Теория вероятностей и мат. статистика

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

16.05.2020

Независимость случайных величин и условные распределения

Задача 6 (СГТВ 4.7)

Условие:

Случайный вектор (ξ, η) имеет двухмерное дискретное распределение, заданное таблицами (варианты а) и б)):

а)

Значения ξ	Значения η		
	0	1	2
-0.5	$1/8$	0	$1/8$
0	$1/8$	$1/4$	0
1.5	$1/8$	$1/8$	$1/8$

б)

Значения ξ	Значения η		
	0.5	1.5	2
-0.2	$1/12$	$1/8$	$1/24$
-0.1	$1/6$	$1/4$	$1/12$
0	$1/12$	$1/8$	$1/24$

Проверить, являются ли компоненты вектора (ξ, η) независимыми; вычислить условные распределения ξ при условии η и η при условии ξ, а также коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$ и условное математическое ожидание ξ при различных значениях η.

Решение:

а) Представим распределение компонент в виде таблиц:

ξ	-0.5	0	1.5
P	$2/8$	$3/8$	$3/8$

η	0	1	2
P	$3/8$	$3/8$	$2/8$

Покажем, что случайные величины являются зависимыми, например:

$$P(\xi = -0.5, \eta = 0) = \frac{1}{8}; \qquad P(\xi = -0.5) \cdot P(\eta = 0) = \frac{2}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{3}{32}$$

$$\frac{1}{8} = P(\xi = -0.5, \eta = 0) \neq P(\xi = -0.5) \cdot P(\eta = 0) = \frac{3}{32}$$

Компоненты случайного вектора могут быть независимыми только если любой носитель его распределения с точностью до событий вероятности 0 представляется как прямое произведение носителей распределений компонент, что в данном случае не выполняется.

Вычислим мат. ожидание:

$$E\xi = -0.5 \cdot \frac{2}{8} + 0 \cdot \frac{3}{8} + 1.5 \cdot \frac{3}{8} = \frac{7}{16}; \qquad E\eta = 0 \cdot \frac{3}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{2}{8} = \frac{7}{8}$$

$$E\xi\eta = -0.5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} + 1.5 \cdot 1 \cdot \frac{1}{8} + 1.5 \cdot 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{7}{16}$$

Найдём меру линейной зависимости двух случайных величин - ковариацию:

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = E\xi\eta - E\xi \cdot E\eta = \frac{7}{16} - \frac{7}{16} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{128}$$

Вычислим дисперсию:

$$E\xi^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{8} + \frac{9}{4} \cdot \frac{3}{8} = \frac{29}{32} \qquad E\eta^2 = \frac{3}{8} + 4 \cdot \frac{2}{8} = \frac{11}{8}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{29}{32} - \left(\frac{7}{16}\right)^2 = \frac{183}{256} \qquad D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{11}{8} - \left(\frac{7}{8}\right)^2 = \frac{39}{64}$$

Найдём коэффициент корреляции:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{\frac{7}{128}}{\sqrt{\frac{183}{256} \cdot \frac{39}{64}}} = \frac{7\sqrt{793}}{2379} \approx 0.0828591$$

Т.к. коэффициент корреляции близится к 0, то между величинами наблюдается слабая зависимость. Иными словами, поведение величины ξ не будет совсем (или почти совсем) влиять на поведение η (и наоборот).

Матрица ковариации:

$$\operatorname{var}\begin{pmatrix}\xi \\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 183/256 & 7/128 \\ 7/128 & 39/64 \end{pmatrix}$$

Далее распишем условные распределения ξ при условии η и наоборот соотвественно.

$$q_{\xi|\eta=y}(x) = \frac{P(\xi = x, \eta = y)}{P(\eta = y)} (x = \{-0.5, 0, 1{,}5\}, y = \{0, 1, 2\})$$

$$q_{\eta|\xi=y}(x) = \frac{P(\xi = y, \eta = x)}{P(\xi = y)} (x = \{0, 1, 2\}, y = \{-0.5, 0, 1.5\})$$

Знач. η / Знач. ξ	0	1	2
-0.5	$\frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$	0	$\frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$
0	$\frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$	$\frac{1/4}{3/8} = \frac{2}{3}$	0
1.5	$\frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$	$\frac{1/8}{3/8} = \frac{1}{3}$	$\frac{1/8}{2/8} = \frac{1}{2}$

Знач. η \ Знач. ξ	-0.5	0	1.5
0	$\frac{1/8}{2/8}=\frac{1}{2}$	$\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$	$\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$
1	0	$\frac{1/4}{3/8}=\frac{2}{3}$	$\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$
2	$\frac{1/8}{2/8}=\frac{1}{2}$	0	$\frac{1/8}{3/8}=\frac{1}{3}$

Нетрудно заметить, что в обоих случаях сумма значений по столбцам даёт единицу.

Условное математическое ожидание ξ при различных значениях η:

$$E(\xi|\eta=0)=-0.5\cdot\frac{1}{3}+1.5\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3};\qquad D(\xi|\eta=0)=0.25\cdot\frac{1}{3}+2.25\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{13}{18}$$

$$E(\xi|\eta=1)=\frac{1}{3}\cdot 1.5=\frac{1}{2};\qquad D(\xi|\eta=1)=2.25\cdot\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$E(\xi|\eta=2)=-0.5\cdot\frac{1}{2}+1.5\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2};\qquad D(\xi|\eta=2)=0.25\cdot\frac{1}{2}+2.25\cdot\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$$

Распределение $E(\xi|\eta)$:

$E(\xi\|\eta)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$

Распределение $D(\xi|\eta)$:

$D(\xi\|\eta)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{18}$	1
P	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$

б) Распределение компонент представлено ниже:

ξ	-0.2	-0.1	0
P	1/4	1/2	1/4

η	0.5	1.5	2
P	1/3	1/2	1/6

Проверим независимость:

Знач. ξ \ Знач. η	0.5	1.5	2
-0.2	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$
-0.1	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$
0	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{24}$

Как видно из таблиц, $P(\xi,\eta) = P(\xi)\cdot P(\eta) \Rightarrow$ величины независимы.

Найдём мат. ожидание:

$$E\xi = -0.2\cdot\frac{1}{4} - 0.1\cdot\frac{1}{2} = -\frac{1}{10};\qquad E\xi^2 = 0.04\cdot\frac{1}{4} + 0.01\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{200}$$

$$E\eta = 0.5\cdot\frac{1}{3} + 1.5\cdot\frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{6} = \frac{5}{4};\qquad E\eta^2 = 0.25\cdot\frac{1}{3} + 2.25\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{6} = \frac{15}{8}$$

$$E\xi\eta = -0.2\cdot\left(0.5\cdot\frac{1}{12} + 1.5\cdot\frac{1}{8} + 2\cdot\frac{1}{24}\right) - 0.1\cdot\left(0.5\cdot\frac{1}{6} + 1.5\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{6}$$

Дисперсия:

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi^2) = \frac{3}{200} - \left(-\frac{1}{10}\right)^2 = 0.005;\quad D\eta = E\eta^2 - (E\eta^2) = \frac{15}{8} - \left(\frac{5}{4}\right)^2 = 0.3125$$

Ковариация:

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta) = E\xi\eta - E\xi\cdot E\eta = -\frac{1}{6} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{4} = -\frac{1}{24}$$

Коэффициент корреляции:

$$r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}} = \frac{-\frac{1}{24}}{\sqrt{0.005\cdot 0.3125}} = -\frac{-\sqrt{10}}{3} \approx -1.05409$$

Матрица ковариации:

$$\operatorname{var}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0.005 & -\frac{1}{24}\\ -\frac{1}{24} & 0.3125\end{pmatrix}$$

Далее распишем условные распределения ξ при условии η и наоборот соответственно.

Знач. η / Знач. ξ	0.5	1.5	2
-0.2	$\frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$	$\frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$
-0.1	$\frac{1/6}{1/3} = \frac{1}{2}$	$\frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1/12}{1/6} = \frac{1}{2}$
0	$\frac{1/12}{1/3} = \frac{1}{4}$	$\frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$	$\frac{1/24}{1/6} = \frac{1}{4}$

Знач. ξ / Знач. η	-0.2	-0.1	0
0.5	$\frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$	$\frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$	$\frac{1/12}{1/4} = \frac{1}{3}$
1.5	$\frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$	$\frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}$	$\frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$
2	$\frac{1/24}{1/4} = \frac{1}{6}$	$\frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6}$	$\frac{1/24}{1/4} = \frac{1}{6}$

Как нетрудно заметить сумма элементов по столбцам даёт единицу, а одинаковые значения по строкам подтверждают независимость компонент.

Условное математическое ожидание ξ при различных значениях η:

$$E(\xi|\eta = 0.5) = -0.2\cdot\frac{1}{4} - 0.1\cdot\frac{1}{2} = -0.1;\quad E(\xi|\eta = 1.5) = -0.2\cdot\frac{1}{4} - 0.1\cdot\frac{1}{2} = -0.1$$

$$E(\xi|\eta = 2) = -0.2\cdot\frac{1}{4} - 0.1\cdot\frac{1}{2} = -0.1$$

$$D(\xi|\eta = 0.5) = D(\xi|\eta = 1.5) = D(\xi|\eta = 2) = 0.04\cdot\frac{1}{4} + 0.01\cdot\frac{1}{2} - 0.01 = 0.005;$$

Задача 7 (СГТВ 4.8)

Проверить, являются ли независимыми компоненты вектора (ξ, η); вычислить условные распределения ξ при условии η и η при условии ξ и коэффициент корреляции $r(\xi, \eta)$, если их совместная плотность распределения имеет вид:

а)

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} |x - y|/3, x{,}y \in [0{,}1] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

б)

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \begin{cases} c\exp(-(x + y)), 0 \leqslant x \leqslant y \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

в)

$$p_{\xi,\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{1}{2(2-\rho^2)}\left(\frac{x^2}{\rho_1^2} - 2\rho\frac{xy}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{y^2}{\sigma_2^2}\right)\right]$$

$$x, y \in \mathbb{R}, \text{ где } \sigma_1, \sigma_2 > 0, \rho \in (-1, 1) - \text{ некоторые параметры.}$$