Аналитическая геометрия.

Общие сведения.

Коллинеарные векторы – лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.

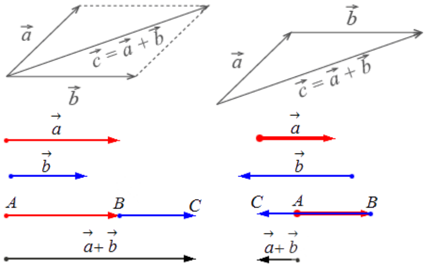
Компланарные вектора – три вектора называются компланарными, если они, будучи приведёнными к общему началу, лежат в одной плоскости.

Ортогональные = перпендикулярные / угол между ними 90° / векторное произведение равно 0.

Базисом векторного пространства называется любая упорядоченная тройка некомпланарных векторов (т.е. не лежащих в одной плоскости) пространства.

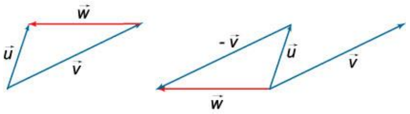
Операции над векторами:

1. Сложение:

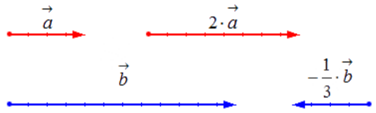


2. Вычитание:

w=u-v если w+v=u



3. Умножение вектора на число:



Длина вектора по координатам:

Для $\vec{a}(x, y, z)$: $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Координаты вектора по двум точкам:

$A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$: $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1,\ y_2 - \ y_1,\ z_2 - \ z_1\}$

28) Скалярное произведение векторов.

Определение:

Скалярное произведение - операция над двумя векторами, результатом которой является число (скаляр), не зависящее от системы координат и характеризующее длины векторов-сомножителей и угол между ними. $\bar{a} \cdot \bar{b} = (\bar{a}, \bar{b}) = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot cos\angle(\bar{a}, \bar{b})$

Данной операции соответствует умножение длины вектора x на проекцию вектора y на вектор x.

Свойства:

Эта операция обычно рассматривается как коммутативная и линейная по каждому сомножителю.

1. Скалярное произведение вектора $\bar{a}$ самого на себя называется скалярным квадратом: $(\bar{a}, \bar{a}) = \bar{a}^2$. Скалярный квадрат $\bar{a}^2$ вектора $\bar{a}$ равен квадрату его модуля: $\bar{a}^2 = |\bar{a}\,|^2$.
2. $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{a})$ - коммунитативность (симметричность).
3. $(\lambda\bar{a}, \bar{b}) = \lambda(\bar{a}, \bar{b})$ – линейность.
4. $(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{a}, \bar{c}) + (\bar{b}, \bar{c})$ – линейность.
5. $(\bar{a}, \bar{a}) \ \geq 0$ – неотрицательность, если же $(\bar{a}, \bar{a}) = 0$, то $\bar{a} = 0$.
6. $cos\varphi = \frac{(\bar{a}, \bar{b})}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
7. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ортогональны (перпендикулярны) тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю.

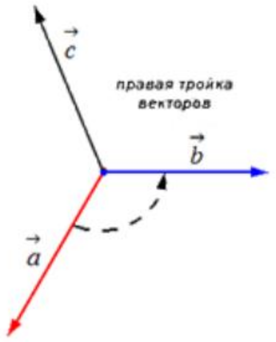
8. Длина проекции вектора $\bar{a}$ на ось, образованную вектором $\bar{b}$, равна скалярному произведению этих векторов, делённому на модуль вектора $\bar{b}$: $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$ (в числителе скалярное пр. в знаменателе – длина) $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$, где $\vec{a}(a_1; a_2)$ и $\vec{b}(b_1; b_2)$. Также $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a} = |\bar{a}| \cdot cos\angle(\bar{a}, \bar{b})$.

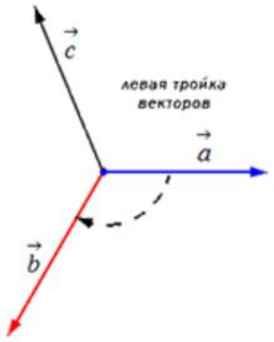
9. Если векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ заданы своими координатами, то их скалярное произведение равно сумме произведений соответствующих координат: $\left(\bar{a}, \bar{b}\right) = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

29) Векторное произведение векторов, его свойства.

Определение:

Векторное произведение двух векторов - вектор, перпендикулярный обоим исходным векторам, длина которого равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами, а выбор из двух направлений определяется так, чтобы тройка из по порядку стоящих в произведении векторов и получившегося вектора была правой.





Перестановка двух соседних векторов в тройке меняет её ориентацию на противоположную, а циклическая перестановка не меняет (переход от тройки $(\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ к тройке $(\bar{v}, \bar{w}, \bar{u})$ или к тройке $(\bar{w}, \bar{u}, \bar{v})$.

Свойства:

1. $[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$ - антикоммутативность.
2. $[\alpha \cdot \vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha \cdot \vec{b}] = \alpha \cdot [\vec{a}, \vec{b}]$ - ассоциативность умножения на скаляр.
3. $[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}] = [\vec{a}, \vec{c}] + [\vec{b}, \vec{c}]$ - дистрибутивность по сложению.
4. $[[\vec{a}, \vec{b}], \vec{c}] + [[\vec{b}, \vec{c}], \vec{a}] + [[\vec{c}, \vec{a}], \vec{b}] = 0$ - тождество Якоби.
5. $[\vec{a}, \vec{a}] = \vec{0}$
6. $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = \vec{b} \cdot \langle\vec{a}, \vec{c}\rangle - \vec{c} \cdot \langle\vec{a}, \vec{b}\rangle$ - тождество Лагранжа.

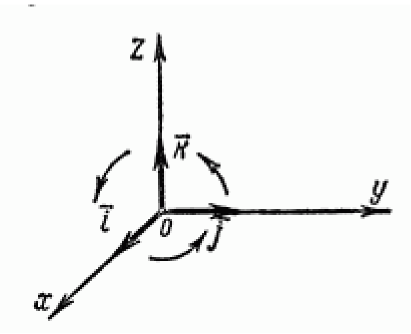
Особенности:

1. Необходимым и достаточным условием коллинеарности двух ненулевых векторов является равенство нулю их векторного произведения.
2. Модуль векторного произведения $[\bar{a}, \bar{b}]$ равняется площади S параллелограмма, построенного на приведённых к общему началу векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
3. Векторное произведение перпендикулярно исходным векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$: $\angle(\bar{a}\bar{c}) = \angle\left(\bar{b}\bar{c}\right) = \frac{\pi}{2}$.
4. Длина векторного произведения: $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot sin\angle(\bar{a}\bar{b})$.
5. Тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ имеет такую же ориентацию, что и заданная система координат.

Векторное произведение в координатах:

$$\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Доказательство:



Пусть даны два вектора $a = a_x i + a_y j + a_z k, b = b_x i + b_y j + b_z k$. Найдём $a \times b$ через проекции a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z.

Предварительно найдём все парные векторные произведения единичных векторов i, j, k. Т.к. векторное произведение коллениарных векторов равно нуль-вектору, то $i \times i = j \times j = k \times k = 0$. Рассмотрим теперь, например. произведение $i \times j$. Модуль этого произведения: $|i \times j| = |i| \cdot |j| \cdot sin\frac{\pi}{2} = 1$. Расположен вектор $i \times j$ на прямой, перпендикулярной плоскости векторов i и j, т.е. на оси OZ. Направлен этот вектор в сторону положительного направления оси OZ, т.к. при этом тройка будет правая. Следовательно, этот вектор совпадает с вектором k: $i \times j = k$ и $j \times i = -k$.

С помощью аналогичных рассуждения:

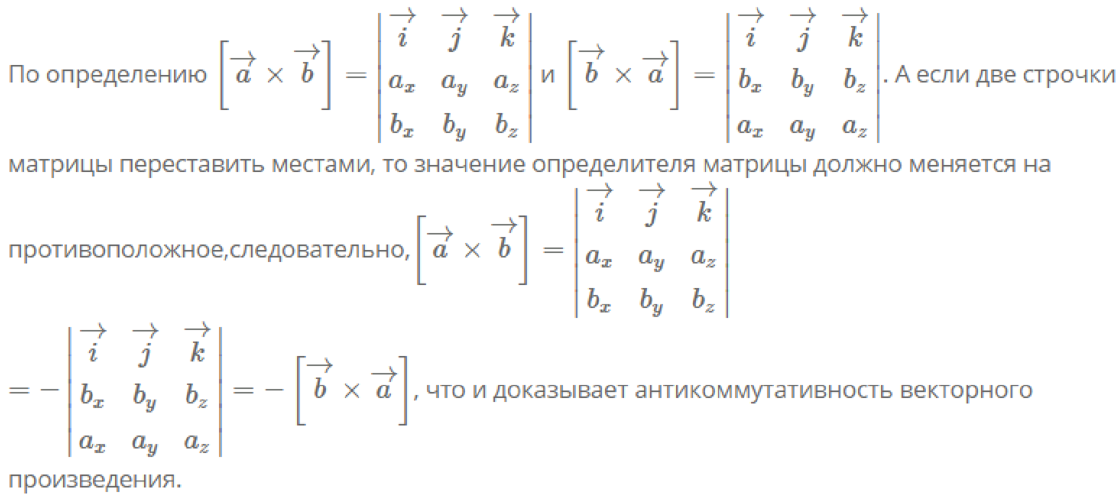
$j \times k = i, k \times j = -i$

$k \times i = j, i \times k = -j$.

Рассмотрим $a \times b = \big(a_x i + a_y j + a_z k, b\big) \times (b_x i + b_y j + b_z k) = a_x b_x i \times i + a_y b_x j \times i + a_z b_x k \times i + a_x b_y i \times j + a_y b_y j \times j + a_z b_y k \times j + a_x b_z i \times k + a_y b_z j \times k + a_z b_z k \times k = a_y b_x(-k) + a_z b_x j + a_x b_y k + a_z b_y(-i) + a_x b_z(-j) + a_y b_z i = \big(a_y b_z - a_z b_y\big) i - (a_x b_z - a_z b_x) j + \big(a_x b_y - a_y b_x\big) k$.

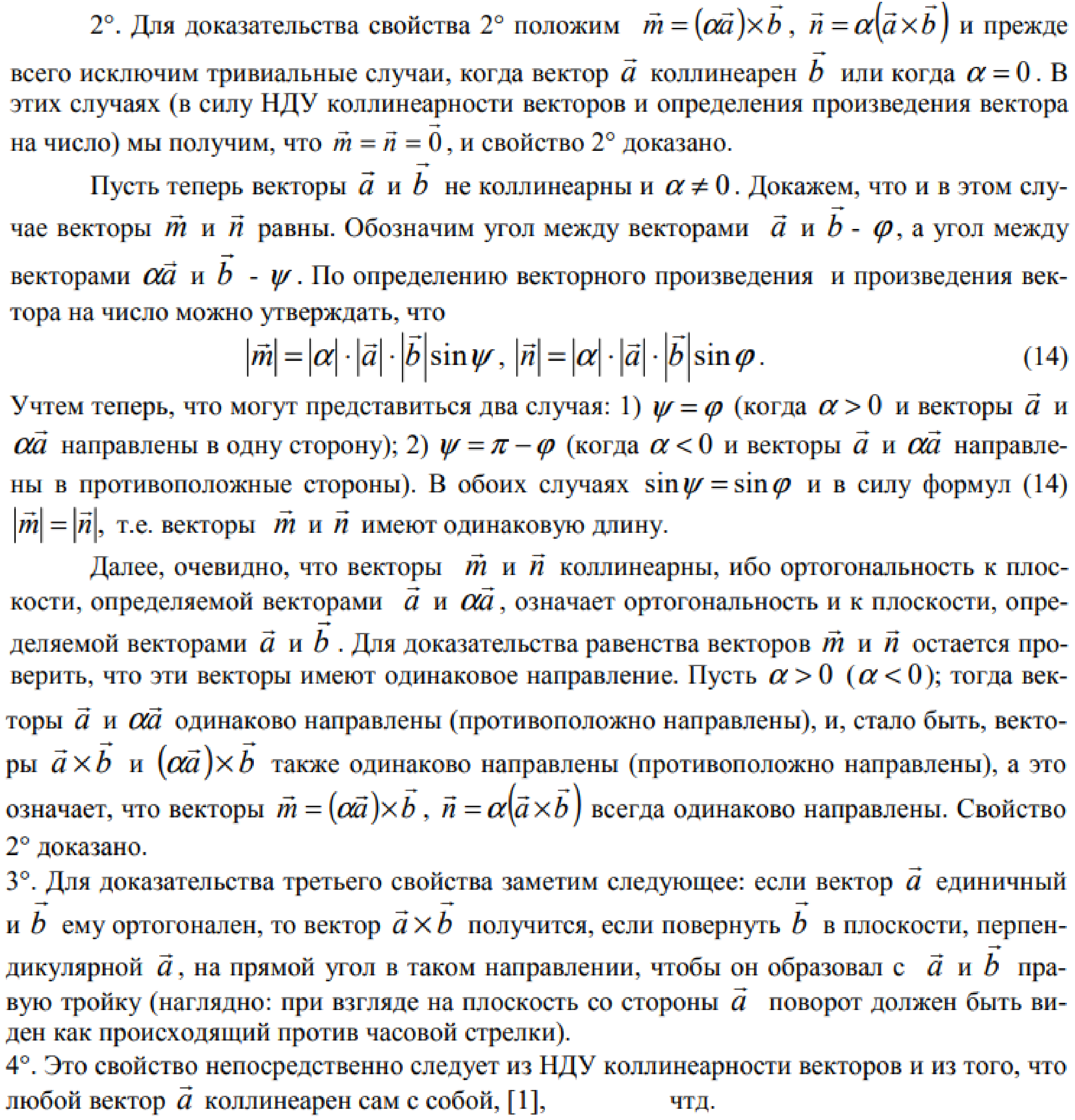
Разности в скобках – определители второго порядка, поэтому: $a \times b = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} k$. Полученное выражение есть разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки.

Доказательство антикоммутативности:



По определению $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ и $\left[\vec{b} \times \vec{a}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix}$. А если две строчки матрицы переставить местами, то значение определителя матрицы должно меняется на противоположное,следовательно, $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$ $= - \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b_x & b_y & b_z \\ a_x & a_y & a_z \end{vmatrix} = - \left[\vec{b} \times \vec{a}\right]$, что и доказывает антикоммутативность векторного произведения.

Доказательство 2-ого и 3-его (дистрибутивность), а также 4-ого свойств:



2°. Для доказательства свойства 2° положим $\vec{m} = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{n} = \alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ и прежде всего исключим тривиальные случаи, когда вектор $\vec{a}$ коллинеарен $\vec{b}$ или когда $\alpha = 0$. В этих случаях (в силу НДУ коллинеарности векторов и определения произведения вектора на число) мы получим, что $\vec{m} = \vec{n} = \vec{0}$, и свойство 2° доказано.

Пусть теперь векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны и $\alpha \neq 0$. Докажем, что и в этом случае векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ равны. Обозначим угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - φ, а угол между векторами $\alpha\vec{a}$ и $\vec{b}$ - ψ. По определению векторного произведения и произведения вектора на число можно утверждать, что

$$\left|\vec{m}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\psi, \ \left|\vec{n}\right| = \left|\alpha\right| \cdot \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi. \tag{14}$$

Учтем теперь, что могут представиться два случая: 1) $\psi = \varphi$ (когда $\alpha > 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ направлены в одну сторону); 2) $\psi = \pi - \varphi$ (когда $\alpha < 0$ и векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ направлены в противоположные стороны). В обоих случаях $\sin\psi = \sin\varphi$ и в силу формул (14) $\left|\vec{m}\right| = \left|\vec{n}\right|$, т.е. векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ имеют одинаковую длину.

Далее, очевидно, что векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$ коллинеарны, ибо ортогональность к плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$, означает ортогональность и к плоскости, определяемой векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Для доказательства равенства векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$ остается проверить, что эти векторы имеют одинаковое направление. Пусть $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$; тогда векторы $\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}$ одинаково направлены (противоположно направлены), и, стало быть, векторы $\vec{a} \times \vec{b}$ и $(\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$ также одинаково направлены (противоположно направлены), а это означает, что векторы $\vec{m} = (\alpha\vec{a}) \times \vec{b}$, $\vec{n} = \alpha\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)$ всегда одинаково направлены. Свойство 2° доказано.

3°. Для доказательства третьего свойства заметим следующее: если вектор $\vec{a}$ единичный и $\vec{b}$ ему ортогонален, то вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ получится, если повернуть $\vec{b}$ в плоскости, перпендикулярной $\vec{a}$, на прямой угол в таком направлении, чтобы он образовал с $\vec{a}$ и $\vec{b}$ правую тройку (наглядно: при взгляде на плоскость со стороны $\vec{a}$ поворот должен быть виден как происходящий против часовой стрелки).

4°. Это свойство непосредственно следует из НДУ коллинеарности векторов и из того, что любой вектор $\vec{a}$ коллинеарен сам с собой, [1], чтд.

НДУ - необходимое и достаточное условие коллинеарности векторов.

Для того, чтобы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ $(\bar{a} \neq 0)$ были коллениарны необходимо и достаточно, чтобы $\exists\lambda \in R$, такое, что $\bar{b} = \lambda\bar{a}$.

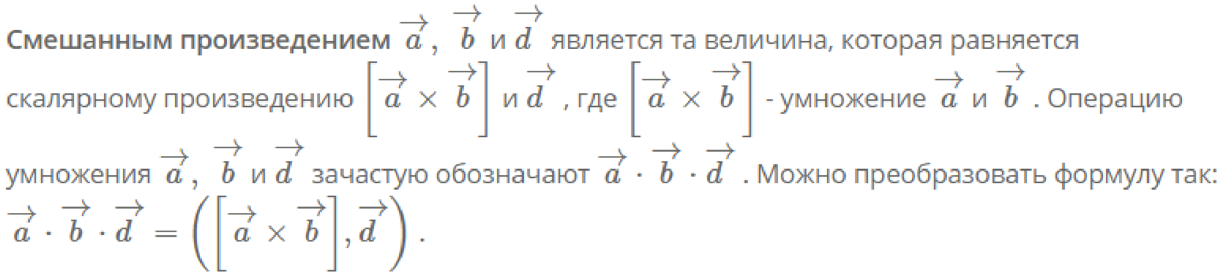
Двойным векторным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ называется векторное произведение вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$.

$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b} \cdot (\bar{a}\bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}\bar{b})$

Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{x}$ и $\bar{y}$:

$$S = \sqrt{(x_2y_3 - x_3y_2)^2 + (x_1y_3 - x_3y_1)^2 + (x_1y_2 - x_2y_1)^2};$$

30) Смешанное произведение векторов и его свойства.



Смешанным произведением $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ является та величина, которая равняется скалярному произведению $\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right]$ и $\overrightarrow{d}$, где $\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right]$ - умножение $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$. Операцию умножения $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ и $\overrightarrow{d}$ зачастую обозначают $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d}$. Можно преобразовать формулу так:

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{d} = \left(\left[\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}\right], \overrightarrow{d}\right).$$

Смешанное произведение в координатной форме:

Если вектора $\bar{a}(a_x, a_y, a_z), \bar{b}(b_x, b_y, b_z), \bar{c}(c_x, c_y, c_z)$ заданы своими координатами, то их смешанное произведение равно:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$$

Доказательство:

Векторное произведение в координатах имеет вид:

$$[\bar{a} \times \bar{b}] = (a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y) \cdot \bar{\imath} + (a_z b_x - a_x b_z)\bar{\jmath} + (a_x b_y - a_y b_x)\bar{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k},$$

а скалярное произведение векторов в прямоугольной системе координат равно сумме произведений соответствующих координат, поэтому,

$$([\bar{a} \times \bar{b}], \bar{d}) = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \bar{\imath} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \bar{\jmath} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \bar{k}, d_x \cdot \bar{\imath} + d_y \bar{\jmath} + d_z \bar{k}\right) = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} d_x - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} d_y + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} d_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ d_x & d_y & d_z \end{vmatrix}$$

Свойства смешанного произведения:

Если $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и $\vec{d}$ — произвольные векторы, а t — произвольное число, то:

1) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$;

2) $(t\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, t\vec{b}, \vec{c}) = (\vec{a}, \vec{b}, t\vec{c}) = t \cdot (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$;

3) $(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}) + (\vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ - смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по первому аргументу;

4) $(\vec{a}, \vec{b} + \vec{c}, \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}) + (\vec{a}, \vec{c}, \vec{d})$ - смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по второму аргументу;

5) $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} + \vec{d}) = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) + (\vec{a}, \vec{b}, \vec{d})$ - (смешанное произведение дистрибутивно относительно сложения векторов по третьему аргументу;

6) **!!!** Пусть $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3), (z_1, z_2, z_3)$ - координаты векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ соответственно в некотором (произвольном) базисе. Тогда они *компланарны* только тогда, когда:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0$$

7) $([\bar{a}, \bar{b}], \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{a}(\bar{b}, \bar{c}); (\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) = \bar{b}(\bar{a}, \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a}, \bar{b})$

8) $(\bar{a}, [\bar{b}, \bar{c}]) + (\bar{b}, [\bar{c}, \bar{a}]) + (\bar{c}, [\bar{a}, \bar{b}]) = 0$

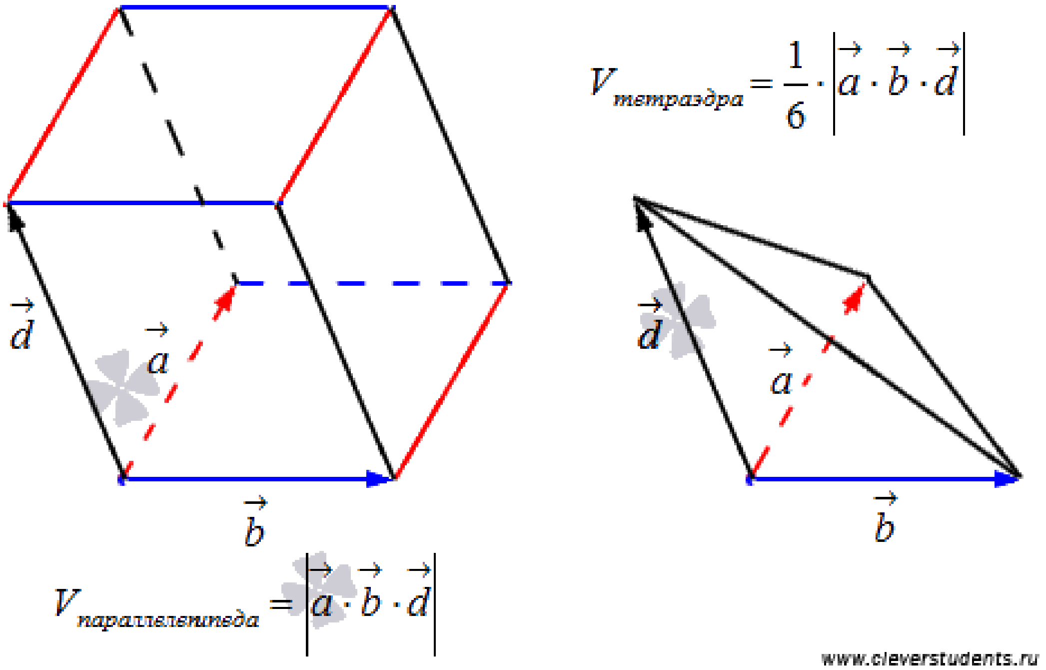
9) Смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ равно объему параллелепипеда $V_{\text{пар.}} = |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{d})|$:

Доказательство:

Отложим векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$ от одной точки и построим параллелепипед на этих векторах как на сторонах. Обозначим $\bar{c} = [\bar{a} \times \bar{b}]$. В этом случае смешанное произведение можно записать как $\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d} = |\bar{c}| \cdot |\bar{d}| \cdot \cos\left(\angle(\bar{c}, \bar{d})\right) = |\bar{c}| \cdot \text{Пр}_{\bar{c}}\bar{d}$, где $\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{d}$ - числовая проекция вектора $\bar{d}$ на направление вектора $\bar{c}$.

Абсолютная величина числовой проекции $\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{d}$ равна высоте параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$. Также $|\bar{c}| = |[\bar{a} \times \bar{b}]|$ представляет собой площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Таким образом, модуль смешанного произведения $|\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{d}| = |\bar{c}| \cdot |\text{Пр}_{\bar{c}}\bar{d}|$ - это произведение площади основания на высоту параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}, \bar{b}, \bar{d}$.

10) $V_{\text{пир}} = \frac{1}{6}|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|$



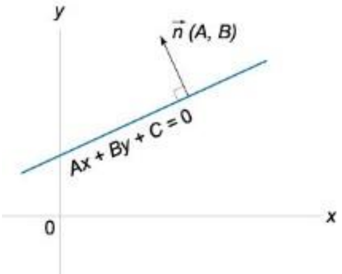
31) Различные форму уравнения прямой на плоскости.

Прямая на плоскости.

- Общее уравнение прямой в декартовой системе координат:

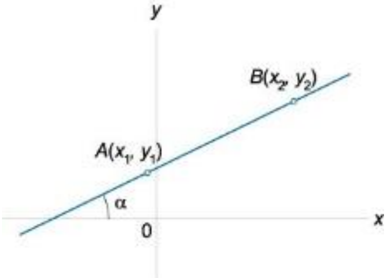
$Ax + By + C = 0$, где x, y - координаты точек прямой, A, B, C - действительные числа при условии $A^2 + B^2 \neq 0$;

- Нормальный вектор к прямой (нормаль):



- Уравнение прямой с угловым коэффициентом:

$y = kx, k = \tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$



- Уравнение прямой по точке и угловому коэффициенту:

$y = y_0 + k(x - x_0)$, где $P(x_0, y_0)$ принадлежит прямой.

- Уравнение прямой, проходящей через 2 точки:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, ⊥ заданному вектору:

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$, где $\vec{n}(A, B)$-перпендикулярный ненулевой вектор; $M(x_0, y_0)$.

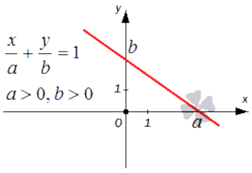
- Уравнение прямой, проходящей через заданную точку, ∥ заданному вектору:

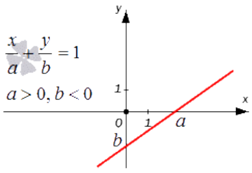
$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}$ – каноническое уравнение прямой на плоскости, где $\vec{a} \neq 0$ – парал. вектор $\vec{a}(m, n)$, $M(x_0, y_0)$.

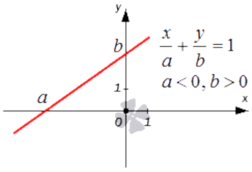
- Уравнение прямой в параметрической форме:

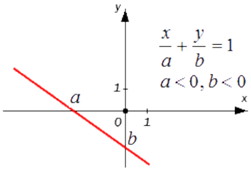
$\begin{cases} x = a_1 + tb_1 \\ y = a_2 + tb_2 \end{cases}$, где (a_1, a_2) являются координатами некоторой известной точки A, лежащей на прямой, (x,y) - координаты произвольной точки прямой, (b_1, b_2) - координаты вектора b, параллельного данной прямой, t – параметр.

- Уравнение прямой в отрезках:







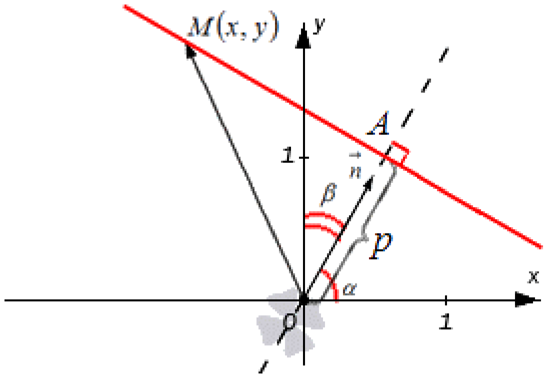


32) Нормальное уравнение прямой на плоскости. Расстояние от точки до прямой.

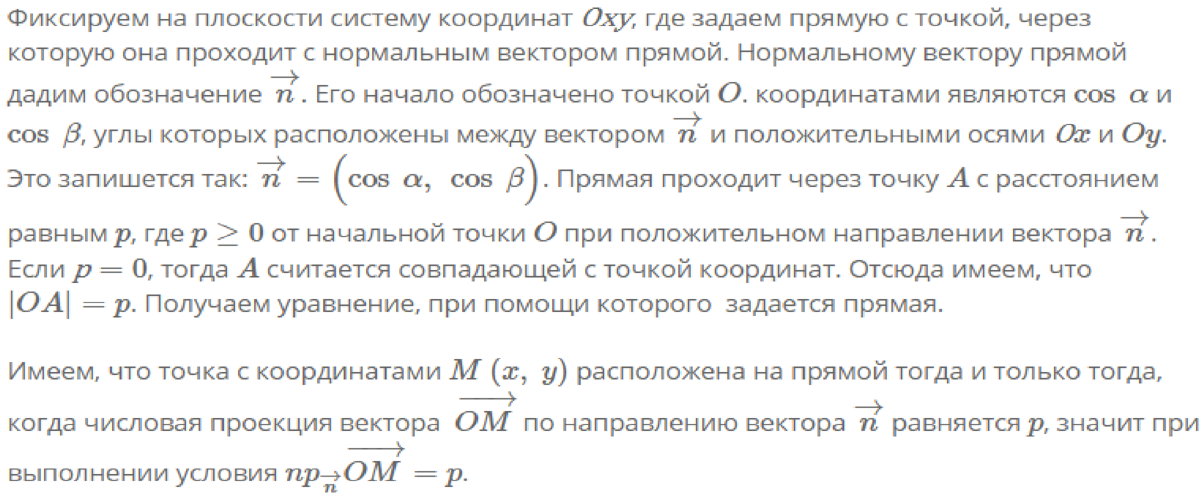
$xcos\beta + ysin\beta - p = 0$. Здесь $cos\beta$ и $sin\beta$ = $\cos(90^{\circ} - \beta)$ - направляющие косинусы вектора нормали. Параметр p - расстоянию прямой от начала координат.

$cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z - p = 0$

От общего уравнения можно перейти к нормальному уравнению, разделив члены уравнения на $\sqrt{A^2 + B^2}$, выбрав подходящий знак, который определяется при помощи противоположности знака слагаемого С.



Выведение:



Фиксируем на плоскости систему координат Oxy, где задаем прямую с точкой, через которую она проходит с нормальным вектором прямой. Нормальному вектору прямой дадим обозначение $\vec{n}$. Его начало обозначено точкой O. координатами являются $\cos\ \alpha$ и $\cos\ \beta$, углы которых расположены между вектором $\vec{n}$ и положительными осями Ox и Oy. Это запишется так: $\vec{n} = \left(\cos\ \alpha,\ \cos\ \beta\right)$. Прямая проходит через точку A с расстоянием равным p, где $p \geq 0$ от начальной точки O при положительном направлении вектора $\vec{n}$. Если $p = 0$, тогда A считается совпадающей с точкой координат. Отсюда имеем, что $|OA| = p$. Получаем уравнение, при помощи которого задается прямая.

Имеем, что точка с координатами $M\ (x,\ y)$ расположена на прямой тогда и только тогда, когда числовая проекция вектора $\overrightarrow{OM}$ по направлению вектора $\vec{n}$ равняется p, значит при выполнении условия $np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM} = p$.

33) Различные формы уравнения плоскости в пространсве.

Плоскость – это геометрическая фигура, состоящая из отдельных точек. Каждой точке в трехмерном пространстве соответствуют координаты, которые задаются тремя числами. Уравнение плоскости устанавливает зависимость между координатами всех точек.

- Общее уравнения плоскости:

  Всякая плоскость в прямоугольной системе координат O_{xyz} в трехмерном пространстве может быть задана уравнением вида $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B, C, D - некоторые действительные числа, которые одновременно не равны нулю. Если все неравны 0, то уравнение полное.

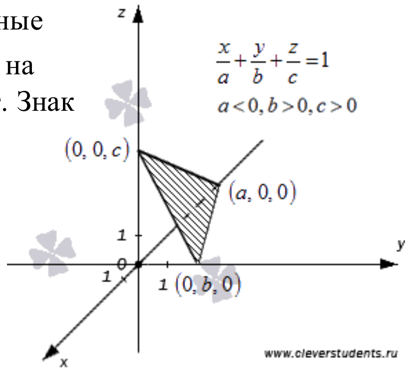
  Коэффициенты A, B, C - координаты нормального вектора плоскости $\bar{n}$.

  $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) + D = 0$, (x_0, y_0, z_0) – через эту точку проходит плоскость.

- Уравнением плоскости в отрезках:

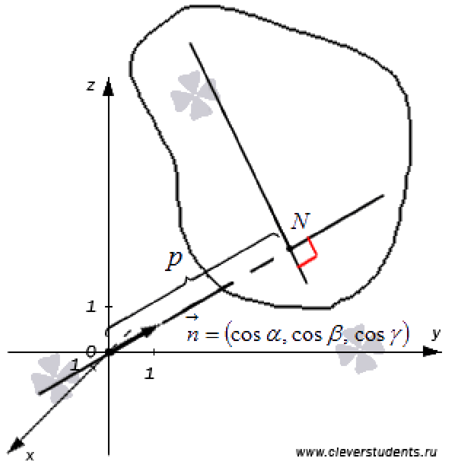
  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, где a, b, c - отличные от нуля действительные числа. Абсолютные величины чисел a, b и c равны длинам отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно, считая от начала координат. Знак чисел a, b и c показывает, в каком направлении (положительном или отрицательном) откладываются отрезки на координатных осях.

  Координаты точек $(a, 0,0), (0, b, 0), (0,0, c)$ удовлетворяют уравнению плоскости в отрезках.



- Нормальное уравнение плоскости в пространстве:

  Рассмотрим плоскость, которая удалена на расстояние p $(p \geq 0)$ единиц от начала координат в положительном направлении нормального вектора плоскости $\bar{n}$. Будем считать, что длина вектора $\bar{n}$ равна единице. Тогда его координаты равны направляющим косинусам, то есть, $\bar{n} = (cos\alpha, cos\beta, cos\gamma)$, причем $|\bar{n}| = \sqrt{cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma}$. Насстояние от точки до плоскости: $|ON|$, то есть, точка N лежит на плоскости и длина отрезка ON равна p.



По определению скалярного произведения векторов $\bar{n}$ и $\overline{OM} = (x, y, z)$: $(\bar{n}, \overline{OM}) = |\bar{n}| \cdot |\overline{OM}| \cdot cos\angle(\bar{n}, \overline{OM}) = |\bar{n}|\text{Пр}_{\bar{n}}\,\overline{OM} = p$

В координатной форме: $(\bar{n}, \overline{OM}) = cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z$

Уравнением плоскости в нормальном виде:

$cos\alpha \cdot x + cos\beta \cdot y + cos\gamma \cdot z - p = 0$

- Уравнение плоскости по трём точкам, не лежащим на одной прямой $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$, $P(x_3, y_3, z_3)$:

1. Находим векторное произведение векторов $\overline{MN}$ и $\overline{MP}$ (должны быть не коллениарны), т.е.находим вектор, перпендикулярный векторам, лежащим в этой плоскости, а значит нормаль к этой плоскости.
2. Записываем общее уравнение плоскости по точке и перпендикулярному вектору.

$$\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

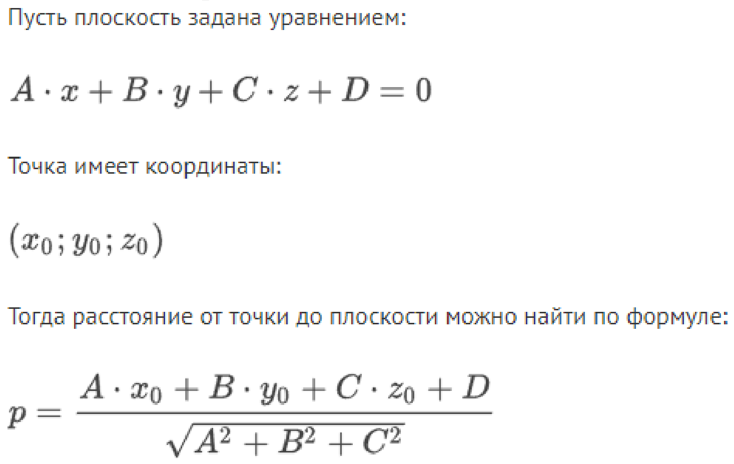
34) Нормальное уравнение плоскости в пространстве, расстояние от точки до плоскости.

Нормальное уравнение см. прерыдущий пункт.

Расстояние от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости Χ – длина перпендикуляра, опущенного из точки на эту плоскость.

Пусть H_1 - основание перпендикуляра, проведенного из точки M_1 к плоскости Χ. Она - точка пересечения заданной плоскости Χ и прямой, проходящей через точку M_1, перпендикулярно к плоскости Χ → составив уравнение прямой, проходящей через заданную точку перпендикулярно к заданной плоскости (нормаль к плоскости – напрявляющий вектор данной прямой). От канонического уравнения прямой переходим к прямой, заданной пересечением двух плоскостей (для этого каждую из дробей приравниваем к какому-то параметру λ и и разрешаем относительно параметров). Далее решаем систему их трёх уравнений (+уравнение исходной плоскости), находим точку H_1 и расстояние между ней и M_1.

Также можно через:



Пусть плоскость задана уравнением:

$$A \cdot x + B \cdot y + C \cdot z + D = 0$$

Точка имеет координаты:

$$(x_0; y_0; z_0)$$

Тогда расстояние от точки до плоскости можно найти по формуле:

$$p = \frac{A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

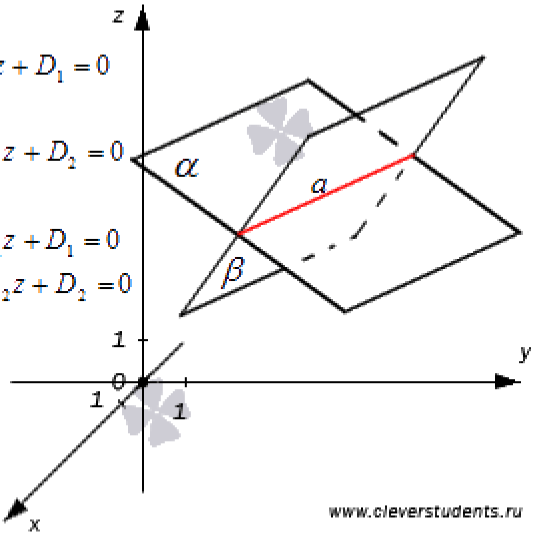
35) Различные формы уравнения прямой в пространстве.

- Прямая, образованная пересечением двух плоскостей:

$$\alpha: \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$\beta: \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

$$a: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$



- Параметрические уравнения прямой в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_1 + a_x \cdot \lambda \\ y = y_1 + a_y \cdot \lambda \\ z = z_1 + a_z \cdot \lambda \end{cases}$$

Где x_1, x_2, x_3 – координаты некоторой точки прямой, a_x, a_y, a_z (одновременно не равны нулю) - соответствующие координаты направляющего вектора прямой, а λ - некоторый параметр, который может принимать любые действительные значения.

Проходит через точку $M(x_1, y_1, z_1)$ и имеющая направляющий вектор $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$

- Канонические уравнения прямой в пространстве:

Разрешив каждое из параметрических уравнений прямой в параметрическом виде, относительно параметра λ можно перейти к:

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$$

36) Взаимное расположение двух плоскостей в пространстве.

Пусть плоскости π_1 и π_2 заданы общими уравнениями:

$$\alpha_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad \alpha_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

$\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ – нормальные векторы этих плоскостей соответственно.

Плоскости α_1 и α_2 параллельны или совпадают тогда и только тогда, когда векторы $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ коллинеарны. Записывая условие коллинеарности векторов, получаем: если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости параллельны; если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$, то плоскости совпадают.

Если же координаты векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ не пропорциональны, то плоскости пересекаются по некоторой прямой *l*. Очевидно, что

$$\pi_1 \perp \pi_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n}_1 \perp \overline{n}_2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0.$$

Отсюда получаем ***условие перпендикулярности плоскостей***

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Как и для двух прямых на плоскости можно вывести следующую формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2}{|\overline{n}_1| \cdot |\overline{n}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где φ – один из смежных двугранных углов между плоскостями.

Расстояние от точки до прямой.

Расстояние *d* от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости α : $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

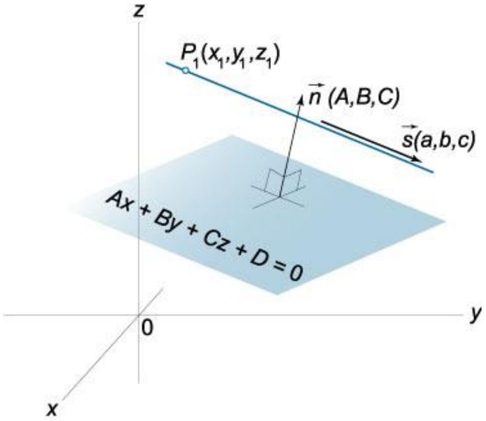
$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

37) Взаимное расположение прямой и плоскости, угол между прямой и плоскостью.

- Параллельность прямой и плоскости:

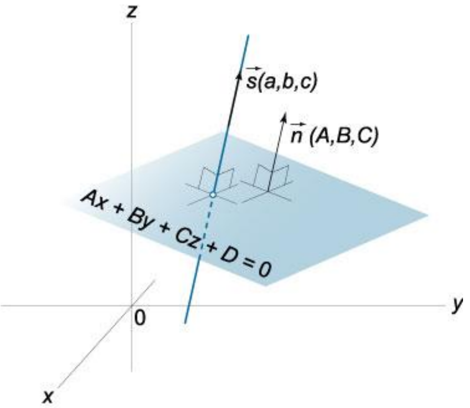
$\frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c}$ и $Ax + By + Cz + D = 0$, если:

Скалярное произведение нормали плососкости и направляющего вектора прямой равно 0, т.е. $\bar{n} \cdot \bar{s} = 0$ или $Aa + Bb + Cc = 0$.



- Перпендикулярность прямой и плоскости:

Если вектор нормали паралелен направляющему вектору прямой ($\bar{n} \parallel \bar{s}$), т.е. их векторное произведение равно 0 или $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c}$



- Точка пересечения прямой и плоскости:

$\frac{x-x_1}{m} = \frac{y-y_1}{n} = \frac{z-z_1}{p}$ и $Ax + By + Cz + D = 0$

1. Находим параметрические уравнения прямой. Для этого полагаем: $\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} = t$, откуда:

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \\ z = z_1 + pt \end{cases}$$

2. Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости и решая его относительно t. Находим значение параметра $t = t_0$, при котором происходит пересечение прямой и плоскости.
3. Найденное значение подставляем в параметрические уравнения прямой и получаем искомые координаты точки пересечения:

$$\begin{cases} x_0 = x_1 + mt_0 \\ y_0 = y_1 + nt_0 \\ z_0 = z_1 + pt_0 \end{cases}$$

Если в результате решения уравнения относительно параметра t получим противоречие, то прямая и плоскость параллельны.

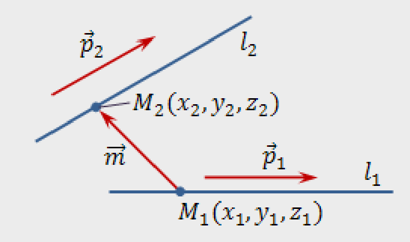
- Угол между прямой и плоскостью:

Углом между прямой и плоскостью называют угол между этой прямой и ее проекцией на плоскость, причём прямая не перпендикулярна к ней. Значит, для прямой с направляющим вектором $\bar{s} = \{l; m; n\}$ и плоскостью, заданной уравнением α: $Ax + By + Cz + D = 0$ (нормаль $\bar{q}\{A; B; C\}$), угол будет равен:

$$sin\varphi = \frac{|A \cdot l + B \cdot m + C \cdot n|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2} \cdot \sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

Получение формулы: из уравнения прямой можно найти направляющий вектор прямой, из уравнения плоскости вектор нормаль плоскости, из формул скалярного произведения векторов найдем косинус угла между нормалью к плоскости и направляющим вектором прямой $cos\psi = \frac{(\bar{q} \cdot \bar{s})}{|\bar{s}| \cdot |\bar{q}|}$, а т.к. $\varphi = 90° - \psi$, то синус угла между прямой и плоскостью $sin\varphi = cos\psi$.

38) Взаимное расположение двух прямых в пространстве.



Возможны четыре различных случая расположения двух прямых в пространстве:

– прямые скрещивающиеся, т.е. не лежат в одной плоскости;
– прямые пересекаются, т.е. лежат в одной плоскости и имеют одну общую точку;
– прямые параллельные, т.е. лежат в одной плоскости и не пересекаются;
– прямые совпадают.

l_1: $\frac{x-x_1}{a_1}=\frac{y-y_1}{b_1}=\frac{z-z_1}{c_1}$, l_2: $\frac{x-x_2}{a_2}=\frac{y-y_2}{b_2}=\frac{z-z_2}{c_2}$. Где $M_1(x_1,y_1,z_1)$, $M_2(x_2,y_2,z_2)$ - точки, принадлежащие прямым l_1 и l_2 соответственно, а $\overrightarrow{p_1}=a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k}$, $\overrightarrow{p_2}=a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k}$ - направляющие векторы. Обозначим через $\vec{m}=\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}$ - вектор, соединяющий заданные точки.

Признаки расположения прямых:

– прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся ⇔ векторы $\vec{m},\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}$ не компланарны;
– прямые l_1 и l_2 пересекаются ⇔ векторы $\vec{m},\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}$ компланарны и векторы $\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}$ не коллинеарны;
– прямые l_1 и l_2 параллельные ⇔ векторы $\overrightarrow{p_1}$ и $\overrightarrow{p_2}$ коллинеарны, а векторы $\vec{m}$ и $\overrightarrow{p_2}$ не коллинеарны;
– прямые l_1 и l_2 совпадают ⇔ векторы $\vec{m},\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2}$ коллинеарны.

Эти условия можно записать, используя свойства смешанного и векторного произведений:

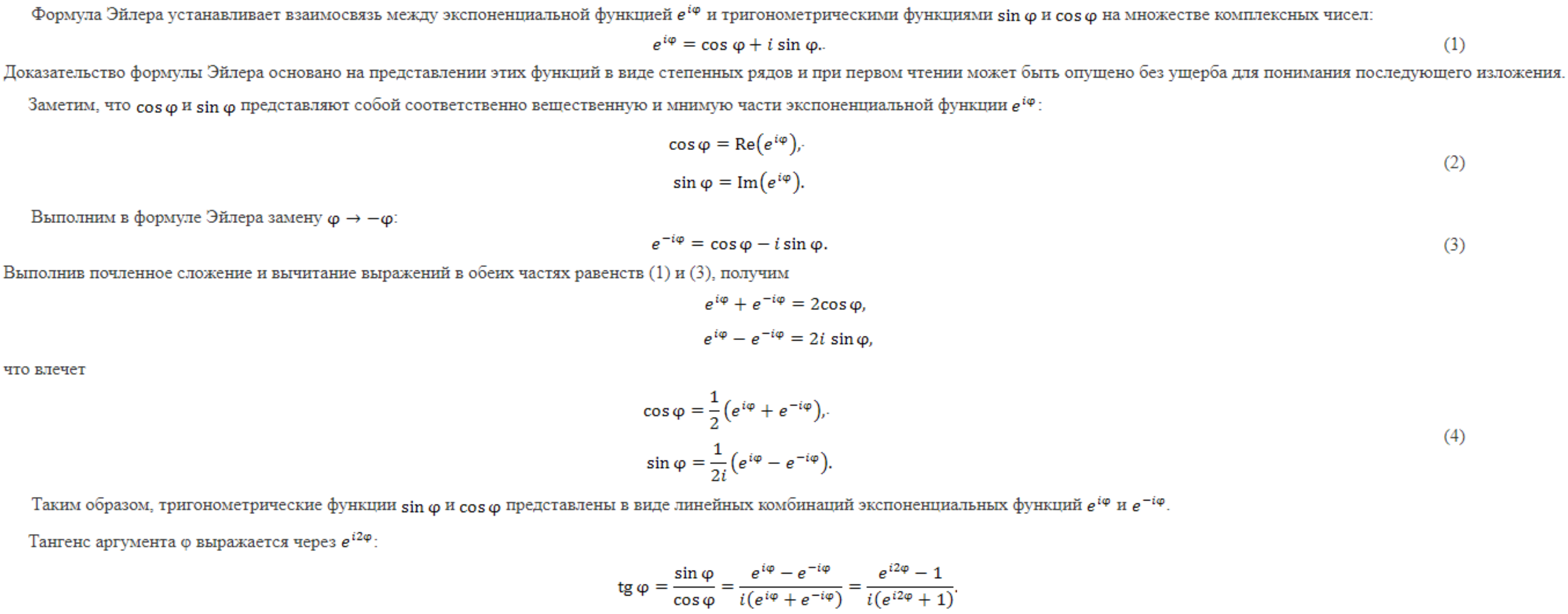
$$(\vec{m},\overrightarrow{p_1},\overrightarrow{p_2})=\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Равенство нулю смешанного произведения векторов является необходимым и достаточным условием их компланарности. Поэтому:

– прямые l_1 и l_2 скрещивающиеся ⇔ определитель отличен от нуля;
– прямые l_1 и l_2 пересекаются ⇔ определитель равен нулю, а вторая и третья его строки не пропорциональны, т.е. $rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$;
– прямые l_1 и l_2 параллельные ⇔ вторая и третья строки определителя пропорциональны, т.е. $rang\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=1$, а первые две строки не пропорциональны, т.е. $rang\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=2$;
– прямые l_1 и l_2 совпадают ⇔ все строки определителя пропорциональны, т.е. $rang\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ a_1 & b_2 & c_2 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}=1$.

Вывод формулы Эйлера.

http://portal.tpu.ru:7777/SHARED/k/KONVAL/Sites/Russian_sites/ComplexN/006.htm



Формула Эйлера устанавливает взаимосвязь между экспоненциальной функцией $e^{i\varphi}$ и тригонометрическими функциями $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ на множестве комплексных чисел:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi. \quad (1)$$

Доказательство формулы Эйлера основано на представлении этих функций в виде степенных рядов и при первом чтении может быть опущено без ущерба для понимания последующего изложения.

Заметим, что $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ представляют собой соответственно вещественную и мнимую части экспоненциальной функции $e^{i\varphi}$:

$$\cos\varphi=\mathrm{Re}\left(e^{i\varphi}\right), \quad \sin\varphi=\mathrm{Im}\left(e^{i\varphi}\right). \quad (2)$$

Выполним в формуле Эйлера замену $\varphi\to-\varphi$:

$$e^{-i\varphi}=\cos\varphi-i\sin\varphi. \quad (3)$$

Выполнив почленное сложение и вычитание выражений в обеих частях равенств (1) и (3), получим

$$e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}=2\cos\varphi,$$
$$e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}=2i\sin\varphi,$$

что влечет

$$\cos\varphi=\frac{1}{2}\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right), \quad \sin\varphi=\frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}\right). \quad (4)$$

Таким образом, тригонометрические функции $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ представлены в виде линейных комбинаций экспоненциальных функций $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$.

Тангенс аргумента φ выражается через $e^{i2\varphi}$:

$$\mathrm{tg}\,\varphi=\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}=\frac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{i\left(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}\right)}=\frac{e^{i2\varphi}-1}{i\left(e^{i2\varphi}+1\right)}.$$

Оглавление