信息论基础 (2025 春) 期末

Lecturer: 姚鹏晖;

一、

(1) 给出熵、条件熵、相对熵、互信息的定义。

(2) 写出熵、相对熵、互信息的链式法则。

(3) 熵、条件熵、相对熵、互信息在什么时候取到 0？不需要给出证明。

(4) 现有随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n, Y$，其中 $X_1, \cdots, X_n$ 相互独立，证明：

$$I(X_1, \cdots, X_n; Y) \geq \sum_{i=1}^{n} I(X_i; Y)$$

指明并证明等号成立的条件。

二、

(1) 写出微分熵、微分互信息、微分相对熵的表达式。

(2) 证明或否定：微分熵恒正。

(3) 随机变量 X, Y 服从均值为 μ、协方差矩阵是 $\begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 3 \end{pmatrix}$ 的二元正态分布，计算 $H(X, Y)$，$I(X; Y)$，$D(X||Y)$。

三、

(1) 给出高斯信道、高斯信道的功率限制、有功率限制下的高斯信道的信道容量的定义。

(2) 写出功率限制为 P，$Z_i \sim \mathcal{N}(0, N)$ 时，高斯信道的信道容量。什么输入能够达到这个信道容量?

(3) 若没有功率限制，则高斯信道的信道容量可以是无穷大。给出一种编码方式，并证明。

四、

(1) 信源编码 $C : \mathcal{X} \mapsto \mathcal{D}^*$ 在何时是非奇异码？惟一可译码？即时码?

(2) 给出一个是非奇异码，但不是惟一可译码的信源编码。

(3) 给出一个是惟一可译码，但不是即时码的信源编码。

(4) 写出存在字母表大小是 D，码长分别是 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 的即时码、惟一可译码的充要条件。不需要证明。

(5) $\mathcal{X} = [5]$，$1 \sim 5$ 出现的概率分别是 $0.15, 0.2, 0.25, 0.25, 0.15$。写出两个不同的 Huffman 码和一种 Shannon 码，并计算平均码长。

五、

现有两列 Bernoulli 过程 $\{X_{1,i}\}$、$\{X_{2,i}\}$，定义随机变量：

$$\theta = \begin{cases} 1, & \text{w.p. } \frac{1}{3} \\ 2, & \text{w.p. } \frac{2}{3} \end{cases}$$

并由此定义随机过程 $\{Y_i\}$ 满足：$\forall i, Y_i = X_{\theta,i}$。回答：

(1) $\{Y_i\}$ 是静止的吗?

(2) $\{Y_i\}$ 独立同分布吗?

(3) 计算该过程的熵率 H。

(4) 如下断言是否成立?

$$-\frac{1}{n}\log p(Y_1, \cdots, Y_n) \to H$$

修改 Y_i 的定义如下：令 θ_i 等概率的取到 $\{1,2\}$ 中的一者，θ_i 之间相互独立，令：

$$Y_i = X_{\theta_i,i}$$

重新回答 (1)、(2)、(3) 问。