

**Министерство образования и науки Российской Федерации**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

**САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ  
ТЕХНОЛОГИЙ, МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

Кафедра Систем Управления и Информатики Группа Р3340

**Лабораторная работа №12**  
**“Анализ линейных непрерывных систем с**  
**использованием прикладного пакета Matlab**  
**Control System Toolbox”**  
Вариант - 2

Выполнил Алякин С.П. (подпись)  
(фамилия, и.о.)

Проверил \_\_\_\_\_ (подпись)  
(фамилия, и.о.)

"\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_17 г. Санкт-Петербург, 20\_\_17 г.

Работа выполнена с оценкой \_\_\_\_\_

Дата защиты "\_\_" \_\_\_\_\_ 20\_\_17 г.

## Цель работы

Исследование динамических и частотных характеристик, анализ структурных свойств и устойчивости линейных непрерывных систем с помощью прикладного пакета Matlab Control System Toolbox.

## Исходные данные

Исходная модель разомкнутой системы представляется в форме вход-выход и описывается передаточной функцией вида:

$$W(s) = \frac{b_1 s + b_0}{s \cdot (a_2 s^2 + a_1 s + a_0)}. \quad (1)$$

Значения коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1$  выбираются самостоятельно произвольно их условия  $a_2 \neq 0, b_1 \neq 0$ . Выбранные для проведения работы значения коэффициентов приведены в таблице 1.

Таблица 1 – Исходные данные

$a_0$	$a_1$	$a_2$	$b_0$	$b_1$
6	4	1	10	1

Во второй части работы требуется перейти от исходной разомкнутой системы к замкнутой системе с жёсткой отрицательной обратной связью и провести её анализ. Другими словами

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_{OC}(s) = 0, \quad (2)$$

где  $W_{OC}(s)$  — передаточная функция обратной связи.

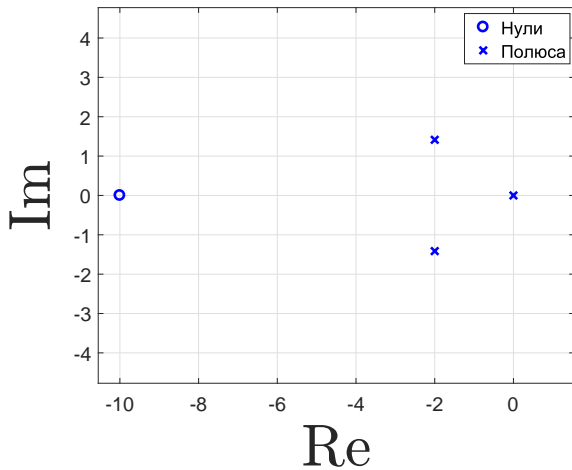
Для простоты вычислений в качестве звена обратной связи выберем усилитель, передаточная функция которого  $W_{OC}(s) = K_{OC}$  постоянна при всех значениях  $s$  и, следовательно, удовлетворяет условию (2).

# 1 Анализ исходной разомкнутой системы

Исходя из выбранных нами исходных значений передаточная функция разомкнутой системы принимает вид:

$$W(s) = \frac{s + 10}{s \cdot (s^2 + 4s + 6)}. \quad (3)$$

Найдём нули и полюса полученной передаточной функции аналитически при помощи функций Matlab `pole` и `zero`, результат работы которых в виде графика приведён на рисунке 1.



Полюсами функции являются корни её характеристического уравнения её знаменателя, а нулями — корни числителя. Таким образом

$$z_1 = -10, \quad p_1 = 0, \quad (4)$$

$$p_2 = -2 + j\sqrt{2}, \quad p_3 = -2 - j\sqrt{2}, \quad (5)$$

где  $z_1$  ноль функции, а  $p_i, i = \overline{1, 3}$  — полюса.

Для определения устойчивости системы обратимся к корневому критерию, в соответствии с которым система находится на нейтральной границе устойчивости, так как имеет чисто нулевой полюс и не имеет полюсов с положительной вещественной частью, что отчетливо видно на рисунке 1.

Рисунок 1 – Нули и полюса разомкнутой системы

Для определения логарифмических амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик воспользуемся функцией `bode`. График, полученный в результате работы функции, приведён на рисунке 2.

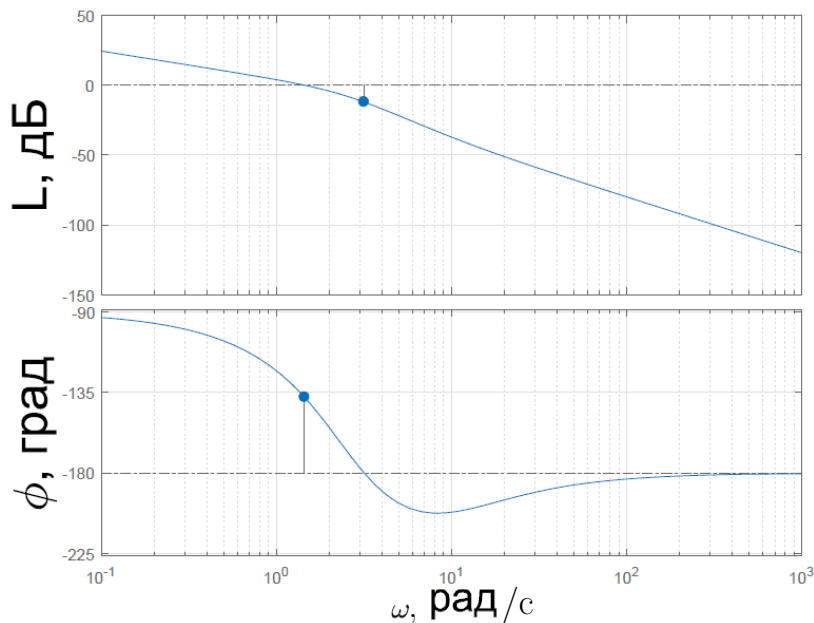


Рисунок 2 – Логарифмические характеристики разомкнутой системы

При помощи функции `margin` определим запасы по амплитуде и частоте. Так же по полученным графикам определим значение частоты среза:

$$\omega_{\text{ср}} = 1,45 \text{ рад/с}, \quad A_3 = 4, \quad \varphi_3 = 42,3^\circ. \quad (6)$$

При помощи функции `nyquistplot` построим амплитудно-фазовую частотную характеристику исследуемой системы. Результат работы функции приведён на рисунке 3.

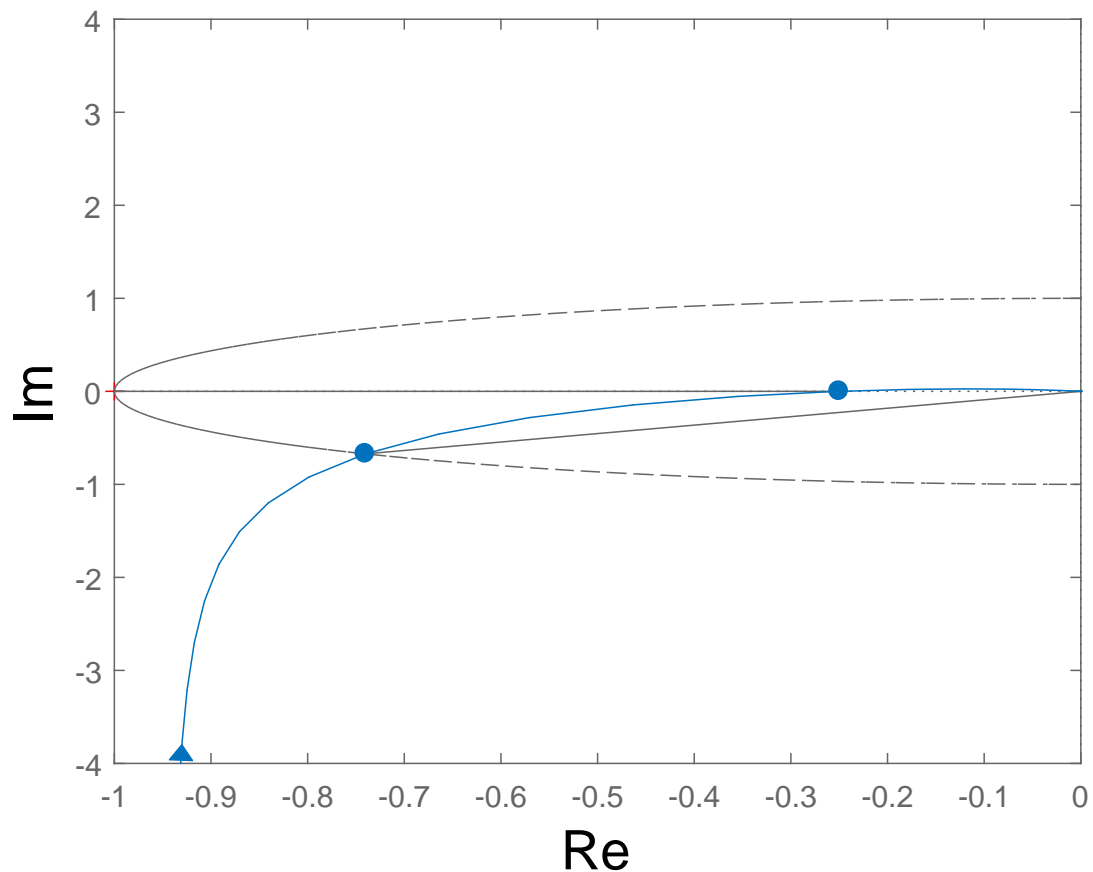


Рисунок 3 – Амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы

На приведённом графике видно, что АФЧХ системы не огибает точку  $(-1; 0)$ , другими словами, фаза системы при частоте среза меньше  $-180^\circ$ . Следовательно, система является устойчивой по критерию Найквиста.

## 2 Анализ замкнутой системы

Передаточная функция системы, замкнутой отрицательной обратной связью, в нашем случае будет иметь вид

$$\Phi(s) = \frac{\frac{s+10}{s \cdot (s^2 + 4s + 6)}}{1 + \frac{s+10}{s \cdot (s^2 + 4s + 6)} \cdot K} = \frac{s+10}{s^3 + 4s^2 + (6+K)s + 10K} \quad (7)$$

Для определения влияния коэффициента  $K$  на расположение полюсов замкнутой системы воспользуемся функцией `rlocus`. Полученный в результате график представлен на рисунке 4.

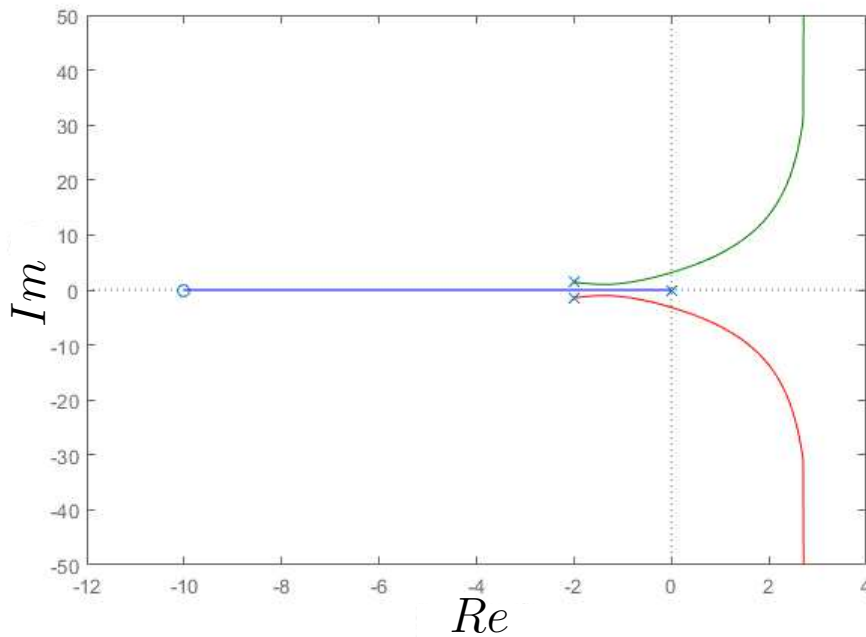


Рисунок 4 – Зависимость расположения полюсов замкнутой системы от коэффициента обратной связи

Для выбора коэффициента  $K$  воспользуемся корневым критерием устойчивости и составим матрицу Гурвица:

$$\Gamma = \begin{bmatrix} 4 & 10K & 0 \\ 1 & 6+K & 0 \\ 0 & 4 & 10K \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Из неё видно, что при  $K = 0$  система будет находиться на нейтральной границе устойчивости, при  $K \in (0; 4)$  — устойчива, при  $K = 4$  — находиться на колебательной границе устойчивости и при  $K > 4$  — неустойчива.

Выберем коэффициент обратной связи  $K = 2$ , тогда передаточная функция замкнутой системы принимает вид

$$\Phi(s) = \frac{s+10}{s^3 + 4s^2 + 8s + 20}. \quad (9)$$

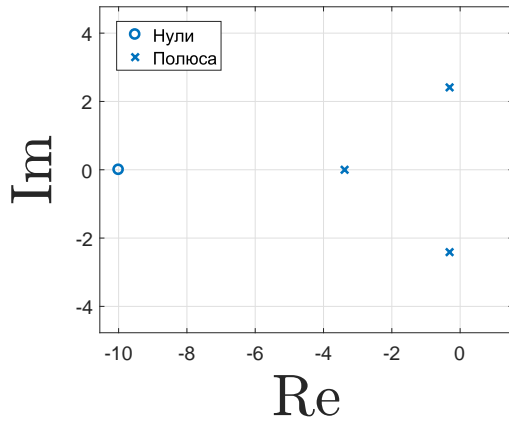


Рисунок 5 – Нули и полюса замкнутой системы

Найдём значения нулей и полюсов для замкнутой системы по графику, представленному на рисунке 5 и получим

$$z_1 = -10, \quad p_1 = -3,38, \quad (10)$$

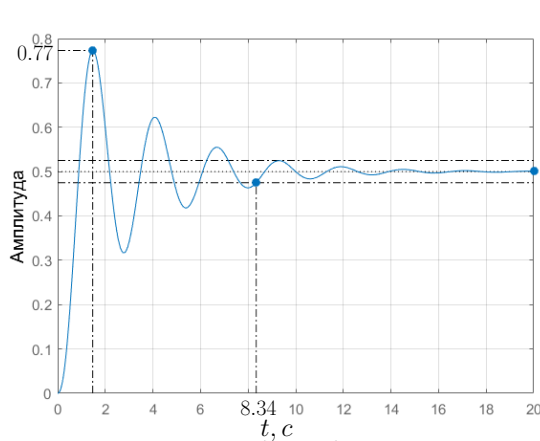
$$p_2 = -0,31 + j2,41, \quad p_3 = -0,31 - j2,41. \quad (11)$$

Как можно заметить расположения полюсов не противоречат траекториям, отражённым на рисунке 4, и система устойчива, так как не имеет корней с неотрицательной вещественной частью.

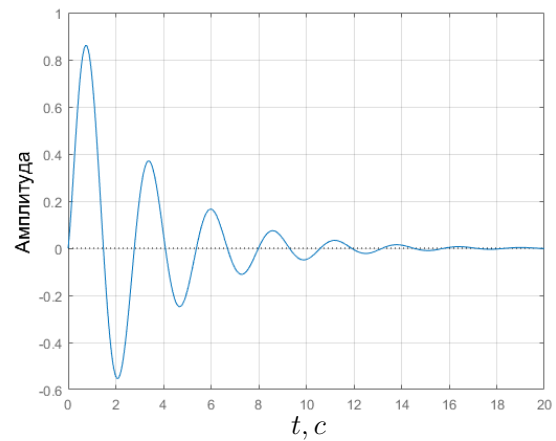
Степенью устойчивости системы является наименьшее расстояние от комплексной оси до полюса системы. Таким образом в нашем случае степень устойчивости системы будет равна

$$|\operatorname{Re}(p_2)| = |\operatorname{Re}(p_3)| = 0,31. \quad (12)$$

Воспользовавшись функциями `step` и `impulse` построим графики переходной и весовой функций замкнутой системы. Результаты приведены на рисунке 6.



(а) Переходная функция



(б) Импульсная функция

Рисунок 6 – Переходная и импульсная характеристики замкнутой системы

По графику переходной функции определим величину перерегулирования, время переходного процесса и коэффициент затухания, так как наш процесс является колебательным:

$$t_n = 8,34c, \quad \sigma = \frac{0,77 - 0,5}{0,5} \cdot 100\% = 54\%, \quad \beta = 0,063. \quad (13)$$

Представим замкнутую систему в форму Вход-Состояние-Выход. Для этого сначала получим дифференциальное уравнение, описывающее систему, проведя замену  $s = \frac{d}{dt}$ .

$$\frac{d^3}{dt^3}y + 4\frac{d^2}{dt^2}y + 8\frac{d}{dt}y + 20y = \frac{d}{dt}u + 10u \quad (14)$$

$$\ddot{y} + 4\ddot{y} + 8\dot{y} + 20y = \dot{u} + 10u. \quad (15)$$

Записав выражение (15) в форме Коши получим

$$\dot{x}_3 = -4x_3 - 8x_2 - 20x_1 + u_2 + 10u_1, \quad (16)$$

где  $x_1 = y, x_2 = \dot{y}, x_3 = \ddot{y}, u_1 = u, u_2 = \dot{u}$ . Из уравнения (16) составим модель Вход-Состояние-Выход в матричном виде в канонически управляемой форме:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -20 & -8 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot u \\ y = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{cases}. \quad (17)$$

Составим матрицу управляемости для полученной модели ВСВ.

$$U_y = [B \quad AB \quad A^2B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -4 & 8 \end{bmatrix}, \quad rank(U_y) = 3. \quad (18)$$

Так как ранг матрицы управляемости равен порядку системы, то система полностью управляема. Теперь составим матрицу наблюдаемости системы.

$$U_n = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 1 \\ -20 & -8 & 6 \end{bmatrix}, \quad rank(U_n) = 3. \quad (19)$$

Ранг полученной матрицы наблюдаемости равен порядку системы, следовательно, система является полностью наблюдаемой.

## Вывод

При анализе разомкнутой системы на устойчивость следует придерживаться корневого критерия устойчивости, а не частотного, так как критерий Найквиста позволяет судить лишь об устойчивости замкнутой системы.

При выборе коэффициента отрицательной обратной связи можно руководствоваться графиком, полученным в результате работы функции `rlocus` в среде Matlab. По нему легко определить расположение полюсов передаточной функции замкнутой системы при различных значениях коэффициента  $k$ , соответственно, оценить устойчивость системы по корневому критерию.

В результате работы была получена устойчивая полностью наблюдаемая и полностью управляемая система с жесткой отрицательной обратной связью.