Теория вероятностей и мат. статистика

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

25.04.2020

Случайные вектора

$\vec{\xi} : (\Omega, \mathcal{F}) \to (\mathbb{R}^n, \mathfrak{D}_n)$ (или $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ - измеримая функция).

$\vec{\xi} = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, ξ_i - компоненты случайного вектора $\vec{\xi}$.

$\mathcal{P}_\xi : \mathfrak{D}_n \to \mathfrak{D}_n$, так что $\mathcal{P}_\xi(I_1 \times \cdots \times I_n) = P(\omega : \vec{\xi}(\omega) \in I_1 \times \cdots \times I_n) = P(\xi_1 \in I_1, \ldots, \xi_n \in I_n)$ - распределение вектора $\vec{\xi}$.

$F_\xi : \mathbb{R}^n \to [0{,}1]$, так что $F_\xi(x_1, \ldots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \ldots, \xi_n < x_n)$ - функция распределения.

$\vec{\xi}$ - дискретный (имеет дискретное распределение), если $\exists \{\vec{a_j}\}_{j\in T}$ - не более, чем счетное множество, такое что

$$P(\vec{\xi} \in \{\vec{a_j}\}_{j\in T}) = \sum_{j\in T} P(\vec{\xi} = \vec{a_j}) = 1, a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \in \mathbb{R}^n$$

$\vec{\xi}$ - абсолютно непрерывный, если $\exists p_\xi(\vec{x}) \geqslant 0$ (плотность распределения)

$$F_\xi(x_1 \ldots x_n) = \int_{-\infty}^{x_1} \ldots \int_{-\infty}^{x_n} p_\xi(\vec{x}) d\vec{x}$$

Задача 2.

Условие:

Знач. ξ_1 \ Знач. ξ_2	-1	0	1
-1	0.05	0.1	0.1
0	0.1	0.05	0.2
1	0.1	0.1	0.2

Найти:

а) Функцию распределения ξ_1;

б) Функцию распределения ξ_2;

в) Функцию распределения $\xi_1 - \xi_2$;

г) Распределение $\xi_1^2 + \xi_2^2$;

д) Распределение $(\xi_1^2, \xi_1 - \xi_2^2)$.

Решение:

а) Таблица распределения ξ_1 имеет следующий вид (суммы по строкам):

k	-1	0	1
$P(\xi_1 = k)$	0.05+0.1+0.1=0.25	0.1+0.05+0.2=0.35	0.1+0.1+0.2=0.4

Таким образом, функция распределения:

$$F_{\xi_1}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 0 + 0.25 = 0.25, & x \in (-1, 0] \\ 0.25 + 0.35 = 0.6, & x \in (0, 1] \\ 0.6 + 0.4 = 1, & x > 1 \end{cases}$$

б) Таблица распределения ξ_2 имеет следующий вид (суммы по столбцам):

k	-1	0	1
$P(\xi_2 = k)$	0.05+0.1+0.1=0.25	0.1+0.05+0.1=0.25	0.1+0.2+0.2=0.5

Таким образом, функция распределения:

$$F_{\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ 0 + 0.25 = 0.25, & x \in (-1, 0] \\ 0.25 + 0.25 = 0.5, & x \in (0, 1] \\ 0.5 + 0.5 = 1, & x > 1 \end{cases}$$

в) Носитель распределения случайной величины:

$$\operatorname{supp}(\xi_1) = \{-1, 0, 1\}, \operatorname{supp}(\xi_2) = \{-1, 0, 1\} \Rightarrow \operatorname{supp}(\xi_1 - \xi_2) = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

Найдём таблицу распределения:

$$P(\xi_1 - \xi_2 = -2) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 1) = 0.1$$

$$P(\xi_1 - \xi_2 = -1) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = 0.1 + 0.2 = 0.3$$

$$P(\xi_1 - \xi_2 = 0) = P(\xi_1 = -1, \xi_2 = -1) + P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = 0) = 0.05 + 0.05 + 0.2 = 0.3$$

$$P(\xi_1 - \xi_2 = 1) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 0) + P(\xi_1 = 0, \xi_2 = -1) = 0.1 + 0.1 = 0.2$$

$$P(\xi_1 - \xi_2 = 2) = P(\xi_1 = 1, \xi_2 = -1) = 0.1$$

Итак

k	-2	-1	0	1	2
$P(\xi_1 - \xi_2) = k$	0.1	0.3	0.3	0.2	0.1

Функция распределения:

$$F_{\xi_1-\xi_2}(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ 0+0.1=0.1, & x \in (-2,-1] \\ 0.1+0.3=0.4, & x \in (-1,0] \\ 0.4+0.3=0.7, & x \in (0,1] \\ 0.7+0.2=0.9, & x \in (1,2] \\ 0.9+0.1=1, & x > 2 \end{cases}$$

г) Носитель распределения случайной величины:

$$\mathrm{supp}(\xi_1) = \{-1,0,1\}, \mathrm{supp}(\xi_2) = \{-1,0,1\} \Rightarrow \mathrm{supp}(\xi_1^2+\xi_2^2) = \{0,1,2\}$$

Найдём таблицу распределения:

$$P(\xi_1^2+\xi_2^2=0) = P(\xi_1=0,\xi_2=0) = 0.05$$

$$P(\xi_1^2+\xi_2^2=1) = P(\xi_1=1,\xi_2=0)+P(\xi_1=0,\xi_2=1)+P(\xi_1=-1,\xi_2=0)+P(\xi_1=0,\xi_2=-1) = \\ = 0.1+0.2+0.1+0.1 = 0.5$$

$$P(\xi_1^2+\xi_2^2=2) = P(\xi_1=1,\xi_2=1)+P(\xi_1=-1,\xi_2=-1)+P(\xi_1=-1,\xi_2=1)+P(\xi_1=1,\xi_2=-1) = \\ = 0.05+0.2+0.1+0.1 = 0.45$$

Итак

k	0	1	2
$P(\xi_1^2+\xi_2^2)=k$	0.05	0.5	0.45

Функция распределения:

$$F_{\xi_1^2+\xi_2^2} = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 0+0.05=0.05, & x \in (0,1] \\ 0.05+0.5=0.55, & x \in (1,2] \\ 0.55+0.45=1, & x > 2 \end{cases}$$

д) Носитель распределения случайной величины:

$$\mathrm{supp}(\xi_1) = \{-1,0,1\}, \mathrm{supp}(\xi_2) = \{-1,0,1\} \Rightarrow \mathrm{supp}(\xi_1-\xi_2^2) = \{-2,-1,0,1\}$$

Таблица распределения:

$$\xi_2 \in \{-1,1\} \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=-2) = 0.15$$

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=-1) = 0.1$$

$$\xi_2 \in \{-1,1\} \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=-1) = 0.3$$

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=0) = 0.05$$

$$\xi_2 \in \{-1,1\} \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=0) = 0.3$$

$$\xi_2 = 0 \Rightarrow P(\xi_1^2+\xi_2^2=1) = 0.1$$

Знач. $\xi-1-\xi_2^2$ / Знач. ξ_1	-2	-1	0	1
-1	0.15	0.1	0	0
0	0	0.3	0.05	0
1	0	0	0.3	0.1

Задача 4 (СГТВ раздел 3 - задача 5).

Условие:

Случайный вектор (ξ, η) имеет равномерное распределение в квадрате $[0,1] \times [0,1]$ с плотностью:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, x, y \in [0,1] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти распределение следующих комбинаций случайных величин:

а) $(\xi + \eta)^2$;

б) $2\xi + 3\eta$;

в) $\xi^2 + \eta^2$;

г) $(\xi, \xi + \eta)$.

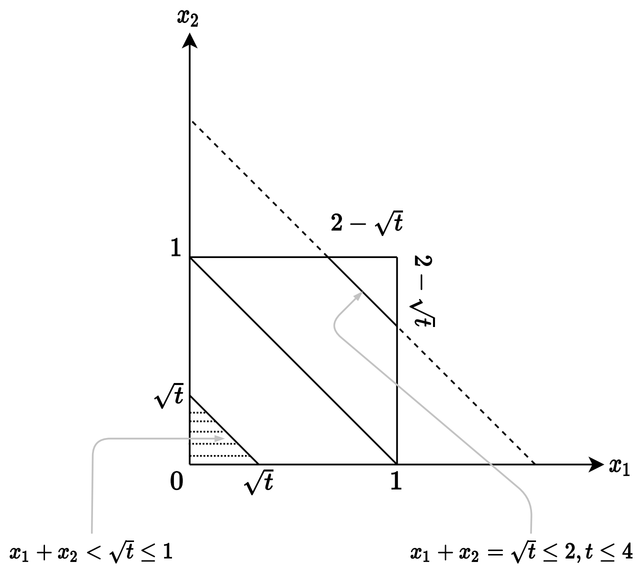
Решение:

а) Носитель распределения:

$$\mathrm{supp}(\xi) = \mathrm{supp}(\eta) = [0,1], (\xi + \eta)^2 < t \Rightarrow \xi + \eta < \sqrt{t}, 0 < t \leqslant 4$$

Функция распределения:

$$F_{(\xi+\eta)^2}(t) = P((\xi + \eta)^2 < t)$$



Воспользуемся геометрическим определением интеграла для нахождения функции распределения данной случайной величины.

При $t \in (0, 1]$ (площадь заштрихованной области):

$$F_{(\xi+\eta)^2}(t) = \int_0^{\sqrt{t}} dx_2 \int_0^{\sqrt{t}-x_2} dx_1 = \int_0^{\sqrt{t}} (\sqrt{t} - x_2) dx_2 = \frac{t}{2}$$

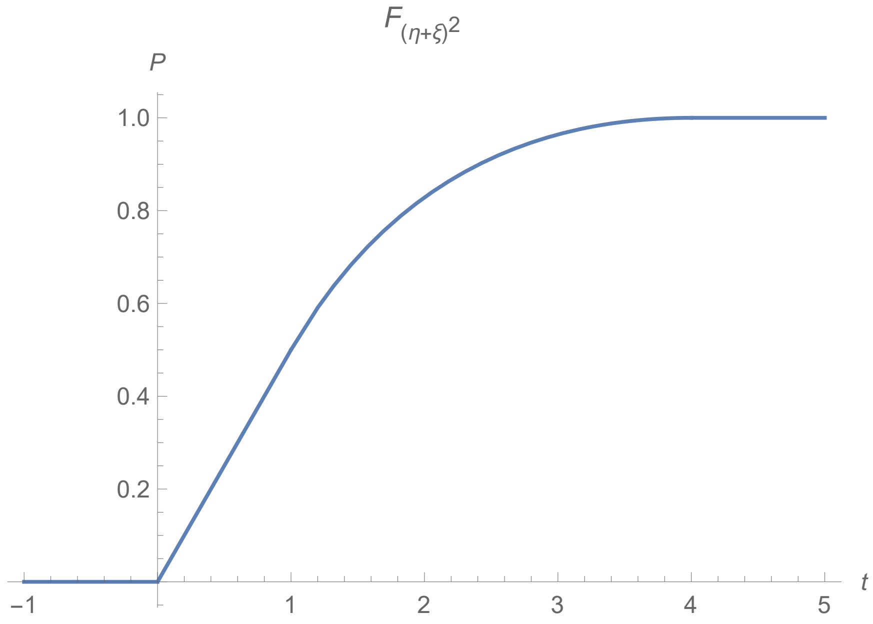
При $t \in (1,4]$ (вычитаем из площади квадрата $[0,1] \times [0,1]$ площадь треугольника со сторонами $2-\sqrt{t}$):

$$F_{(\xi+\eta)^2}(t) = 1 - \int_0^{2-\sqrt{t}} dx_2 \int_0^{2-\sqrt{t}-x_2} dx_1 = \int_0^{2-\sqrt{t}} (-\sqrt{t} - x_2 + 2) dx_2 = 1 - \frac{(\sqrt{r}-2)^2}{2}$$

Таким образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{(\xi+\eta)^2}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{t}{2}, & t \in (0,1] \\ 1 - \frac{(\sqrt{t}-2)^2}{2}, & t \in (1,4] \\ 1, & t > 4 \end{cases}$$

График функции представлен ниже:



б) Носитель распределения:

$$\mathrm{supp}(\xi) = \mathrm{supp}(\eta) = [0,1], 2\xi + 3\eta < t, 0 < t \leqslant 5$$

Функция распределения:

$$F_{2\xi+3\eta}(t) = P(2\xi + 3\eta < t)$$

Для удобства вычислений разобьём квадрат на несколько зон, а также введём несколько обозначений: T_i - треугольник, используемый для вычислений в i-ой зоне; номера зон на рисунке помещены в синие рамки. Границы интегрирования выражаются из носителя.

- При $t \in (0,2]$ функция распределения равна площади T_1, находящегося под прямой $2x_1 + 3x_2 = t$:

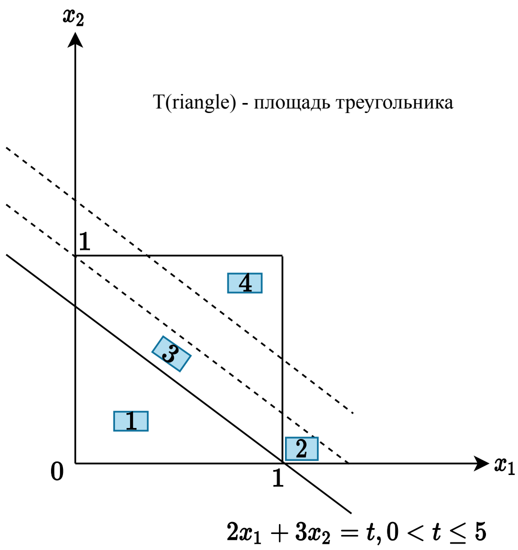
$$F_{2\xi+3\eta}(t) = \int_0^{\frac{t}{2}} dx_1 \int_0^{\frac{t-2x_1}{3}} dx_2 = \frac{t^2}{12}$$

- При $t \in (2, 3]$ функция распределения равна площади $T_1 - T_2$, где T_2 - площадь прямоугольника под вышеобозначенной прямой, но вне квадрата (зона 2).

$$F_{2\xi+3\eta}(t) = \frac{t^2}{12} - \int_0^{\frac{t-2}{2}} dx_1 \int_0^{\frac{t-2x_1-2}{3}} dx_2 = \frac{t^2}{12} - \frac{1}{12}(t-2)^2 = \frac{t-1}{3}$$

- При $t \in (3, 4]$ функция распределения равна разности площади квадрата и площади T_3, находящегося над прямой $2x_1 + 3x_2 = 4$ и образующего 4-ю область (находим 3-ю).

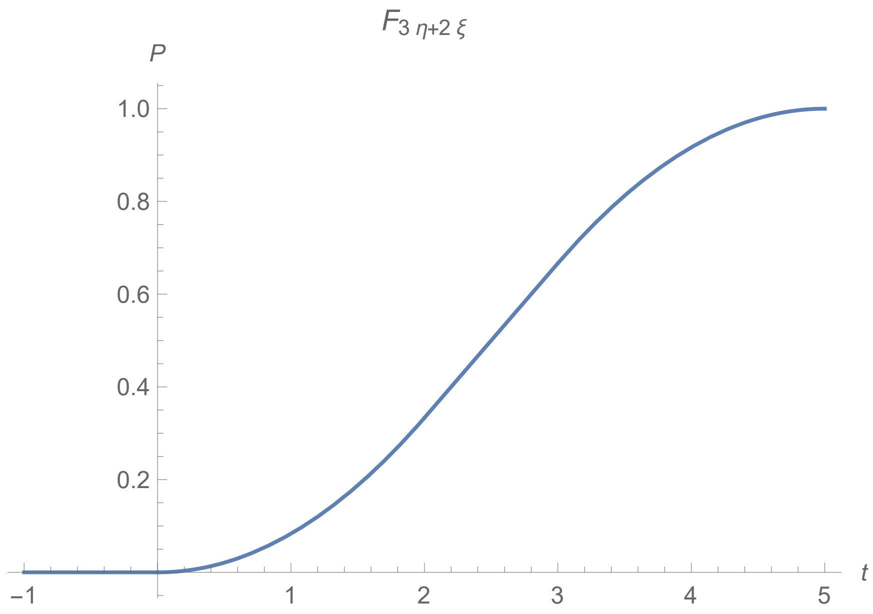
$$F_{2\xi+3\eta}(t) = 1 - \int_0^{\frac{5-t}{2}} dx_1 \int_0^{\frac{5-2x_1-t}{3}} dx_2 = 1 - \frac{1}{12}(t-5)^2$$



Таком образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{2\xi+3\eta}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{t^2}{12}, & t \in (0, 2] \\ \frac{t-1}{3}, & t \in (2, 3] \\ 1 - \frac{1}{12}(t-5)^2, & t \in (3, 5] \\ 1, & t > 5 \end{cases}$$

График функции представлен ниже:



в) Носитель распределения:

$$\text{supp}(\xi) = \text{supp}(\eta) = [0, 1], \xi^2 + \eta^2 < t, 0 < t < 2$$

Функция распределения:

$$F_{\xi^2+\eta^2} = P(\xi^2 + \eta^2 < t)$$

Заметим, что уравнение вида $x^2 + y^2 < z$ задаёт некоторую область внутри окружности радиуса $\sqrt{z}$ с центром в точке начала координат.

Введём новое обозначение - S_i - сектор, используемый в i-ой зоне.

1. При $t \in (0, 1]$ функция распределения равна площади сектора S_1, ограниченного прямыми координат и частью окружности с центром в $(0; 0)$ и радиусом t. Требуемую площадь сектора найдём через следующую формулу:

$$S = \frac{\pi r^2 \alpha}{2\pi}$$

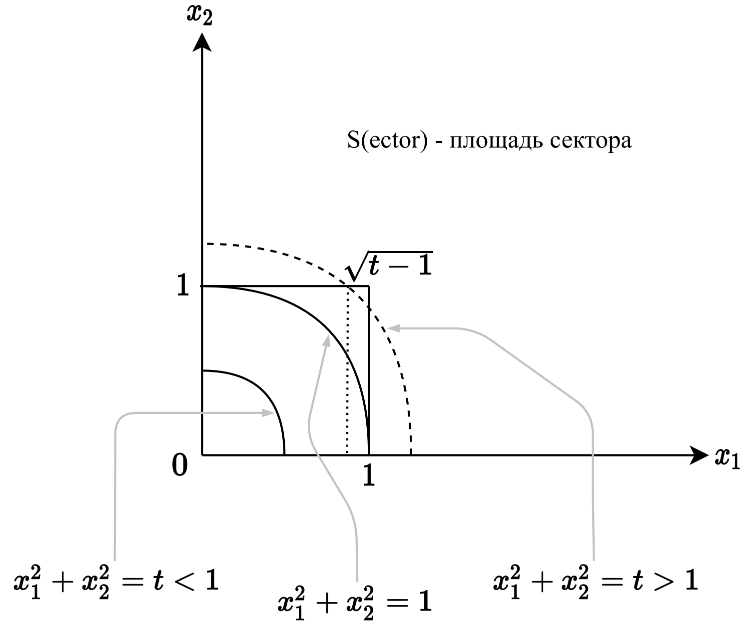
$$F_{\xi^2+\eta^2}(t) = \frac{t^2 \pi}{4}$$

2. При $t \in (1, 2]$ функция распределения равна сумме прямоугольника со сторонами 1 и $\sqrt{t-1}$, а также криволинейной трапеции, образованной под прямой $x_1^2 + x_2^2 = t, x_1 = \sqrt{t-1} \dots t$ с основанием $1 - \sqrt{t-1}$.

   Очевидно, что площадь прямоугольника равна $\sqrt{t-1}$. Площадь же криволинейной трапеции (выражаем x_2):

$$\int_{\sqrt{t-1}}^{1} \sqrt{t - x_1^2} dx_1 = \frac{1}{2} \left(\sqrt{t - x^2} \cdot x + t \cdot \arcsin \frac{x}{\sqrt{t}} \right) \Bigg|_{\sqrt{t-1}}^{1} =$$

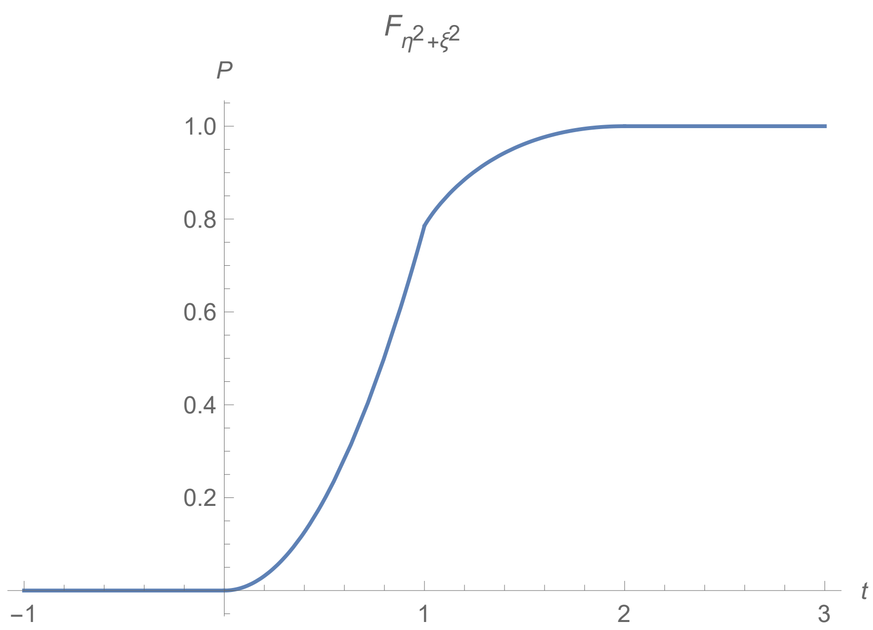
$$= \dots = \frac{1}{2} t \left(\arcsin \frac{1}{\sqrt{t}} - \arcsin \frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}} \right)$$



Таким образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{\xi^2+\eta^2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{\pi t^2}{4}, & t \in (0, 1] \\ \sqrt{t-1} + \frac{1}{2}t\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{t}} - \arcsin\frac{\sqrt{t-1}}{\sqrt{t}}\right), & t \in (1, 2] \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

График функции представлен ниже:



Альтернативно,

$$F_{\xi^2+\eta^2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{\pi t^2}{4}, & t \in (0,1] \\ \sqrt{t-1} + \frac{t}{2} t \left(\arctan \frac{1}{\sqrt{t-1}} - \arctan(\sqrt{t-1}) \right), & t \in (1,2] \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

Дифференцируем, преобразуем, находим плотность распределения

$$p_{\xi^2+\eta^2} = \begin{cases} \frac{\pi t}{2}, & t \in [0{,}1] \\ \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4\sqrt{t-1}} - \arctan(\sqrt{t-1}), & t \in (1{,}2] \\ 1, & t > 2 \end{cases}$$

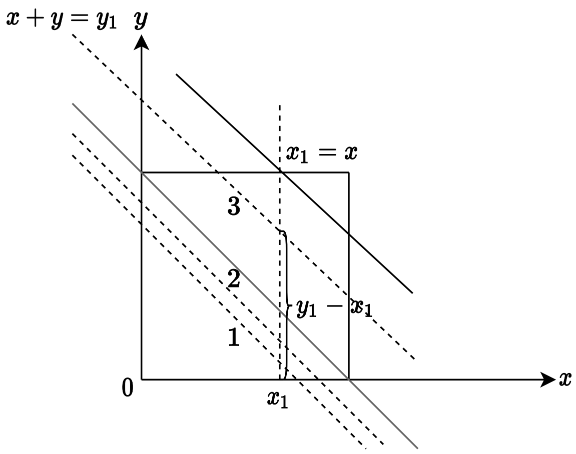
(т.е. в окрестностях точек $t = 1$ и $t = 2$ функция распределения ведет себя не так как изображено на графике)

г)

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, x, y \in [0,1] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$F_{\xi,\xi+\eta}(x_1, y_1) = P(\xi < x_1, \xi + \eta < y_1)$$

$$\text{supp}(x_1) = [0{,}1], \quad \text{supp}(x_2) = [0{,}2]$$



На графике условие $x < x_1$ оставляет от квадрата прямоугольник от 0 до x_1 по оси x.

Условие $x + y < y_1$ делает сечение прямоугольника, а итоговая фигура может быть либо треугольником (1 на рис.), либо трапецией (2 на рис.), либо прямоугольником с отсечённым треугольником (3 на рис.)

Вычисляем функцию распределения $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y)$ по областям (в скобках - форма области, площадь которой равна значению функции распределения).

(a) $\{x \leqslant 0\} \cup \{y \leqslant 0\}$ (пустое множество): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = 0$;

(b) $\{x \in (0,1]\} \cap \{0 < y \leqslant x\}$ (треугольник): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = P(\xi + \eta < y) = \frac{y^2}{2}$;

(c) $\{x \in (0,1]\} \cap \{x < y \leqslant x + 1\}$ (трапеция): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = \left(y - \frac{x}{2}\right) x$;

(d) $\{x \in (0,1]\} \cap \{y > x+1\}$ (прямоугольник): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = P(\xi < x) = x$;

(e) $\{x > 1\} \cap \{y \in (0,1]\}$ (треугольник): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = P(\xi+\eta < y) = \frac{y^2}{2}$;

(f) $\{x > 1\} \cap \{y \in (1,2]\}$ (прямоугольник с отсечённым треугольником): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = P(\xi+\eta < y) = 1 - \frac{(2-y)^2}{2}$;

(g) $\{x > 1\} \cap \{y > 2\}$ (квадрат $[0,1]^2$): $F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = 1$.

Таким образом,

$$F_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \vee y \leqslant 0 \\ \frac{y^2}{2}, & x \in (0,1], 0 < y \leqslant x \vee x > 1, y \in (0,1] \\ \left(y - \frac{x}{2}\right)x, & x \in (0,1], x < y \leqslant x+1 \\ x, & x \in (0,1], y > x+1 \\ 1 - \frac{(2-y)^2}{2}, & x > 1, y \in (1,2] \\ 1, & x > 1, y > 2 \end{cases}$$

Берем смешанную производную, получаем плотность распределения

$$p_{\xi,\xi+\eta}(x,y) = \begin{cases} 1, x \in [0,1], x \leqslant y \leqslant x+1 \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Задача 5 (СГТВ раздел 3 - задача 6).

Условие:

Совместная плотность распределения случайных величин ξ и η имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} cx(x+y), 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти константу c. Вычислить распределение величины $\exp(3\xi + 2\eta)$.

Решение:

- Для того, чтобы найти плотность распределения одной из компонент вектора, надо проинтегрировать плотность по всем остальным переменным, т.е. при каждом $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_0^1 dy \int_0^y cx(x+y)dx = \ldots$$

Решаем внутренний интеграл:

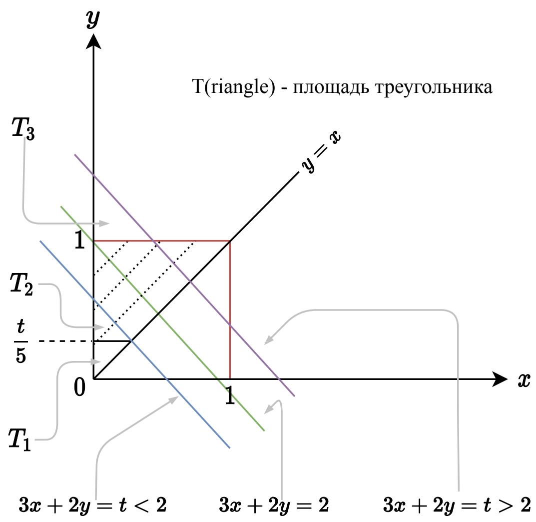
$$\int_0^y cx(x+y)dx = c\int_0^y x(x+y)dx = \left| \begin{smallmatrix} u=x+y & du=dx \\ u=y+0 & u=y+y=2y \end{smallmatrix} \right| = c\int_y^{2y} u^2du - cy\int_y^{2y} udu = \frac{5cy^3}{6}$$

$$\cdots = \int_0^1 \frac{5cy^3}{6}dy = \frac{5c}{6}\int_0^1 y^3dy = \frac{5c}{24} = 1 \Rightarrow c = \frac{24}{5}$$

- Функция распределения в данном случай имеет следующий вид:

$$F_{3\xi+2\eta} = P(3\xi + 2\eta < t)$$

Представь данный случай графически.



На данном изображении используется уже введённое условное обозначение площади треугольника i-ой зоны, а также дополнительное построение в виде прямой, заданной уравнением $y = x$. Также на рисунке обозначена точка пересечения прямых с координатам $\left(\frac{t}{5}; \frac{t}{5}\right)$, заданных уравнениями обозначенной прямой и функции распределения.

  – При $t \in (0, 2]$ (до зелёной лини, включая синюю) функция распределения будет равняться сумме $T_1 + T_2$:

$$F_{3\xi+2\eta}(t) = \int_0^{\frac{t}{5}} dy \int_0^{y} \frac{24x(x+y)}{5} dx + \int_{\frac{t}{5}}^{\frac{t}{2}} dy \int_0^{\frac{t-2y}{3}} \frac{24x(x+y)}{5} dx = \ldots$$

$$\ldots \underset{wolfram}{=} \frac{t^4}{625} + \frac{9t^2}{2500} = \frac{13t^4}{2500}$$

  – При $t \in (2, 5]$ интересующая нас область будет определяться как разность T, образованного прямыми, заданных уравнениями $y = x, x = 0$, прямой функции распределения (заштрихованная область на рисунке) и T_3. Верхнюю границу интегрирования внутреннего интеграла получаем путём выражения $3x + 2y = t \Rightarrow x = \frac{t-2y}{3}$.

$$F_{3\xi+2\eta}(t) = \frac{13t^4}{2500} - \int_1^{\frac{t}{2}} dy \int_0^{\frac{t-2y}{3}} \frac{24x(x+y)}{5} dx = \ldots \underset{wolfram}{=} -\frac{131t^4}{16875} + \frac{8t^3}{135} - \frac{2t^2}{45} - \frac{16t}{135} + \frac{4}{27}$$

Таким образом, функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{3\xi+2\eta} = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ \frac{13t^4}{2500}, & t \in (0{,}2] \\ -\frac{131t^4}{16875} + \frac{8t^3}{135} - \frac{2t^2}{45} - \frac{16t}{135} + \frac{4}{27}, & t \in (2, 5] \\ 1, & t > 5 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$F_{\exp(3\xi+2\eta)} = F_{3\xi+2\eta}(\ln t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 1 \\ \frac{13\ln t^4}{2500}, & t \in (1, e^2] \\ -\frac{131\ln(t)^4}{16875} + \frac{8\ln(t)^3}{135} - \frac{2\ln(t)^2}{45} - \frac{16\ln(t)}{135} + \frac{4}{27}, & t \in (e^2, e^5] \\ 1, & t > e^5 \end{cases}$$

Задача 6 (СГТВ раздел 3 - задача 7).

Условие:

Плотность распределения случайного вектора (ξ, η) имеет вид:

$$p_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} c\exp(-(x+y)), 0 \leqslant y \leqslant x \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

Найти константу c. Вычислить распределение разности $\xi - \eta$.
Решение:

- Для того, чтобы найти плотность распределения одной из компонент вектора, надо проинтегрировать плотность по всем остальным переменным, т.е. при каждом $x \in \mathbb{R}$.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = 1$$

$$\int_0^{\infty} dx \int_0^x c\cdot\exp(-(x+y))dy = \dots$$

Решаем внутренний интеграл:

$$\int_0^x c\cdot\exp(-(x+y))dy = c\int_0^x c\cdot e^(-x-y) = \left| \begin{smallmatrix} u=-x-y; & du=-dy \\ u=-x-0; & u=-x-x=-2x \end{smallmatrix} \right| = (-ce^u)\Big|_{u=-x}^{-2x} =$$

$$= (-ce^{-2x}) - (ce^{-x}) = ce^{-2x}(e^x - 1) = ce^{-2x}(e^x - 1)$$

$$\dots = \int_0^{\infty} ce^{-2x}(e^x-1)dx = c\int_0^{\infty} e^{-2x}(e^x-1)dx = \left| \begin{smallmatrix} u=e^x & du=e^x dx \\ u=e^0=1 & u=\infty \end{smallmatrix} \right| = c\int_1^{\infty}\frac{u-1}{u^3}du =$$

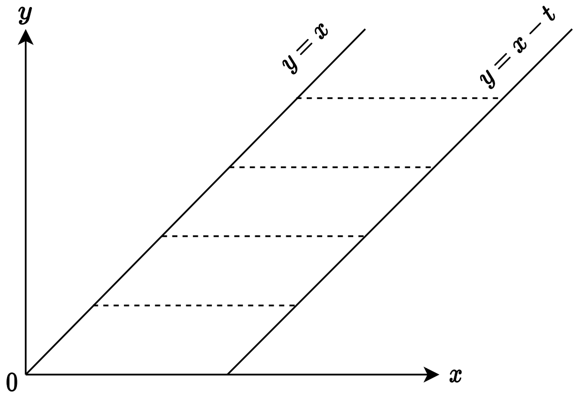
$$= \left| \begin{smallmatrix} s=u-1 & ds=du \\ s=1-1=0 & s=\infty \end{smallmatrix} \right| = c\int_0^{\infty}\frac{s}{s^3+3s^2+3s+1}ds = c\int_0^{\infty}\frac{s}{(s+1)^3} =$$

$$c\int_0^{\infty}\frac{1}{(s+1)^2}ds - c\int_0^{\infty}\frac{1}{(s+1)^3}ds = \dots = c - \frac{c}{2} = \frac{c}{2} = 1 \Rightarrow c = 2$$

- Функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{\xi} = P(\xi - \eta < t)$$

В текущем случае область интегрирования будет задаваться тремя прямыми с уравнениями: $x = 0, y = x, x - y = t$. Данный факт отражён на рисунке ниже (заштрихованная область).



При $t \in (0, +\infty)$ функция распределения имеет следующий вид:

$$F_{\xi-\eta}(t) = \int_0^\infty dx \int_0^x c\exp(-(x+y))dy - \int_t^\infty dx \int_0^{x-t} c\exp(-(x+y))dy =$$

$$= \int_0^\infty dx \infty_0^x 2e^{-x-y}dy - \int_t^\infty dx \int_0^{x-t} 2e^{-x-y}dy =$$

$$= \int_0^\infty (2e^{-x} - 2e^{-2x})dx - \int_0^\infty (2e^{-x} - 2e^{t-2x})dx =$$

$$= 2 - 2\int_0^\infty e^{-2x}dx - 2e^{-t} - 2\int_t^\infty e^{t-2x}dx =$$

$$= 2 - 1 - e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

Таким образом, функция имеет следующий вид:

$$F_{\xi-\eta}(t) = \begin{cases} 0, & t \leqslant 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$$