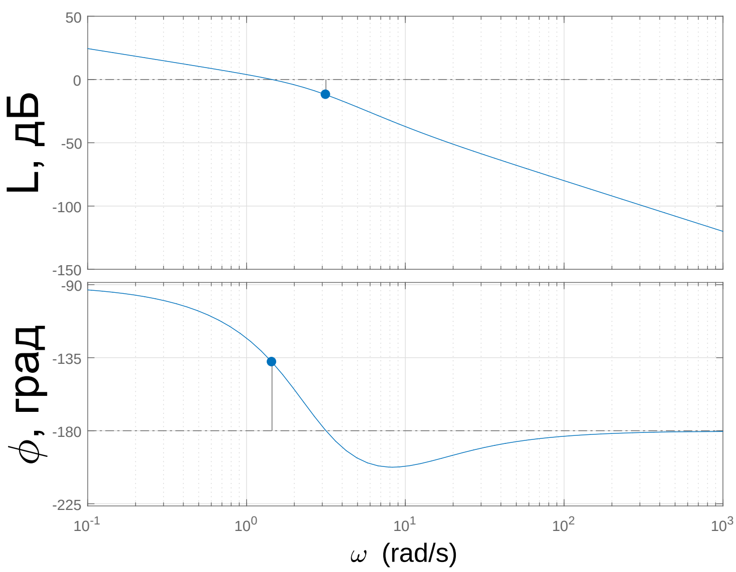



Рисунок 2 – Логарифмические характеристики разомкнутой системы

При помощи функции `margin` определим запасы по амплитуде и частоте. Так же по полученным графикам определим значение частоты среза:

$$\omega_{\text{ср}} = 1,45 \text{ рад/с}, \qquad A_{\text{з}} = 4, \qquad \varphi_{\text{з}} = 42,3^\circ. \tag{6}$$

При помощи функции `nyquistplot` построим амплитудно-фазовую частотную характеристику исследуемой системы. Результат работы функции приведён на рисунке 3.

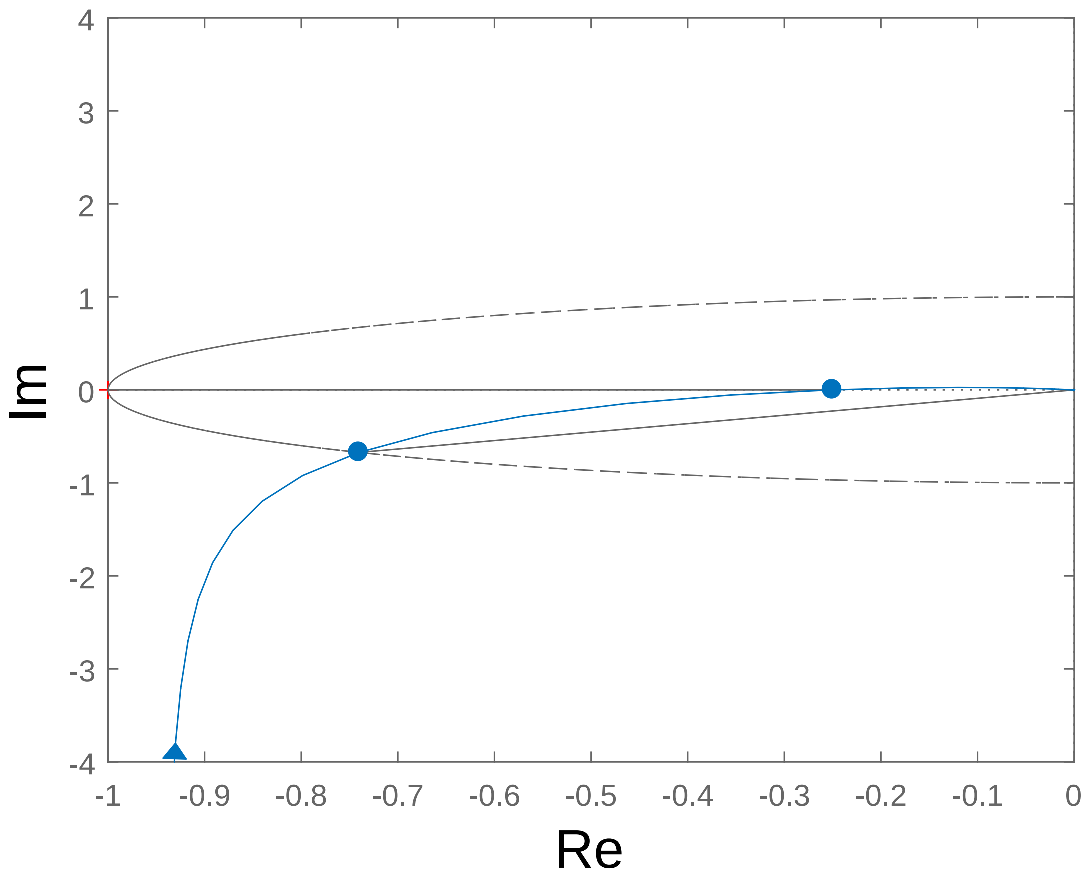



Рисунок 3 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы

На приведённом графике видно, что АФЧХ системы не огибает точку (-1; 0), другими словами, фаза системы при частоте среза меньше $-180^\circ$. Следовательно, система является устойчивой по критерию Найквиста.

## 2 Анализ замкнутой системы

Передаточная функция системы, замкнутой отрицательной обратной связью, в нашем случае будет иметь вид

$$\Phi(s) = \frac{\dfrac{s+10}{s\cdot(s^2+4s+6)}}{1+\dfrac{s+10}{s\cdot(s^2+4s+6)}\cdot K} = \frac{s+10}{s^3+4s^2+(6+K)s+10K} \tag{7}$$

Для определения влияния коэффициента $K$ на расположение полюсов замкнутой системы воспользуемся функцией `rlocus`. Полученный в результате график представлен на рисунке 4.

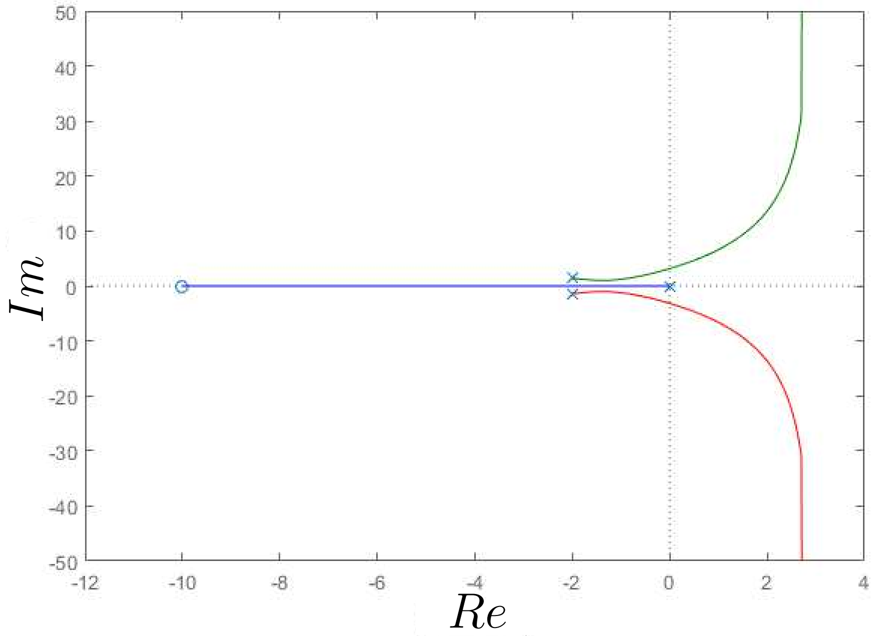



Рисунок 4 – Зависимость расположения полюсов замкнутой системы от коэффициента обратной связи

Для выбора коэффициента K воспользуемся корневым критерием устойчивости и составим матрицу Гурвница:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 10K & 0 \\ 1 & 6+K & 0 \\ 0 & 4 & 10K \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Из неё видно, что при $K = 0$ система будет находиться на нейтральной границе устойчивости, при $K \in (0;4)$ — устойчива, при $K = 4$ — находиться на колебательной границе устойчивости и при $K > 4$ — неустойчива.

Выберем коэффициент обратной связи $K = 2$, тогда передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$\Phi(s) = \frac{s+10}{s^3+4s^2+8s+20}. \tag{9}$$

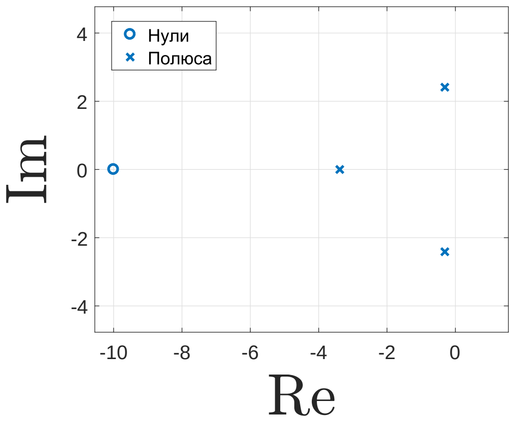



Рисунок 5 – Нули и полюса замкнутой системы

Найдём значения нулей и полюсов для замкнутой системы по графику, представленному на рисунке 5 и получим

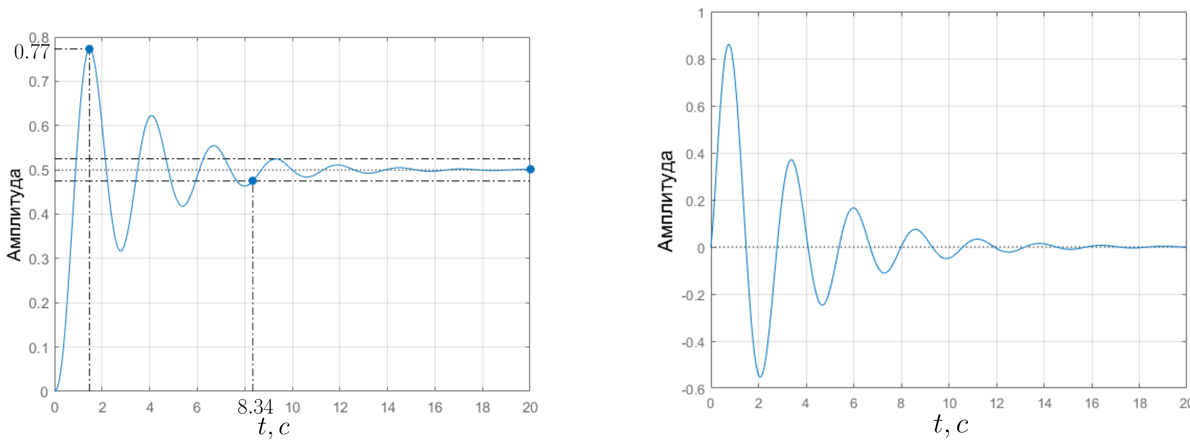
$$z_1 = -10, \qquad p_1 = -3,38, \tag{10}$$
$$p_2 = -0,31 + j2,41, \quad p_3 = -0,31 - j2,41. \tag{11}$$

Как можно заметить расположения полюсов не противоречат траекториям, отражённым на рисунке 4, и система устойчива, так как не имеет корней с неотрицательной вещественной частью.

Степенью устойчивости системы является наименьшее расстояние от комплексной оси до полюса системы. Таким образом в нашем случае степень устойчивости системы будет равна

$$|\mathbb{R}e(p_2)| = |\mathbb{R}e(p_3)| = 0,31. \tag{12}$$

Воспользовавшись функциями `step` и `impulse` постоим графики переходной и весовой функций замкнутой системы. Результаты приведены на рисунке 6.




(a) Переходная функция

(b) Импульсная функция

Рисунок 6 – Переходная и импульсная характеристики замкнутой системы

По графику переходной функции определим величину перерегулирования, время переходного процесса и коэффициент затухания, так как наш процесс является колебательным:

$$t_п = 8,34c, \qquad \sigma = \frac{0,77 - 0,5}{0,5} \cdot 100\% = 54\%, \qquad \beta = 0,063. \tag{13}$$

Представим замкнутую систему в форму Вход-Состояние-Выход. Для этого сначала получим дифференциальное уравнение, описывающее систему, проведя замену $s = \dfrac{d}{dt}$.

$$\frac{d^3}{dt^3}y + 4\frac{d^2}{dt^2}y + 8\frac{d}{dt}y + 20y = \frac{d}{dt}u + 10u \tag{14}$$

$$\dddot{y} + 4\ddot{y} + 8\dot{y} + 20y = \dot{u} + 10u. \tag{15}$$

Записав выражение (15) в форме Коши получим

$$\dot{x_3} = -4x_3 - 8x_2 - 20x_1 + u_2 + 10u_1, \tag{16}$$

где $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, u_1 = u, u_2 = \dot{u}$. Из уравнения (16) составим модель Вход-Состояние-Выход в матричном виде в канонически управляемой форме:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}. \tag{17}$$

Составим матрицу управляемости для полученной модели ВСВ.

$$U_y = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \qquad rank(U_y) = 3. \tag{18}$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то система полностью управляема. Теперь составим матрицу наблюдаемости системы.

$$U_н = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ -20 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \qquad rank(U_н) = 3. \tag{19}$$

Ранг полученной матрицы наблюдаемости равен порядку системы, следовательно, система является полностью наблюдаемой.

## Вывод

При анализе разомкнутой системы на устойчивость следует придерживаться корневого критерия устойчивости, а не частотного, так как критерий Найквиста позволяет судить лишь об устойчивости замкнутой системы.

При выборе коэффициента отрицательной обратной связи можно руководствоваться графиком, полученным в результате работы функции `rlocus` в среде Matlab. По нему легко определить расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы при различных значениях коэффициента и, соответственно, оценить устойчивость системы по корневому критерию.

В результате работы была получена устойчивая полностью наблюдаемая и полностью управляемая система с жесткой отрицательной обратной связью.