Теория вероятностей и мат. статистика

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

18.04.2020

Числовые характеристики случайной величины

Задача 5.

Условие:

Функция распределения случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{3}, & x \in (0, 1] \\ \frac{1}{2}, & x \in (1, 3] \\ 1, & x > 3 \end{cases}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

Таблица дискретного распределения:

k	0	1	3
$P(\xi = k)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Т.к. величина дискретная $\Rightarrow$

$$E\xi = \sum_k k \cdot P(\xi = k) = 0 \cdot \frac{1}{3} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$$

$$E\xi^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{3} + 1^2 \cdot \frac{1}{6} + 3^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{14}{3}$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{14}{3} + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{17}{9}$$

Задача 6.

Условие:

Распределение ξ задано таблицей:

ξ	-2	-1	0	2	3
$P(\xi = k)$	0.1	0.2	0.1	0.3	0.3

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

$$E\xi = \sum_k k \cdot P(\xi = k) = -2 \cdot 0.1 - 1 \cdot 0.2 + 0 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.3 + 3 \cdot 0.3 = 1.1$$

$$E\xi^2 = (-2)^2 \cdot 0.1 + (-1)^2 \cdot 0.2 + 0^2 \cdot 0.1 + 2^2 \cdot 0.3 + 3^2 \cdot 0.3 = 4.5$$

$$D\xi = 4.5 - (1.1)^2 = 3.29$$

Задача 7.

Условие:

Распределение ξ задано формулой:

$$P(\xi = k) = \frac{(\ln 2)^n}{2k!}, k = 0{,}1, \dots$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

$$E\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\ln 2)^k}{2k!} = \frac{1}{2} \ln 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln 2)^{k-1}}{(k-1)!} = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot e^{\ln 2} = \ln 2 \approx 0.693147181$$

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \frac{(\ln 2)^k}{2k!} = \frac{1}{2} \ln 2 \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\ln 2)^k}{(k-1)!} = \frac{1}{2} \ln 2 \cdot (2 + 2 \ln 2) = \ln 2 (1 + \ln 2) \approx 1.173600194$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \approx 1.173600194 - (0.693147181)^2 \approx 0.693147179$$

Задача 8.

Условие:

Распределение ξ задано формулой:

$$P(\xi = k) = (k+1)(1-p)^k p^2, k = 0{,}1, \dots$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

$$E\xi = \sum_k k \cdot P(\xi = k) = \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(1-p)^k p^2 = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1)(1-p)^k = \dots$$

При $|p-1| < 1$ данный степенной ряд можно дифференцировать почленно.

$$\dots = p^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{d}{dp} (-k(1-p)^{k+1}) \right] = p^2 \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^{\infty} \left[-k(1-p)^{k+1} \right] = p^2 (1-p) \frac{d^2}{dp^2} \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{(1-p)^k}_{\text{геом. прогр.}} =$$

$$= p^2(1-p)\frac{d^2}{dp^2}\cdot\frac{1}{p} = -\frac{2(p-1)}{p}$$

Аналогичным образом получаем, что для $|1-p|<1$:

$$E\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2(k+1)(1-p)^k p^2 = \frac{2(2p^2-5p+3)}{p^2}$$

$$D\xi = E\xi - (E\xi)^2 = \frac{2(2p^2-5p+3)}{p^2} - \left(-\frac{2(p-1)}{p}\right)^2 = \frac{2(1-p)}{p^2}$$

Задача 13.

Условие:

Функция распределения случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1-e^{-5x}, & x > 0 \end{cases}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

Плотность распределения случайной величины:

$$p_\xi = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 5e^{-5x}, & x \geqslant 0 \end{cases}$$

Носитель распределения случайной величины: $\operatorname{supp}\xi = [0,\infty]$.

ξ - абсолютно непрерывная случайная величина $\Rightarrow$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x\cdot p_\xi(x)dx = \int_0^\infty 5e^{-5x}dx = 5\int_0^\infty e^{-5x}dx = \ldots$$

Для e^{-5x} применим интегрирование по частям $\int f dg = fg - \int g df$, где

$$f = x, \qquad dg = e^{-5x}dx,$$

$$df = dx, \qquad g = -\frac{1}{5}e^{-5x}$$

$$\cdots = (-e^{-5x}x)\Big|_0^\infty + \int_0^\infty e^{-5x}dx = \left(\lim_{b\to\infty} -e^{-5b}b\right) + \int_0^\infty e^{-5x}dx = \ldots$$

Вводим замену $u=-5x$ и $du=-5dx$. Новая нижняя граница равна 0, верхняя - $-\infty$.

$$\cdots = \frac{1}{5}\int_{-\infty}^0 e^u du = \frac{e^u}{5}\Big|_{-\infty}^0 = \frac{1}{5}$$

Аналогично находим:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\cdot p_\xi(x)dx = \int_0^\infty 5x^2e^{-5x}dx = \cdots = \frac{2}{25}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{25}$$

Задача 14.

Условие:

Плотность распределения случайной величины ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} |x|, & x \in [-1, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

Избавимся от модуля:

$$p_\xi = \begin{cases} -x, & x \in [-1, 0] \\ x, & x \in [0, 1] \\ 0, & x \notin [-1, 1] \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x) dx = \int_{-1}^{0} -x^2 dx + \int_{0}^{1} x^2 dx = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x) dx = \cdots = \frac{1}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{2}$$

Задача 15.

Условие:

Плотность распределения случайной величины ξ:

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

Избавимся от модуля:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ \frac{1}{2} e^{x}, & x < 0 \end{cases}$$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} x e^x dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} x e^{-x} dx = \cdots = 0$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} x^2 e^x dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} dx = \cdots = 2$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = 2$$

Задача 16.

Условие:

Плотность распределения случайной величины ξ:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{2}, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, & x > 0 \end{cases}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{xe^x}{2} dx + \int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \dots$$

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{xe^x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^x x dx = \frac{e^x x}{2} \Bigg|_{-\infty}^{0} - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^x dx = -\left(\lim_{a \to -\infty} \frac{e^a a}{2} \right) - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^x dx = -\frac{1}{2}$$

$$\int_0^\infty x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}} x dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{-\infty} e^u du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^u du = \frac{e^u}{\sqrt{2\pi}} \Bigg|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\dots = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \frac{1}{2} \approx -0.10105772$$

Аналогично считаем:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x) dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{x^2 e^x}{2} dx + \int_0^\infty x^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 \approx 1.489787337$$

Задача 17.

Условие:

Функция распределения случайной величины ξ:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{x^2}, & x > 1 \end{cases}$$

Найти $E\xi - ?, D\xi - ?$

Решение:

Плотность распределения:

$$p_\xi = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ \frac{2}{x^3}, & x \geqslant 1 \end{cases}$$

$$E\xi \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x) dx = \int_1^\infty \frac{2\cancel{x}}{x^{\cancel{3}2}} dx = \int_1^\infty \frac{2}{x^2} dx = \lim_{a \to \infty} \left(-\frac{2}{x} \right) \Bigg|_1^a = 2$$

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p_\xi(x) dx = \int_1^\infty x^2 \frac{2}{x^3} dx = \dots = \infty$$

$$\Rightarrow \text{ т.к. мат. ожидание равно } \infty \Rightarrow \nexists D\xi$$