*Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381*

# Условная вероятность (ДЗ на 22.02.20)

## Задача 1.

Из колоды в 52 карты наугад выбираются 2. Определить, независимы ли события $P(A), P(B), P(AB), P(B|A), P(A|B)$.

a) $A - \{!T\}, B - \{!Kp\}$

В данном случае порядок карт не важен $\Rightarrow \#\Omega = C_{52}^2 = \dfrac{52 \cdot 51}{2} = 1326$.

Событие $A$ – 4 варианта выбрать туз, при этом каждому из них в пару можно выбрать одну карту, не являющуюся тузом. Таких карт $52 - 4 = 48 \Rightarrow \#A = 4 \cdot 48 = 192$.

Событие $B$ – 26 вариантов выбрать красную карту, при этом каждой из них в пару можно выбрать одну НЕ красную карту. Таких карт $52 - 26 = 26 \Rightarrow \#B = 26 \cdot 26 = 676$.

$$P(A) = \frac{192}{1326}, P(B) = \frac{676}{1326}$$

Событие $AB$, что выпал ровно один туз и ровно одна красная карта подразделяется на два случая:

- Одна из карт – красный туз, а другая НЕ красная И НЕ туз (событие $C$)
- Одна из карт – НЕ красный туз, а другая – красная, но НЕ туз (событие $D$)

Для события $C$ есть 2 варианта выбрать красный туз и 24 варианта выбрать черную и не туз (так как 26 черных, из которых 2 туза) $\Rightarrow \#C = 2 \cdot 24 = 48$.

Для события $D$ есть 2 варианта выбрать черный туз, и 24 варианта выбрать красную, но не туза $\Rightarrow \#D = 2 \cdot 24 = 48$.

$$P(AB) = P(C) + P(D) = \frac{48 + 48}{1326} = \frac{16}{221}$$

Проверка независимости событий.

$$P(A) \cdot P(B) \approx 0.07382 \neq P(AB) \Rightarrow \text{ события } A \text{ и } B \textbf{ зависимы}$$
$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \approx \frac{0.0724}{0.5098} \approx 0.142 \cdot \left(\frac{96}{676}\right)$$
$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \approx \frac{0.0724}{0.14479} \approx 0.5 \cdot \left(\frac{96}{192}\right)$$

b) $A - \{$!Т пик $\}, B - \{$!Д черви$\}$

$$\#\Omega = C_{52}^2 = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$$

Событие $A$ – туз пик + одна из оставшихся 51 карт: $\#A = 51, P(A) = \dfrac{51}{1326} = \dfrac{1}{26}$.

Событие $B$ – дама черви + одна из оставшихся 51 карт: $\#B = 51, P(B) = \frac{51}{1326} = \frac{1}{26}$

Событие $AB$ : одна карта – туз пик, а вторая – дама черви (одна карта не может быть одновременно и тем, и тем).

$$P(AB) = \frac{1}{1326} = \frac{1}{\frac{51 \cdot 52}{2}} \neq P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P(A|B) = P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{26}{51 \cdot 26} = \frac{1}{51} = 0.0196$$

c) $A - \{$обе красные$\}, B - \{$!Т пик$\}$

$$\#\Omega = C_{52}^2 = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$$

Событие $A$ – взять две красные карты, не учитывая порядок, т.к. была выбрана модель без учета порядка.

$$\#A = C_{26}^2 = 325, P(A) = \frac{325}{1326} = \frac{25}{102}$$

Событие $B$ - один туз пик, а вторую карту можно выбрать 51 способам.

$$\#B = 51, P(B) = \frac{51}{1326} = \frac{1}{26}$$

Событие $AB$ – одна из карт – туз пик, но тогда невозможно, чтобы было 2 красные карты $\Rightarrow P(AB) = 0$.

$\Rightarrow$ события **зависимы** и $P(A|B) = P(B|A) = 0$.

d) $A - \{$обе красные$\}, B - \{$одной масти$\}$

$$\#\Omega = C_{52}^2 = \frac{52 \cdot 51}{2} = 1326$$

Событие $A$ – взять две красные карты, не учитывая порядок, т.к. была выбрана модель без учета порядка.

$$\#A = C_{26}^2 = 325, P(A) = \frac{325}{1326} = \frac{25}{102}$$

Событие $B$ – взять карты одной масти, не учитывая порядок. Всего мастей 4, и в каждой 13 карт.

$$\#B = 4 \cdot C_{13}^2 = 78 \cdot 4, P(B) = \frac{78 \cdot 4}{1326} = \frac{4}{17}$$

Событие $AB$ - берутся две красные карты одной масти, а чтобы выполнить $A$ - две карты красной масти.

$$P(AB) = \frac{2 \cdot C_{13}^2}{1326} = \frac{2}{17} \neq P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = 0.5$$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = 0.48$$

## Задача 2.

Монета бросается трижды. Определить независимы ли события:

$A - \{1 - 0\}, B - \{3 - p\}, C - \{o > p\}, D - \{! - o\}, E - \{\text{хоть! о}\}, F - \{\geqslant 2o\}$

Если зависимы, посчитать зависимость одного от другого. Цифра $\rightarrow$ упорядоченный набор. Но можно считать иначе, если строим другую модель.

*Решение:*

Порядок подбрасывания монет по условию важен, а повторения возможны $\Rightarrow$ упорядоченный набор с повторениям.

$$\#\Omega = 2^3 = 8$$

a) Проверим независимость $A$ и $B$.

Событие $A$ - 1-ый раз выпал орёл, 2-ой и 3-ий - всё, что угодно $\Rightarrow \#A = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4, P(A) = \dfrac{1}{2}$

Событие $B$ - 1-ый и 2-ой раз выпало всё, что угодно, а в 3-ий - решка $\Rightarrow \#B = 2 \cdot \cdot 2 \cdot 1 = 4, P(B) = \dfrac{1}{2}$

Событие $AB$ - 1-ый раз выпал орёл, 2-ой раз всё, что угодно, а 3-ий - решка $\Rightarrow \#AB = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 2, P(AB) = \dfrac{1}{4}$

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B)$$

$\Rightarrow$ события **независимы**.

b) Проверим независимость $A$ и $C$.

Событие $A$ описано в предыдущем пункте.

Событие $C$ - за три броска выпало больше орлов, чем решек. Два орла за 3 броска может выпасть $C_3^2 = 3$ способами, также подходящим является выпадение 3-х орлов.

$$\#C = 3 + 1 = 4, P(C) = \frac{1}{2}$$

Событие $AC$ - первым выпал орёл и орлов больше, чем решек. Т.к. первым выпал орёл, то бросок, в который выпадет 2-ой, можно выбрать двумя способами + исход, когда выпадает два орла.

$$\#AC = 2 + 1 = 3, P(AC) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(C)$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P(A|C) = P(C|A) = \frac{P(AC)}{P(A)} = \frac{3 \cdot 2}{8} = 0.75$$

c) Проверим независимость $B$ и $C$.

Событие $B$ описано в пункте a), событие $C$ - в пункте b).

$$P(B) = \frac{1}{2}, P(C) = \frac{1}{2}$$

Событие $BC$ - третьим броском выпала решка и орлов за все броски больш, чем решек. Первыми двумя бросками должны выпасть орлы $\Rightarrow$

$$P(BC) = \frac{1}{8} \neq P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P(B|C) = P(C|B) = \frac{P(BC)}{P(B)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

d) Проверим независимость $(A \cup B)$ и $C$.

События $A, B, C$ и $AB$ рассмотрены в предыдущих пунктах.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Событие $(A \cup B)$ и $C$ - первый орёл, либо третья решка, но обязательно орлов больше, чем решек. Всего таких вариантов 3: ОРО, ООО, ООР.

$$P\left((A \cup B) \cap C\right) = \frac{3}{8} = P(A \cup B) \cdot P(C)$$

$\Rightarrow$ события **независимы**.

e) Проверим независимость $(A \cup B)$ и $(B \cup C)$.

События $A, B, C$ рассмотрены в предыдущих пунктах.

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$
$$P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(BC) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Событие $(A \cup B)$ и $(B \cup C)$ - (первый орёл ИЛИ третья решка) И (третья решка ИЛИ орлов больше, чем решек).

- По св-ву ассоциативности операции объединения множеств ($(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$), если выполнено условие $B$, то событие обязательно случиться.

  $\Rightarrow$ берём все случаи, когда третья решка, т.е. $\#B = 4$.
- Рассматриваем случаи, когда третьим броском выпадает не решка. Первый должен быть орёл $\Rightarrow$ ООО или ОРО.

$$P\left((A \cup B) \cap (B \cup C)\right) = \#B + 2 = 4 + 2 = 6$$
$$P\left((A \cup B) \cap (B \cup C)\right) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \neq P(A \cup B) \cdot P(B \cup C)$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P\left((A \cup B)|(B \cup C)\right) = \frac{6}{7}$$
$$P\left((B \cup C)|(A \cup B)\right) = 1$$

f) Проверим независимость $(A \cup B)$ и $D$.

События $A$ и $B$ рассмотрены в предыдущих пунктах.

$$P(A \cup B) = \frac{3}{4}$$

Событие $D$ - выпал ровно один орёл. Тогда таких исходов: $C_3^1 = 3$.

$$P(D) = \frac{3}{8}$$

Событие $(A \cup B)$ и $D$ - выпал ровно один орёл, при этом либо 1-ый орёл, либо 3-я решка. Удовлетворяющие варианты: ОРР, РОР.

$$P\left((A \cup B) \cap D\right) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P\left((A \cup B)|D = \frac{2}{3}\right)$$

$$P\left(D|(A \cup B)\right) = \frac{1}{3}$$

g) Проверим независимость $D$ и $(E \cap F)$

Событие $D$ – выпал ровно один орел.

$$P(D) = \frac{C_3^1}{8} = \frac{3}{8}$$

Событие $E$ – выпал хоть один орел. От обратного – не выпадет ни одного орла один раз:

$$P(E) = 1 - P(\bar{E}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

Событие $F$ – выпало два орла или более. Подходящие исходы: ООР, ОРО, РОО, ООО. $\#F = 4$.

$$P(F) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Событие $E \cap F$ - выпал хоть один орел и выпало два орла и более. Если выпало два орла или более, то хоть один орел точно выпал $\Rightarrow$

$$P(EF) = P(F) = \frac{1}{2}$$

Событие $(D \cap (E \cap F)) \Leftrightarrow (D \cap E \cap F)$. Если выпало два орла или более, то ровно один орел не мог выпасть, поэтому таких случаев нет, т.е.

$$P\left(D \cap E \cap F\right) = 0 \neq P(D) \cdot P(EF)$$

$\Rightarrow$ события **независимы**.

Из того, что одно случается вытекает, что другое точно не случится.

$$P(D|(E \cap F)) = P((E \cap F)|D) = 0$$

h) Проверим независимость $D$ и $E$.

События $D$ и $E$ рассмотрены в предыдущих пунктах.

Событие $(D$ и $F)$ - выпал ровно один орел и выпал хоть один орел. Если выпал ровно один орел, то хоть один орел точно выпал $\Rightarrow$

$$P(D \cap E) = P(D) = \frac{3}{8} \neq P(D) \cdot P(E)$$

$\Rightarrow$ события **зависимы**.

$$P(E|D) = 1, P(D|E) = \frac{3}{7}$$

## Задача 3.

В соревнованиях участвуют 8 - команд: 4 из премьер лиги и 4 из футбольной национальной лиги. Образуются 4 пары, необходимо определить вероятность, что каждой команде из ПЛ будет поставлена команда из ФНЛ.

*Решение:*

Рассмотрим последовательный выбор всех пар ПЛ и ФНЛ.

При выборе первой пары множество всех исходов по выбору 2-х команд равно: $\#\Omega_1 = C_8^2 = 28$. Пусть событие $A_1$ - сформирована требуемая пара "ПЛ + ФНЛ" тогда $\exists$ 4 способа выбрать 1-ю команду и аналогично 4 выбрать 2-ю $\Rightarrow \#A_1 = 4 \cdot 4 = 16$.

$$P(A_1) = \frac{16}{28} = \frac{4}{7}$$

Событие $(A_2|A_1)$ - сформирована 2-ая требуемая пара, при условии, что 1-ая уже создана. Т.к. в ПЛ и ФНЛ -1 команда $\Rightarrow \#\Omega_2 = C_6^2 = 15$. По тем же соображениям: $\#(A_2|A_1) = 3 \cdot 3 = 9$.

$$P((A_2|A_1)) = \frac{9}{15}$$

Вероятность **совместного появления двух зависимых событий** равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность второго, вычисленную при условии, что первое событие произошло, т.е. $P(AB) = P(B) \cdot P(A|B) = P(A) \cdot P(B|A)$.

Таким образом, $P(A_1A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \dfrac{3}{5} \cdot \dfrac{4}{7} = \dfrac{12}{35}$

Событие $(A_3|A_1A_2)$ - сформировалась 3-я пара, при условии создания первых 2-х. Аналогично предыдущему шагу, $\#\Omega_3 = C_4^2 = 6, \#A_3 = 2 \cdot 2 = 4$.

$$P((A_3|A_1A_2)) = \frac{2}{3}$$

$$P(A_1A_2A_3) = P((A_3|A_1A_2)) \cdot P(A_1A_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{12}{35} = \frac{8}{35}$$

Событие $(A_4|A_1A_2A_3)$ - сформировалась 4-ая требуемая пара. Очевидно, что $\#\Omega_4 = 1, \#(A_4|A_1A_2A_3) = 1 \Rightarrow P((A_4|A_1A_2A_3)) = 1$.

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P((A_4|A_1A_2A_3)) \cdot P(A_1A_2A_3) = \frac{8}{35}$$

## Задача 4.

Товар стоит 50 рублей. В очереди стоят только люди, у кого 50 и 100 рублей. $n$ - 100 р., $n$ - 50 р. Очередь выстроена в случайном порядке. Найти вероятность, что очередь, обслужена по порядку, если в начальный момент в кассе нет денег.

*Решение:*

Пусть $X$ - купюра в 50 р., а $Y$ - купюра в 100 р.

В начале очереди может стоять только покупатель с $X$, т.к. иначе сразу не на что давать сдачу, т.е. не подходит вариант:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $Y$ | $x/y$ | $x/y$ | $\dots$ | $x/y$ |

Рассмотрим варианты расположения 1-ой встреченной $Y$ в очереди. Пусть $A_1$ - событие, при котором для неё оказалась сдача. По условию кол-во $Y = X = n \Rightarrow$ после 1-ой стоит ещё $n-1$ купюра $Y$ и значит позиция 1-ой: от 2 до $n+1$:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $Y$ | $x/y$ | $x/y$ | $\dots$ | $x/y$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | $X$ | $Y$ | $x/y$ | $\dots$ | $x/y$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ | $\dots$ |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(XX\dots X)_n$ | $Y$ | $x/y$ | $x/y$ | $\dots$ | $x/y$ |

Всего вариантов разместить 1-ю $Y$:

$$\#\Omega = n+1$$

$$P(A_1) = \frac{n}{n+1}$$

Событие $(A_2|A_1)$ - для 2-ой $Y$ оказалась сдача, при условии, что для 1-ой она нашлась.

Воспользуемся тем фактом, что дальнейшего влияния на последовательность пара $X$ и $Y$ не оказывает, поэтому уберём их из построенной модели. В результате остаётся $X : (n-1)$ и $Y : (n-1)$.

По аналогичным рассуждениям позиция 2-ого $Y$ может быть от 2 до $(n-1)+1$. Тогда $\#\Omega_2 = n$.

$$P((A_2|A_1)) = \frac{n-1}{n}$$

$$P(A_1A_2) = P(A_2|A_1) \cdot P(A_1) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n}$$

Далее можем получить:

$$P(A_3|A_1A_2) = \frac{n-2}{n-1}$$

$$P(A_1A_2A_3) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n-1}$$

Для $A_n$ формула примет вид:

$$P(A_1A_2\dots A_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$$