*Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381*

# Независимые эксперименты. (ДЗ на 14.03.20)

## Задача 1.

Техническая система из $n$ блоков. Вероятность неисправности каждого блока - $p$. Имеется 2 комплекта блоков. Систему можно собирать 2-мя способами:

1. Спаять и проверить - работает или нет (распаять нельзя);
2. Проверять каждый блок и в зависимости от того, работает или нет, вставлять его в систему. Тот блок, на который заменили, также необходимо проверять. Два блока одного типа оказались неисправными $\Rightarrow$ систему собрать невозможно.

Найти вероятности: $P(A) =?$, где событие $A$ - из имеющихся блоков получится собрать работающую систему.

*Решение:*

**Рассмотрим способ I.**

По условию задачи имеем 2 комплекта деталей $\Rightarrow$ при неисправности одной собранной схемы можно собрать вторую.

Событие $B_j$ - из $i$-го комплекта деталей можно собрать работающую систему. Событие $B_{jk}$ - $k$-ый элемент $j$-ого набора исправен, данный события независимы. По условию неисправность каждого блока - независимые в совокупности события. Следовательно,

$$B_j = \bigcap_{k=1}^{n} B_{jk} = \prod_{k=1}^{n} P(B_{jk}) = (1-p)^n$$

$$A = B_1 \cup B_2 \Rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{B}_1 \cup \bar{B}_2) = 1 - \prod_{k=1}^{2}(1 - P(B_{jk})) = 1 - (1-(1-p)^n)^2$$

**Рассмотрим способ II.**

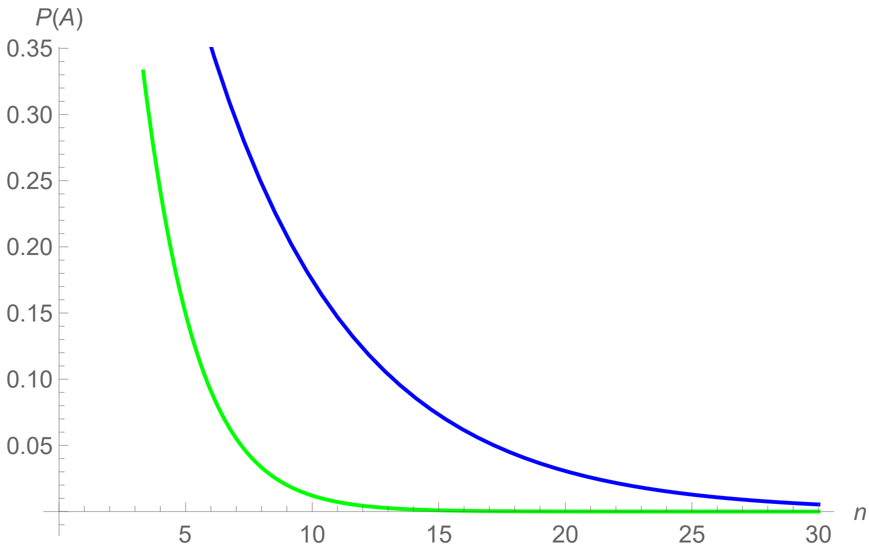
Имеется возможность на этапе сборки заменить неисправный блок на исправный. Событие $C_l$ - имеется $l$-ый исправный блок в одном из комплектов. Пусть события $C_{l1}$ и $C_{l1}$ - исправен $l$-ый блок из 1/2 набора соотвественно.

$$C_l = C_{l1} \cup C_{l2} \Rightarrow P(C_l) = 1 - P(\bar{C}_{l1} \cup \bar{C}_{l2}) = 1 - \sum_{m=1}^{2}(1 - P(C_{lm})) = 1 - p^2$$

В данном случае событие $A \Leftrightarrow$ удалось найти хотя бы по одному исправному блоку каждого типа, чтобы собрать схему.

$$A = \bigcap_{l=1}^{n} C_l ; P(A) = \prod_{l=1}^{n} P(B_l) = (1-p^2)^n$$

Для наглядности выявления более выгодной формулы возьмём $p = 0.4$ и построим соответствующие графики. Зелёным на графике обозначен 1-ый способ, а синим - 2-ой. Как видно, проверка каждого блока является предпочтительным способом сборки.




## Задача 2.

Вероятность разрыва верёвки длины $l = 1$ равна $p$. Определить вероятность разрыва верёвки длины $L$, если разрыв непересекающихся участков верёвки происходит независимо.

*Решение:*

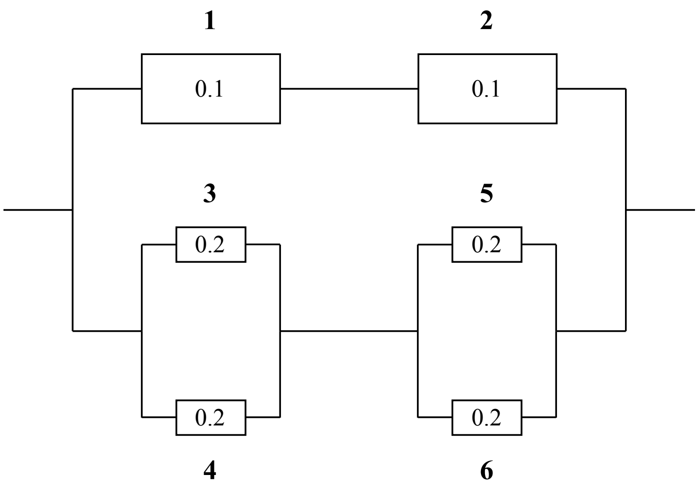
Событие $A$ - верёвка разорвалась. Событие $B_i$ - разорвался $i$-ый участок верёвки. По условию задачи данные события независимы, поэтому:

$$A = \bigcup_{i=1}^{L} B_i$$

$$P(A) = 1 - \prod_{i=1}^{L} (\bar{B}_i) = 1 - (1-p)^L$$

## Задача 3.

Дана схема:

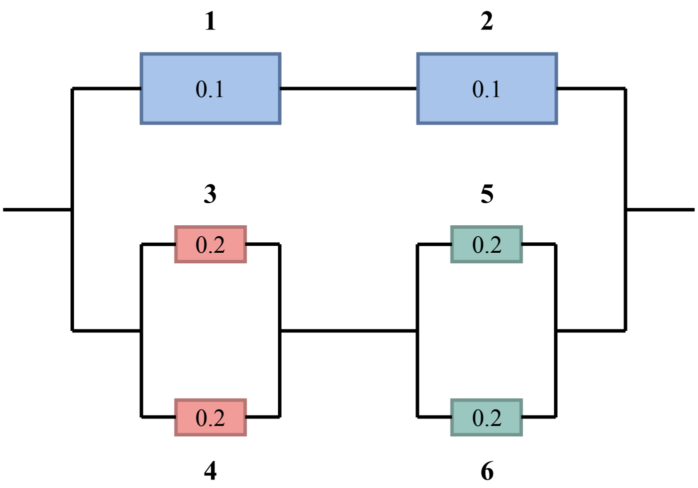


Это механизм дублирования: отказывает один из верхних блоков → переходим на 2-ю ветку. Вероятность отказа каждого блока указана внутри. Событие $X$ - схема НЕ работает. Найти вероятность отказа системы $P(A) =?$

*Решение:*

> При нахождении веротности корректной работы последовательному соединению соответствует произведение событий, параллельному соединению - сумма событий. При нахождении веротности отказа системы наоборот.

Ради удобства занумеруем элементы схемы, а находящиеся в одних группах (имеют одинаковое соединение) красим в один цвет.




- 1 и 2 эл. - синий - последовательное соединения;
- 3 и 4 эл. - красный - параллельное соединения;
- 5 и 6 эл. - зелёный - параллельное соединения.

Событие $A_1$ - отказала синяя группа, $A_2$ - отказала красная группа, $A_3$ - отказала зелёная группа.

События:

- $X_1$ - НЕ работает первый уровень схемы: синяя группа,
- $X_2$ - НЕ работает второй уровень схемы: красная и зелёная группы,

Пусть события $B_i$ - не работает $i$-ый блок в данной схеме.

$A_1 = B_1 \cup B_2$. Т.к. это единственная группа на первом уровне цепи, то вероятность его отказа равна $X_1 = A_1$.

$$A_2 = B_3 \cap B_4$$
$$A_3 = B_5 \cap B_6$$

Тогда вероятность отказа второго уровня цепи равна: $X_2 = A_2 \cup A_3 = (B_3 \cap B_4) \cup (B_5 \cap B_6)$.

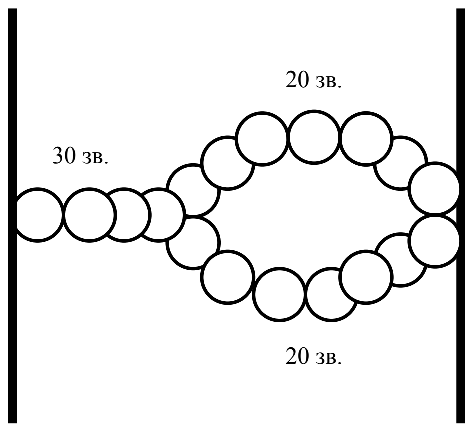
$$X = X_1 \cap X_2 = (B_1 \cup B_2) \cap ((B_3 \cap B_4) \cup (B_5 \cap B_6))$$

$$P(X) = P((B_1 + B_2) \cdot ((B_3 \cdot B_4) + (B_5 \cdot B_6))) =$$
$$= P(B_1 + B_2) \cdot P((B_3 \cdot B_4) + (B_5 \cdot B_6)) =$$
$$= (P(B_1) + P(B_2) - P(B_1) \cdot P(B_2)) \cdot (P(B_3) \cdot P(B_4) + P(B_5) \cdot P(B_6) - P(B_3) \cdot P(B_4) \cdot P(B_5) \cdot P(B_6)) =$$
$$= (0.1 + 0.1 - 0.1^2) \cdot (0.2^2 + 0.2^2 - 0.2^4) = 0.014896S$$

## Задача 4.

Дана схема, представленная на рисунке ниже.

Вероятность разрыва звена: $p_{\text{рз}} = p$. Событие $A$ - цепь разорвётся. Найти вероятность $P(A) =?$




*Решение:*

Событие $B$ - разорвётся 1-ая часть цепи, состоящая из 30 звеньев. Событие $B_i$ - разорвётся $i$-ое звено.

$$B = \bigcup_{i=1}^{30} B_i \Rightarrow P(B) = 1 - \prod_{i=1}^{30} P(\bar{B}_i) = 1 - (1-p)^{30}$$

Событие $C$ - разорвётся вторая часть цепи из двух хвостов (по 20 звеньев). События $C_u$ и $C_d$ - разорвётся верхняя (up) / нижняя (down) её часть. События $C_{uj}, C_{dk}$ - разорвётся соотвественно $j$-ое / $k$-ое звено частей данных цепей. Тогда:

$$C_u = \bigcup_{j=1}^{20} C_{uj} \Rightarrow P(C_u) = 1 - \prod_{j=1}^{20} (\bar{C}_{uj}) = 1 - (1-p)^{20}$$

$$C_d = \bigcup_{k=1}^{20} C_{dk} \Rightarrow P(C_d) = 1 - \prod_{k=1}^{20} (\bar{C}_{dk}) = 1 - (1-p)^{20}$$

Таким образов, вероятность события $C$ разорвалась верхняя И нижняя части цепи:

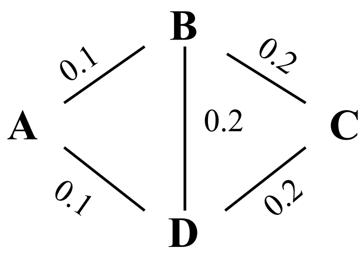
$$C = C_u \cap C_d \Rightarrow P(C) = P(C_u) \cdot P(C_d) = (1 - (1-p)^{20})^2$$

Событие $A$ - разобрался первый участок цепи ИЛИ второй участок цепи.

$$A = B \cup C \Rightarrow P(A) = 1 - ((1-p)^{30} \cdot (1 - (1 - (1-p)^{20})^2))$$

## Задача 5.

Дана следующая схема электропередач. Вероятность повреждения ураганом линий передач между ними равна соответствующим числам. Определить вероятность $P$, что в пункте $C$ будет нарушено электроснабжение. Ток идёт из станции $A$. Будем считать, что отказ линии электропередач происходит независимо.




*Решение:*

Обозначим величины вероятности вероятности выхода из строя передач за $p = 0.1$ и $q = 0.2$.
Событие $D$ - нарушено электроснабжение из $A$ в $C$.
Событие $A_B$ - нарушено электроснабжение из $A$ по пути $AB$ и только по нему.
Аналогично событие $B_C$ - нарушено электроснабжение по $BC$.
Событие $B_{DC}$ - нарушено электроснабжение по пути $BD - DC$.

$$P(A_B) = p \cdot (1 - p) = 0.1 \cdot (1 - 0.1) = 0.09$$
$$P(B_C) = q = 0.2$$
$$P(B_{DC}) = 1 - (1 - q)^2 = 0.36$$
$$P(D|A_B) = P(B_C) \cdot P(B_{DC}) = 0.2 \cdot 0.36 = 0.072$$
$$P(DA_B) = P(D|A_B) \cdot P(A_B) = 0.00648$$

Событие $A_D$ - нарушено электроснабжение из $A$ по пути $AD$ и только по нему.
Событие $D_C$ - нарушено электроснабжение по пути $DC$.
Событие $D_{BC}$ - нарушено электроснабжение по пути $DB - BC$.

$$P(A_D) = P(A_B)$$
$$P(D_C) = P(B_C)$$
$$P(D_{BC}) = P(B_{DC})$$

$$P(DA_D) = P(DA_B) = 0.00648$$

Событие $A_0$ - не нарушен ни один из путей из $A$, тогда:

$$P(A_0) = (1 - p)^2 = 0.81$$

$$P(D|A_0) = P(D_C) \cdot P(B_C) = 0.04$$
$$P(DA_0) = 0.81 \cdot 0.04 = 0.0324$$

Событие $A_{BD}$ - нарушено электроснабжение по обоим путям, тогда:

$$P(D) = P(DA_B) + P(DA_D) + P(DA_0) + P(DA_{BD}) = 0.05536$$