

Вар. 54 (8123034)

1. Функция $f : (\alpha; +\infty) \rightarrow (\beta; +\infty)$ задана формулой $f(x) = 2x^2 + 2x + 5$. Найдите наименьшие α и β , при которых функция f биективна?
2. Является ли функция $f : \{1, \dots, 7\} \rightarrow \{1, \dots, 8\}$ заданная таблицей $f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 1 & 7 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ инъективной? сюръективной? биективной?
3. а) Является ли группой $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$?
б) Является ли группой множество всех матриц размера $n \times n$ над \mathbb{R} с определителем 1 с операцией сложения?
с) Является ли группой множество непостоянных линейных функций (многочленов степени 1) с операцией умножения?
4. Записать перестановку $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 2 & 1 & 8 & 3 & 9 & 6 & 10 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ в виде произведения независимых циклов и найти ее порядок.
5. Найти произведение перестановок $(2\ 8\ 3\ 6\ 5)(4\ 7) \cdot (1\ 3\ 2)(4\ 7\ 8\ 6)$ (ответ в циклической форме).
6. Гомоморфизм $\varphi : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ задан формулой $\varphi(z) = \frac{z}{|z|}$. Найдите его ядро и образ.
7. Пусть U – подгруппа в $GL_3(\mathbb{R})$, состоящая из верхнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали, а H – подгруппа в U , состоящая из тех матриц, которые отличаются от единичной только на месте $(1, 3)$. Докажите, что $U/H \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$.
8. а) Лемма Бернсайда.
б) Приведите пример действия группы на множестве, у которого ровно 1 орбита.