算法设计与分析期末试卷
个人解答[1]

2025 年春学期
授课教师：徐经纬

解答：231220103 刘赞宸
解答仅为个人观点，请批判性阅读
有疑问或者改进建议可发邮件至 231220103@smail.nju.edu.cn
2025-06-22

1. 简述题

略

2. 流行集合分治

一个观察：至多有 12 个集合元素数大于$\frac{n}{13}$[2].

若将其分成两部分，左右最多提供 24 个候选集，故而可以直接对于每个候选集直接计算其数量；对于 13 人及以下，检查每一对人，如果一样则加入结果.

问题每次递归变为一半，而合并步骤需要$24n = O(n)$的复杂度，即

$$T(n) = 2T\left(\frac{1}{2}\right) + O(n) \Rightarrow T(n) = O(n \log n)$$

■

3. CLIQUE & IND-SET

一方面判定团和独立集只需要枚举节点，是平方复杂度，故而是 NP；

另一方面G上的每个团与其反图G'上的每个独立集等价. ■

4. 线性的图上算法

1. 先进行拓扑排序，然后按照拓扑排序顺序对出边进行松弛. 拓扑排序是线性的，拓扑排序遍历最多进行次数为点数，松弛边最多进行次数为边数. 故而总体是线性的. ■
2. (1) 直接进行 SCC，返回的点是一个即联通.
   (2) Tarjan 算法是基于图遍历的，我不太清楚这是否符合题目要求.

5. 最短路最大冗余边

魔改标准的 Dijkstra 算法：
1. 将边权作为优先级队列的第二个关键码，在路长相同的情况下按增加边的权值更小排序；
2. 松弛时每次发现终点已经加入集合中则将这条边标记为删除.

复杂度：
1. 魔改之后的比较函数还是$O(1)$的操作，不发生变化；
2. 魔改之后的每次松弛最多多了$O(1)$的标记删除操作，不发生变化.

正确性：
1. 不在最短路上的边肯定可以删除，在这里也被删除了；
2. 到同一点若有多条最短路，则需要保留抵达这个点的边中边权最小的，这样可以保证删去的最大，同时也不影响，在这里通过对优先级队列比较函数的重载实现了.

■

6. 三角化代价 DP

记录 `dp[i][j]`是子问题$P_i \ldots P_j$的解，则转移方程和边界条件：

$$\mathrm{dp}[i][j] = \begin{cases} \text{INVALID} & j - i < 2 \\ w_{i,j} & j - i = 2 \\ \min\limits_{i+1 \le k \le j-1} \mathrm{dp}[i][k] + \mathrm{dp}[k][j] & j - i > 2 \end{cases}$$

递推的方式是按照$j - i$的大小从2上升到$n - 1$，而答案是 `dp[1][n]`

空间复杂度$O(n^2)$；而时间复杂度，令$r = j - i$，则是

$$\begin{aligned} n^2 + \sum_{2 < r \le n-1} (n - r)(r - 1) &= n^2 + \frac{12 - 4n - 3n^2 + n^3}{6} \\ &= \frac{12 - 4n + 3n^2 + n^3}{6} \\ &\sim O(n^3) \end{aligned}$$

[1] 个人复卷附后
[2] 如果有 13 个，那总数便大于$13 \times \frac{n}{13} = n$矛盾

算法设计与分析期末试卷[3]

2025 年春学期
授课教师：徐经纬

复卷：231220103 刘赞宸
复卷时间相较考试时间间隔较长，内容仅供参考
有疑问或者改进建议可发邮件至 231220103@smail.nju.edu.cn
2025-06-22

1. 简述题(20′)

1. 简要说明优先队列建堆代价是$O(n)$.
2. 说明中位数选择算法至少需要$n-1$次比较.
3. 说明若一个 NPC 问题有多项式时间解，则 P=NP.
4. 无向图 BFS 有没有 DE？无向图 DFS 有没有 CE?
5. 对于$m=O(n)$的稀疏图，Prim 算法的优先队列应当采用堆实现还是数组实现?

2. 流行集合分治(10′)

给定n个人，每人属于且仅属于一个社团，且给定函数 `SAME(x, y)`在$O(1)$内断言x,y两人是否属于同一社团.

现称人数大于$\frac{n}{13}$的社团为流行社团，请设计**分治**算法在$O(n\log n)$时间内给出全体流行社团.

3. CLIQUE & IND-SET(15′)

给定下列优化问题[4]:

- CLIQUE：无向图最大团
- IND-SET：无向图最大独立集

1. 写出优化问题对应的判定问题.
2. 已知其中一个是 NPC 问题，证明另一个也是.

4. 线性的图上算法(15′)

在$O(m+n)$内解决下列问题:

1. 给定 DAG，输出单源最长路.
2. 判断有向图是否任意两点都相互可达:
   (1) 可用封装好的 SCC 算法.
   (2) 不可用 SCC 算法，利用几次图遍历.

5. 最短路最大冗余边(20′)

给定非负带权图G上的源点s，若删除某一边集后，s到任意一点的最短距离[5]不变，则此些边是冗余的.

1. 设计算法，计算冗余边集的最大权，可以直接利用优先级队列.
2. 分析算法的时空复杂度，并分析优先级队列采用的具体实现.

6. 三角化代价 DP(20′)

给定多边形$P_1P_2...P_n$，其三角化即利用若干呈形P_iP_j的连线将其分割，使得分割后所有图形均为三角形.[6]

现为各边P_iP_j赋予一权，求三角化所需连边的最小权和，并分析时空复杂度.

Hint: 可以将问题分割到$P_1...P_i, P_i...P_n$[7]

---

[3]目前已知本学期徐经纬老师和张胜老师班考试内容不同

[4]原卷解释了团和独立集这两个概念

[5]路上的权和取最小

[6]如六边形$P_1P_2P_3P_4P_5P_6$一个合法的三角化是连线$\{P_1P_3, P_1P_4, P_1P_5\}$，分割后六边形变为三角形$P_1P_2P_3, P_1P_3P_4, P_1P_4P_5, P_1P_5P_6$

[7]係原卷提示