

南京大学

2025 春数理逻辑期末试卷（回忆版）

课程号：22010200

考试时间：120 分钟

授课教师：秦逸

一些注意事项：

- 考核内容为 1, 3, 4, 6, 7, 10, 11 章节（即不含：永真推理系统，模态逻辑，不完备性定理）
- 该回忆版题号顺序可能和原卷不一样，但是笔者已经尽量尝试保持原卷的题目顺序。
- 由于是期末考试后隔了一阵子才整理题目，所以有些题目中的具体公式内容可能不太准确（如第 2(2) 题, 第 3 题, 第 4 题）。但是知道题型就明白复习的方向了。
- 期末占总评比例为 60%.

一、

- 在一阶语言中将下列推理符号化：
所有的逻辑学家是大胡子，苏格拉底是逻辑学家，所以苏格拉底是大胡子。
- 上述推理是否有效？如果是，请在 G 系统中给出证明；如果否，请找出反例模型。

二、

- (1) 使用 G 系统证明 $\forall x.P(x) \wedge \exists y.Q(y) \vdash P(f(v)) \wedge \exists z.Q(z)$
- (2) 在不使用 G 系统、LK 系统，PK 系统，Hilbert 系统的条件下，证明以下公式是永真式：
(这个公式包含了存在和任意符号，但是具体的公式内容我忘了，应该是利用语义证明。不是单纯地列举真值表就能完成的)

三、

问以下一阶公式是否永真。如果是，则给出一个 G 系统的推理；如果不是，给一个不满足的模型 (M, σ) .

$$((\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \rightarrow (\exists y(R(y) \wedge Q(y)))) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y))$$

四、

设公式集 Φ 极大协调，求证：若 $\neg \forall x.A(x) \in \Phi$, 则 $\exists x.\neg A(x) \in \Phi$.

五、

令 $S \subseteq \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, 求证: 如果 S 为联结词的函数完全组, 那么必有 $\neg \in S$ 。

六、

令 Γ 为有穷的一阶逻辑公式集合, A 为一阶逻辑公式, 请利用 G 系统给出如下结论的证明: 若 $\Gamma \vdash$ 可证, 那么 $\Gamma \vdash A$ 可证;

七、

若 Δ 是协调集, 证明: 存在 $\Gamma \supseteq \Delta$, 且 Γ 是极大协调集。

八、 证明 Upper Löwenheim-Skolem Theorem

一阶语言的基数和一阶语言结构的基数