# Теория вероятностей и мат. статистика
# ИДЗ2

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

18.04.2020

**Вар. 14** (838120)

1. Прямые разбивают плоскость на полосы ширины 9. Определить вероятность того, что отрезок длины 3, наугад брошенный на плоскость, не пересечет ни одной прямой.
2. Распределение случайной величины $\xi$ задано таблицей $\begin{array}{ccccc} \text{k} & 0 & 1 & 2 & 4 \\ \text{p}_k & 1/9 & 2/9 & 4/9 & 2/9 \end{array}$. Вычислить $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, энтропию $\xi$ и распределение $\eta = \sin(\pi\xi/6)$.
3. Дана функция распределения абс. непр. случайной величины $\xi$: $F(x) = \begin{cases} 0, \ x \le 0 \\ \sin(5x), \ x \in (0, C] \\ 1, \ x > C \end{cases}$. Найти $C$, $\mathbf{E}\xi$, $\mathbf{D}\xi$, энтропию $\xi$ и распределение $\eta = \sin(3\xi)$.

## Задача 1.

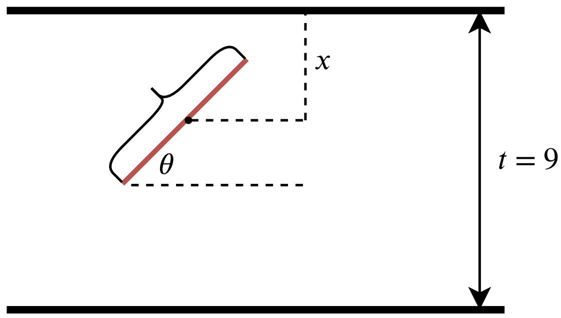
Данная задача является переформулированной версией *задачи Бюффона о бросании иглы.* Положим $l$ - длина иглы (отрезка), $t$ - расстояние между параллельными линиями (ширина полосы).

Пусть $x$ - расстояние от центра иглы (отрезка) до ближайшей параллельной линии, также положим $\theta$ как угол между иглой и одной из параллельных прямых.

Равномерная функции плотности распределения (ФПР) вероятности величины $x$ между 0 и $\frac{t}{2}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{2}{t}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{t}{2} \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $x = 0$ представляет собой иглу, центр которой лежит ровно на прямой, а $x = \frac{t}{2}$ иглу, идеально центрированную между двумя линиями. Равномерная ФПР предполагает, что игла с одинаковой вероятностью упадёт в любом месте указанного диапазона, но не может выпасть за его пределы.




Равномерная ФПР величины $\theta$ между 0 и $\frac{\pi}{2}$ имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{2}{\pi}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Здесь $\theta = 0$ радиан представляет собой иглу, расположенную параллельную отмеченным линиям, а $\theta = \frac{\pi}{2}$ радиан представляет иглу, расположенную перпендикулярно к отмеченным линиям. Любой угол в этом диапазоне считается одинаково вероятным результатом.

Две случайные величины $x$ и $\theta$ являются независимыми, следовательно, функций совместного распределения имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{4}{t\pi}, 0 \leqslant x \leqslant \frac{t}{2}, 0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2} \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Игла (отрезок) пересечёт линию, если $x \leqslant \dfrac{l}{2}\sin\theta$.

В условиях данной задачи $l < t \Rightarrow$ интегрирование функции плотности совместной вероятности даёт вероятность того, что игла пересечет линию (обозначим данной событие за $A$):

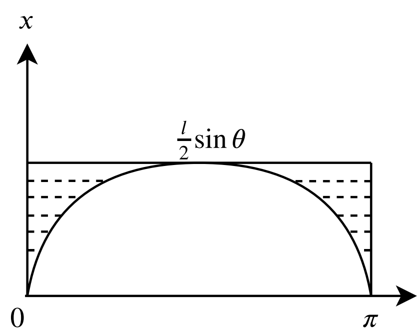
$$P(A) = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi} dx d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \int_{x=0}^{\frac{l}{2}\sin\theta} \frac{4}{t\pi} dx \right] d\theta = \int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} \left[ \frac{4x}{\pi t}\Bigg|_{x=0}^{\frac{1}{2}\sin\theta} = \frac{4(l\sin\theta)}{2\pi t} - \frac{4\times 0}{\pi t} = \frac{2l\sin\theta}{\pi t} \right] d\theta =$$

$$= \left( -\frac{2l\cos\theta}{\pi t} \right)\Bigg|_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} = \left( -\frac{2l\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\pi t} \right) - \left( -\frac{2l\cos(0)}{\pi t} \right) = \frac{2l}{\pi t}$$

По условию задачи необходимо найти вероятность $P(\bar{A})$ - отрезок не пересечёт прямую, что соотвествует обратному событию, т.е.:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - \frac{2l}{\pi t} = 1 - \frac{2\cdot 3}{9\cdot\pi} \approx 0.787793409$$

Графически решение данной задачи можно представить следующим образом:




**Ответ:** 0.787793409

# Задача 2.

Перепишем таблицу:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $P(\xi = k)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{4}{9}$ | $\frac{2}{9}$ |

Величина дискретная $\Rightarrow$

$$E\xi = \sum_k k \cdot P(\xi = k) = 0 \cdot \frac{1}{9} + 1 \cdot \frac{2}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} + 4 \cdot \frac{2}{9} = 2$$

$$E\xi^2 = 0^2 \cdot \frac{1}{9} + 1^2 \cdot \frac{2}{9} + 2^2 \cdot \frac{4}{9} + 4^2 \cdot \frac{2}{9} = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^2 \approx 5.55556$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \left(\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)^2 - 2 = \frac{32}{9} \approx 3.\bar{5}$$

$$\eta = \sin(\pi\frac{\xi}{6})$$

$$\xi = 0 : \eta = 0; \qquad \xi = 1 : \eta = \frac{1}{2}; \qquad \xi = 2 : \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \xi = 4 : \eta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Таким образом:

$$\operatorname{supp} \xi = \{0, 1, 2, 4\}$$

$$\operatorname{supp} \eta = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

$$p(\eta = 0) = \frac{1}{9} \qquad p\left(\eta = \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{9} \qquad p\left(\eta = \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = p(\{\xi = 2\} \cup \{\xi = 4\}) = \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{2}{3}$$

| $\eta$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $p_\eta$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{3}$ |

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{9}, & x \in (0, \frac{1}{2}] \\ \frac{1}{3}, & x \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}] \\ 1, & x > \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

# Задача 3.

Плотность распределения случайной величины:

$$p_\xi = \begin{cases} 5\cos(5x), & x \in (0, C] \\ 0, & x \in (-\infty; 0] \cup (C; +\infty] \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 5\int_0^C \cos(5x)dx = \sin(5x)\Big|_0^C = \sin(5C) = 1 \Rightarrow 5C \geqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = \frac{\pi}{10}$$

Таким образом,

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 5\cos(5x), x \in [0, \frac{\pi}{10}] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$\xi$ - абсолютно непрерывная величина $\Rightarrow$

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{10}} x \cdot 5\cos(5x)dx = x\sin(5x)\Big|_0^{\frac{\pi}{10}} - \int_0^{\frac{\pi}{10}} \sin(5x)dx = \frac{\pi}{10} - \frac{\cos(5x)}{5}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10}(\pi - 2)$$

Аналогично получаем:

$$E\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot p_\xi(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{10}} x^2 \cdot 5\cos(5x)dx = \cdots = \frac{1}{100}(\pi^2 - 8)$$

$$D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{1}{100}(\pi^2 - 8) - \left(\frac{1}{10}(\pi - 2)\right)^2 \approx 0.005663706$$

$$p\left(\xi \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right]\right) = 1, \text{ т.е. } \operatorname{supp}\xi \in \left[0, \frac{\pi}{10}\right] \Rightarrow \operatorname{supp}(\eta) = \left[0, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\right]$$

$$F_\eta = P(\eta < x) = p(\sin(3\xi) < x) = p\left(\xi < \frac{1}{3}\arcsin x\right) = F_\xi\left(\frac{1}{3}\arcsin x\right) = \sin(3\arcsin x)$$

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \sin(3\arcsin x), & x \in \left[0, \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5})\right] \\ 1, & x > \frac{1}{4}(1 + \sqrt{5}) \end{cases}$$