Приложения современной алгебры

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Дужин Василий Сергеевич

13.03.2020

1 Введение в асимптотическую комбинаторику диаграмм и таблиц Юнга

Задача 1.

Вычислить числа разбиений $p(n)$ для $n = 1 \dots 10$ с помощью

- Производящей функции;
- Рекуррентной формулы.

Решение:

- Для нахождения $p(n)$ необходимо вычислить коэффициенты при x^n в многочлене, представляющим производящую функцию последовательности (см. теоретические сведения). Очевидно, что при вычислениях не понадобятся множители, в которых $k > n$, а внутри - слагаемые степени x^j при $j > n$.

  Таким образом, необходимо раскрыть скобки в произведении вида:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x^k + x^{2k} + \dots + x^{ik}, ik \leqslant n)$$

  Для вычислений использовался математический пакет Wolfram Mathematica. Результат его работы приведён на рис. 1.

```
In[•]:= in = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^10)
           (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^10) (1 + x^3 + x^6 + x^9) (1 + x^4 + x^8)
           (1 + x^5 + x^10) (1 + x^6) (1 + x^7) (1 + x^8) (1 + x^9) (1 + x^10)
        out = Expand[in]
                раскрыть скобки
```

Out[•]= $(1 + x^6)(1 + x^7)(1 + x^8)(1 + x^4 + x^8)(1 + x^9)(1 + x^3 + x^6 + x^9)(1 + x^{10})(1 + x^5 + x^{10})(1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + x^{10})(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + x^9 + x^{10})$

Out[•]= $1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + 42x^{10} + 54x^{11} + 70x^{12} + 91x^{13} + 116x^{14} + 145x^{15} + 181x^{16} + 222x^{17} + 270x^{18} + 325x^{19} + 386x^{20} + 454x^{21} + 529x^{22} + 616x^{23} + 707x^{24} + 805x^{25} + 910x^{26} + 1022x^{27} + 1135x^{28} + 1255x^{29} + 1374x^{30} + 1497x^{31} + 1618x^{32} + 1741x^{33} + 1856x^{34} + 1966x^{35} + 2069x^{36} + 2165x^{37} + 2246x^{38} + 2319x^{39} + 2379x^{40} + 2425x^{41} + 2456x^{42} + 2473x^{43} + 2473x^{44} + 2456x^{45} + 2425x^{46} + 2379x^{47} + 2319x^{48} + 2246x^{49} + 2165x^{50} + 2069x^{51} + 1966x^{52} + 1856x^{53} + 1741x^{54} + 1618x^{55} + 1497x^{56} + 1374x^{57} + 1255x^{58} + 1135x^{59} + 1022x^{60} + 910x^{61} + 805x^{62} + 707x^{63} + 616x^{64} + 529x^{65} + 454x^{66} + 386x^{67} + 325x^{68} + 270x^{69} + 222x^{70} + 181x^{71} + 145x^{72} + 116x^{73} + 91x^{74} + 70x^{75} + 54x^{76} + 42x^{77} + 30x^{78} + 22x^{79} + 15x^{80} + 11x^{81} + 7x^{82} + 5x^{83} + 3x^{84} + 2x^{85} + x^{86} + x^{87}$

Рисунок 1 – *Раскрытие скобок многочлена*

Обращаясь к последнему выводу, получаем требуемые коэффициенты - число разбиений.

$$1 + x + \mathbf{2}x^2 + \mathbf{3}x^3 + \mathbf{5}x^4 + \mathbf{7}x^5 + \mathbf{11}x^6 + \mathbf{15}x^7 + \mathbf{22}x^8 + \mathbf{30}x^9 + \mathbf{42}x^{10} + \dots$$

- Пользуясь переформулированной пентагольной теоремой Эйлера, вывод которой представлен в разделе "Теоретические сведения" , получаем (использование ф-лы расписано для $p(3)$ и $p(5)$):

$$p(1) = p(0) = 1$$

$$p(2) = p(1) + p(0) = 1 + 1 = 2$$

$$p(3) = (-1)^{1+1}\left(p\left(3 - \frac{3-1}{2}\right) + p\left(3 - \frac{3+1}{2}\right)\right) +$$
$$+(-1)^{1+2}\left(p\left(3 - \frac{2(6-2)}{2}\right) + p\left(3 - \frac{2(6+1)}{2}\right)\right) =$$
$$= p(2) + p(1) - (p(-1) + p(-4)) = p(2) + p(1) = 2 + 1 = 3$$

$$p(4) = p(3) + p(2) = 2 + 3 = 5$$

$$p(5) = (-1)^{1+1}\left(p\left(5 - \frac{3-1}{2}\right) + p\left(5 - \frac{3+1}{2}\right)\right) +$$
$$+(-1)^{2+1}\left(p\left(5 - \frac{2(6-1)}{2}\right) + p\left(5 - \frac{2(6+1)}{2}\right)\right) =$$
$$= p(4) + p(3) - (p(0) + p(-2)) = p(4) + p(3) - p(0) = 5 + 3 - 1 = 7$$

$$p(6) = p(5) + p(4) - p(1) = 7 + 5 - 1 = 11$$

$$p(7) = p(6) + p(5) - p(2) - p(0) = 11 + 7 - 2 - 1 = 15$$

$$p(8) = p(7) + p(6) - p(3) - p(1) = 15 + 11 - 3 - 1 = 22$$

$$p(9) = p(8) + p(7) - p(4) - p(2) = 22 + 15 - 5 - 2 = 30$$

$$p(10) = p(9) + p(8) - p(5) - p(3) = 30 + 22 - 7 - 3 = 42$$

Ответ:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p(n)$	1	2	3	5	7	11	15	22	30	42

Задача 2.

Определить соответствия между следующими конструкциями:

- Скобочными последовательностями и таблицами Юнга;
- Скобочными последовательностями и бинарными деревьями;
- Бинарными деревьями и триангуляциями многоугольника.

Решение:

- Число и тех и других выражается через числа Каталана.

  Рекуррентная формула для вычисления:

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i}$$

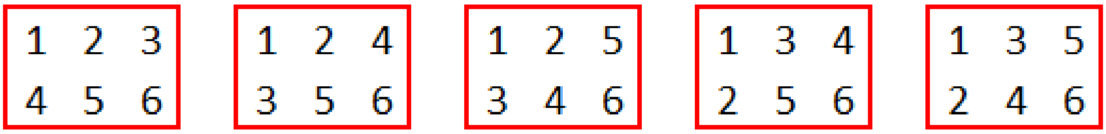
  Выражение числа Каталана:

$$C(n) = \frac{(2n)!}{n!(n+1)!}$$

  Правильные скобочные последовательности – наборы открывающихся и закрывающихся скобок, в которых каждой открывающейся скобке соответствует закрывающаяся. Число возможных последовательностей с фиксированным числом пар скобок выражается числом Каталана. Например, 14 правильных последовательностей из четырех пар скобок:

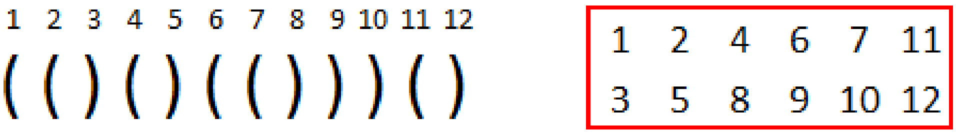
(((()))),	((()())),((())()),	((()))(),(()(())),	(()()()),(()())(),
(())(()),	(())()(),()((())),	()(()()),()(())(),	()()(()),()()()()

  Таблица (диаграмма) Юнга - прямоугольник, заполненный последовательными числами так, чтобы они возрастали во всех строках и столбцах. Число таблиц Юнга размером $2 \times n$ выражается числом Каталана.



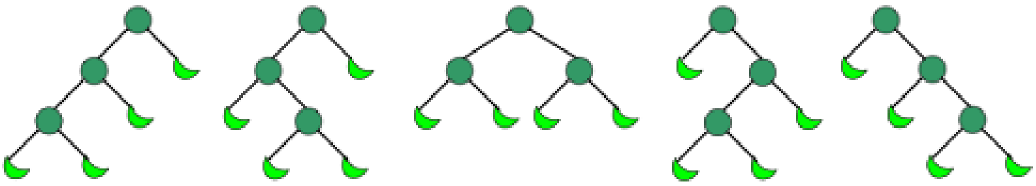
Доказательство:

Пронумеруем скобки слева направо. Если скобка открывающаяся, то соответствующее ей число пишем в верхнюю строку. Если закрывающаяся, то в – нижнюю. Так как i-ая открывающаяся скобка всегда стоит левее i-ой закрывающейся, то число соответствующее открывающейся скобке будет меньше числа, соответствующего закрывающей. А значит, верхнее число в таблице окажется меньше нижнего в той же колонке, то есть из правильной скобочной последовательности мы получили таблицу Юнга. Это построение также обратимо, а значит получено взаимно-однозначное соответствие.



- Аналогичная связь с числами Каталана прослеживается с бинарными деревьями.

  Двоичные деревья – деревья, из каждого узла которых (кроме листьев) выходит ровно две ветки. Количество бинарных деревьев с заданным числом листьев – число Каталана. На рисунке представлены пять деревьев с 4 листьями в каждом.

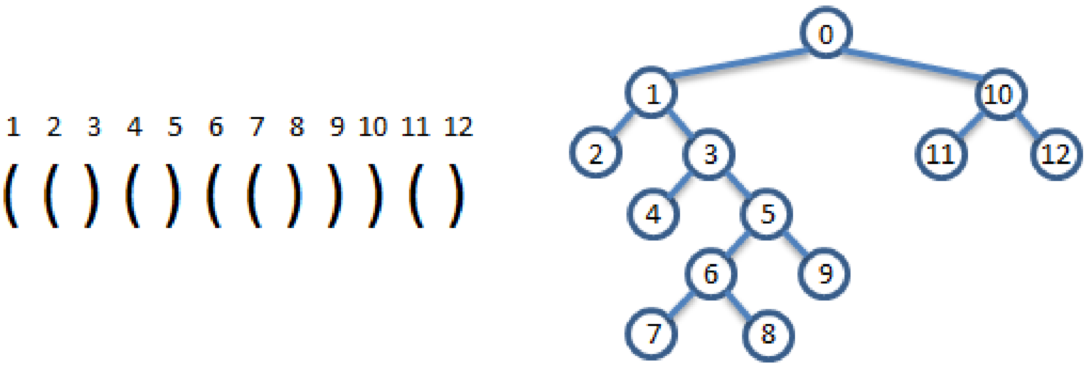


Количество бинарных деревьев равно:

$$C_{n-1}$$

Доказательство:

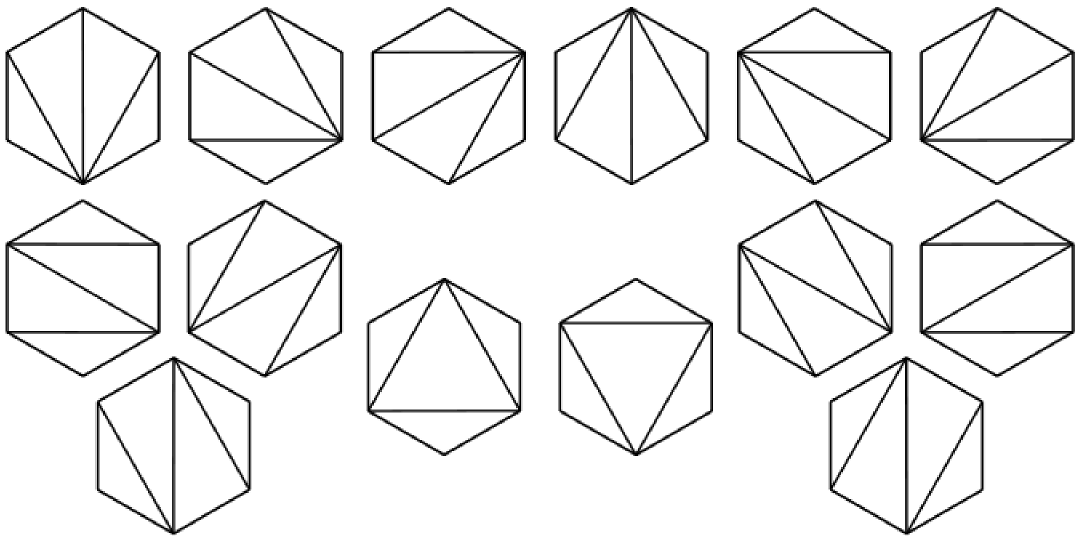
Воспользуемся прямым (NLR) обходом дерева и пронумеруем вершины (корень примем за 0) в порядке обхода. Теперь, если при переходе к числу i мы спустились к узлу, являющимся левым для своего родителя, то на i-ое место ставим открывающуюся скобку. В противном случае ставим закрывающуюся.



Дерево – бинарное, поэтому у каждого узла есть сосед. А значит, спустившись к ребенку и поставив открывающуюся скобку, мы рано или поздно доберемся до его соседа и поставим закрывающуюся скобку. Это гарантирует правильность получившейся последовательности. Построение легко обратить и взяв за основу скобочную последовательность получить бинарное дерево. Заметим, что если в скобочной последовательности n пар то соответствующее дерево имеет $n+1$ лист.

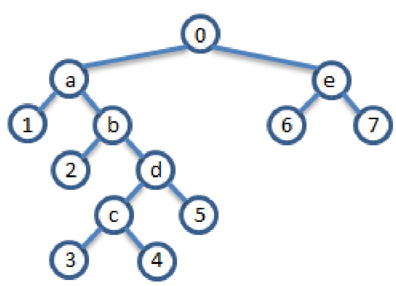
- Количество различных триангуляций выпуклого многоугольника диагоналями равно числу Каталана. $\Leftrightarrow$ Количество разбиений выпуклого $(n+2)$-угольника на n треугольников непересекающимися диагоналями равно числу Каталана C_n.

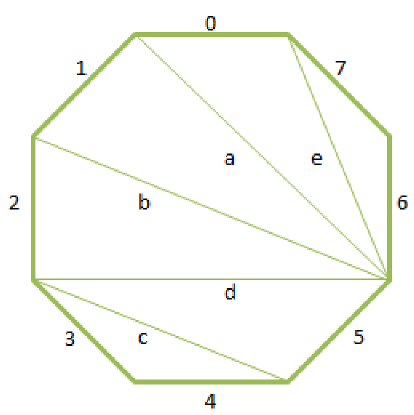
  Триангуляцией полигона называется декомпозиция полигона в набор треугольников.



Доказательство:

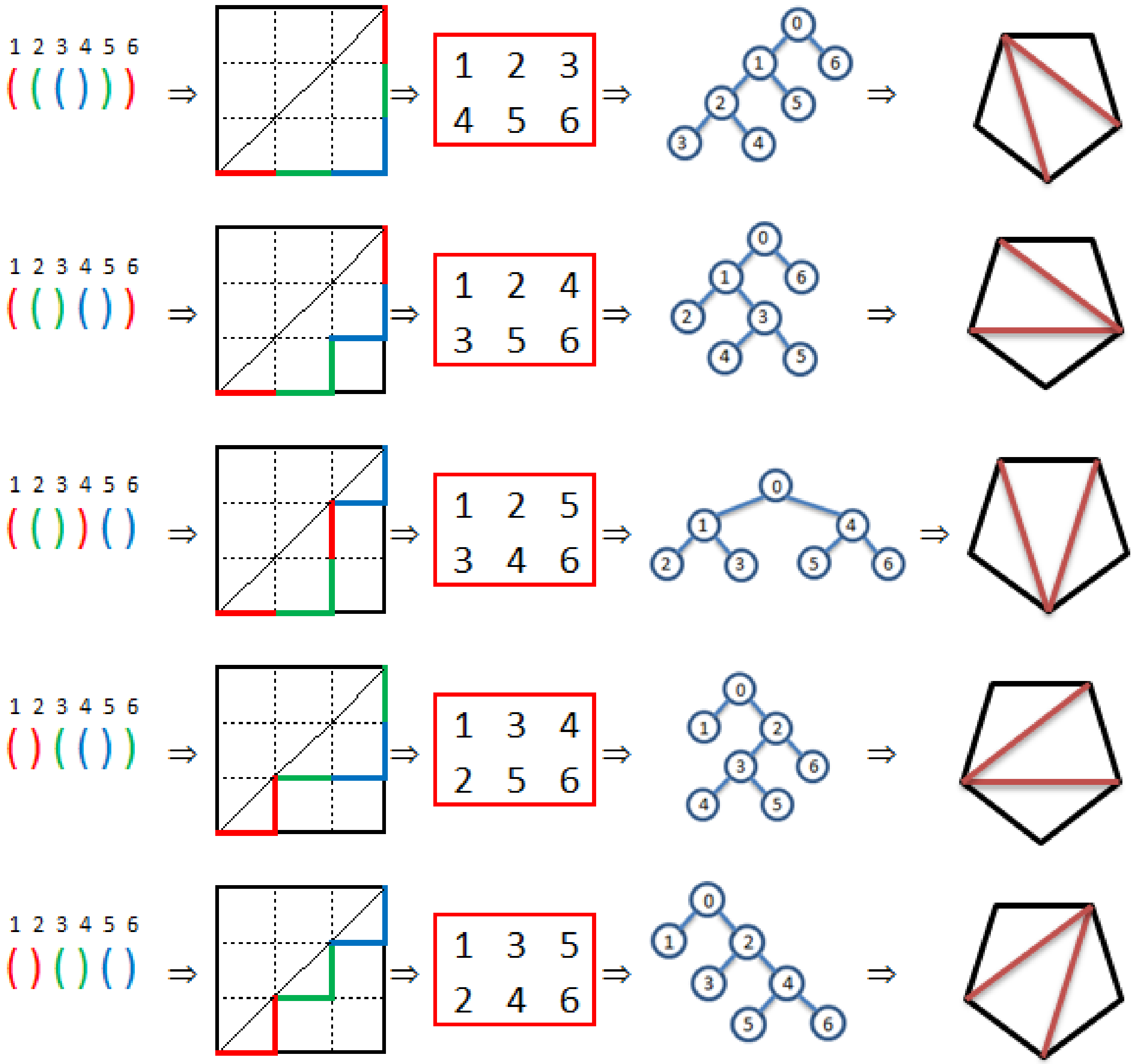
Занумеруем в нем все листья слева направо (остальные узлы пометим буквами). Для триангуляции возьмем многоугольник, в котором вершин на одну больше, чем листьев в дереве. Одну из сторон этого многоугольника отметим, как стартовую, а остальные занумеруем (для наглядности – против часовой стрелки). Далее выполняем следующую процедуру – если две вершины дерева соседние, то соответствующие стороны многоугольника "стянем" диагональю, которую пометим той буквой, которой помечен родитель этой пары узлов в дереве. Далее продолжаем процедуру «стягивания» пока от многоугольника не останется единственный стартовый отрезок.





Как можно заметить три стороны каждого треугольника в получившемся разбиении соответствуют одному родительскому узлу и двум его потомкам. Поэтому, если взять два разных дерева, то получится два разных разбиения.

Общее соответствие для 3-его числа Каталана приведено ниже:



2 Соответствие Робинсона-Шенстеда-Кнута

Задача 1.

С помощью прямого преобразования RSK сгенерировать таблицы P, Q по следующим перестановкам:

- 6, 7, 5, 4, 10, 1, 8, 9, 2, 3
- 4, 3, 7, 2, 10, 9, 8, 6, 1, 5

Решение:

6, 7, 5, 4, 10, 1, 8, 9, 2, 3

9			
3	8		
2	7	10	
1	4	5	6

P

8			
5	10		
2	7	9	
1	3	4	6

Q

4, 3, 7, 2, 10, 9, 8, 6, 1, 5

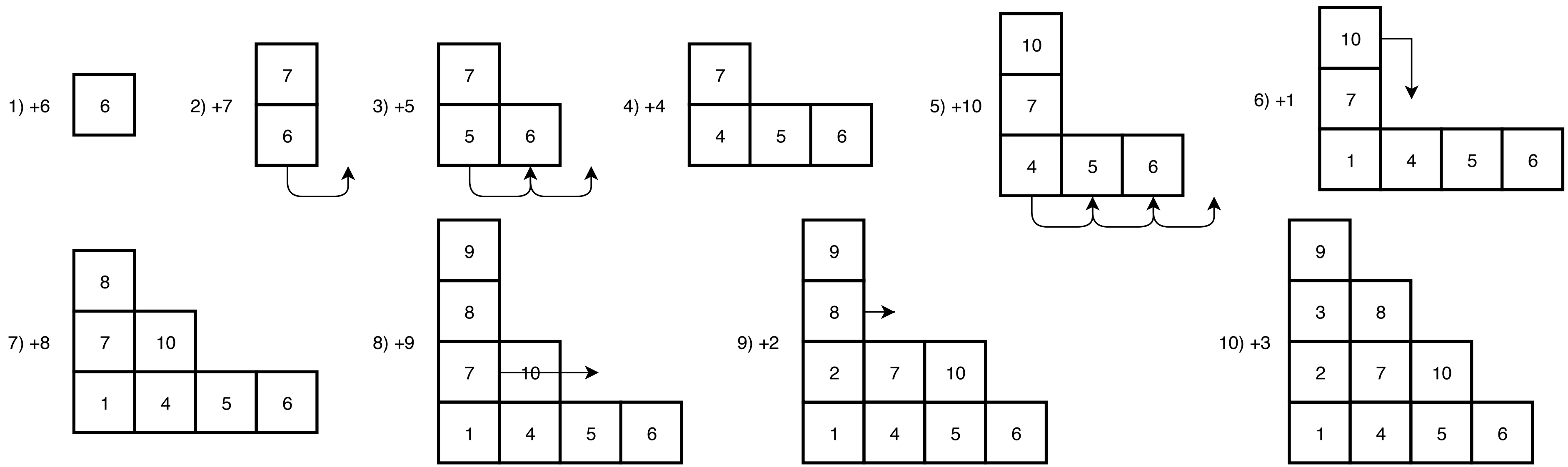
8				
5	6	7	9	
1	2	3	4	10

P

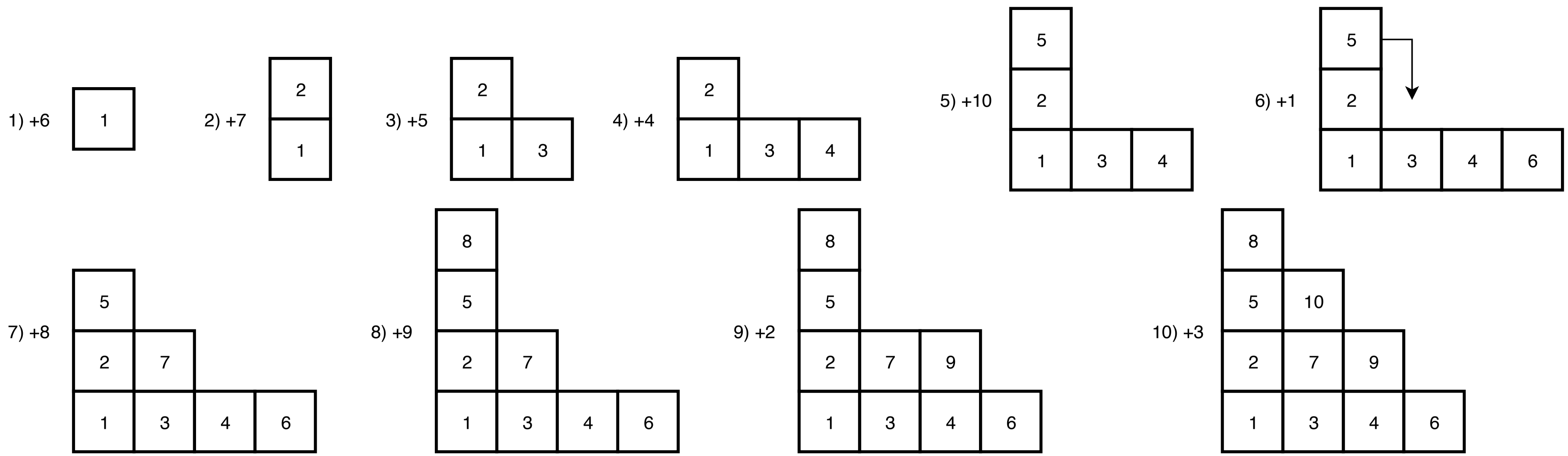
5				
3	6	7	10	
1	2	4	8	9

Q

P - построение



Q - построение



Задача 2.1.

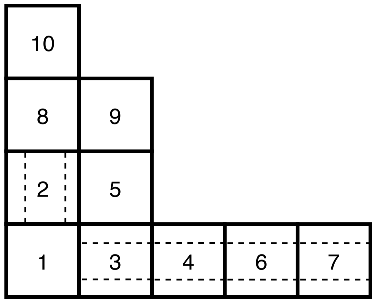
1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

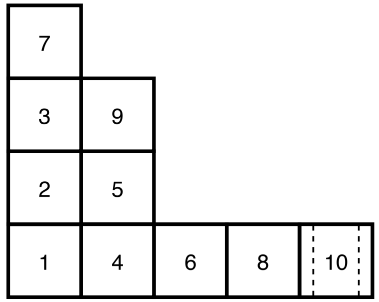
Горизонтальная линия - сдвиг

P

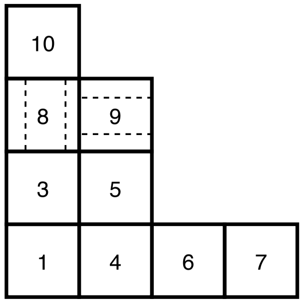
Вертикальная линия - удаление

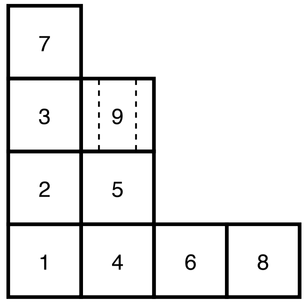
Q



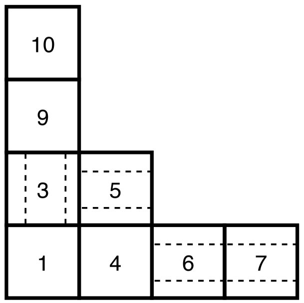


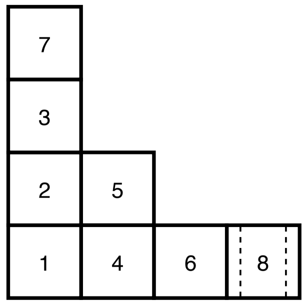
_, _, _, _, _, _, _, _, _, 2



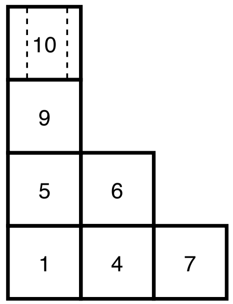


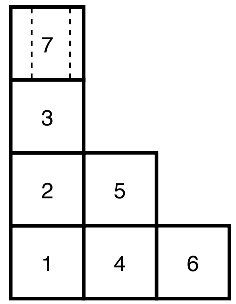
_, _, _, _, _, _, _, _, 8, 2



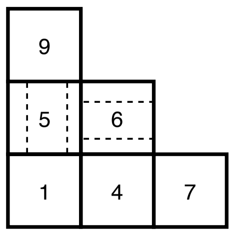


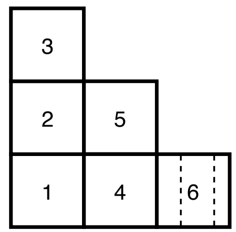
_, _, _, _, _, _, _, 3, 8, 2



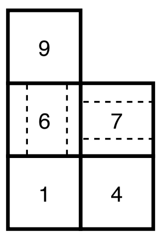


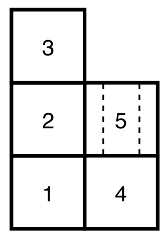
_, _, _, _, _, _, 10, 3, 8, 2



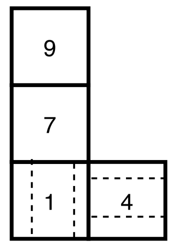


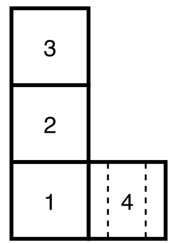
_, _, _, _, _, 5, 10, 3, 8, 2



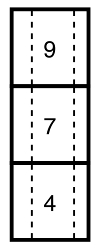


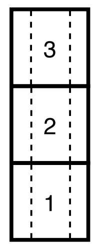
_, _, _, _, 6, 5, 10, 3, 8, 2





_, _, _, 1, 6, 5, 10, 3, 8, 2





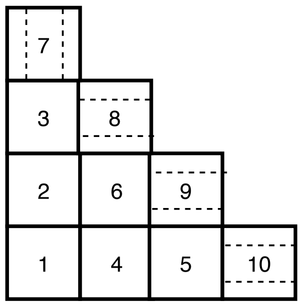
4, 7, 9, 1, 6, 5, 10, 3, 8, 2

Задача 2.2.

1,2,3,4,5,6,7,8,9,10

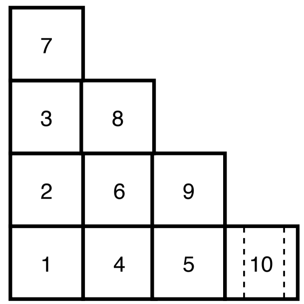
Горизонтальная линия - сдвиг

P

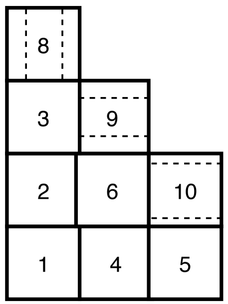


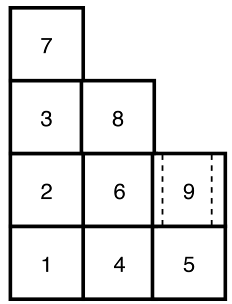
Вертикальная линия - удаление

Q

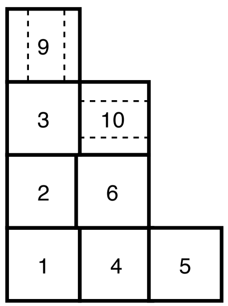


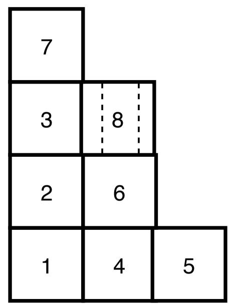
_, _, _, _, _, _, _, _, _, 7



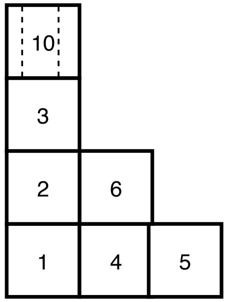


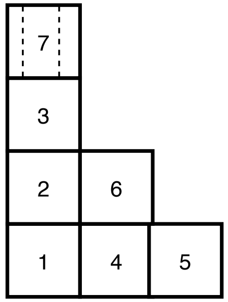
_, _, _, _, _, _, _, _, 8, 7



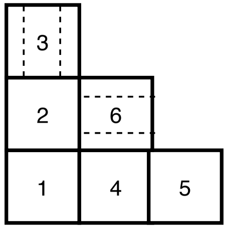


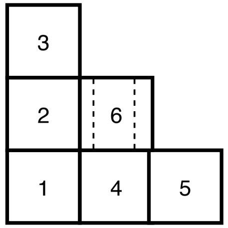
_, _, _, _, _, _, _, 9, 8, 7



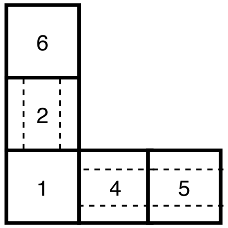


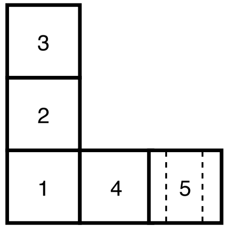
_, _, _, _, _, _, 10, 9, 8, 7



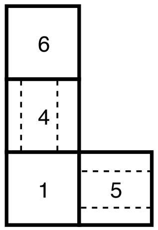


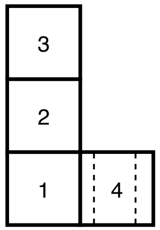
_, _, _, _, _, 3, 10, 9, 8, 7

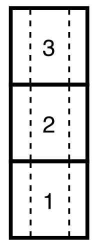




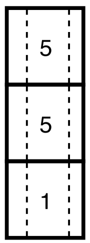
_, _, _, _, 2, 3, 10, 9, 8, 7







1, 5, 6, 4, 2, 3, 10, 9, 8, 7



Задача 3.

Выписать все простые подпоследовательности перестановки:

$$13, 19, 9, 16, 14, 4, 17, 18, 11, 7, 8, 1, 2, 5, 15, 20, 12, 3, 10, 6$$

Привести пример возрастающей подпоследовательности максимальной длины.
Решение:

Простые подпоследовательности:

1. 13, 9, 4, 1
2. 19, 16, 14, 11, 7, 2
3. 17, 8, 5, 3
4. 18, 15, 12, 10, 6
5. 20

$$N_{\max} = 5$$

Например: 13, 14, 17, 18, 20.

3 Преобразование Шютценберже

Задача 1.

Нарисовать нервы на приведенных ниже таблицах. Применить к данным таблицам преобразование Шютценберже.

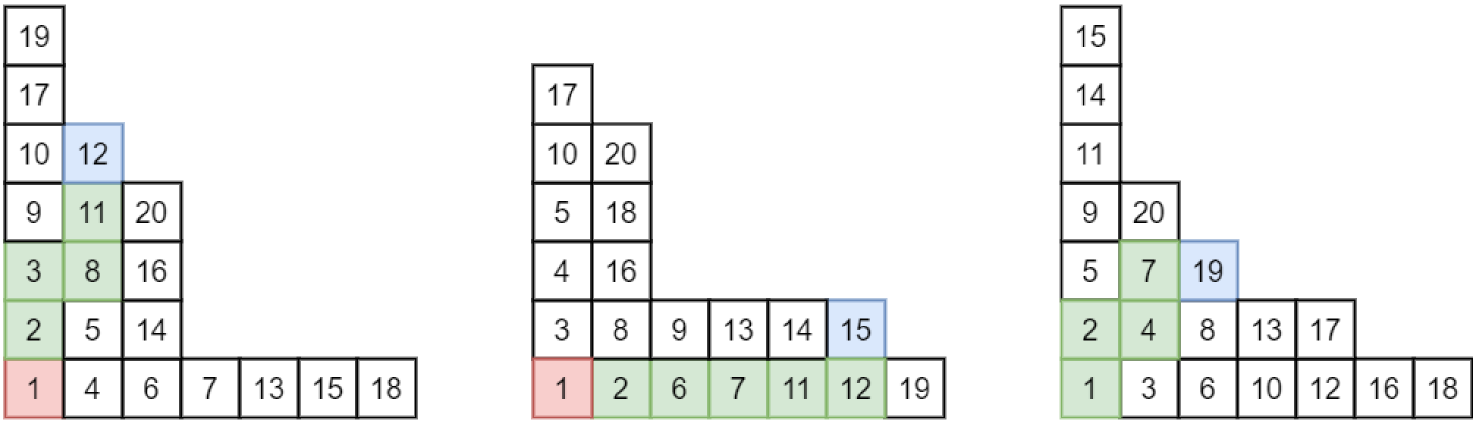
19						
17						
10	12					
9	11	20				
3	8	16				
2	5	14				
1	4	6	7	13	15	18

17						
10	20					
5	18					
4	16					
3	8	9	13	14	15	
1	2	6	7	11	12	19

15						
14						
11						
9	20					
5	7	19				
2	4	8	13	17		
1	3	6	10	12	16	18

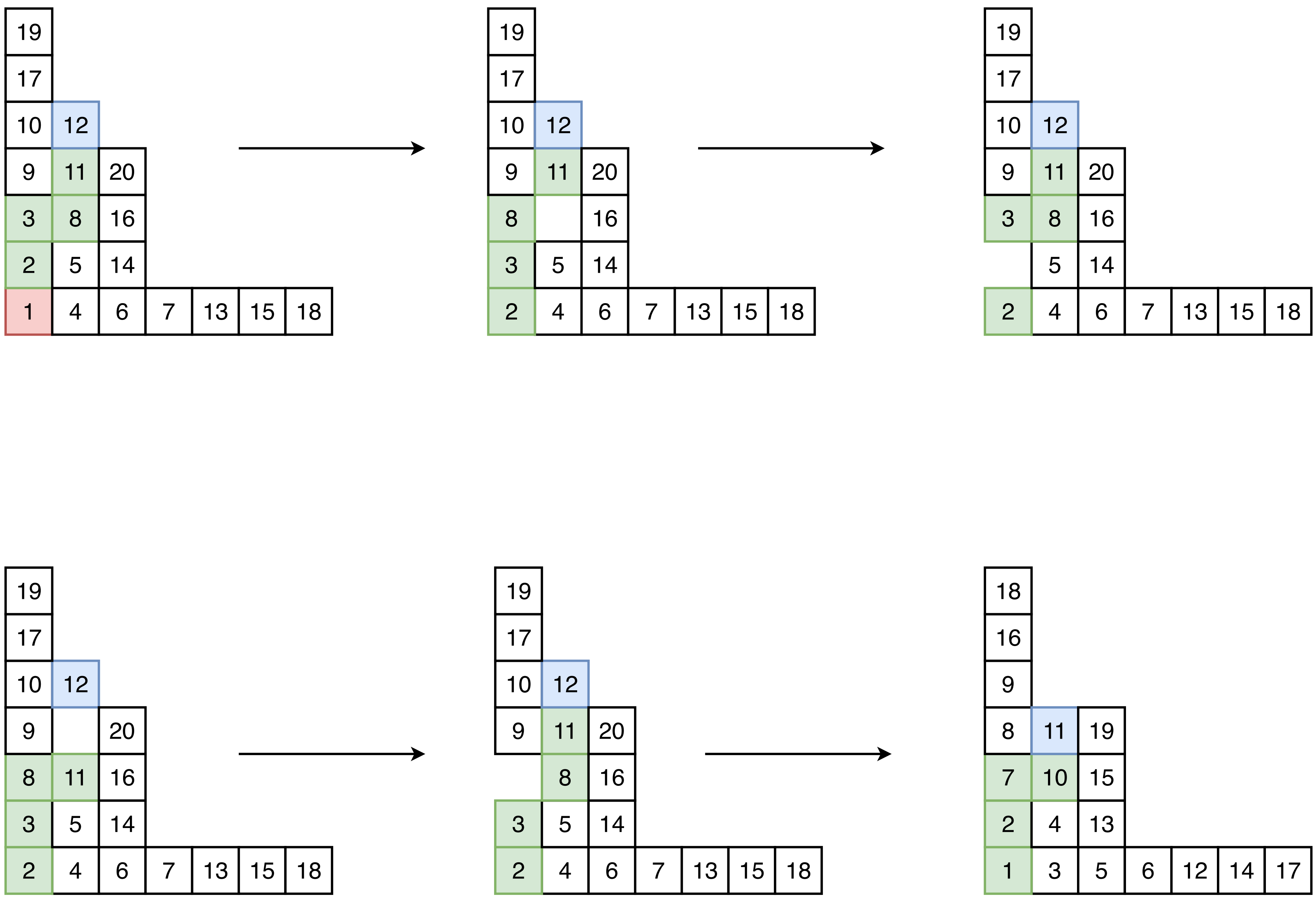
Решение:

Нервы



Красный цвет - удаление клетки
Зелёный цвет - перемещение
Синий цвет - клетка заключительного перемещения

Преобразование Шютценберже



Задача 2.

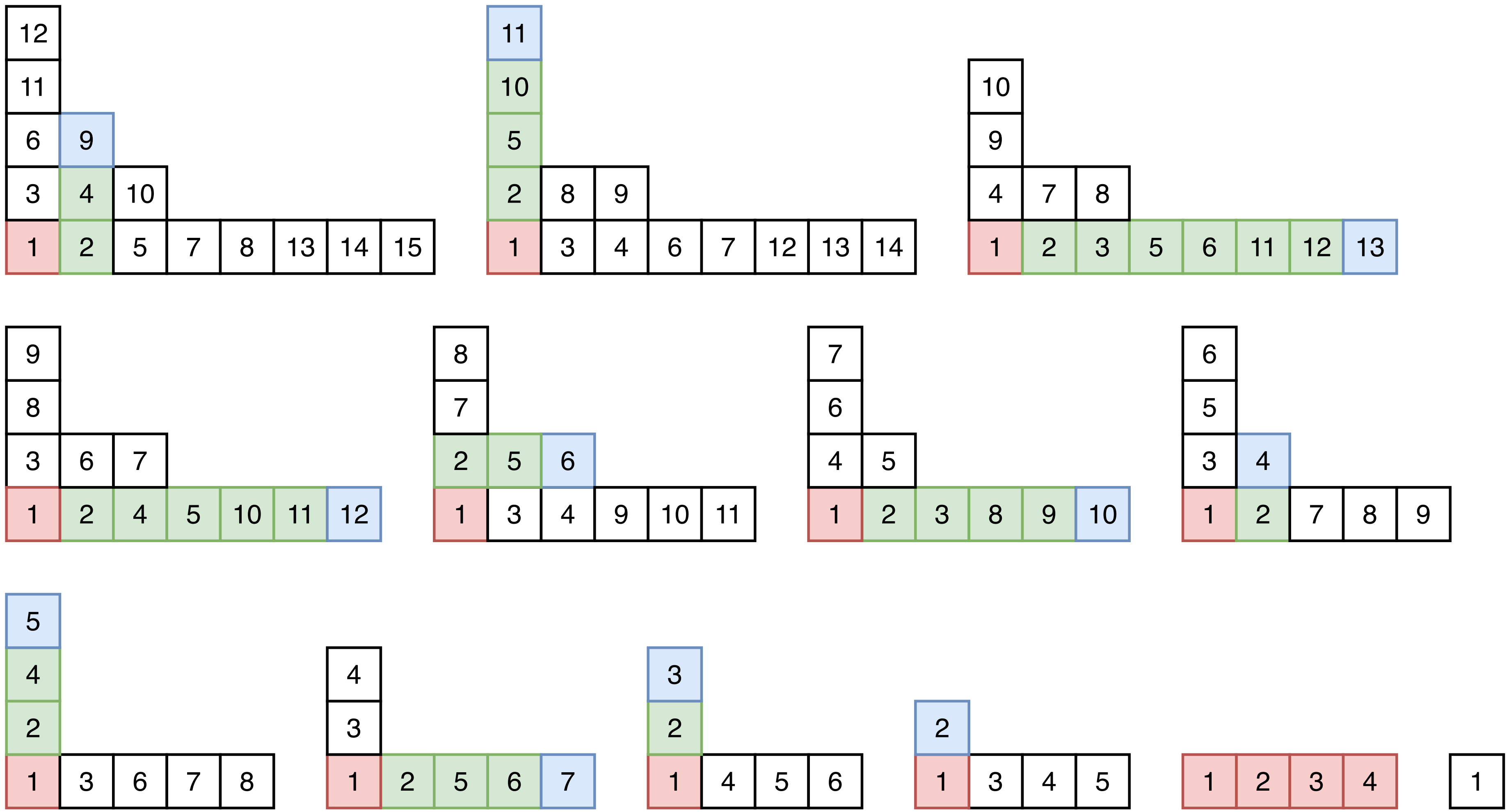
Дважды применить инволюцию Шютценберже к следующим таблицам Юнга:

12							
11							
6	9						
3	4	10					
1	2	5	7	8	13	14	15

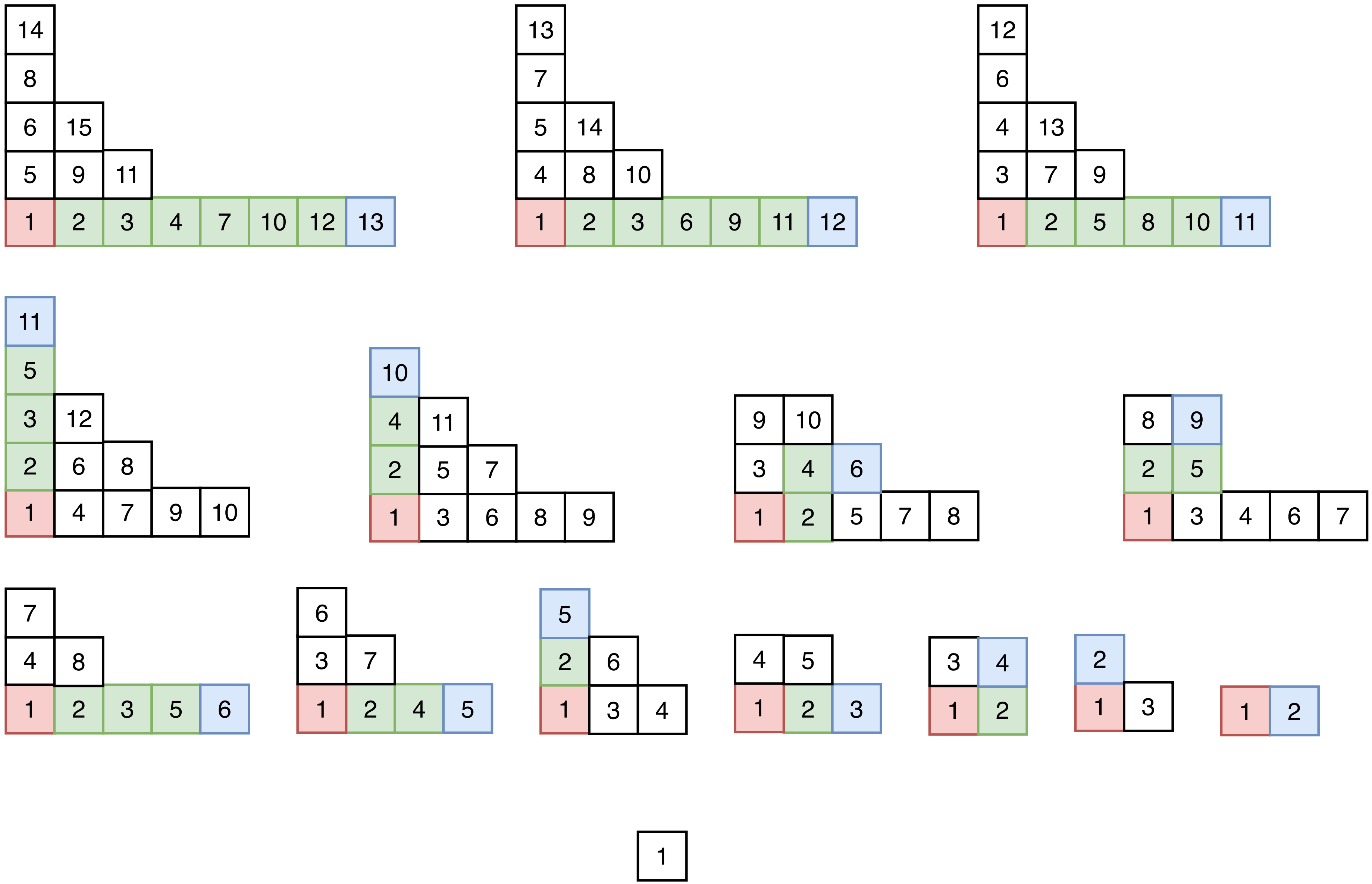
12	14			
10	13			
8	9	15		
5	6	11		
1	2	3	4	7

Решение:

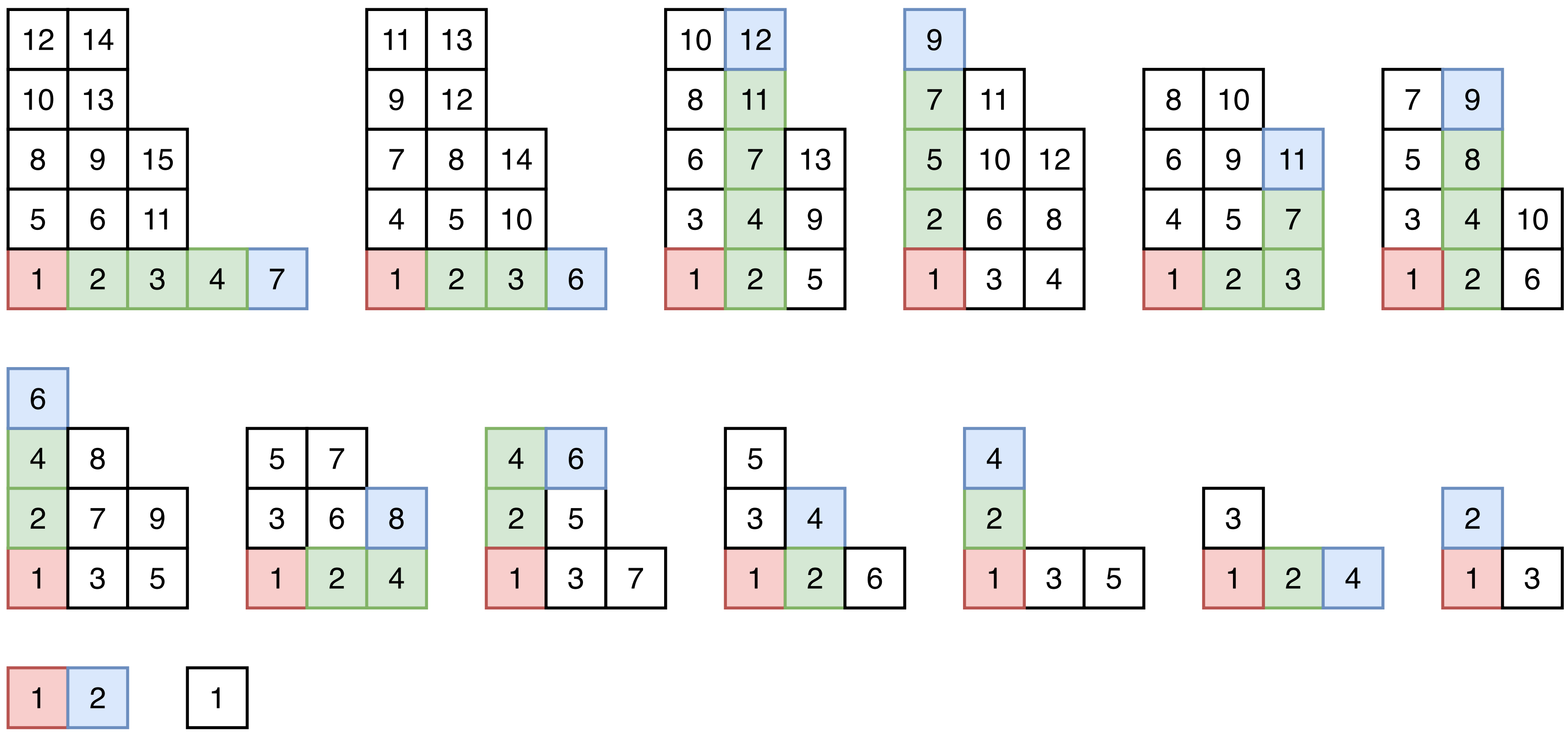
№1 Первая инволюция Шютценберже



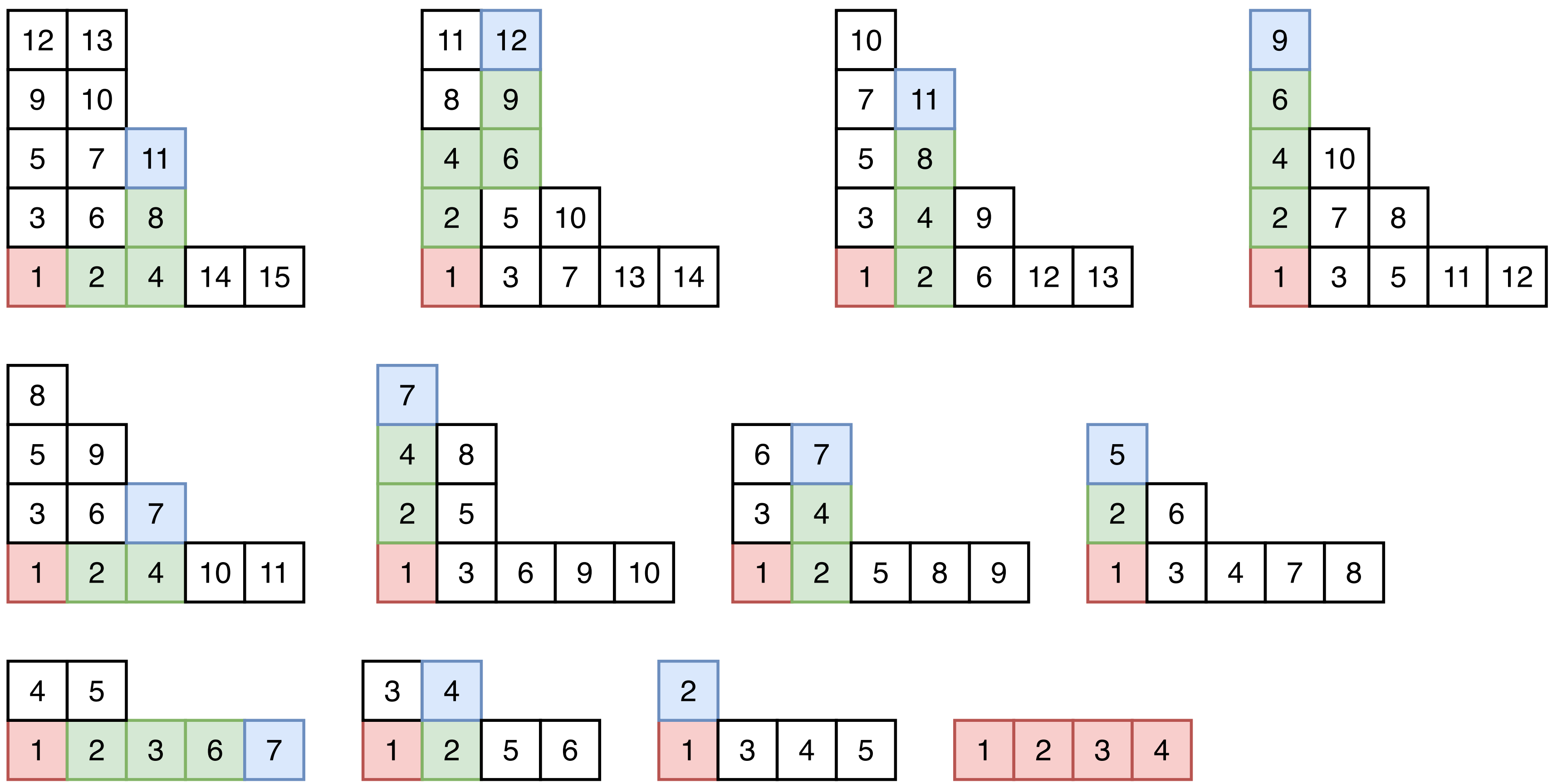
№1 Вторая инволюция Шютценберже



№2 Первая инволюция Шютценберже

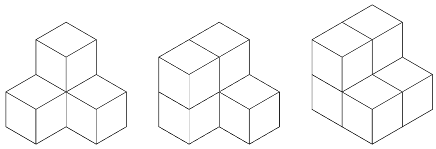


№2 Вторая инволюция Шютценберже



Задача 3.

Выписать все возможные трехмерные таблицы Юнга следующей формы:



С помощью трехмерного преобразования Шютценберже с сохранением формы определить, к каким циклам относятся данные таблицы.

Решение:

Таблицы Юнга для формы размерности 6:

2	
1	3

Z=0

4

Z=1

2	
1	4

Z=0

3

Z=1

3	
1	2

Z=0

4

Z=1

3	
1	4

Z=0

2

Z=1

4	
1	2

Z=0

3

Z=1

4	
1	3

Z=0

2

Z=1

При рассмотрении следующей формы ради удобства записи повернём её так, как будто она является модификацией предыдущей: на нижний ярус добавили один блок, чтобы достроить до квадрата.

В итоге таблицы Юнга для формы размерности 8:

2	4
1	3

Z=0

5

Z=1

3	4
1	2

Z=0

5

Z=1

3	5
1	2

Z=0

4

Z=1

2	5
1	3

Z=0

4

Z=1

2	5
1	4

Z=0

3

Z=1

4	5
1	2

Z=0

3

Z=1

3	5
1	4

Z=0

2

Z=1

4	5
1	3

Z=0

2

Z=1

Таблицы Юнга для формы размерности 16:

$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 5&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&4\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 5&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&6\\\hline\end{array}}$$

$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline 1&4\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&6\\\hline\end{array}}$$

$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline 1&4\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline\end{array}}$$

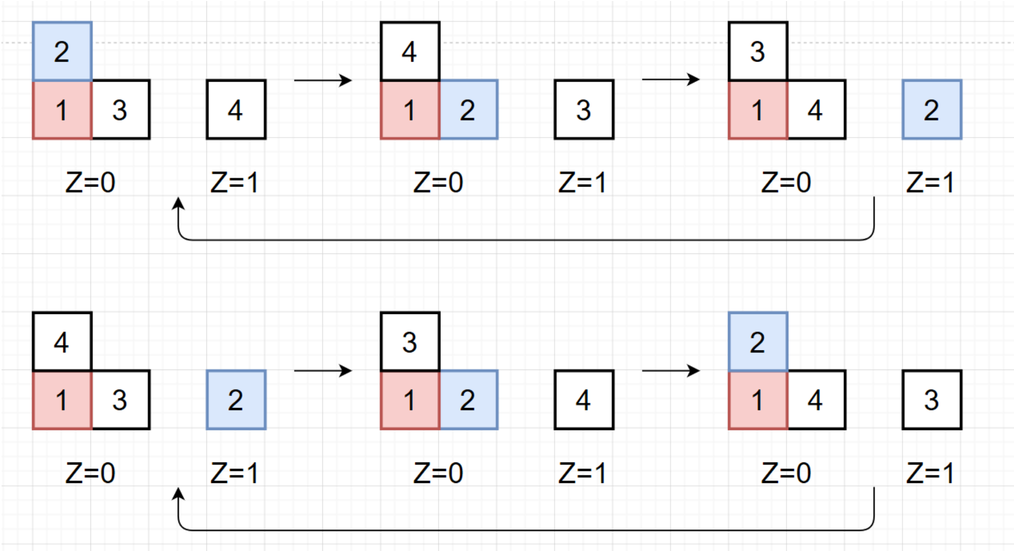
$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&6\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&5\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&6\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&6\\\hline 1&4\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&5\\\hline\end{array}}$$

$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 3&6\\\hline 1&4\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 4&6\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&5\\\hline\end{array}}\qquad\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 5&6\\\hline 1&2\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline\end{array}}$$

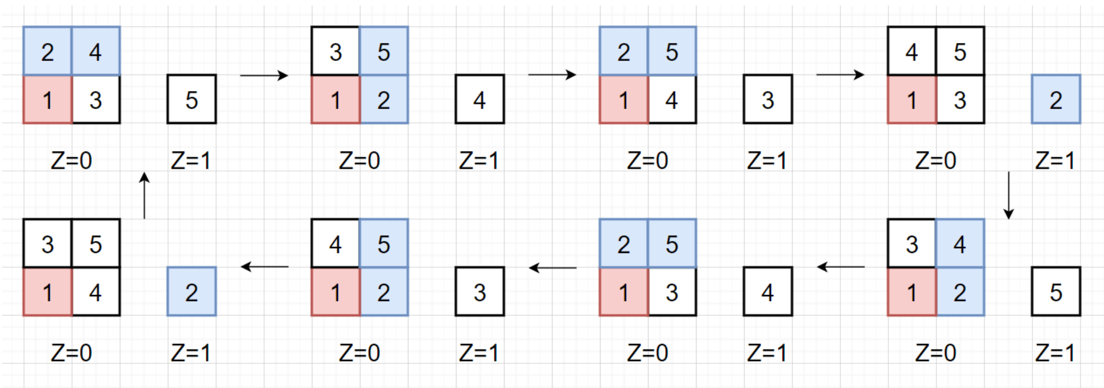
$$\underset{Z=0}{\begin{array}{|c|c|}\hline 5&6\\\hline 1&3\\\hline\end{array}}\quad\underset{Z=1}{\begin{array}{|c|c|}\hline 2&4\\\hline\end{array}}$$

С помощью трехмерного преобразования Шютценберже с сохранением формы определиv, к каким циклам относятся данные таблицы.

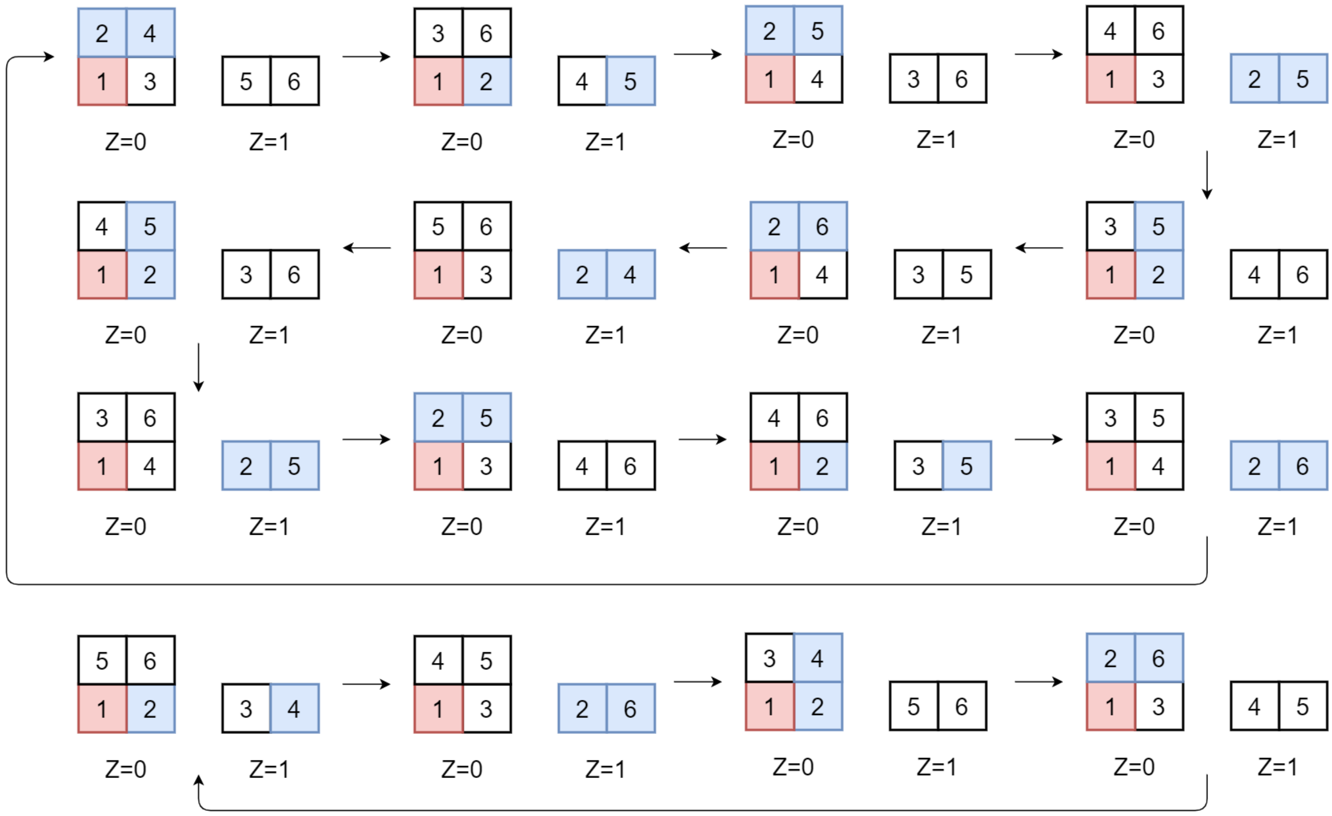
Циклы для 1-ой формы:



Цикл для 2-ой формы:



Цикл для 3-ей формы:


2 4 1 3
Z=0
5 6
Z=1
3 6 1 2
Z=0
4 5
Z=1
2 5 1 4
Z=0
3 6
Z=1
4 6 1 3
Z=0
2 5
Z=1
4 5 1 2
Z=0
3 6
Z=1
5 6 1 3
Z=0
2 4
Z=1
2 6 1 4
Z=0
3 5
Z=1
3 5 1 2
Z=0
4 6
Z=1
3 6 1 4
Z=0
2 5
Z=1
2 5 1 3
Z=0
4 6
Z=1
4 6 1 2
Z=0
3 5
Z=1
3 5 1 4
Z=0
2 6
Z=1
5 6 1 2
Z=0
3 4
Z=1
4 5 1 3
Z=0
2 6
Z=1
3 4 1 2
Z=0
5 6
Z=1
2 6 1 3
Z=0
4 5
Z=1

Теоретические сведения

Задача 1.1

Разбиение числа n — это способ записать натуральное число n в виде суммы натуральных чисел. При этом порядок слагаемых не учитывается, т.е. способы, отличающиеся только порядком слагаемых, считаются одним разбиением. Если порядок учитывается, то говорят о *композициях* числа n. Для разбиений можно выбрать любой порядок слагаемых; канонической считается запись в виде невозрастающей последовательности положительных целых.

Примеры:

Например, (3,1,1) или (3,2) — разбиения числа 5, поскольку$5 = 3 + 1 + 1 = 3 + 2$. Всего есть 7 разбиений числа 5: (1,1,1,1,1), (2,1,1,1), (2,2,1), (3,1,1), (3,2), (4,1), (5).

Получение теоремы Эйлера

Производящая формула для числа разбиений $p(n)$ (формула Эйлера) имеет следующий вид:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^k}\right)$$

Рассмотрим следующее бесконечное произведение:

$$(1+x+x^2+\dots)(1+x^2+x^4+\dots)(1+x^k+x^{2l}+\dots)\dots$$

После раскрытия скобок каждый член произведения получается в результате умножения мономов (одночленов), взятых по одному из каждой скобки. Если в первой скобке взять x^{m_1}, во второй - x^{2m_2} и т.д., то их произведение будет равно $x^{m_1+2m_2+3m_3+\dots}$. Значит, после раскрытия скобок получится сумма мономов данного вида.

Можно увидеть, что x_n встретится в полученной бесконечной сумме столько раз, сколькими способами можно представить n как сумму $m_1 + 2m_2 + 3m_3 + \dots$. Каждому такому представлению отвечает разбиение числа n на m_1 единиц, m_2 двоек и т.д. Таким образом, очевидно, получаются все разбиения, так как из первой скобки мы можем взять любое x^{m_i}, где $m_i \in [0\dots\infty]$, то есть произвольное количество единиц в нашем разбиении. Аналогично, мы можем взять произвольное количество двоек и т.д. Но при раскрытии скобок мы находим произведения всех возможных комбинации множителей из разных скобок. Поэтому коэффициент при x^n равен числу разбиений $p(n)$.

Посмотрим теперь на выражения в скобках. Каждое из них — бесконечная геометрическая прогрессия. Полагая $0 \leqslant x < 1$, по формуле ее суммирования:

$$1+x+x^2+x^3+\dots = \frac{1}{1-x}$$
$$1+x^2+x^4+x^6+\dots = \frac{1}{1-x^2}$$
$$\dots$$
$$1+x^k+x^{2k}+x^{3k}+\dots = \frac{1}{1-x^k}$$
$$\dots$$

Запишем теперь производящую функцию последовательности $p(n)$:

$$p(0)+p(1)x+p(2)x^2+p(3)x^3+\dots = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} \tag{1}$$

Рассмотрим произведение $(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots$, т.е. знаменатель правой части формулы (1). Раскрывая в нём скобки, получим следующий:

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \dots$$

Показатели степеней в правой части — пятиугольные числа, т.е. числа вида $\dfrac{3q^2 \pm q}{2}$, а знаки при соответствующих мономах равны $(-1)^q$.

Теорема 3.1 (Пентагональная теорема Эйлера)**.**

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1-x^k) = \sum_{q=-\infty}^{\infty}(-1)^q x^{\frac{3q^2+q}{2}}$$

Теорема 3.2 (Переформулировка пентагональной теоремы)**.**
Если число N не может быть представлено в виде $N = \dfrac{3q^2+q}{2}$, то оно имеет одинаковое количество разбиений на четное и на нечетное число различных слагаемых. А для чисел вида $N = \dfrac{3q^2+q}{2}$ разность между этими количествами равна $(-1)^q$.

Иными словами, если q четно, то на одно больше разбиений на четное число слагаемых, а если q нечетно, то на одно больше разбиений на нечетное число слагаемых.

Умножим обе части равенства (1) на $\prod\lim\limits_{k=1}^{\infty}(1-x^k)$ и воспользуемся пентагональной теоремой:

$$(P(0) + p(1)x + p(2)x^2 + \dots)(1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots) = 1 \tag{2}$$

Начнем раскрывать скобки, для наглядности мономы с одинаковыми степенями x пишем друг под другом:

$$\begin{array}{rrrr}
p(0)+p(1)x+ & p(2)x^2+p(3)x^3+ & p(4)x^4+p(5)x^5+ & p(6)x^6+\dots \\
-\,p(0)x- & p(1)x^2+p(2)x^3- & p(3)x^4+p(4)x^5+ & p(5)x^6+\dots \\
 & p(0)x^2+p(1)x^3- & p(2)x^4+p(3)x^5+ & p(4)x^6+\dots \\
 & & p(0)x^5+ & p(1)x^6+\dots
\end{array}$$

Так как $p(0) = 1$, то оно сокращается с единицей справа. Так что, чтобы выражение (2) было удовлетворено при любом x, все коэффициенты должны быть равны 0. Поэтому:

$$p(1) = p(0); p(2) = p(1) + p(0); p(3) = p(2) + p(1); p(4) = p(3) + p(2); p(5) = p(4) + p(3) - p(0)$$

Формула Эйлера, позволяющая последовательно находить числа $p(n)$:

$$p(n) = p(n-1) + p(n-2) + \dots + (-1)^{q+1}\left(p\left(n - \frac{3q^2-q}{2}\right) + p\left(n - \frac{3q^2+q}{2}\right)\right)$$

Асимптотика: $O(n\sqrt{n})$. Т.к. $n - \dfrac{3q^2+q}{2} \geqslant 0$, то получаем q порядка $\sqrt{n}$, а так как находим n-е число, то получаем приведённую оценку.