概率论和数理统计（拔尖、医院）(2025 春) 期末

Lecturer: 尹一通、刘景铖;

多选、填空：

(1) 以下哪一个是依概率收敛的定义？

A. $\Pr[\forall \epsilon > 0, |X_n - X| < \epsilon] \to 0$。

B. $\forall \epsilon > 0, \Pr[|X_n - X| < \epsilon] \to 0$。

(2) i, j u.a.r. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$，$k = i + j$，问：$\mathbb{E}[i|k]$ 的值是?

A. $k/2$

B. 3.5

C. i

D. j

(3) F, G 是 σ-域，以下哪些选项一定是 σ-域？

A. $F \cup G$

B. $F \cap G$

C. $F \cap G^c$

D. $F^c \cup G^c$

(4) S, T 是 w.r.t 随机过程 $\{Z_n : n \geq 0\}$ 的停时，以下哪些选项也是 w.r.t $\{Z_n : n \geq 0\}$ 的停时？

A. $S + T$

B. $|S - T|$

C. $\ln(S + 1)$

D. S^2

(5) 进行 100 次参数为 p 的 Bernoulli 实验，有 55 次实验结果是 1，p 的极大似然估计：（　）。

(6) 一个盒子中有标有 $1 \sim 6$ 的小球各一个，不断摸球，摸到 1 号球停止。若摸球后放回，则期望摸球的次数是：（　），若摸球后不放回，则期望摸球的次数是：（　）。

(7) 桌上有 $\{\mathrm{HH}, \mathrm{HT}, \mathrm{TT}\}$ 三枚硬币，u.a.r 的选择一枚硬币抛掷，已知结果是 H，则抛的这枚硬币是 HT 的概率是：（　）。

概率空间（一）：

现有两枚硬币，抛第一枚硬币得到正面的概率是 p，抛第二枚硬币得到正面的概率是 q。现在 u.a.r 的选择一枚硬币抛掷，再抛另一枚硬币，求：

(1) 第一次抛掷得到正面的概率。

(2) 第二次抛掷得到正面的概率。

(3) “第一次抛掷得到正面” 和 “第二次抛掷得到正面“ 这两个事件是否独立?

概率空间（二）：

事件 A, B 满足 $\Pr(A) > 0, \Pr(B) > 0$，证明或证伪如下命题:

(1) 若 $\Pr(A|B) > \Pr(A)$，则 $\Pr(B|A) > \Pr(B)$。

(2) 若 $\Pr(A) = \Pr(B)$，则对任意事件 C 都有 $\Pr(A|C) = \Pr(B|C)$。

(3) 若 $\Pr(A|B) = \Pr(B|A)$，则 $\Pr(A) = \Pr(B)$。

离散随机变量（一）：

n 个身高互不相同的人均匀随机的排成一列，记不会被前面的人挡住的人的数量为 X，求 X 的期望。

离散随机变量（二）：

有 N 个人进入商场，每个人都独立地、以 p 的概率不买任何东西走出商场。记买了东西的人的数量为 X、没买东西的人的数量为 Y（故 $X + Y = N$）。

(1) 若 $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$，求 $\Pr(Y = k), \Pr(X = k)$，并说明 X, Y 亦服从 Poisson 分布。

(2) 若 $N \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$，证明：$X, Y$ 独立。

(3) **选做题：** 若 X, Y 独立，证明 N 服从 Poisson 分布。[Hint: 记 $q_k = \Pr(N = k)$，用独立性导出 q_k 应该满足的条件。]

连续随机变量（一）：

考虑 Buffon 问题的变种：在某无限大的 1×1 网格上均匀随机的丢下长度为 1 的针：

(1) 已知丢下的针和水平网格线的夹角是 θ，求针不和网格线相交的概率。

(2) 求丢下的针与网格线相交的概率。

连续随机变量（二）：

甲乙二人扔飞镖，甲扔出的飞镖落点在以靶心为圆心，半径为 r 的圆内均匀分布，乙扔出的飞镖落点在以靶心为圆心，半径为 $2r$ 的圆内均匀分布。

(1) 求甲扔出的飞镖比乙扔出的飞镖离靶心近的概率。

(2) 记甲扔出的飞镖离靶心的距离是 U，乙扔出的飞镖离靶心的距离是 V，求 $\min(U, V)$ 的 CDF。

(3) 求 $\max(U, V)$ 的 CDF。

(4) 求 $\mathbb{E}[|U - V|]$。

测度集中:

初始时，某箱子里有一黑、一白两个球。在往后的每一轮中，我们从该箱子中摸出一个球，并从箱外拿一个这个球的同色球，与这个球一起放回箱子中。记 W_k 为第 k 轮后，箱子里的白球数。则 $W_0 = 1$。

(1) 计算 $\mathbb{E}[W_k | W_{k-1}]$，并据此计算 $\mathbb{E}[W_k]$。

(2) 求 W_k 的概率分布。

(3) 记 $R_k = \frac{W_k}{k+2}$，证明：$\{R_n : n \geq 0\}$ 是 w.r.t. 其自身 filtration 的一个鞅。

(4) 回忆 Azuma 不等式，并证明存在常数 c 使得对任意正整数 $k_1 > k_2 > 1$，有：

$$\Pr\left(|R_{k_1} - R_{k_2}| > c \cdot \sqrt{\frac{\ln(2/\epsilon)}{k_2}}\right) < \epsilon$$

这说明 $\{R_k\}$ 有怎样的收敛性质？