Теория вероятностей и мат. статистика
ИДЗ3

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

04.05.2020

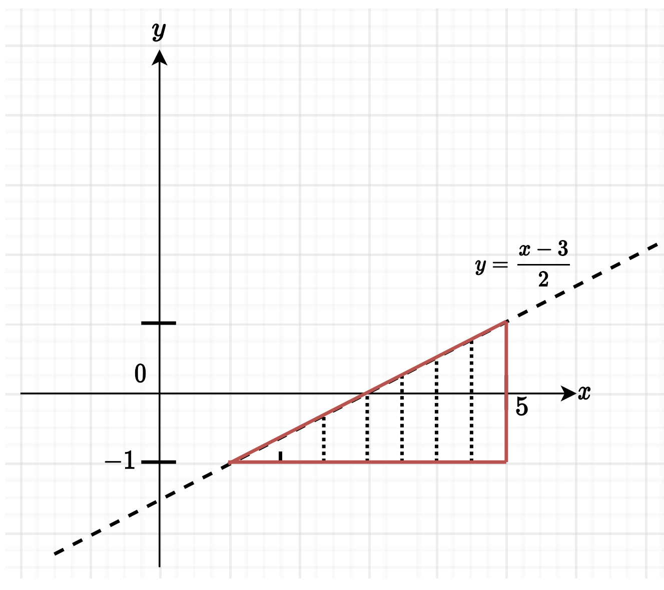
Вар. 14 (838120)
Случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в области

$$\begin{pmatrix} 2x - 4y \geq 6, \\ x \leq 5,\ y \geq -1 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 1\xi^4 + 2,\ \nu = [5\eta],\ \mu = \ -4\xi + 8\eta.$

1. Найти $p_{\xi,\eta}$, функции и плотности распределения компонент. Будут ли компоненты независимыми?
2. Найти распределения с.в. ζ и ν; $E\zeta$, $E\nu$, $D\zeta$, $D\nu$.
3. Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики вектора (ξ, η). Найти условное распределение ξ при условии η; $E(\xi|\eta)$, $D(\xi|\eta)$.
4. Найти распределение μ; $E\mu$; $D\mu$.

Изобразим данную по условию область распределения случайной величины (ξ, η) графически:



Обозначим заштрихованную область распределения за T(riangle).

1. Плотности распределения вероятностей системы (ξ,η) равна:

$$p_{\xi,\eta}=\begin{cases}C, x\in T\\ 0-\ \text{в остальных случаях}\end{cases}\quad \text{, где } C - const$$

Найдём константу C из условия нормировки (интегрируем по области):

$$\iint\limits_T p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy=\iint\limits_T cdxdy=c\iint\limits_T dxdy=c\cdot\left(\frac{4\cdot 2}{2}\right)=1\Rightarrow c=\frac{1}{4}$$

Примечание.

$$\iint\limits_T p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy\Leftrightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy$$

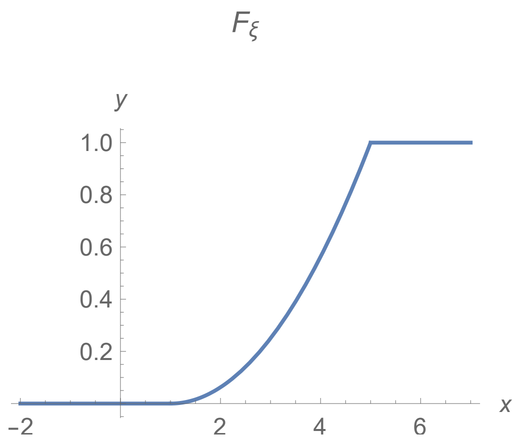
Таким образом,

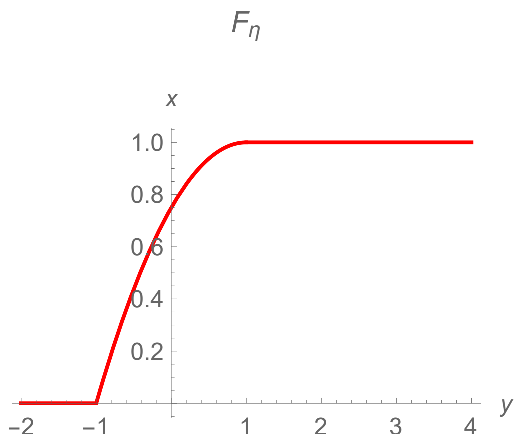
$$p_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}, x\in T\\ 0-\ \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

$$p_\xi(x)=\begin{cases}\int\limits_{-1}^{\frac{1}{2}(x-3)}\frac{1}{4}dy=\frac{x-1}{8}, x\in[1,5]\\ 0-\ \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 1\\ \int\limits_1^x\left(\frac{t-1}{8}\right)dt=\frac{1}{16}(x-1)^2, & x\in(1,5]\\ 1, & x>5\end{cases}$$

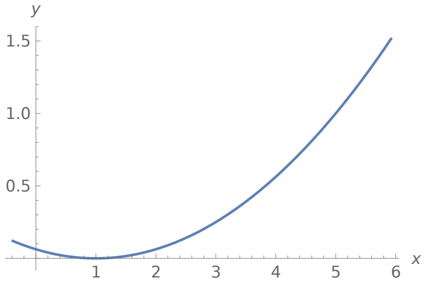
$$p_\eta(y)=\begin{cases}\int\limits_{2y+3}^{5}\frac{1}{4}dx=\frac{1-y}{2}, y\in[-1,1]\\ 0-\ \text{в остальных случаях}\end{cases}\qquad F_\eta(y)=\begin{cases}0, & y\leqslant -1\\ \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{y}(1-t)dt=\frac{1}{4}(-y^2+2y+3), & y\in(-1,1]\\ 1, & y>1\end{cases}$$

Графики функций распределения представлены ниже:





Правильность вычисления плотностей и функций распределения частично доказывается выполнением свойств этих объектов. Для плотности: $p_\xi \geqslant 0$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$. Для функции распределения: $1 \leqslant F_\xi(x) \leqslant 5$ - неубывающая (данный факт также отражён на рис. ниже). Также можно показать, что $p_\xi = F'_\xi(x)$ или $F_\xi = \int\limits_{-\infty}^{x} p_\xi(x)dx$.



Проверим независимость компонент. При $x = 3, y$ может принимать единственное значение. Пусть $x = 2, y = -0.5$, тогда

$$p_\xi(4) = \frac{2-1}{8} = \frac{1}{8} \qquad p_\eta(-0.5) = \frac{1+0.5}{2} = \frac{3}{4}$$

Плотность $p_{\xi,\eta}(x{,}y)$ нулевая при $2x - 4y \geqslant 6$, в данном случае $4 + 2 \geqslant 6$ - верно $\Rightarrow$

$$0 = p_{\xi,\eta}(2, -0.5) \neq p_\xi(2) \cdot p_\eta(-0.5) = \frac{3}{32}$$

Таким образом, очевидно, что величины зависимы.

2.

$$\mathrm{supp}(\xi) = [1, 5], \mathrm{supp}(\zeta) = [3, 627]$$

$$F_\zeta(x) = P(\zeta < x) = P(\xi^4 + 2 < x) = P(\xi^4 < x - 2) = P(\underbrace{-\sqrt[4]{x-2} < \xi < \sqrt[4]{x-2}}_{\text{т.к. supp}(\xi)>0 \Rightarrow \text{ исп. верх. гран.}}) =$$

$$= P(\xi < \sqrt[4]{x-2}) = F_\xi(\sqrt[4]{x-2}) = \frac{1}{16}(\sqrt[4]{x-2} - 1)^2$$

Посчитаем через интегрирования, чтобы произвести проверку корректности вычислений:

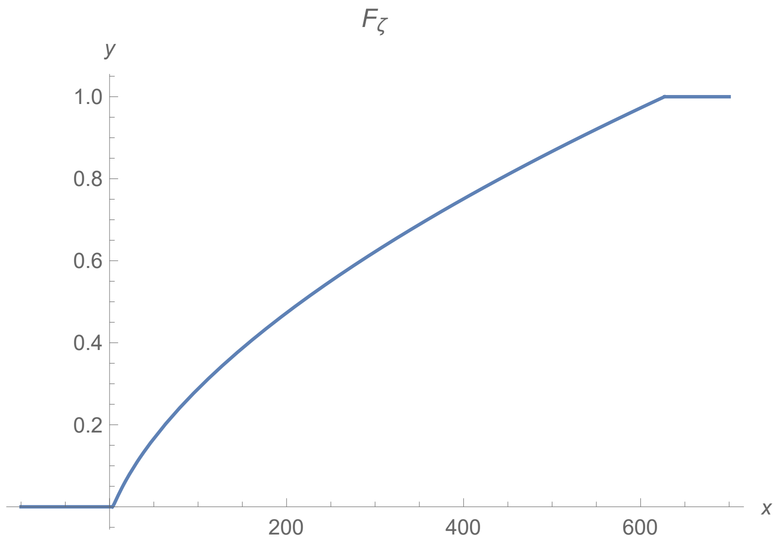
$$F_\zeta(x) = P(\xi < \sqrt[4]{x-2}) = \int_1^{\sqrt[4]{x-2}} dx \int_{-1}^{\frac{x-3}{2}} \frac{1}{4}dy = \int_1^{\sqrt[4]{x-2}} \frac{x-1}{8}dx = \frac{1}{16}(\sqrt[4]{x-2} - 1)^2$$

Таким образом получили, что функция распределения с.в. ζ найдена верна.

Итак, функция распределения:

$$F_\zeta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 3 \\ \frac{1}{16}(\sqrt[4]{x-2} - 1)^2, & x \in [3, 627] \\ 1, & x > 627 \end{cases}$$

График полученной функции представлен далее:



Плотность распределения в свою очередь:

$$p_\zeta(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[4]{x-2}-1}{32(x-2)^{\frac{3}{4}}}, x \in [3, 627] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Найдём мат. ожидание и дисперсию:

$$E\zeta = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\zeta(x)dx = \int_3^{627} x \left(\frac{\sqrt[4]{x-2}-1}{32(x-2)^{\frac{3}{4}}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{32} \int_3^{627} \left(\frac{x}{\sqrt{x-2}} \right) dx - \frac{1}{32} \int_3^{627} \frac{x}{(x-2)^{\frac{3}{4}}} dx = \underset{\text{стандартные замены}}{\ldots} = \frac{1247}{5} = 249.4$$

$$E\zeta^2 = \int_3^{627} x^2 \left(\frac{\sqrt[4]{x-2}-1}{32(x-2)^{\frac{3}{4}}} \right) dx = \frac{4317173}{45} \approx 95937.178$$

$$D\zeta = E\zeta^2 - (E\zeta)^2 = \frac{4317173}{45} - \left(\frac{1247}{5} \right)^2 = \frac{7590784}{225} \approx 33736.81\bar{7}$$

$\nu = [5\eta]$ означает, что мы берём только значения $\in \mathbb{Z}$, а с.в ν - дискретная, т.е.

$$\text{supp}(\eta) = [-1, 1], \text{supp}(\nu) = \{-5, -4, -3, \ldots, 3, 4, 5\}$$

$$P(\nu = a) = P\left(\eta \in \left[\frac{a}{5}; \frac{a}{5} + \frac{1}{5} \right] \right) = F\left(\frac{a}{5} + \frac{1}{5} \right) - F\left(\frac{a}{5} \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left(- \left(\frac{a+1}{5} \right)^2 + 2\frac{a+1}{5} + 3 - \left(- \left(\frac{a}{5} \right)^2 + 2\frac{a}{5} + 3 \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{100}(9 - 2a)$$

$$\sum_{a=-5}^{4} \frac{1}{100}(9 - 2a) = 1 - \text{ ПГС}; \qquad P(\nu = 5) = 0$$

Итак, функция распределения:

$$F_\nu(t) = P(\nu < t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant -5 \\ \sum\limits_{a=-5}^{a<t} \frac{1}{100}(9-2a), & t \in (-5{,}5] \\ 1, & t > 5 \end{cases}$$

Найдём мат. ожидание и дисперсию:

$$E\nu = \sum_{t=-5}^{4} t \cdot \frac{1}{100}(9-2t) = -\frac{43}{20}; \qquad E\nu^2 = \sum_{t=-5}^{4} t^2 \cdot \frac{1}{100}(9-2t) = \frac{203}{20}$$

$$D\nu = E\nu^2 - (E\nu)^2 = \frac{203}{20} - \left(-\frac{43}{20}\right)^2 = \frac{2211}{400} = 5.5275$$

3.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)dx = \int_1^5 x\left(\frac{x-1}{8}\right)dx = \frac{11}{3}; \qquad E\xi^2 = \int_1^5 x^2\left(\frac{x-1}{8}\right)dx = \frac{43}{3}$$

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_\eta(y)dy = \int_{-1}^{1} y\left(\frac{1-y}{2}\right)dy = -\frac{1}{3}; \qquad E\eta^2 = \int_{-1}^{1} y^2\left(\frac{1-y}{2}\right)dy = \frac{1}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}; \qquad D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Вектор мат. ожидания: $E = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E\xi\eta = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_1^5 dx \int_{-1}^{\frac{x-3}{2}} xy \cdot \frac{1}{4}dy = \int_1^5 \frac{1}{32}x(x^2-6x+5)dx = -1$$

Пусть η, ξ - две случайные величины, определённые на одном и том же вероятностном пространстве. Тогда ковариацией случайных величин (*англ.* covariance) η и ξ называется выражение следующего вида:

$$\operatorname{cov}(\eta, \xi) = E((\eta - E\eta) \cdot (\xi - E\xi))$$

В силу линейности математического ожидания, ковариация может быть записана как:

$$\operatorname{cov}(\eta, \xi) = E(\xi \cdot \eta - \eta \cdot E\xi + E\xi \cdot E\eta - \xi \cdot E\eta) =$$
$$= E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta - E\xi \cdot E\eta + E\xi \cdot E\eta =$$
$$= E(\xi \cdot \eta) - E\xi \cdot E\eta$$

$$\operatorname{cov}(\xi, \eta) = -1 + \frac{11}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

Коэффициент корреляции:

$$r(\xi, \eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}} = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{8}{9} \cdot \frac{2}{9}}} = \frac{1}{2}$$

Матрица корреляции:

$$\operatorname{corr}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Матрица ковариаций (*англ.* covariance matrix) — это матрица, элементы которой являются попарными ковариациями элементов одного или двух случайных векторов. Ковариационная матрица случайного вектора — квадратная симметрическая неотрицательно определенная матрица, на диагонали которой располагаются дисперсии компонент вектора, а внедиагональные элементы — ковариации между компонентами.

Матрица ковариации:

$$\operatorname{var}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}D\xi & \operatorname{cov}(\xi,\eta)\\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D\eta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

Условное распределение ξ при условии η:

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x)=\frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)}=\begin{cases}\frac{1}{2(1-y_0)}, x\leqslant 5, y\geqslant -1, 2x-4y\geqslant 6\\ 0-\ \text{в остальных случаях}\end{cases}$$

$$\boxed{\begin{gathered}f_{\xi|\eta}(x|y_0)\geqslant 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^{m+n}\\ \int_{\mathbb{R}^m} f_{\xi|\eta}(x|y_0)dx=1, \forall y_0\in\mathbb{R}^n\end{gathered}}$$

Проверим корректность вычислений, зафиксировав $y=0\Rightarrow x=3$: $\int\limits_3^5\frac{1}{2(1-0)}dx=1$.

$$p_{\xi|\eta}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2(1-\eta)},\ \text{при } x\leqslant 5, 2x-4\eta\geqslant 6\\ 0-\ \text{в осталых случаях}\end{cases}$$

Условное мат. ожидание:

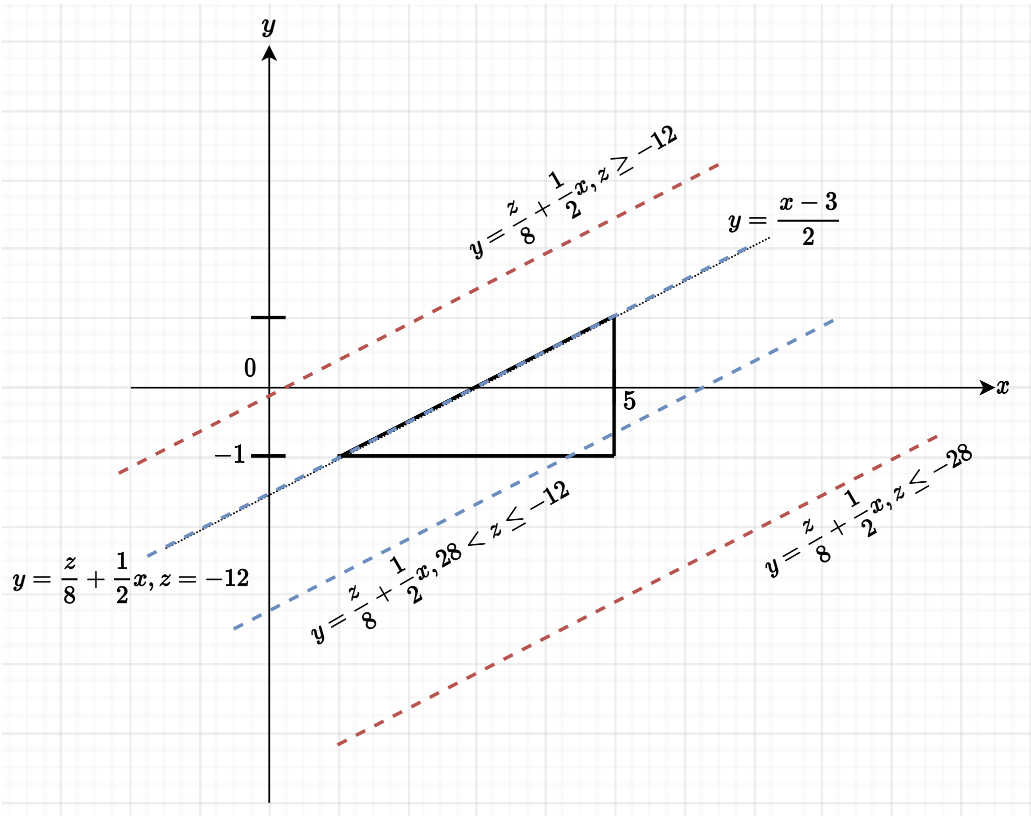
$$E(\xi|\eta=y_0)=\int_1^5 x\cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx=\int_1^5\frac{x}{2(1-y_0)}dx=-\frac{6}{y-1}\Rightarrow E(\xi|\eta)=\frac{-6}{\eta-1}$$

$$E(\xi^2|\eta=y_0)=\int_1^5 x^2\cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx=\int_1^5\frac{x^2}{2(1-y_0)}dx=\frac{62}{3-3y_0}$$

$$D(\xi|\eta=y_0)=\frac{62}{3-3y_0}-\left(-\frac{6}{y_0-1}\right)^2=-\frac{2(31y_0+23)}{3(y_0-1)^2}\Rightarrow D(\xi|\eta)=-\frac{2(31\eta+23)}{3(\eta-1)^2}$$

4.

$$F_\mu(z)=P(-4\xi+8\eta<z)=\begin{cases}0, & z\leqslant -28\\ *, & z\in(-28,-12]\\ 1, & z>-12\end{cases}, \operatorname{supp}(\mu)=[-28,-12]$$



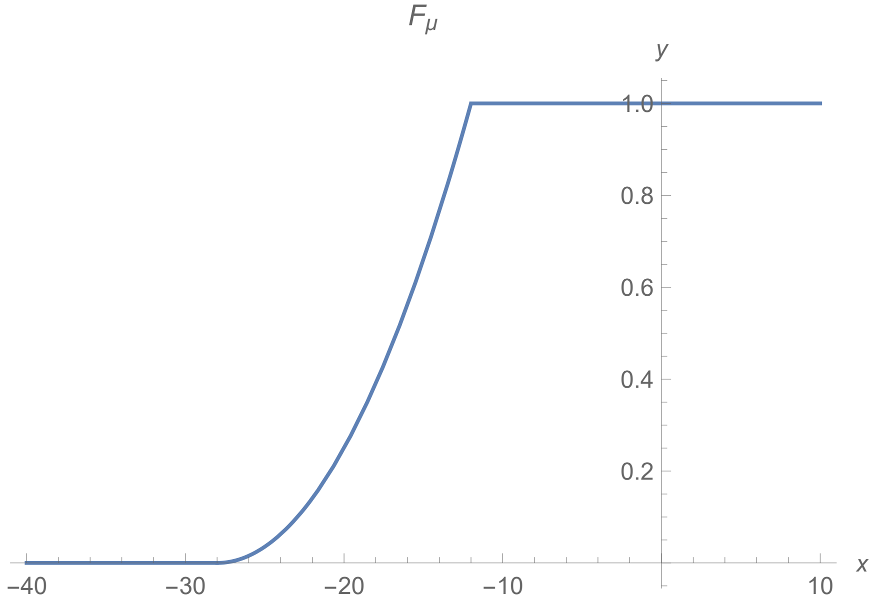
При $z \in (-28, -12] : -4x + 8y = z, y = -1.5 \Rightarrow x = -\left(\frac{z}{4} + 2\right)$.

$$* = F_\mu(z) = \int_{-\left(\frac{z}{4}+2\right)}^{5} dx \int_{-1}^{\frac{z}{8}+\frac{1}{2}x} \frac{1}{4} dy = \int_{-\left(\frac{z}{4}+2\right)}^{5} \frac{1}{32}(4x + z + 8)dx = \frac{1}{256}(z + 28)^2$$

Итак, функция распределения:

$$F_\mu(z) = P(-4\xi + 8\eta < z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -28 \\ \frac{1}{256}(z+28)^2, & z \in (-28, -12] \\ 1, & z > -12 \end{cases}$$

График функции приведён ниже:



$$p_\nu(z) = \begin{cases} \dfrac{z+28}{128}, z \in [-28, -12] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$E\mu \int_{-28}^{-12} z \cdot \frac{z+28}{128} dx = -\frac{52}{3} \approx -17.333; \qquad E\mu^2 \int_{-28}^{-12} z^2 \cdot \frac{z+28}{128} dx = \frac{944}{3} \approx 314.667$$

$$D\mu^2 = E\mu^2 - (E\mu)^2 = \frac{944}{3} - \left(-\frac{52}{3}\right)^2 = \frac{128}{9} \approx 14.\bar{2}$$