问题求解（三）(2024 秋) 期末

Lecturer: 程龚;

一、

在 15×15 的盘面上玩五子棋，黑方先手。建图如下：点集为所有可能状态，所有差一步的状态之间连边。

(1) 这个图的最大度是?

(2) 这个图是否是正则图？是否是二分图？是否是欧拉图?

二、

n 个 C_3 交于同一点形成的图记作 F_n，求 F_n 的:

(1) 点数、边数。

(2) 半径、直径。

(3) 围长、周长。

(4) 点连通度、边连通度。

(5) 边独立数、边覆盖数、边支配数。

(6) 点独立数、点覆盖数、点支配数。

(7) 边色数、点色数。

(8) 画出 F_3 的平面图、对偶图。

(9) 证明或证伪：$\forall v \in V(F_n)$，$F_n - v$ 存在完美匹配。

三、

计算完全图 K_n 的:

(1) 边独立数。

(2) 边覆盖数。

(3) 边支配数。

四、

计算二分图 $G = (X \cup Y, E)$ 的最大点独立集的过程如下:

```
M = G 的最大匹配
U = {x | x \in X, x 未被 M 饱和}
Z = {x | x \in X \cup Y, \exists u \in U, 存在 u-x M 交替路}
return (X \cap Z) \cup (Y \ Z)
```

(1) 分析该算法的复杂度。

(2) 证明这个算法的正确性。

五、

Steiner 树问题：给定权非负的图 $G=(V,E,w)$ 和 $S\subseteq V$，求 G 中包含 S 所有点的权和最小的连通子图。

记 $|S|=k$，记 $dist(W,v)=\min_{w\in W} dist(w,v)$，对应的最短路是 $SP(W,v)$，一个近似算法如下：

```
任取 G 中一点 v_1，初始化 V_1 \gets {v_1}, E_1 \gets \varnothing
for i = 2, 3, \cdots, k:
    v_i = 在 S \ V_{i-1} 中，使得 dist(V_{i-1}, v_i) 最小的结点
    V_i = V_{i - 1} \cup {SP(V_{i-1}, v_i) 中的结点}
    E_i = E_{i - 1} \cup {SP(V_{i-1}, v_i) 中的边}
return (V_k, E_k)
```

(1) 举一个 $k>3$ 且上述算法能够得到正确结果的例子，描述此时算法的运行过程（至少写出每一轮的 v_i 和 $SP(V_{i-1},v_i)$）。

(2) 举一个 $k>3$ 且上述算法不能得到正确结果的例子，描述此时算法的运行过程（至少写出每一轮的 v_i 和 $SP(V_{i-1},v_i)$）。

(3) 分析算法的时间复杂度。

(4) 证明：在最劣情况下，该算法的近似比不优于 $\frac{2(k-1)}{k}$。

六、

(1) 证明：图 G 的所有自同构在复合关系下构成群。称其为 G 的自同构群。

(2) 证明或证伪：存在图 G，使得其自同构群不是循环群，但存在非平凡的循环子群。

(3) 写出 K_n 的自同构群阶数。

(4) 证明或证伪：存在图 G，使得其自同构群阶为 2。

(5) 证明或证伪：存在图 G，使得其自同构群阶为 4。

(6) 证明或证伪：存在图 G，使得其自同构群阶为 8。

七、

证明或证伪：存在阶 <6 的非交换群。