

## Формула полной вероятности. Формула Байеса. (ДЗ на 29.02.20)

### Задача 1.

Игровой автомат имеет 3 режима игры:

Режим	Вероятность выигрыша	Вероятность выбора режима
I	0.5	0.3
II	0.45	0.5
III	0.4	0.2

Играем 2 игры. 1-ый вариант - автомат включают заново перед каждой игрой. 2-ой вариант - играем две игры подряд, при этом знает, что режим работы автомата меняется циклически:  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ . Что выгоднее, если цель - два выигрыша? Старт автомата мы не контролируем.

*Решение:*

1. Рассмотрим 1-ый вариант игры. Построим таблицу, где 1-ый шаг - выбор режима, 2-ой - получение / не получение приза. Перемножаем по колонкам и складываем по столбцам, согласно

$i$	I	II	III
$P(H_i)$	0.3	0.5	0.2
$P(A H_i) = P(B H_i)$	0.5	0.45	0.4

$$\text{ФПВ: } P(A) = \sum_{i=1}^n P(A|H_i)P(H_i).$$

$$P(A) = P(B) = 0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.45 + 0.2 \cdot 0.4 = 0.455$$

Учитывая факт перезапуска автомата для каждой игры, события каждой новой игры можно считать независимыми. Таким образом:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0.207025$$

2. Рассмотрим 2-ой вариант игры.

Событие  $A$  - первая игра была выигрышной. Таблица вероятностей будет аналогична 1-ому пункту:  $P(A) = 0.455$ .

Рассмотрим с какой вероятностью выбирается последующий режим игры автомата, если событие  $A$  произошло. Вероятности данных событий в сумме дают единицу (4-ого режима или альтернативного выбора  $\nexists$ ), а сами события не пересекаются (не может быть 2 состояния одновременно)  $\Rightarrow$  это полная группа событий (ПГС).

$$P(H_1|A) = \frac{P(A|H_1)P(H_1)}{\sum_{i=1}^3 P(A|H_i)P(H_i)} = \frac{0.3 \cdot 0.5}{0.3 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.45 + 0.2 \cdot 0.4} = 0.3297$$

Аналогично получаем:

$$P(H_2|A) = 0.4945$$

$$P(H_3|A) = 0.1758$$

Событие  $B$  - вторая игра также оказалась выигрышной. Учитывая кольцевую смену режимов аппарата, построим таблицу, по структуре аналогичную предыдущим.

$i$	I	II	III
$P(H_i A)$	0.3297	0.4945	0.1758
$P(B (H_i A))$	0.45	0.4	0.5

Выбор следующего режима зависит от предыдущего  $\Rightarrow$  все вероятности условные:

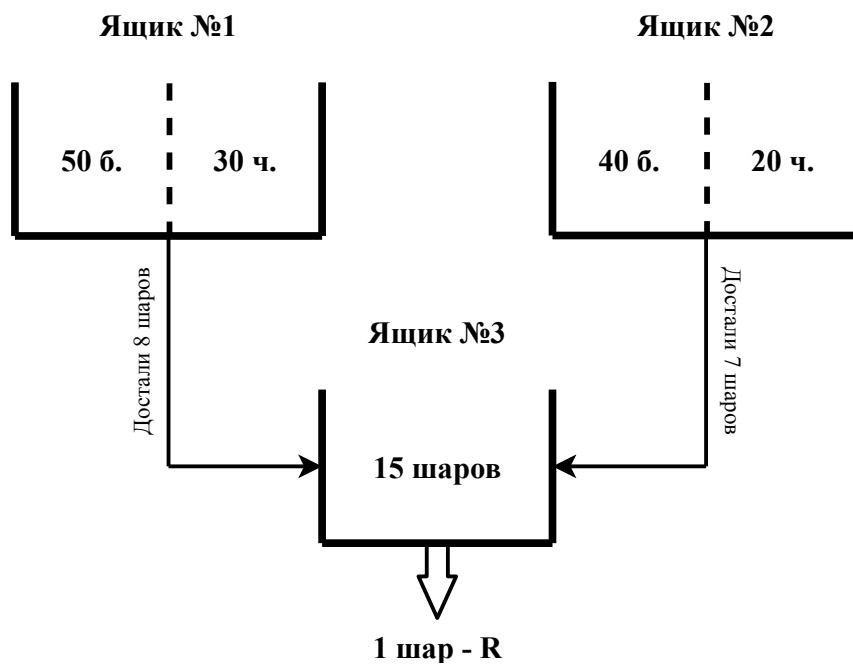
$$P(B|A) = 0.3297 \cdot 0.45 + 0.4945 \cdot 0.4 + 0.1758 \cdot 0.5 = 0.434$$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B|A) = 0.455 \cdot 0.434 = 0.19747$$

**Ответ:** выгоднее каждый раз запускать автомат заново.

## Задача 2.

Белые и чёрные шары распределены по ящикам следующим образом:



1. Определить вероятность, что шар  $R$  - белый.
2. Определить вероятность, что в первом ящике осталось 50 белых шаров (т.е. ни одного белого не вытащили), если шар  $R$  - белый.

*Решение:*

1. Посчитаем вероятности  $P(A_i)$  достать  $i$  белых шаров из 1-ого ящика. Всего 8 шаров из ящика с 80 шарами можно достать:

$$\#\Omega = C_{80}^8 = 28987537150$$

способами.

Необходимо рассмотреть все варианты достать шары из ящика. Одним из таких, например, является вариант - 4 белых и 4 чёрных:  $\#A_4 = C_{50}^4 \cdot C_{30}^4$ .

$$A_0 = C_{50}^0 \cdot C_{30}^8 = 1 \cdot 5852925 = 5852925$$

$$A_1 = C_{50}^1 \cdot C_{30}^7 = 50 \cdot 2035800 = 101790000$$

$$A_2 = C_{50}^2 \cdot C_{30}^6 = 1225 \cdot 593775 = 727374375$$

$$A_3 = C_{50}^3 \cdot C_{30}^5 = 19600 \cdot 142506 = 2793117600$$

$$A_4 = C_{50}^4 \cdot C_{30}^4 = 230300 \cdot 27405 = 6311371500$$

$$A_5 = C_{50}^5 \cdot C_{30}^3 = 2118760 \cdot 4060 = 8602165600$$

$$A_6 = C_{50}^6 \cdot C_{30}^2 = 15890700 \cdot 435 = 6912454500$$

$$A_7 = C_{50}^7 \cdot C_{30}^1 = 99884400 \cdot 30 = 2996532000$$

$$A_8 = C_{50}^8 \cdot C_{30}^0 = 536878650 \cdot 1 = 536878650$$

Соответствующие вероятности событий для 1-ого ящика:

$$P(A_0) = \frac{A_0}{\#\Omega} = \frac{5852925}{28987537150} = 0.000201911772280385$$

$$P(A_1) = \frac{A_1}{\#\Omega} = \frac{101790000}{28987537150} = 0.0035115090831371303$$

$$P(A_2) = \frac{A_2}{\#\Omega} = \frac{727374375}{28987537150} = 0.025092658656584076$$

$$P(A_3) = \frac{A_3}{\#\Omega} = \frac{2793117600}{28987537150} = 0.09635580924128286$$

$$P(A_4) = \frac{A_4}{\#\Omega} = \frac{6311371500}{28987537150} = 0.21772706895866797$$

$$P(A_5) = \frac{A_5}{\#\Omega} = \frac{8602165600}{28987537150} = 0.29675393102514747$$

$$P(A_6) = \frac{A_6}{\#\Omega} = \frac{6912454500}{28987537150} = 0.23846298028806492$$

$$P(A_7) = \frac{A_7}{\#\Omega} = \frac{2996532000}{28987537150} = 0.10337311460763406$$

$$P(A_8) = \frac{A_8}{\#\Omega} = \frac{536878650}{28987537150} = 0.018521016367201104$$

Произведём аналогичные расчёты для 2-ого ящика.

Всего 7 шаров из ящика с 60 шарами можно достать: 386206920 способами

Все варианты достать шары из 2-ого ящика:

$$B_0 = C_{40}^0 \cdot C_{20}^7 = 1 \cdot 77520 = 77520$$

$$B_1 = C_{40}^1 \cdot C_{20}^6 = 40 \cdot 38760 = 1550400$$

$$B_2 = C_{40}^2 \cdot C_{20}^5 = 780 \cdot 15504 = 12093120$$

$$B_3 = C_{40}^3 \cdot C_{20}^4 = 9880 \cdot 4845 = 47868600$$

$$B_4 = C_{40}^4 \cdot C_{20}^3 = 91390 \cdot 1140 = 104184600$$

$$B_5 = C_{40}^5 \cdot C_{20}^2 = 658008 \cdot 190 = 125021520$$

$$B_6 = C_{40}^6 \cdot C_{20}^1 = 3838380 \cdot 20 = 76767600$$

$$B_7 = C_{40}^7 \cdot C_{20}^0 = 18643560 \cdot 1 = 18643560$$

Соответствующие вероятности событий для 2-ого ящика:

$$P(B_0) = \frac{B_0}{\#\Omega} = \frac{77520}{386206920} = 0.00020072141638477115$$

$$P(B_1) = \frac{B_1}{\#\Omega} = \frac{1550400}{386206920} = 0.004014428327695423$$

$$P(B_2) = \frac{B_2}{\#\Omega} = \frac{12093120}{386206920} = 0.0313125409560243$$

$$P(B_3) = \frac{B_3}{\#\Omega} = \frac{47868600}{386206920} = 0.12394547461759618$$

$$P(B_4) = \frac{B_4}{\#\Omega} = \frac{104184600}{386206920} = 0.2697636800500623$$

$$P(B_5) = \frac{B_5}{\#\Omega} = \frac{125021520}{386206920} = 0.32371641606007473$$

$$P(B_6) = \frac{B_6}{\#\Omega} = \frac{76767600}{386206920} = 0.19877323793162485$$

$$P(B_7) = \frac{B_7}{\#\Omega} = \frac{18643560}{386206920} = 0.04827350064053746$$

В ящике №3 может оказаться от 0 до 15 белых шаров. События вытаскивания из него белого шара  $R$  зависит от данного факта. Очевидно, что случае с 0 не рассматривается.

Пусть  $\{H_i\}_1^n$  - полная группа события, где  $H_i$  - событие, при котором в 3-ем ящике  $i$  белых шаров.

Составим всевозможные комбинации того, как  $i$  шаров могут оказаться в 3-ем ящике.

$H_1$	Комбинация событий	$H_4$	$(A_0, B_4)$ $(A_1, B_3)$ $(A_2, B_2)$ $(A_3, B_1)$ $(A_4, B_0)$	$H_8$	$(A_1, B_7)$ $(A_2, B_6)$ $(A_3, B_5)$ $(A_4, B_4)$ $(A_5, B_3)$ $(A_6, B_2)$ $(A_7, B_1)$ $(A_8, B_0)$	$H_{12}$	$(A_5, B_7)$ $(A_6, B_6)$ $(A_7, B_5)$ $(A_8, B_4)$
$H_2$	$(A_0, B_1)$ $(A_1, B_0)$	$H_5$	$(A_0, B_5)$ $(A_1, B_4)$ $(A_2, B_3)$ $(A_3, B_2)$ $(A_4, B_1)$ $(A_5, B_0)$	$H_9$	$(A_2, B_7)$ $(A_3, B_6)$ $(A_4, B_5)$ $(A_5, B_4)$ $(A_6, B_3)$ $(A_7, B_2)$ $(A_8, B_1)$	$H_{13}$	$(A_6, B_7)$ $(A_7, B_6)$ $(A_8, B_5)$
$H_3$	$(A_0, B_2)$ $(A_1, B_1)$ $(A_2, B_0)$	$H_6$	$(A_0, B_6)$ $(A_1, B_5)$ $(A_2, B_4)$ $(A_3, B_3)$ $(A_4, B_2)$ $(A_5, B_1)$ $(A_6, B_0)$	$H_{10}$	$(A_3, B_7)$ $(A_4, B_6)$ $(A_5, B_5)$ $(A_6, B_4)$ $(A_7, B_3)$ $(A_8, B_2)$	$H_{14}$	$(A_7, B_7)$ $(A_8, B_6)$

$H_3$	$(A_0, B_3)$	$H_7$	$(A_0, B_7)$	$H_{11}$	$(A_4, B_7)$	$H_{15}$	$(A_8, B_7)$
	$(A_1, B_2)$		$(A_1, B_6)$				
	$(A_2, B_1)$		$(A_2, B_5)$				
	$(A_3, B_0)$		$(A_3, B_4)$				
			$(A_4, B_3)$				
			$(A_5, B_2)$		$(A_5, B_6)$		
			$(A_6, B_1)$		$(A_6, B_5)$		
			$(A_7, B_0)$		$(A_7, B_4)$		
					$(A_8, B_3)$		

Тогда вероятность каждого события  $H_i$  есть сумма вероятностей комбинаций событий, потому что эти комбинации не пересекаются (не могут произойти одновременно):

$$P(H_1) = P(A_0) \cdot P(B_1) + P(A_1) \cdot P(B_0) = 8.105603383375651e - 07 + 7.04835076815274e - 07 = 1.515395415152839e - 06$$

$$P(H_2) = P(A_0) \cdot P(B_2) + P(A_1) \cdot P(B_1) + P(A_2) \cdot P(B_0) = 6.322370639033008e - 06 + 1.409670153630548e - 05 + 5.0366339864091445e - 06 = 2.5455706161747633e - 05$$

$$P(H_3) = 0.00025505367666534906$$

$$P(H_4) = 0.001705935000371956$$

$$P(H_5) = 0.008073521060592307$$

$$P(H_6) = 0.02794557202034627$$

$$P(H_7) = 0.07208039050283002$$

$$P(H_8) = 0.1397509646349726$$

$$P(H_9) = 0.2037671590635703$$

$$P(H_{10}) = 0.22171508665910591$$

$$P(H_{11}) = 0.17687347686232707$$

$$P(H_{12}) = 0.10018528150934262$$

$$P(H_{13}) = 0.03805480857749707$$

$$P(H_{14}) = 0.008671664507319158$$

$$P(H_{15}) = 0.0008940742954654873$$

Складывая данные вероятности, получаем 0.999999959471983, учитывая погрешность округления, данная величина равна единица, что подтверждает верность расчётов и факт того, что данные события являются ПГС.

Событие  $P(C)$  - достали белый шар. Составим таблицу с ПГС:

$C H_i$	$i$
$\frac{1}{15} = 0.066666666666$	1
$\frac{2}{15} = 0.133333333333$	2
$\frac{3}{15} = 0.200000000000$	3

$\frac{4}{15} = 0.266666666666$	4
$\frac{5}{15} = 0.333333333333$	5
$\frac{6}{15} = 0.400000000000$	6
$\frac{7}{15} = 0.466666666666$	7

$\frac{8}{15} = 0.533333333333$	8
$\frac{9}{15} = 0.600000000000$	9
$\frac{10}{15} = 0.666666666666$	10
$\frac{11}{15} = 0.733333333333$	11

$\frac{12}{15} = 0.800000000000$	12
$\frac{13}{15} = 0.866666666666$	13
$\frac{14}{15} = 0.933333333333$	14
$\frac{15}{15} = 1.000000000000$	15

$$P(C) = \sum_{i=1}^{15} P(H_i)P(C|H_i) = 0.6444444444444444$$

## 2-ой вариант решения (КРАТКИЙ)

Пусть событие  $A$  - в итоге вытащен белый шар.

Пусть события  $H_i$  - вытащенный шар был в  $i$ -ом ящике. Тогда они образуют ПГС.

$i$	1	2
$P(H_i)$	$\frac{8}{15}$	$\frac{7}{15}$
$P(A H_i)$	$\frac{50}{80}$	$\frac{40}{60}$

$$P(A) = \frac{8}{15} \cdot \frac{50}{80} + \frac{7}{15} \cdot \frac{40}{60} = 0.64444444$$

2. Если в 1-м ящике осталось 50 белых шаров, то из него не взяли ни одного белого. Тогда белых в третьем ящике может быть от 1 до 7 (не 0, потому что из него достали белый шар), так как они все из второго ящика.

Таким образом, надо посчитать:

$$P(H_1|C) = \frac{P(H_1) \cdot P(C|H_1)}{P(C)} = \frac{1.515395415152839e-06 \cdot 0.066666666666}{0.64444444} = 2.633348913284238e-06$$

$$P(H_2|C) = 5.276972620662395e-05$$

$$P(H_3|C) = 0.0005294281035637105$$

$$P(H_4|C) = 0.0033407673354175073$$

$$P(H_5|C) = 0.014454606217420484$$

$$P(H_6|C) = 0.044739552725894506$$

$$P(H_7|C) = 0.10119897439084223$$

В таблице комбинаций, составленной в предыдущем пункте теперь нас интересуют лишь пункты  $H_1 - H_7$  (в них содержится  $A_0$  - благоприятное для нас событие).

Учитывая способ вычисления при помощи таблицы для ПГС, получаем вывод, что  $A_0 - A_7$  образуют ПГС: чтобы выполнилось  $H_1$  при  $A_0$  нужен  $B_1$ , а при  $A_1$  нужен  $B_0$ . Если пары нет, то вероятность  $P(H_1|A_i) = 0$ . На основе этого получаем таблицу:

$i$	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(A_i)$	0.000201911772280385	0.0035115090831371303	...	...	...	...	...	...
$P(H_1 A_i)$	$= P(B_1) = 0.004014428...$	$= P(B_0) = 0.00020072141...$	0	0	0	0	0	0

Выражаем:

$$P(A_0|H_1) = \frac{P(H_1|A_0) \cdot P(A_0)}{\sum_{i=0}^7 P(H_1|A_i)P(A_i)} = \frac{P(H_1|A_0) \cdot P(A_0)}{P(H_1)} = 0.5348837209302326$$

Таким образом, получаем:

$$\begin{aligned} P(A_0|(H_1|C)) &= P(A_0|H_1) \cdot P(H_1|C) = 0.5348837209302326 \cdot 2.633348913284238e - 06 = \\ &= 1.4085354652450578e - 06 \end{aligned}$$

Пользуясь аналогичными рассуждениям для  $H_2 - H_7$  получаем:

$$\begin{aligned} P(A_0|H_2) &= \frac{P(H_2|A_0) \cdot P(A_0)}{P(H_2)} = \frac{P(B_2) \cdot P(A_0)}{P(H_2)} = 0.2483675211703085 \\ P(A_0|(H_2|C)) &= P(A_0|H_2) \cdot P(H_2|C) = 1.3106286090775058e - 05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_0|H_3) &= 0.09812072020827407 \\ P(A_0|(H_3|C)) &= 5.194786682017199e - 05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_0|H_4) &= 0.031928803104403575 \\ P(A_0|(H_4|C)) &= 0.00010666670247016857 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_0|H_5) &= 0.008095867316428222 \\ P(A_0|(H_5|C)) &= 0.00011702257404745466 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_0|H_6) &= 0.0014361723110718318 \\ P(A_0|(H_6|C)) &= 6.425370683466798e - 05 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(A_0|H_7) &= 0.00013522385215333335 \\ P(A_0|(H_7|C)) &= 1.3684515151096217e - 05 \end{aligned}$$

$$P(A_0|C) = P(A_0|(H_1|C)) + \dots + P(A_0|(H_7|C)) = 0.00036809018687957953(???)$$

## 2-ой вариант решения (КРАТКИЙ)

Обратимся к таблице из 1-ого пункт:  $H_2$  - событие, при котором белый шар, вытасенный из 3-его ящика изначально находился во 2-ом. Тогда:

$$P(H_2|A) = \frac{P(A|H_2)P(H_2)}{P(A)} = \frac{\frac{40}{60} \cdot \frac{7}{15}}{\frac{29}{45}} = \frac{14}{29} \approx 0.482759$$



Событие  $B$  - из 1-ого ящика вынули 8 чёрных шаров (т.е. ни одного белого).

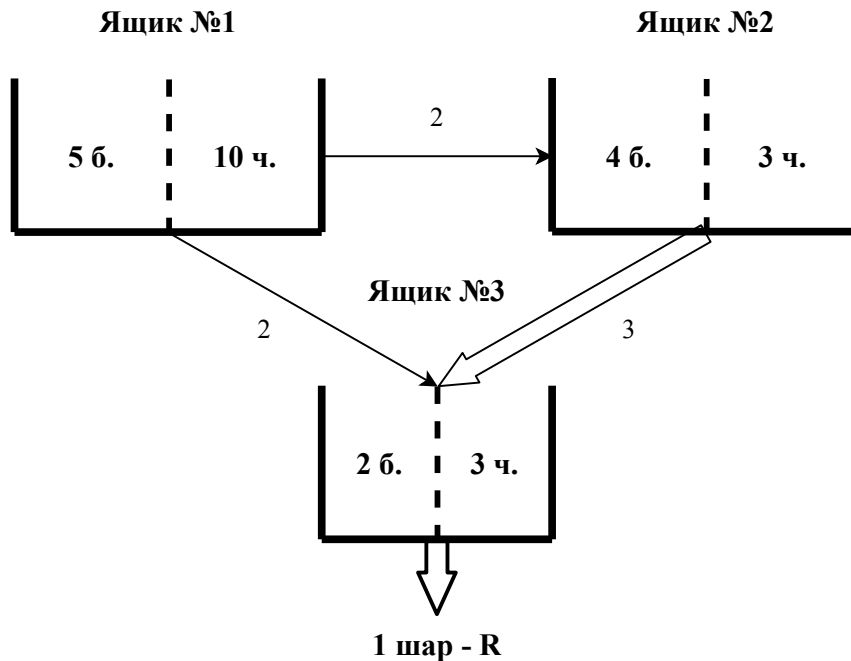
$$P(B) = \frac{C_{30}^8}{C_{80}^8} = \frac{5852925}{28987537150} \approx 0.000202$$

Тогда вероятность, что в 1-м ящике осталось 50 белых, при условии, что из 3-го ящика вытащили белый шар, который изначально был во 2-ом:

$$P(B|(H_2|A)) = 0.000202 \cdot 0.482759 \approx 0.000098$$

### Задача 3.

Белые и чёрные шары распределены по ящикам следующим образом:



1. Определить вероятность, что вытащенный шар  $R$  белый
2. Если вытащенный шар белый, определить вероятность, что в 3-м ящике осталось 2 белых
3. Если вытащенный шар белый, определить вероятность, что из 2-го ящика в 3-й переложены все белые

*Решение:*

1. События  $A_i, 0 \leq i \leq 2$  - из 1-ого ящика в 3-ий переложили  $i$  белых шаров образуют ПГС. Всего возможных вариантов данного действия:  $C_{15}^2 = 105$ .

События  $B_j, 0 \leq j \leq 2$  - из 1-го ящика во 2-й переложили  $j$  белых шаров.

Построим таблицу условных вероятностей для каждого  $B_j$ -ого. Всего вариантов данного события (учитывая, что два уже вытащены из 1-го ящика):  $C_{13}^2 = 78$ . Если, например, из 1-го ящика в 3-й переложили 1 белый, то в 1-м ящике осталось 4 белых и 9 черных.

По формуле ПГС найдём вероятности  $P(B_0), P(B_1), P(B_2)$ :

$i$	0	1	2
$P(A_i)$	$\frac{C_5^0 \cdot C_{10}^2}{C_{15}^2} = \frac{3}{7}$	$\frac{C_5^1 \cdot C_{10}^1}{C_{15}^2} = \frac{10}{21}$	$\frac{C_5^2 \cdot C_{10}^0}{C_{15}^2} = \frac{2}{21}$
$P(B_0 A_i)$	$\frac{C_5^0 \cdot C_8^2}{C_{13}^2} = \frac{14}{39}$	$\frac{C_4^0 \cdot C_9^2}{C_{13}^2} = \frac{6}{13}$	$\frac{C_3^0 \cdot C_{10}^2}{C_{13}^2} = \frac{15}{26}$
$P(B_1 A_i)$	$\frac{C_5^1 \cdot C_8^1}{C_{13}^2} = \frac{20}{39}$	$\frac{C_4^1 \cdot C_9^1}{C_{13}^2} = \frac{6}{13}$	$\frac{C_3^1 \cdot C_{10}^1}{C_{13}^2} = \frac{5}{13}$
$P(B_2 A_i)$	$\frac{C_5^2 \cdot C_8^0}{C_{13}^2} = \frac{5}{39}$	$\frac{C_4^2 \cdot C_9^0}{C_{13}^2} = \frac{1}{13}$	$\frac{C_3^2 \cdot C_{10}^0}{C_{13}^2} = \frac{1}{26}$

$$P(B_0) = \sum_{i=0}^2 P(B_0|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{3}{7}$$

$$P(B_1) = \sum_{i=0}^2 P(B_1|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{10}{21}$$

$$P(B_2) = \sum_{i=0}^2 P(B_2|A_i) \cdot P(A_i) = \frac{2}{21}$$

Видно, что вероятности  $B_0, B_1, B_2$  также образуют ПГС.

События  $C_k$  - из 2-го ящика в 3-й переложили  $k$  белых шаров.

$B_i$	$B_0$	$B_1$	$B_2$
$P(B_i)$	$\frac{3}{7}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{2}{21}$
$P(C_0 B_i)$	$\frac{C_4^0 \cdot C_5^3}{C_9^3} = \frac{5}{42}$	$\frac{C_5^0 \cdot C_4^3}{C_9^3} = \frac{1}{21}$	$\frac{C_6^0 \cdot C_3^3}{C_9^3} = \frac{1}{84}$
$P(C_1 B_i)$	$\frac{C_4^1 \cdot C_5^2}{C_9^3} = \frac{10}{21}$	$\frac{C_5^1 \cdot C_4^2}{C_9^3} = \frac{5}{14}$	$\frac{C_6^1 \cdot C_3^2}{C_9^3} = \frac{3}{14}$
$P(C_2 B_i)$	$\frac{C_4^2 \cdot C_5^1}{C_9^3} = \frac{5}{14}$	$\frac{C_5^2 \cdot C_4^1}{C_9^3} = \frac{10}{21}$	$\frac{C_6^2 \cdot C_3^1}{C_9^3} = \frac{15}{28}$
$P(C_3 B_i)$	$\frac{C_4^3 \cdot C_5^0}{C_9^3} = \frac{1}{21}$	$\frac{C_5^3 \cdot C_4^0}{C_9^3} = \frac{5}{42}$	$\frac{C_6^3 \cdot C_3^0}{C_9^3} = \frac{5}{21}$

По формуле ПГС найдём вероятности  $P(C_0), P(C_1), P(C_2), P(C_3)$ :

$$P(C_0) = \sum_{i=0}^2 P(C_0|B_i) \cdot P(B_i) = \frac{11}{147}$$

$$P(C_1) = \sum_{i=0}^2 P(C_1|B_i) \cdot P(B_i) = \frac{58}{147}$$

$$P(C_2) = \sum_{i=0}^2 P(C_2|B_i) \cdot P(B_i) = \frac{190}{441}$$

$$P(C_3) = \sum_{i=0}^2 P(C_3|B_i) \cdot P(B_i) = \frac{44}{441}$$

$$\sum_{i=0}^3 P(C_i) = 1 \Rightarrow \text{события образуют ПГС}$$

Событие  $D_l$  - в 3-й ящик попало  $l$  белых (из 1-го и 2-го ящика).

$l$	0	1	2	3	4	5
Комбинация событий	$(C_0, A_0)$	$(C_1, A_0)$ $(C_0, A_1)$	$(C_2, A_0)$ $(C_1, A_1)$ $(C_0, A_2)$	$(C_3, A_0)$ $(C_2, A_1)$ $(C_1, A_2)$	$(C_3, A_1)$ $(C_2, A_2)$	$(C_3, A_2)$

$$P(D_0) = P(C_0) \cdot P(A_0) = 0.032$$

$$P(D_1) = P(C_1) \cdot P(A_0) + P(C_0) \cdot P(A_1) = 0.204$$

$$P(D_2) = P(C_2) \cdot P(A_0) + P(C_1) \cdot P(A_1) + P(C_0) \cdot P(A_2) = 0.379$$

$$P(D_3) = P(C_3) \cdot P(A_0) + P(C_2) \cdot P(A_1) + P(C_1) \cdot P(A_2) = 0.2855$$

$$P(D_4) = P(C_3) \cdot P(A_1) + P(C_2) \cdot P(A_2) = 0.0885$$

$$P(D_5) = P(C_3) \cdot P(A_2) = 0.0095$$

$$\sum_{i=0}^5 P(D_i) \approx 1 \Rightarrow \text{события образуют ПГС}$$

В результате в 3-ем ящике 10 шаров.

Событие  $E$  - из 3-го ящика достали белый шар.

$i$	0	1	2	3	4	5
$P(D_i)$	0.032	0.204	0.379	0.2855	0.0885	0.0095
$P(E D_i)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{10}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{7}{10}$

$$P(E) = \sum_{i=0}^5 P(D_i)P(E|D_i) = 0.4217$$

2. Если в 3-м ящике 2 белых, то в него не добавилось ни одного белого, что соответствует событию  $D_0$ :

$$P(D_0|E) = \frac{P(E|D_0) \cdot P(D_0)}{P(E)} = 0.01517$$

3. То, что в 3-й ящик из 2-го переложены все белые, соответствует событию  $C_3$ . Это может возникнуть при  $D_3, D_4, D_5$ .

$$P(D_3|E) = \frac{P(E|D_3) \cdot P(D_3)}{P(E)} = 0.3385$$

$$P(D_4|E) = \frac{P(E|D_4) \cdot P(D_4)}{P(E)} = 0.1259$$

$$P(D_5|E) = \frac{P(E|D_5) \cdot P(D_5)}{P(E)} = 0.01577$$

$i$	0	1	2	3
$P(C_i)$	$\frac{11}{147}$	$\frac{58}{147}$	$\frac{190}{441}$	$\frac{44}{441}$
$P(D_3 C_i)$	0	$P(A_2)$	$P(A_1)$	$P(A_0)$
$P(D_4 C_i)$	0	0	$P(A_2)$	$P(A_1)$
$P(D_5 C_i)$	0	0	0	$P(A_2)$

Запишем таблицу комбинаций, аналогичную таблице из 2-ого пункта 2-ой задачи ( $D_i$  в ПГС  $C_i$ ).

$$P(C_3|D_3) = \frac{P(C_3) \cdot P(D_3|C_3)}{P(D_3)} = \frac{P(C_3) \cdot P(A_0)}{P(D_3)} = 0.14977$$

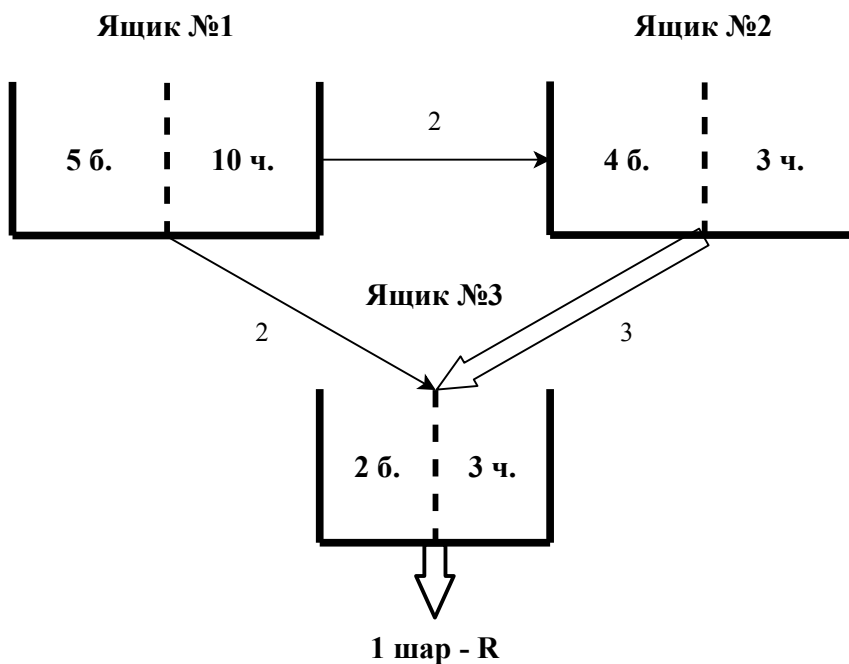
$$P(C_3|D_4) = \frac{P(C_3) \cdot P(A_1)}{P(D_4)} = 0.5368$$

$$P(C_3|D_5) = 1$$

$$\begin{aligned} P(C_3|E) &= P(C_3|D_3) \cdot P(D_3|E) + P(C_3|D_4) \cdot P(D_4|E) + P(C_3|D_5) \cdot P(D_5|E) = \\ &= 0.14977 \cdot 0.3385 + 0.5368 \cdot 0.1259 + 1 \cdot 0.01577 = 0.134 \end{aligned}$$

### Задача 3. (Решение от Малова)

Белые и чёрные шары распределены по ящикам следующим образом:



1. Определить вероятность, что вытасченный шар  $R$  белый
2. Если вытасченный шар белый, определить вероятность, что в 3-м ящике осталось 2 белых
3. Если вытасченный шар белый, определить вероятность, что из 2-го ящика в 3-й переложены все белые

Решение:

Отслеживаем, как белые шары двигались по ящикам.

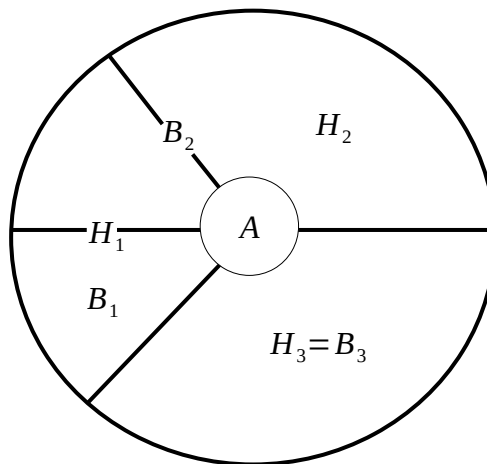
- Событие  $A$  - вытащен белый шар.
- Событие  $H_i$  - вытащенный шар изначально был в  $i$ -ом ящике,  $i = 1, 2, 3$ .
- $B_j$  - вытащенный шар пришёл в  $j$ -ый из  $j$ -ого,  $j = 1, 2, 3$ .

2 шара из 1-ого ящ.	3 шара из 2-ого ящ.	5 шаров было в 3-ем
---------------------	---------------------	---------------------

Считаем вероятности  $B_j$ :

$i$	1	2	3
$P(B_j)$	$\frac{2}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{10}$
$P(A B_j)$	?	?	$\frac{2}{5}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$	

Если белый шар пришёл из 1-ого ящика, то он однозначно изначально был в нём. Значит, из  $B_1 \Rightarrow H_1$ .



Дозаполняем таблицу:

1. Необходимо вычислить вероятность  $P(A|B_j) = \frac{P(AB_j)}{P(B_j)}$

$$P(AB_1) = P(AB_1H_1) = P(A|B_1H_1) \cdot P(H_1|B_1) \cdot P(B_1)$$

$$\qquad\qquad\qquad = \frac{5}{15} = \frac{1}{3} \qquad\qquad\qquad = 1$$

$P(A|B_1H_1) = \frac{5}{15}$ , т.к. по сути это события, что вытащен один из 2-х шаров, что мы перекладывали из 1-ого ящика во 2-ой.

2.  $P(AB_2) = \dots$

Построим иную таблицу с более удобным (хронологически) порядком:

$i$	1	2	3
$P(H_i)$	?	?	$\frac{5}{10}$
$P(A H_i)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{5}$

$$P(H_1) = P(BH_1) + P(B_2H_1) = \underset{=1}{P(H_1|B_1)} \underset{=0.2}{P(B_1)} + \underset{=\frac{2}{9}}{P(H_1|B_2)} \underset{=\frac{3}{10}}{P(B_2)}$$

$$P(H_2) = P(H_2|B_2)P(B_2) = \frac{7}{9} \cdot \frac{3}{10} = \frac{7}{30}$$

$$P(H_1) = \frac{2}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{10} = \frac{8}{30}$$

В результате для первой строки нашей последней таблицы получаем:

$$\frac{8}{30} + \frac{7}{30} + \underset{=\frac{15}{30}}{\frac{15}{30}} = 1$$

Т.е. всё верно и вычисления 3-ей величины мы производили для проверки.