Теория вероятностей и мат. статистика
ИДЗ4

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

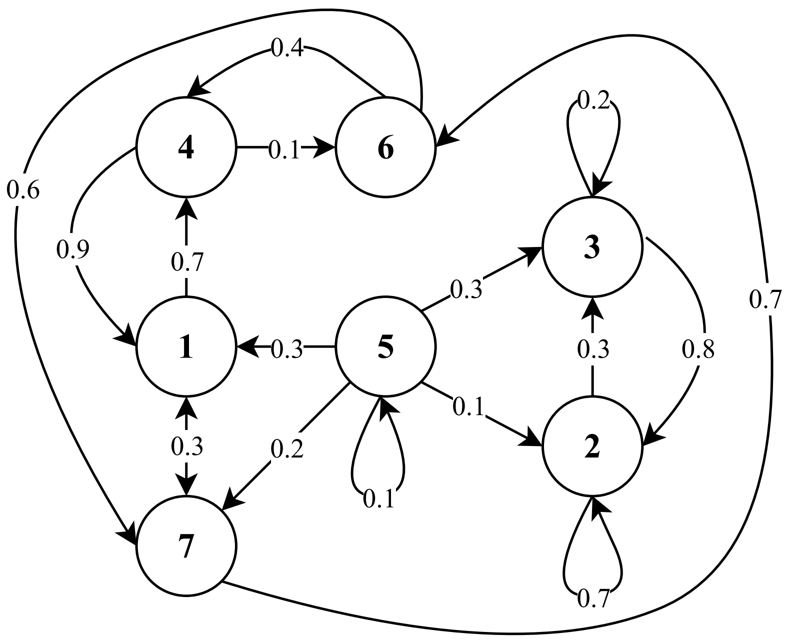
23.05.2020

Вар. 14 (838120)
Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид

$$\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 7 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 7 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Определить матрицу вероятностей перехода за два шага.
2. Выделить классы сообщающихся состояний.
3. Есть ли невозвратные состояния?
4. Найти период в каждом из классов.
5. Вычислить финальные вероятности в каждом классе.
6. Смоделировать траектории цепи Маркова длины 10, 50, 100 и 1000 шагов, начинающиеся в различных состояниях для каждого случая.
7. Вычислить процент времени нахождения ЦМ в каждом из состояний. Сравнить результат с вектором финальных вероятностей.

Для удобства построим граф данной цепи.



Задача 1.

$$\mathbb{P}^{(2)} = \mathbb{P}^2 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 72 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 73 & 27 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 72 & 28 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 67 & 0 & 0 & 33 \\ 9 & 32 & 12 & 21 & 1 & 14 & 11 \\ 54 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 49 & 0 & 0 & 51 \end{bmatrix}$$

Проверим: сумма элементом каждой строки равна 1.

Задача 2.

Данная марковская цепь состоит класса сообщающихся состояний: $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$

Состояние	**Док-во**
$v_1 \Leftrightarrow v_4$	$v_1 \to v_4, v_4 \to v_1$
$v_1 \Leftrightarrow v_7$	$v_1 \to v_7, v_7 \to v_1$
$v_4 \Leftrightarrow v_6$	$v_4 \to v_6, v_6 \to v_4$
$v_6 \Leftrightarrow v_7$	$v_6 \to v_7, v_7 \to v_2 \to v_4 \to v_6$
$v_1 \Leftrightarrow v_6$	$v_1 \to v_4 \to v_6, v_6 \to v_4 \to v_1$
$v_4 \Leftrightarrow v_7$	$v_4 \to v_1 \to v_7, v_7 \to v_1 \to v_4$

а также из другого класса $\{v_2, v_3\} : v_2 \to v_3, v_3 \to v_2$ (данные классы не пересекаются: ни одна вершина одного классе не достижима из вершины другого класса). Вершина v_5 является недостижимой из любой вершины ($\exists$ пути из неё, но не в неё) и $\Rightarrow$ несущественной.

Задача 3.

Т.к. несущественные состояния невозвратны, то v_5 - невозвратная.

Задача 4.

Т.к. в классе $\{v_2, v_3\}$ есть петля, его период будет равен 1, период же другого класса равен 2, т.к. НОД периодов всех состояний равен 2-м.

Задача 5.

Класс 1.

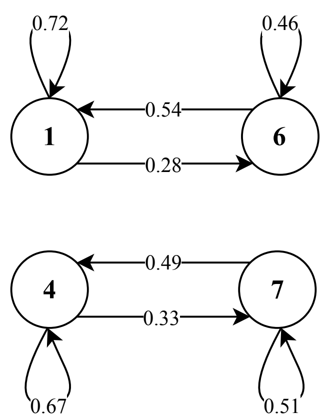
Класс: $\{v_1, v_4, v_6, v_7\}$. Вектор финальных состояний вероятностей: $x = [p_1, p_4, p_6, p_7]$.

$$\mathbb{P}'_{\{v_1,v_4,v_6,v_7\}} = \mathbb{P} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix}0 & 7 & 0 & 3\\ 9 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 6\\ 3 & 0 & 7 & 0\end{bmatrix}$$

В периодической цепи финальные вероятности не существуют, следовательно, возведём матрицу в квадрат и таким образом получим ЦМ за два шага.

$$\mathbb{P}^2 = \frac{1}{100}\begin{bmatrix}72 & 0 & 28 & 0\\ 0 & 67 & 0 & 33\\ 54 & 0 & 46 & 0\\ 0 & 49 & 0 & 51\end{bmatrix}$$

Для удобства определения подклассов рассмотрим графическое представление.



Вычислим финальные состояния в каждом классе.

1. Класс {1,6}

$$P_{\{1,6\}} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix}72 & 28\\ 54 & 46\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}100p_1 = 72p_1 + 54p_6\\ 100p_6 = 28p_1 + 46p_6\\ p_1 + p_6 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}p_1 = \frac{27}{41}\\ p_6 = \frac{14}{41}\end{cases}$$

2. Класс {4,7}

$$P_{\{4,7\}} = \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 67 & 33 \\ 49 & 51 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 100p_4 = 67p_4 + 49p_7 \\ 100p_7 = 33p_4 + 51p_7 \\ p_4 + p_7 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_4 = \frac{49}{82} \\ p_7 = \frac{33}{82} \end{cases}$$

Класс 2.

Класс: $\{v_2, v_3\}$. Вектор финальных состояний вероятностей: $x = [p_2, p_3]$.

$$\mathbb{P}_{\{v_2,v_3\}} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10p_2 \\ 10p_3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$p_2 + p_3 = 1$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} -3 & 8 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

В результате:

$$p_2 = \frac{8}{11}, p_3 = \frac{3}{11}$$