南京大学
2025 春数理逻辑期末试卷（回忆版）

课程号：22010200　　考试方式：开卷　　授课教师：秦逸

一些注意事项：

- 考核内容为 1，3，4，6，7，10，11 章节（即不含：永真推理系统，模态逻辑，不完备性定理）
- 该回忆版题号顺序可能和原卷不一样，但是笔者已经尽量尝试保持原卷的题目顺序。
- 由于是期末考试后隔了一阵子才整理题目，所以有些题目中的具体公式内容可能不太准确（如第 2(2) 题, 第 3 题, 第 4 题）。但是知道题型就明白复习的方向了。
- 期末占总评比例为 60%.

一、

1. 在一阶语言中将下列推理符号化：

   所有的逻辑学家是大胡子，苏格拉底是逻辑学家，所以苏格拉底是大胡子。

2. 上述推理是否有效？如果是，请在 G 系统中给出证明；如果否，请找出反例模型。

二、

1. 使用 G 系统证明 $\forall x.P(x) \land \exists y.Q(y) \vdash P(f(v)) \land \exists z.Q(z)$
2. 在不使用 G 系统、LK 系统，PK 系统，Hilbert 系统的条件下，证明以下公式是永真式：

   （这个公式包含了存在和任意符号，但是具体的公式内容已记不太清。题意是要求学生们利用语义证明该公式。不是单纯地列举真值表就能完成的）

三、

问以下一阶公式是否永真。如果是，则给出一个 G 系统的推理；如果不是，给一个不满足的模型 (M, σ).

$$((\forall x.(P(x) \land Q(x))) \to (\exists y.(R(y) \land Q(y)))) \to (P(y) \land Q(y))$$

四、

设公式集 Φ 为极大协调集，求证：若$\neg\forall x.A(x) \in \Phi$, 则$\exists x.\neg A(x) \in \Phi$.

五、

令 $S \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$，求证：如果 S 为联结词的函数完全组，那么必有 $\neg \in S$。

六、

令 Γ 为有穷的一阶逻辑公式集合，A 为一阶逻辑公式，请利用 G 系统给出如下结论的证明：若 $\Gamma \vdash$ 可证，那么 $\Gamma \vdash A$ 可证.

七、

若 Δ 是协调集，证明：存在 $\Gamma \supseteq \Delta$，且 Γ 是极大协调集。

* 可以考虑的方向：第 6 章完全性定理中 Henkin 集的构造方法。

八、 证明 Upper Löwenheim-Skolem Theorem

一阶语言的基数和一阶语言结构的基数

可以参考的解答网站：Upward Löwenheim-Skolem Theorem