Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381

1 Комбинаторика, классическое определение вероятности. (ДЗ на 15.02.20)

1.1 Задача 1.

2 шара распределены случайно по 3-м ящикам. Определить вероятность попадания в разные ящики.

Решение:

Пусть n - количество шаров, k - количество ящиков. Тогда способов разместить шары по ящикам (в одном может быть не один): k^n (первый можно положить в любой из n, второй также в любой из n и т.д.). Значит, всего исходов: $3^2 = 9$.

Рассмотрим количество способов разместить шары без повторений, т.е. каждый шар по одному в разных ящиках. Первый шар можно положить в любой из k ящиков, второй - в любой из оставшихся $k-1$ ящиков, третий - в один из оставшихся $k-2$ ящиков, $\ldots$, последний - в любой из оставшихся $k-n+1$. Поэтому: $\frac{k!}{(k-n)!}$. Т.е. количество благоприятных исходов: $\frac{3!}{(3-2)!} = \frac{6}{1} = 6$.

Воспользуемся классическим определением вероятности: $P = \frac{m}{n}$, где m - число исходов, благоприятствующих осуществлению события, а n - число всех равновозможных элементарных исходов. Ответ: $\frac{6}{9} = \frac{2}{3}$

Решение через математическую модель:

Всего исходов: $\Omega = \{\omega_{ij}\}, 1 \leqslant i, j \leqslant 3$, где i, j - номера ящиков, куда попали соотвественно 1-ый и 2-ой шары.

$$\#\Omega = 3^2 = 9$$

Событие A - $\{\omega_{ij}, i \neq j\}$ - упорядоченный набор без повторений.

$$\#A = A_3^2 = 3! = 6$$

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

1.2 Задача 2.

В колоде содержится 52 карты (полная колода, от двоек до тузов), наугад достают 5. Определить вероятности, что:

а) все одной масти

б) 3 одного достоинства, 2 - другого, 3+2

в) 2 - одного достоинства, 2 другого, и 1 - третьего

г) всё достоинства подряд (2, 3, 4, 5, 6)

Решение:

Примечание. Всего у нас 4 масти и по 13 карт в каждой. По 4 карты одного достоинства (13 достоинств).

Всего способов извлечь 5 карт из колоды: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{52!}{5!(52-5)!} = \dfrac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot 48 \cdot 47!}{5! \cdot 47!} =$ 2598960 - это общее число исходов.

1. Число различных мастей равно 4. Число карт одной масти равно 13. Поэтому число благоприятных исходов равно $4 \cdot C_{13}^5 = 4 \cdot 1287 = 5148$. $P = \dfrac{5148}{2598960} = \dfrac{33}{16660}$.

   Построим математическую модель. Все масти сходятся - событие A. Разделим на 4 события:

   а) $B : i, j, l, m \in [1; 13]$

   б) $C : i, j, l, m \in [14; 26]$

   в) $D : i, j, l, m \in [27; 39]$

   г) $E : i, j, l, m \in [39; 52]$

   $\#B = \#C = \#D = \#E = C_{13}^5$ $\#A = \#B + \#C + \#D + \#E = 4 \cdot C_{13}^5$.

2. Построим математическую модель. Пусть i,j,k - карты одного достоинства, а l,m - другого.

   $\#A : (i$,j,k одного достоинства$) = C_{13}^1 \cdot C_4^3 = 13 \cdot 4$ (выбираем сначала одно из 13 достоинств, в котором 4 карты, из которых выбираем 3).

   $\#B : (i$,j,k одного достоинства и l,m другого$) = \#A \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2 = 12 \cdot 6 \cdot 13 \cdot 4$

   $P(A) = \dfrac{C_{13}^1 \cdot C_4^3 \cdot C_{12}^1 \cdot C_4^2}{C_{52}^5}$

3. Построим математическую модель. Пусть i, j - одного достоинства, k, l - другого, m - третьего.

   $\#A : (i, j,$ одного достоинства$) = C_{13}^1 \cdot C_4^2 = 13 \cdot 6$

   $\#B : (k, l,$ другого достоинства$) = C_{12}^1 \cdot C_4^2 = 12 \cdot 6$

   $\#C : (m$ третьего$) = C_{11}^1 \cdot C_4^1 = 11 \cdot 4$

   $\#D(A, B, C) = 13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 4$

   $P(D) = \dfrac{\#D}{\#\Omega} = \dfrac{13 \cdot 6 \cdot 12 \cdot 6 \cdot 11 \cdot 4}{C_{52}^5}$

4. Одну двойку (тройку, четвёрку, пятёрку, шестёрку) из 4 можно извлечь C_4^1 способами. Поэтому: $P = \dfrac{\left(C_4^1\right)^5}{C_{52}^5} = \dfrac{1024}{2598960} = \dfrac{13}{33320}$. Однако, мы рассмотрели случай, когда эти карты просто содержатся в 5-ке, которую достали. Если нам необходима последовательность, т.е. мы достаём карты одна за другой, вероятность будем иной. $P = \dfrac{4}{52} \cdot \dfrac{4}{51} \cdot \dfrac{4}{50} \cdot \dfrac{4}{49} \cdot \dfrac{4}{48} = \dfrac{8}{2436525}$.

   Решим через математическую модель, когда требуется просто все достоинства подряд в 5-ке (не конкретную комбинацию).

   Пусть i, j, k, l, m - все достоинства подряд. $A : (i$ подходит для стрита$) : 2 \leqslant i \leqslant 10$.

   $\#A = 9 \cdot 4 = 36$.

   $$B : \begin{pmatrix} i \\ j = i + 1 \\ k = j + 1 \\ l = k + 1 \\ m = l + 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $G(X)$ - достоинство X, тогда условие $G(i) = G(j) - 1 = G(k) - 2 = G(l) - 3 = G(m) - 4$ возможно при: $G(i) = G(m) - 4 > 0 \Rightarrow 5 \leqslant G(m) \leqslant 13 \Rightarrow \#B = 9$ - среди достоинства выбрано 5 идущих подряд.

Т.к. мастей 4, то для каждой карты $\exists$ 4 варианта выбрать масть: $G(i) = G(i+13) = G(i+26) = G(i+39)$, а т.к. при этом выбирается 5 карт, то: $\#B = \#A \cdot 4^4 = 36 \cdot 256 = 9216$.

$P(B) = \dfrac{9216}{2598960}$

P.S. Из предыдущего решения данное можно получить путём домножения на 9 - столько раз мы можем сдвигать подряд идущие карты от последней - шестёрки, до последней - туза.

1.3 Задача 3.

Имеется 6 ящиков различных материалов и 5 этажей. Определить вероятность, что на 3 этаже имеется хотя бы один ящик.

Решение:

Общая методика для решения задач, в которых встречается фраза «хотя бы один» такая:

1. Выписать исходное событие $A =$ (Вероятность того, что ... хотя бы ...).
2. Сформулировать противоположное событие $\bar{A}$.
3. Найти вероятность события $P(\bar{A})$.
4. Найти искомую вероятность по формуле $P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

$\bar{A}$ - не содержится ни одного ящика. Всего способов разместить 6 ящиков по 5 этажам: $\#\Omega = 5^6 = 15625$. Способов разместить ящики по 4 этажам, минуя 3-ий: $\#\bar{A} = 4^6$. В результате: $P(\bar{A}) = \dfrac{4096}{15625}$.

Ответ: $P(A) = 1 - \dfrac{4096}{15625} = \dfrac{11529}{15625}$.

Для построения мат. модели необходимо обговорить, что $\{\omega_{ijklm}\}$, где i - этаж 1-го ящ., j - этаж 2-го ящ. и т.д. Тогда $\#\bar{A} = \{\omega_{ijklm}\}$, при i,j,k,l,$m \neq 3$.

1.4 Задача 4.

Код - три кнопки, нажатых, одновременно, 0-9. Код неизвестен. Определить вероятность, что замок открыт:

а) код не запоминается

б) код запоминается

1. на k-м шаге
2. до k-ого шага

Решение:

Всего исходов: $\{w_{ijk}\}$, где $0 \leqslant i,j,k \leqslant 9$. Порядок i,j,k не важен (для определённости положим, что $i \leqslant j \leqslant k$). Тогда число возможных исходов - сочетание из 10 по 3 с повторениями (т.к. могут быть одинаковые цифры, но порядок неважен):

$$\#\Omega = C_{(n)}^k = \left(\binom{n}{k}\right) = \binom{n+k-1}{k} = (-1)^k \binom{-n}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k! \cdot (n-1)!} = C_{10+3-1}^3 = C_{12}^3 = 220$$

а) Код не запоминается. Пусть A – событие, при котором на k-том шаге замок откроется. Т.к. код не запоминается, то на любом шаге вероятность открыть замок: $P(A) = \dfrac{1}{\#\Omega} = \dfrac{1}{220}$.

Пусть B_k – вероятность, что до k-то шага (включительно) замок откроется хотя бы один раз. Тогда $(\bar{B}_k)$ – вероятность, что ни на одном шаге замок не откроется, то есть на каждом шаге случится событие $\bar{A}$.

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{219}{220}$$

$$P(\bar{B}_k) = \prod_{i=1}^{k} P(\bar{A}) = \left(\frac{219}{220}\right)^k$$

$$P(B_k) = 1 - P(\bar{B}_k) = 1 - \left(\frac{219}{220}\right)^k$$

б) Код запоминается. Пусть A_k – вероятность, что на k-том шаге замок откроется. Т.к. код запоминается, то с каждым шагом отсекается один из вариантов, то есть выбирается один из $\#\Omega - k + 1$ возможных вариантов. Таким образом,

$$P(A_k) = \frac{1}{\#\Omega - k + 1} = \frac{1}{221 - k}$$

Пусть B_k – вероятность, что до k-то шага (включительно) замок откроется (хоть раз). Тогда B_k - вероятность, что ни на одном шаге замок не откроется, то есть на каждом шаге случится событие $\bar{A}_k$.

$$P(\bar{A}_k) = A - P(A_k) = \frac{221 - k - 1}{221 - k}$$

$$P(\bar{B}_k) = \prod_{i=1}^{k} P(\bar{A}) = \prod_{i=1}^{k} \frac{221 - i - 1}{221 - i} = \frac{221 - k}{220}$$

$$P(B_k) = 1 - P(\bar{B}_k) = 1 - \frac{221 - k}{220} = \frac{k}{220}$$