Теория вероятностей и мат. статистика

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

27.03.2020

Случайные величины

Случайная величина $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримая функция.

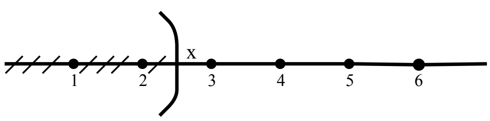
$$(\Omega, \mathcal{F}, P) \mapsto (\mathbb{R}, \mathscr{D}_1, \mathscr{P}_\xi)$$

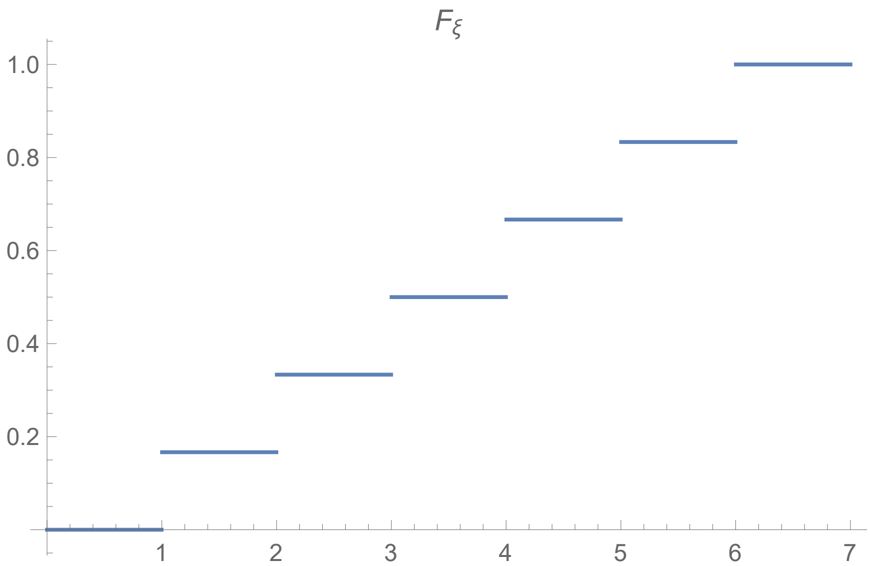
$\mathscr{P}_\xi$ - распределение, $\mathscr{P}_\xi(I) = P(\omega : \xi(\omega) \in I)$
Функция распределения: $F_\xi(x) = P(\omega : \xi(\omega) < x)$

Задача 1.

Найти функцию распределения числа очков, выпадающих на кубике.
Решение:
$F\xi(x)$ - вероятность, что выпало $< x$ очков.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 (<0 \text{ очков не бывает}) \\ \frac{1}{6}, & x \in (1,2] (\text{выпадает} \leqslant 1) \\ \frac{1}{3}, & x \in (2,3] (\text{выпадает} \leqslant 2) \\ \frac{1}{2}, & x \in (3,4] \\ \frac{2}{3}, & x \in (4,5] \\ \frac{5}{6}, & x \in (5,6] \\ 1, & x > 6 (\text{обязательно выпадет очков} \leqslant 6) \end{cases}$$





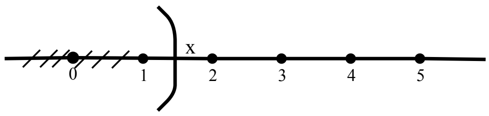
Задача 2.

Найти функцию распределения решек, выпавших до 1-ого орла при бросании монеты.
Решение:

ξ - искомая величина (число решек до 1-ого орла), переформулируя, ξ - число успехов (выпадение решки) до 1-ой неудачи (выпадение орла).

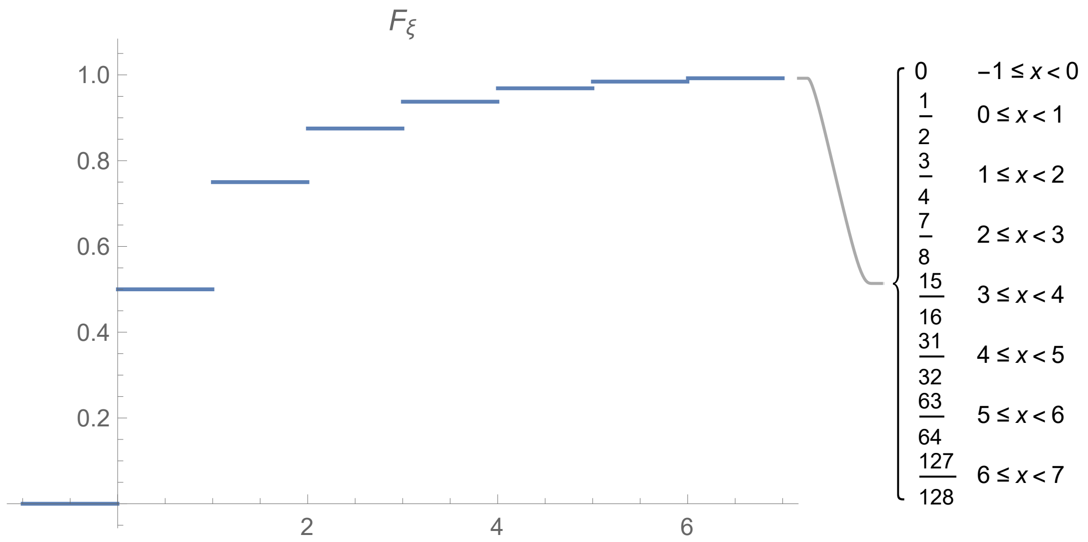
Вероятность выпадения решки: $P(\text{'Р'}) = \frac{1}{2}$.

По формуле испытания Бернулли: $p(\xi = k) = p^k(1-p) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{k+1}}$.



$$F_\xi(x) = \sum_{k<x} P(\xi = k) = \underbrace{\sum_{k=0}^{k<x} \frac{1}{2^{k+1}}}_{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\dots} = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1 - \frac{1}{2^{k+1}}, x \in (k, k+1], k = 0,1,\dots \end{cases}$$

где $\sum_{k<x} P(\xi = k)$ - все случаи, когда выпало $< x$.

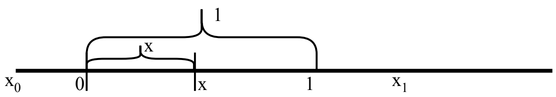


Задача 3.

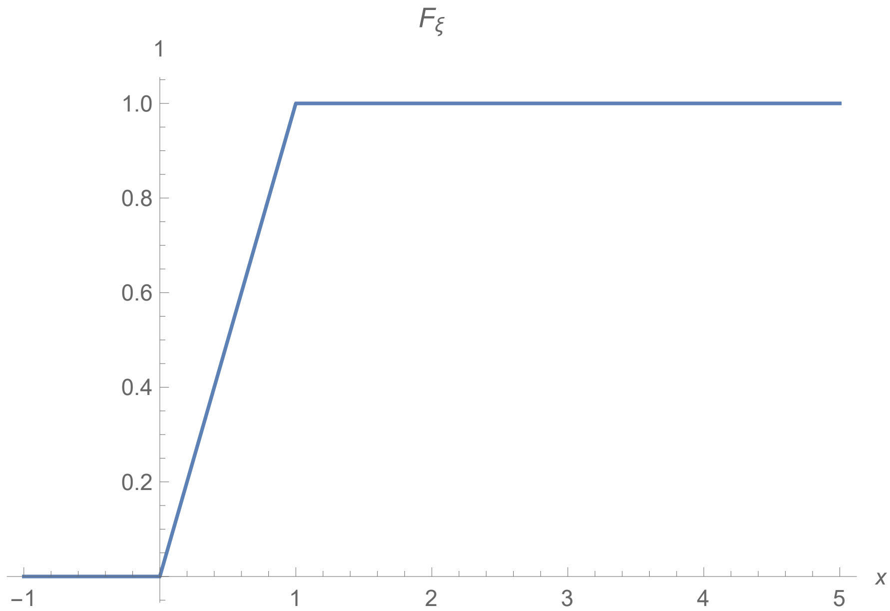
Точка бросается наугад в интервале $[0{,}1], \xi$ - координаты точки.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ x, x \in (0{,}1] \\ 1, x > 1 (\text{обязательно будет} \leqslant 1) \end{cases}$$

$$P(\xi < x) = P(\xi \in [0{,}1])$$



Вероятность отрезка $[0{,}x) = \frac{x}{1} = x$.



$$P(\xi < x) = P(\xi \in [0{,}x))$$

Задача 4.

Бросается два игральных кубика, дискретная случайная величина ξ - сумма очков. Найти $F_\xi =$?
Решение:

Рассмотрим все возможные варианты выпадения очков на обоих кубиках и их суммы:

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	(1;1)	(1;2) (2;1)	(1;3) (2;2) (3,1)	(1;4) (2;3) (3;2) (4;1)	(1;5) (2;4) (3;3) (4;2) (5;1)	(1;6) (2;5) (3;4) (4;3) (5;2) (6;1)	(2;6) (3;5) (4;4) (5;3) (6;2)	(3;6) (4;5) (5;4) (6;3)	(4;6) (5;5) (6;4)	(5;6) (6;5)	(6;6)

Так как каждый кубик подбрасывается независимо от другого, то согласно принципу произведения, общее число вариантов выпадения двух цифр на кубиках равно:

$$\#\Omega = 6 \cdot 6 = 36$$

Событие A_ξ - выпало суммарно ξ очков, тогда количество исходов для каждой суммы очков будет равно:

ξ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\#A_\xi$	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Таким образом,

$$x \leqslant 2 \Rightarrow F_\xi = P(\xi < x) = \frac{0}{36} = 0$$

$$x \in (2{,}3] \Rightarrow F_\xi = P(\xi < x) = \frac{\#A_1}{\#\Omega} = \frac{1}{36}$$

$$x \in (3{,}4] \Rightarrow F_\xi = P(\xi < x) = \frac{\#A_1 + \#A_2}{\#\Omega} = \frac{1+2}{36} = \frac{1}{12}$$

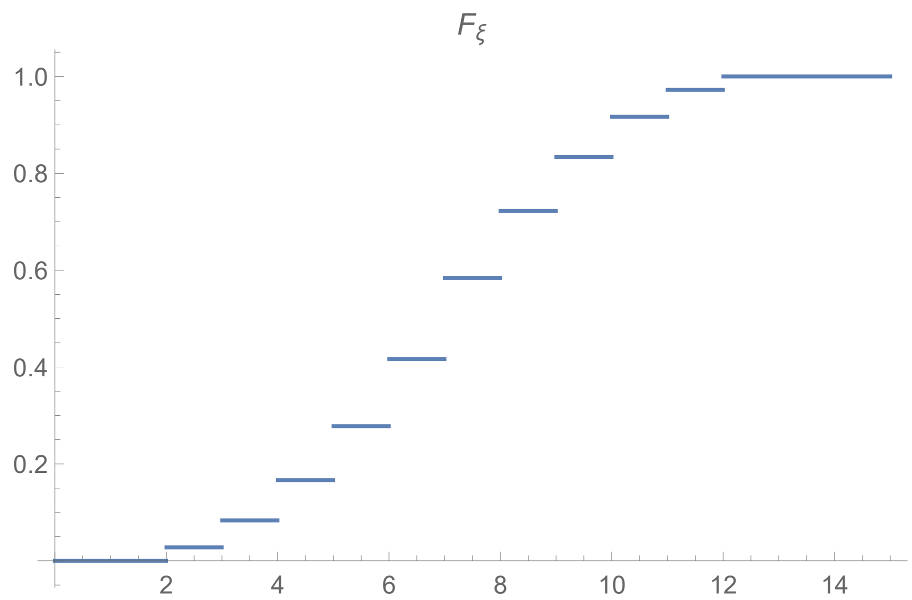
$$x \in (4{,}5] \Rightarrow F_\xi = \frac{1+2+3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\dots$$

В результате получаем функцию распределения:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 2 \\ \frac{1}{36}, & x \in (2{,}3] \\ \frac{1}{12}, & x \in (3{,}4] \\ \frac{1}{6}, & x \in (4{,}5] \\ \frac{10}{36} = \frac{5}{18}, & x \in (5{,}6] \\ \frac{15}{36} = \frac{5}{12}, & x \in (6{,}7] \\ \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, & x \in (7{,}8] \\ \frac{26}{36} = \frac{13}{18}, & x \in (8{,}9] \\ \frac{30}{36} = \frac{5}{6}, & x \in (9{,}10] \\ \frac{33}{36} = \frac{11}{12}, & x \in (10{,}11] \\ \frac{35}{36}, & x \in (11{,}12] \\ 1, & x > 12 \end{cases}$$

Построим график полученной функции распределения случайной величины ξ:



Задача 5.

Монета подбрасывается 5 раз,

а) ξ - число орлов, $F_\xi - ?$;

б) ξ_1 - "число орлов" - "число решек" $F_{\xi_1} - ?$

Решение:

Формула Бернулли:

$$P_n^k = C_n^k p^k q^{n-k}$$

где p - вероятность наступления события A (в нашем случае - выпадение орла), которое наступило k раз в n независимых испытаниях, $q = 1 - p$.

а) Вероятность выпадения как аверса, так и реверса равны $p = \frac{1}{2}$.

Таким образом, формула для вычислений:

$$P(\xi = k) = C_5^k p^k (1-p)^{n-k} = C_5^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5-k}$$

$$P(\xi = 0) = P(\xi = 5) = \underbrace{C_5^5}_{=1} \cdot \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{32} \\ \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32} \end{cases} = \frac{1}{32}$$

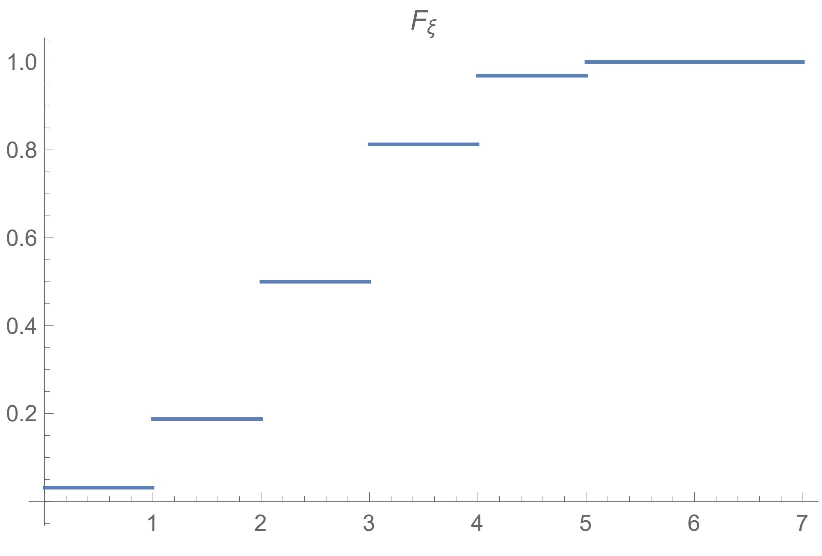
$$P(\xi = 1) = P(\xi = 4) = \frac{5}{32}$$

$$P(\xi = 2) = P(\xi = 3) = \frac{10}{32}$$

Следовательно, функция распределения случайной величины выпадения орлов равна:

$$F_\xi(x) = \sum_{i=0}^{k<x} P(\xi = k) = \begin{cases} \frac{1}{32}, & x \in (0,1] \\ \frac{6}{32} = \frac{3}{16}, & x \in (1,2] \\ \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, & x \in (2,3] \\ \frac{26}{32} = \frac{13}{16}, & x \in (3,4] \\ \frac{31}{32}, & x \in (4,5] \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

График данной функции:

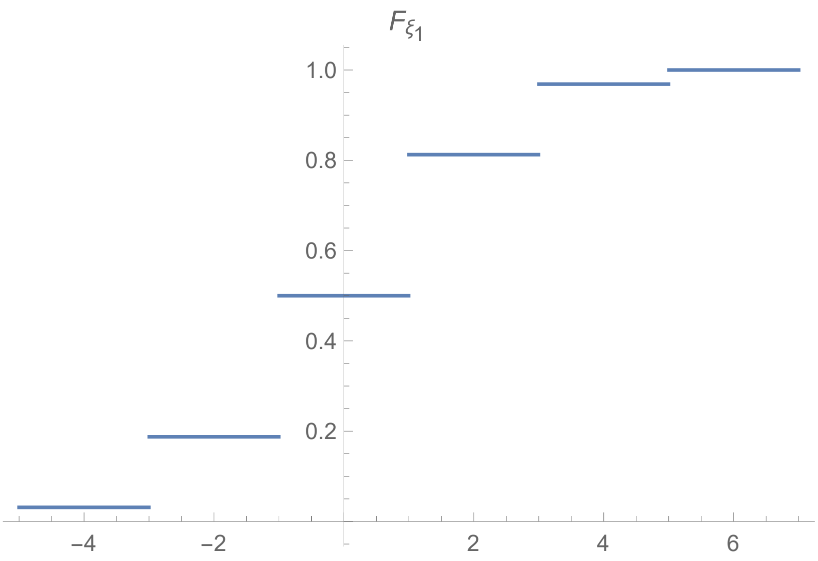


б) Случайная величина ξ_1 однозначно определяется ξ, т.к. при условии, что не выпадет орёл, обязательно выпадет решка. Т.е. $\xi_1 = \xi - (5 - \xi) = 2\xi - 5$.

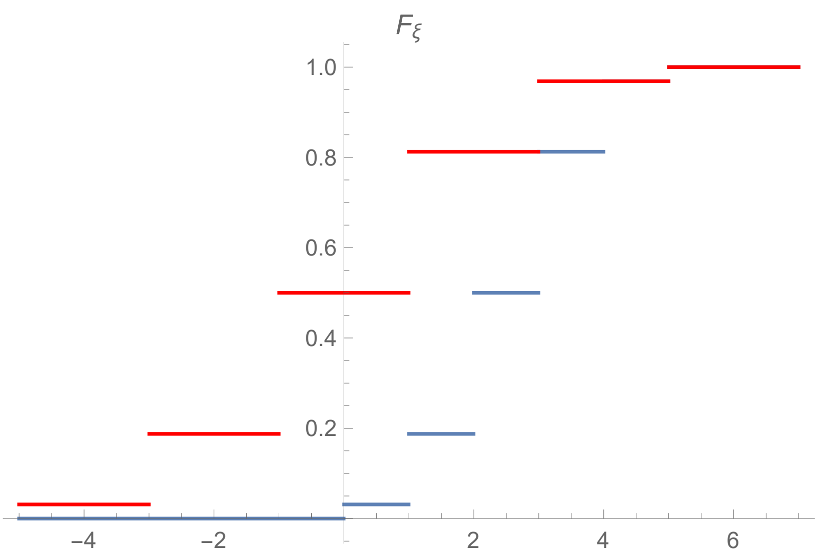
Значит, функция распределения обозначенной случайной величины будет равна:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -5 \\ \frac{1}{32}, & x \in (-5, -3] \\ \frac{6}{32} = \frac{3}{16}, & x \in (-3, -1] \\ \frac{16}{32} = \frac{1}{2}, & x \in (-1{,}1] \\ \frac{26}{32} = \frac{13}{16}, & x \in (1{,}3] \\ \frac{31}{32}, & x \in (3{,}5] \\ 1, & x > 5 \end{cases}$$

График данной функции:



Совмещая данные графики, получаем подтверждение утверждения выдвинутого в б) пункте: $\xi_1 = 2\xi - 5$.

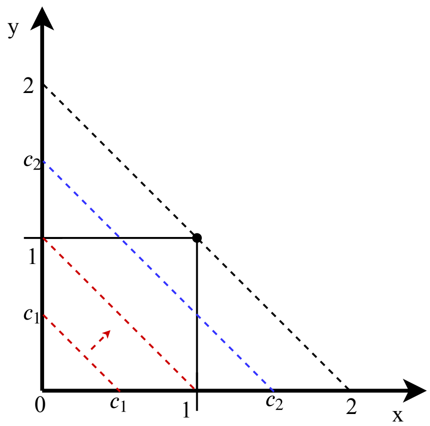


Задача 6.

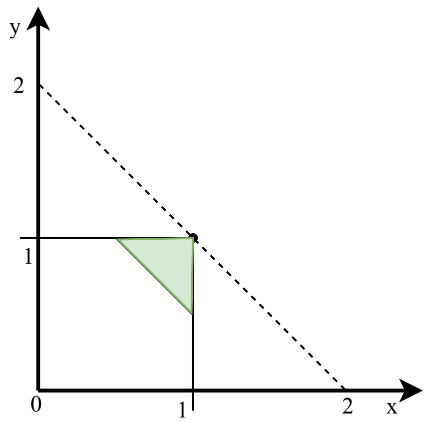
Точка бросается наугад в $[0{,}1] \times [0{,}1]$ - квадрат на плоскости. ξ - сумма координат точки. $F_\xi -?$

Решение:

Переформулируем данную задачу так, чтобы рассматривать отдельно каждую координату точки на интервале $[0,1]$, аналогично 3-ей задачи. В данном случае через квадрат проходит множество прямых, удовлетворяющих уравнение $y = kx + c$ (рассматриваем их отрезки, лежащие внутри площади), при фиксированном $k = 1$ и $c \in [0,2]$. Т.е. какую бы точку мы не бросили на плоскость квадрата, она всё равно будет лежать на одной их таких прямых, при том все остальные точки, лежащие на этой прямой, будут иметь равную сумму координат.



Примем $\xi = c$ (в общем случаем сумма координат точки на прямой будет равняться $2 \cdot c$, но данный коэффициент в данном случае роли не играет). Тогда $\xi < x$ при $x \in (0,1]$ (на рис. обозначено красным) случайная величина будет равняться площади прямоугольного $\triangle$-ка с катетами равными $x = y$. Для $\xi < x$ при $x \in (1,x]$ (на рис. обозначено синим) случайная величина будет равняться разности площади квадрата и прямоугольного $\triangle$-ка (на рис. ниже обозначен зелёным) с катетами равными $2 - x = 2 - y$ (2 - предельная точка, при которой отрезок прямой лежит внутри площади квадрата).

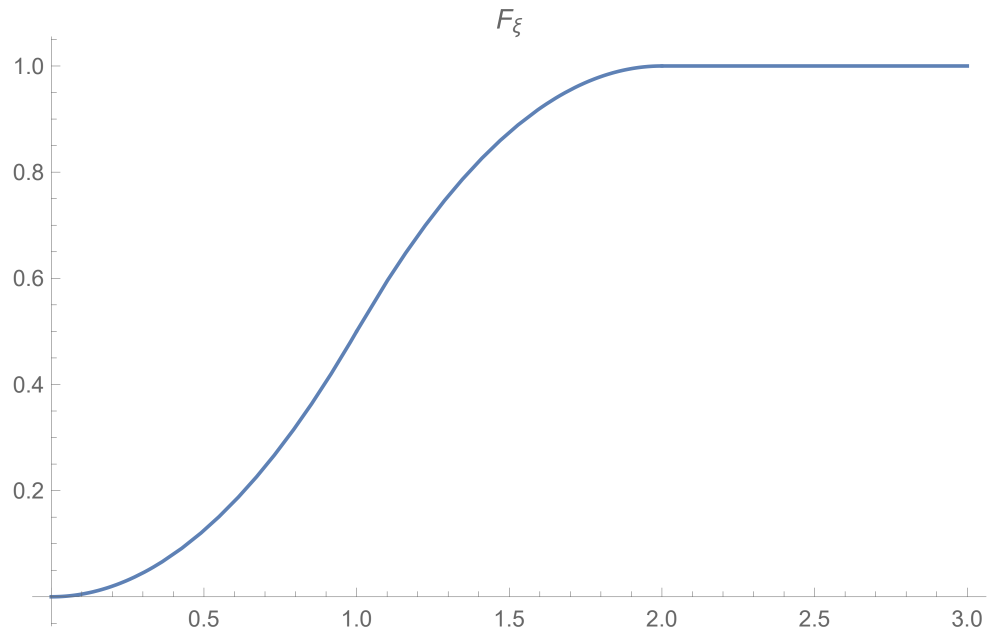


В результате, площадь квадрата равна $1^2 = 1$, площадь прямоугольного $\triangle$-ка с катетами по x равна $\frac{1}{2}x^2$.

Функция распределения случайной величины ξ примет вид:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{2}, & x \in (0,1] \\ 1 - \frac{(2-x)^2}{2}, & x \in (1,2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

График полученной функции представлен ниже:



Дискретные и абсолютно непрерывные случайные величины

Распределение ξ - дискретное, если $\exists E$ - не более чем счётное, т.е. $P(\xi \in E) = 1$.
Распределение ξ - абсолютно непрерывное, если $\exists p_\xi$ - неотрицательная измеримая, т.ч. $F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt, \forall t \in \mathbb{R}$ (p_ξ - плотность распределения).
В рассмотренных ранее задачах:

1. ξ - дискретная, $E = \{1{,}2, \dots ,6\}$
2. ξ - дискретная, $E = \mathbb{N} \cup \{0\}$
3. ξ - абсолютно непрерывная,

$$p_\xi = \begin{cases} 1, x \in [0{,}1] \\ 0, x \notin [0{,}1] \end{cases}$$

Абсолютно-непрерывные величины, связь плотности и функции распределения:

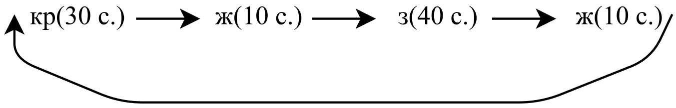
$$F_\xi = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$$

$$p_\xi(t) = F'_\xi(x)$$

в точках, где производная $\exists$-ет.

Задача 7.

Светофор работает циклически:

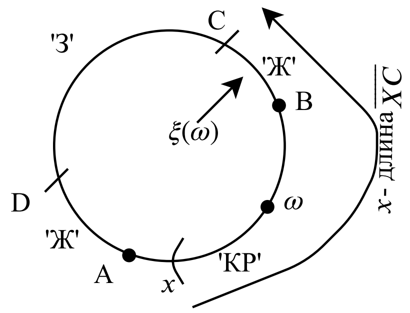


ξ - время ожидания 'з' сигнала светофора а/м, который подъезжает к светофору в случайный момент времени.

Решение:

ω - точка на окружности (приезд а/м). $\xi(\omega)$ - длина дуги от ω до начала 'з'.

Геометрическая схема: $P(\omega \in A) = \dfrac{\text{Длина дуги } A}{\text{Длина окружности}}$



$$P(\xi < 0) = 0$$

$$P(\xi = 0) = \frac{\text{Длина дуги 'з'}}{\text{Длина окр.}} = \frac{40}{30+10+40+10} = \frac{4}{9}$$

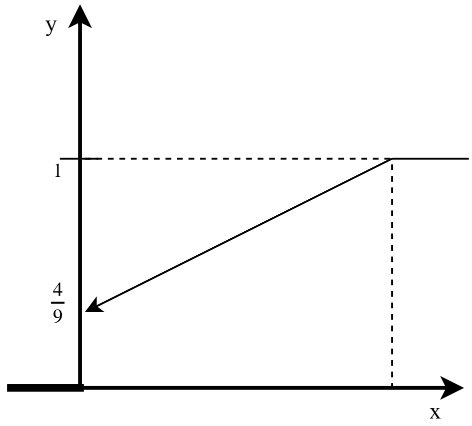
$$P(\xi < x) = \frac{\text{Длина дуги } \overline{XC}}{\text{Длина окр.}} = \frac{x+40}{90} = \frac{4}{9} + \frac{x}{90}, x \in (0{,}50)$$

$$P(\xi < x) = 1, x < 50$$

Примечание. Не дискретное и не абсолютно непрерывная - СМЕСЬ.

$$F_\xi(x) = \frac{4}{9}F_d(x) + \frac{5}{9}F_c(x)$$

$$F_d(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ 1, x > 0 \end{cases} \quad F_c = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ \frac{x}{50}, x \in (0{,}50] \\ 1, x > 50 \end{cases}$$



Задача 8.

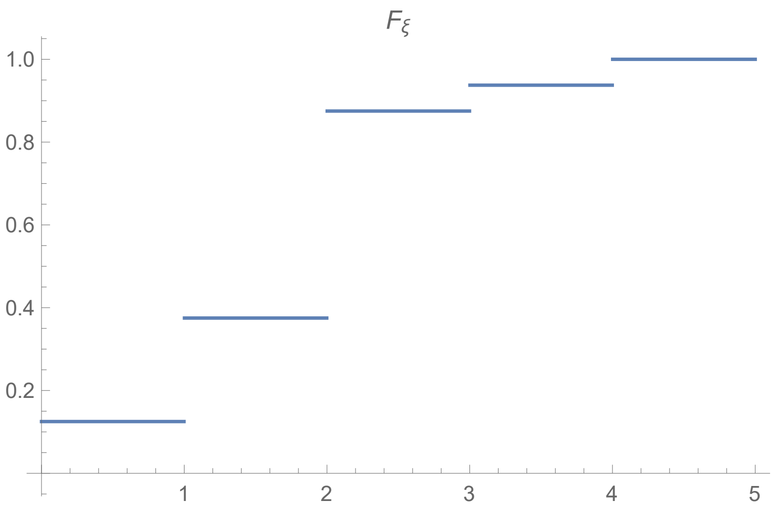
ξ - дискретная, $P(\xi = i)$ задана таблицей распределения. $F\xi(x)-?$

i	0	1	2	3	4	Σ
вер.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	1

Решение:

$$F_\xi = \sum_{i=0}^{i<x} P(\xi = i) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{1}{8}, & x \in (0{,}1] \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, & x \in (1{,}2] \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{7}{8}, & x \in (2{,}3] \\ \frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{16} = \frac{15}{16}, & x \in (3{,}4] \\ 1, & x > 4 \end{cases}$$

График распределения данной дискретной случайной величины:



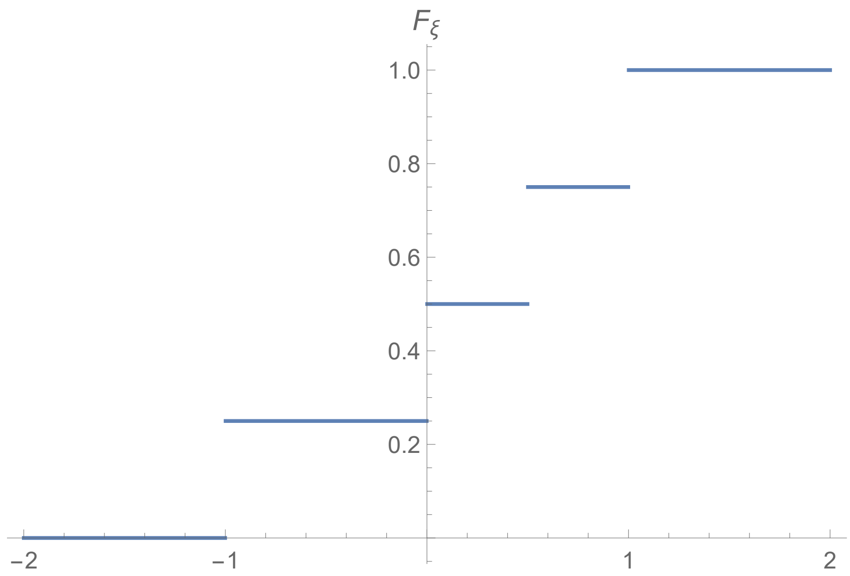
Задача 9.

ξ - дискретная, $F_\xi(x)$ задана таблицей. Построить таблицу распределения.

x	$\leqslant -1$	$(-1{,}0]$	$(0{,}\frac{1}{2}]$	$(\frac{1}{2}{,}1]$	$(1{,}\infty]$
$F_\xi(x)$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1

Решение:

Строим график данной функции:



Строим таблицу распределения:

i	-1	0	$\frac{1}{2}$	1
$P(\xi = i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	$\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

Проверяем, например, для $x \in (0{,}\frac{1}{2}]$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ - всё верно.

Задача 10.

В Задаче №4 определить тип случайной величины ξ. Характеризовать распределение с помощью таблицы распределения или плотности распределения.

Решение:

Т.к. $\exists E$ не более, чем счётное, т.е. $E = \{2{,}3, \dots {,}12\} \Rightarrow$ величина ξ - дискретная.

Таблица распределения:

i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(\xi = i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{12} - \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$	$\frac{6}{36} - \frac{3}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$	$\frac{10}{36} - \frac{6}{36} = \frac{1}{9}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{36}$

Задача 11.

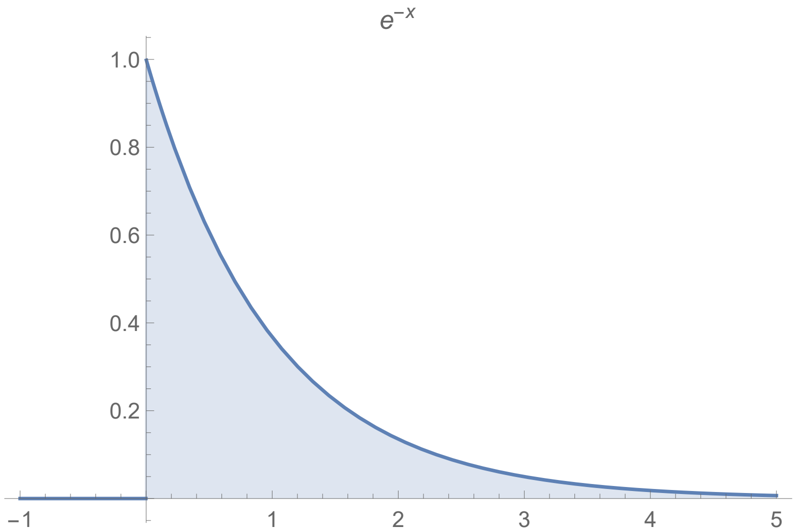
Дана плотность абсолютно непрерывного распределения ξ

$$p_\xi = \begin{cases} e^{-x}, x \geqslant 0 \\ 0, x < 0 \end{cases}$$

Найти $F_\xi(x)$–?

Решение:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ \int_0^x e^{-t}dt = 1 - e^{-x}, x > 0 \end{cases}$$



Задача 12.

Дана F_ξ

$$F_\xi = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ x^2, x \in (0,1] \\ 1, x > 1 \end{cases}$$

Найти $p_\xi(x)$–?

Решение:

$$F'_\xi = \begin{cases} 2x, x \in (0,1) \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases} \quad - \text{ не дифф. в } \{0,1\}$$

$$p_\xi = \begin{cases} 2x, x \in (0,1) \\ 0, x \notin [0,1] \end{cases}$$

Проверка:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi dx = \int_0^1 2xdx = 1$$

p_ξ - плотность распределения.

Задача 13.

Плотность распределения:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} e^{2x} \cdot c, x \leqslant 0 \\ 0, x > 0 \end{cases}$$

Найти $c-?$
Решение:

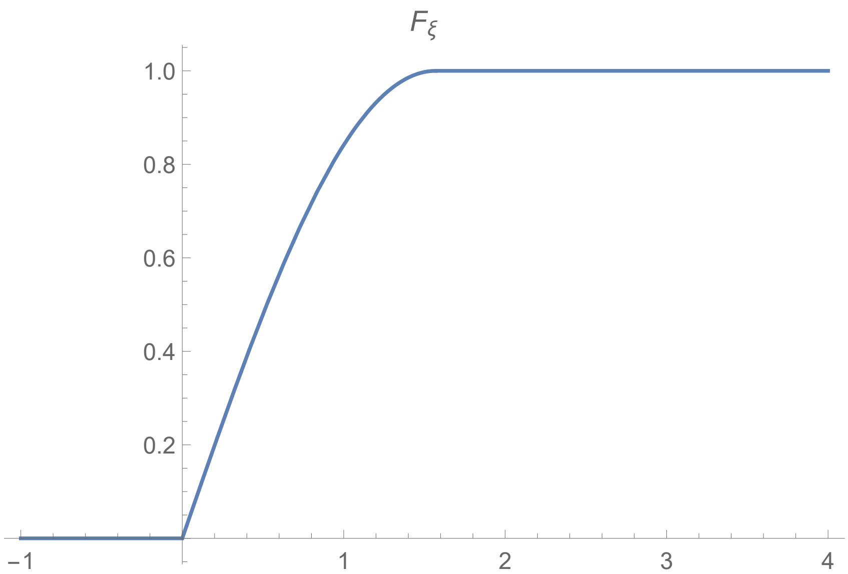
$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{0} c \cdot e^{2x} = \frac{ce^{2x}}{2}\Bigg|_{-\infty}^{0}$$
$$\Rightarrow \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

Задача 14.

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, x \leqslant 0 \\ \sin(x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right] \\ 1, x > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Найти $p_\xi-?$
Решение:

Построим график данной функции:



$$F'_\xi(x) = \begin{cases} \cos(x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Как видно и аналитически, и графически, функция не дифференцируема в точках 0 и $\frac{\pi}{2}$.

$$p_\xi(t) = F'_\xi(x) \Rightarrow$$

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \cos(x), x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, x \notin \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

Задача 15.

$$p_\xi = \begin{cases} 0, x \leqslant -1 \text{ или } x > 1 \\ \frac{1}{3}, x \in (-1{,}0] \\ c, x \in (0{,}1] \end{cases}$$

Найти $c-?, F_\xi-?$
Решение:

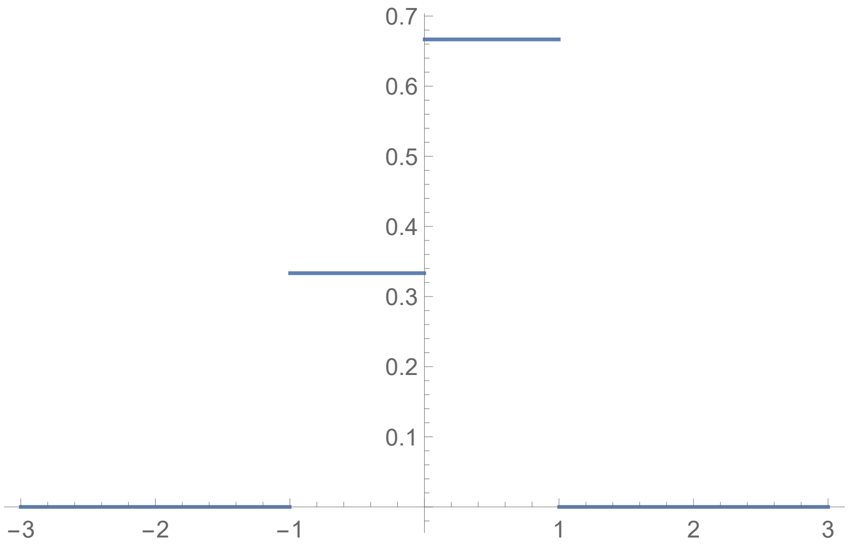
$$F_\xi = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)dt$$

$$p_\xi(t) = F'_\xi(x)$$

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x) = \int_{-1}^{0} \frac{1}{3}dx + \int_{0}^{1} cdx = \frac{1}{3} + c$$

$$\Rightarrow c = \frac{2}{3}$$

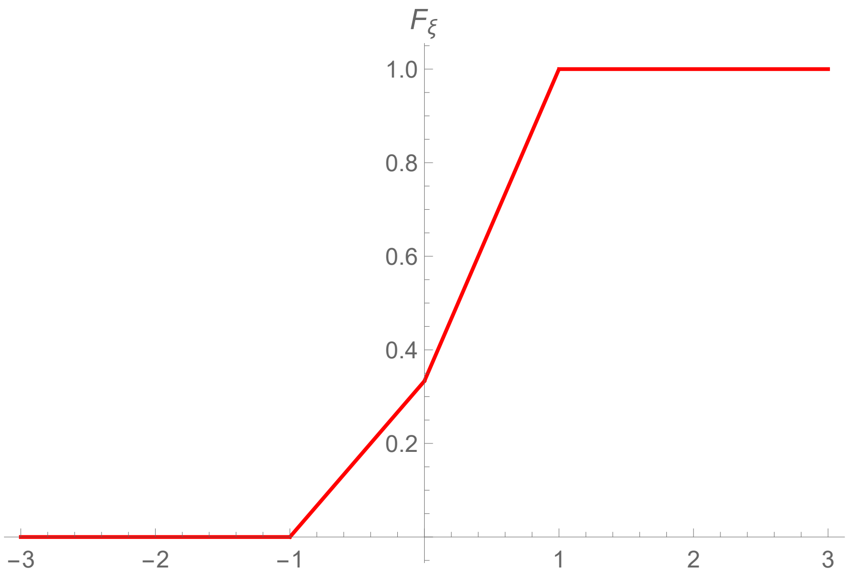
Построим график полученной функции:



- $\int\limits_{-\infty}^{x} 0dt = 0$
- $\int\limits_{-1}^{x} \frac{1}{3}dt = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$
- $\int\limits_{-1}^{0} \frac{1}{3}dt + \int\limits_{0}^{x} \frac{2}{3}dt = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$

$$\Rightarrow F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (-1{,}0] \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, & x \in (0{,}1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Построим график полученной функции:



Задача 16.

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot |x|, |x| \leqslant 1 \\ 0, |x| > 1 \end{cases}$$

Найти $c-?, F_\xi$

Решение:

Производная переменной по модулю равна частному этой переменной к ее модулю.

$$|x|' = \frac{x}{|x|}, x \neq 0$$

Интеграл переменной по модулю равен:

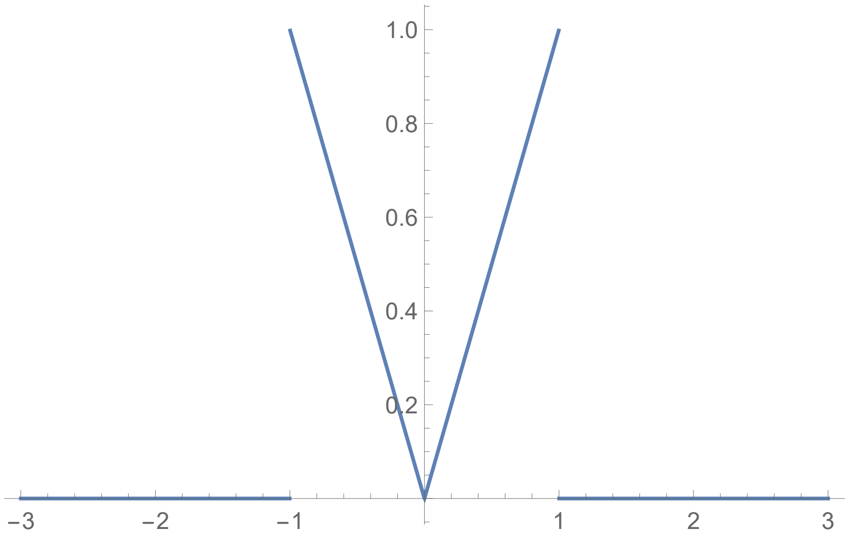
$$\int |x| dx = \frac{x \cdot |x|}{2} + C, C \in \mathbb{Z}$$

Раскроем модуль выражений системы и получим:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} -cx, -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ cx, 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0, x < -1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$$

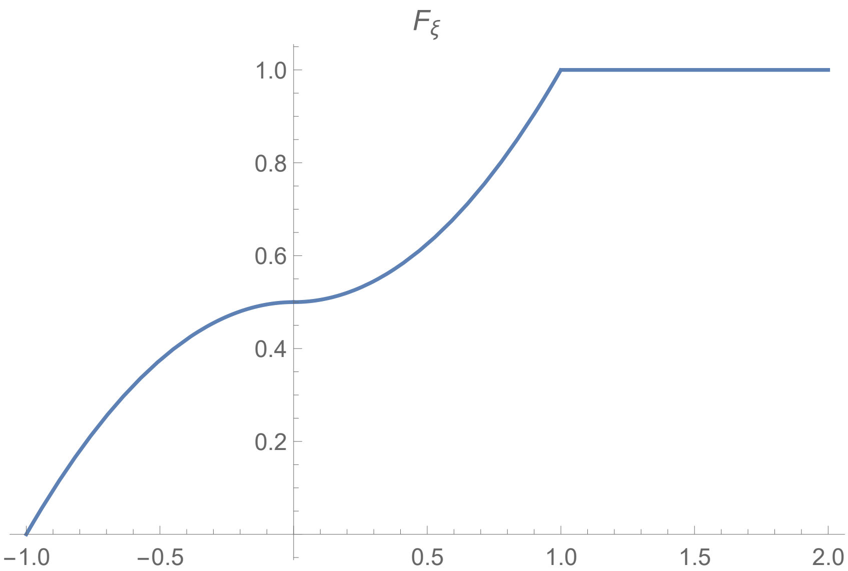
$$1 = \int_{-1}^{0} -cx dx + \int_{0}^{1} cx dx = \frac{c}{2} + \frac{c}{2} = c \Rightarrow c = 1$$

Построим график данной функции и исходной, подставив найденной . Они аналогичны $\rightarrow$ вычисления верны.



$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ \frac{-x^2+1}{2}, & -1 < x \leqslant 0 \\ \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}, & 0 < x \leqslant 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Построим график полученной функции:



Задача 17.

$$p_\xi = ce^{-|x|}, x \in \mathbb{R}$$

Найти $c-?, F_\xi-?$

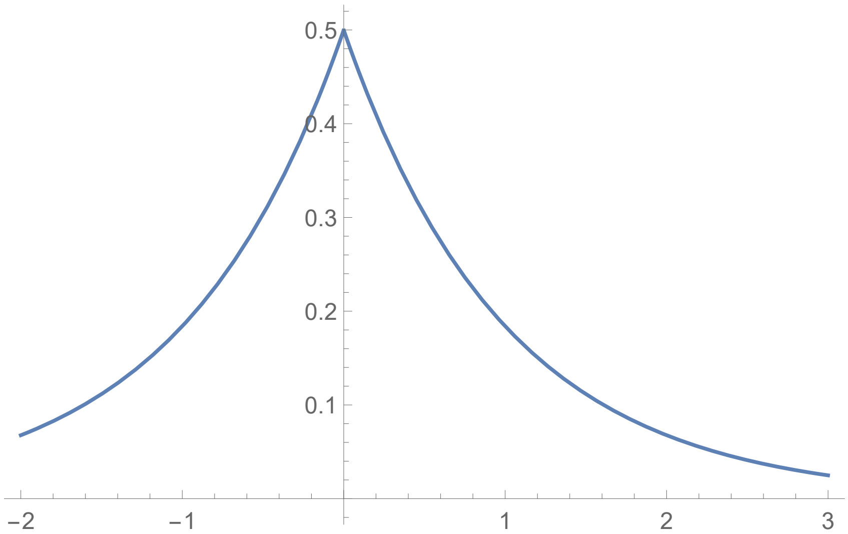
Решение:

Раскрываем модуль и получаем:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} c \cdot e^{x}, x < 0 \\ c \cdot e^{-x}, x \geqslant 0 \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{0} c \cdot e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} c \cdot e^{-x} dx = c + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

Построим график:



- $\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{2} \cdot e^{x} dt = \frac{e^{x}}{2}$
- $\frac{1}{2} + \int\limits_{0}^{x} \frac{1}{2} e^{-x} dt = \frac{1}{2} + \left(-\frac{e^{-x}}{2}\right)\Big|_{0}^{x} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-x}}{2} = -\frac{e^{-x}}{2} + 1$

$$\Rightarrow F_{\xi} = \begin{cases} \frac{e^{x}}{2}, & x \leqslant 0 \\ -\frac{e^{-x}}{2} + 1, & x > 0 \end{cases}$$

Построим график: