Теория вероятностей и мат. статистика
ИДЗ3

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

04.05.2020

Вар. 14 (838120)
Случайная величина (ξ, η) имеет равномерное распределение в области

$$\begin{pmatrix} 2x - 4y \geq 6, \\ x \leq 5,\ y \geq -1 \end{pmatrix}$$

$\zeta = 1\xi^4 + 2,\ \nu = [5\eta],\ \mu = \ -4\xi + 8\eta.$

1. Найти $p_{\xi,\eta}$, функции и плотности распределения компонент. Будут ли компоненты независимыми?
2. Найти распределения с.в. ζ и ν; $E\zeta$, $E\nu$, $D\zeta$, $D\nu$.
3. Вычислить вектор мат. ожиданий и ковариационные характеристики вектора (ξ, η). Найти условное распределение ξ при условии η; $E(\xi|\eta)$, $D(\xi|\eta)$.
4. Найти распределение μ; $E\mu$; $D\mu$.

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot p_\xi(x)dx = \int_1^5 x \left(\frac{x-1}{8}\right) dx = \frac{11}{3}; \qquad E\xi^2 = \int_1^5 x^2 \left(\frac{x-1}{8}\right) dx = \frac{43}{3}$$

$$E\eta = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot p_\eta(y)dy = \int_{-1}^1 y \left(\frac{1-y}{2}\right) dy = -\frac{1}{3}; \qquad E\eta^2 = \int_{-1}^1 y^2 \left(\frac{1-y}{2}\right) dy = \frac{1}{3}$$

$$D\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{43}{3} - \left(\frac{11}{3}\right)^2 = \frac{8}{9}; \qquad D\eta = E\eta^2 - (E\eta)^2 = \frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{9}$$

Вектор мат. ожидания: $E = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 11 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E\xi\eta = \int_{\mathbb{R}^2} xy \cdot p_{\xi,\eta}(x,y)dxdy = \int_1^5 dx \int_{-1}^{\frac{x-3}{2}} xy \cdot \frac{1}{4}dy = \int_1^5 \frac{1}{32}x(x^2 - 6x + 5)dx = -1$$

Пусть η, ξ - две случайные величины, определённые на одном и том же вероятностном пространстве. Тогда ковариацией случайных величин (*англ.* covariance) η и ξ называется выражение следующего вида:

$$\operatorname{cov}(\eta,\xi) = E((\eta - E\eta)\cdot(\xi - E\xi))$$

В силу линейности математического ожидания, ковариация может быть записана как:

$$\operatorname{cov}(\eta,\xi) = E(\xi\cdot\eta - \eta\cdot E\xi + E\xi\cdot E\eta - \xi\cdot E\eta) =$$

$$= E(\xi\cdot\eta) - E\xi\cdot E\eta - E\xi\cdot E\eta + E\xi\cdot E\eta =$$

$$= E(\xi\cdot\eta) - E\xi\cdot E\eta$$

$$\boxed{\operatorname{cov}(\xi,\eta) = -1 + \frac{11}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{9}}$$

Коэффициент корреляции:

$$\boxed{r(\xi,\eta) = \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi\cdot D\eta}} = \frac{\frac{2}{9}}{\sqrt{\frac{8}{9}\cdot\frac{2}{9}}} = \frac{1}{2}}$$

Матрица корреляции:

$$\operatorname{corr}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & 1\end{pmatrix}$$

Матрица ковариаций (*англ.* covariance matrix) — это матрица, элементы которой являются попарными ковариациями элементов одного или двух случайных векторов. Ковариационная матрица случайного вектора — квадратная симметрическая неотрицательно определенная матрица, на диагонали которой располагаются дисперсии компонент вектора, а внедиагональные элементы — ковариации между компонентами.

Матрица ковариации:

$$\operatorname{var}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D\xi & \operatorname{cov}(\xi,\eta)\\ \operatorname{cov}(\xi,\eta) & D\eta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{9} & \frac{2}{9}\\ \frac{2}{9} & \frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

Условное распределение ξ при условии η:

$$p_{\xi|\eta=y_0}(x) = \frac{p_{\xi,\eta}(x,y)}{p_\eta(y)} = \begin{cases}\frac{1}{2(1-y_0)}, x\leqslant 5, y\geqslant -1, 2x-4y\geqslant 6\\ 0 - \text{ в остальных случаях}\end{cases}$$

$$f_{\xi|\eta}(x|y_0)\geqslant 0 \text{ почти всюду на } \mathbb{R}^{m+n}$$

$$\int_{\mathbb{R}^m} f_{\xi|\eta}(x|y_0)dx = 1, \forall y_0\in\mathbb{R}^n$$

Проверим корректность вычислений, зафиксировав $y = 0 \Rightarrow x = 3$: $\int\limits_3^5 \frac{1}{2(1-0)} dx = 1$.

$$p_{\xi|\eta}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2(1-\eta)}, & \text{при } x \leqslant 5, 2x - 4\eta \geqslant 6 \\ 0 - & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

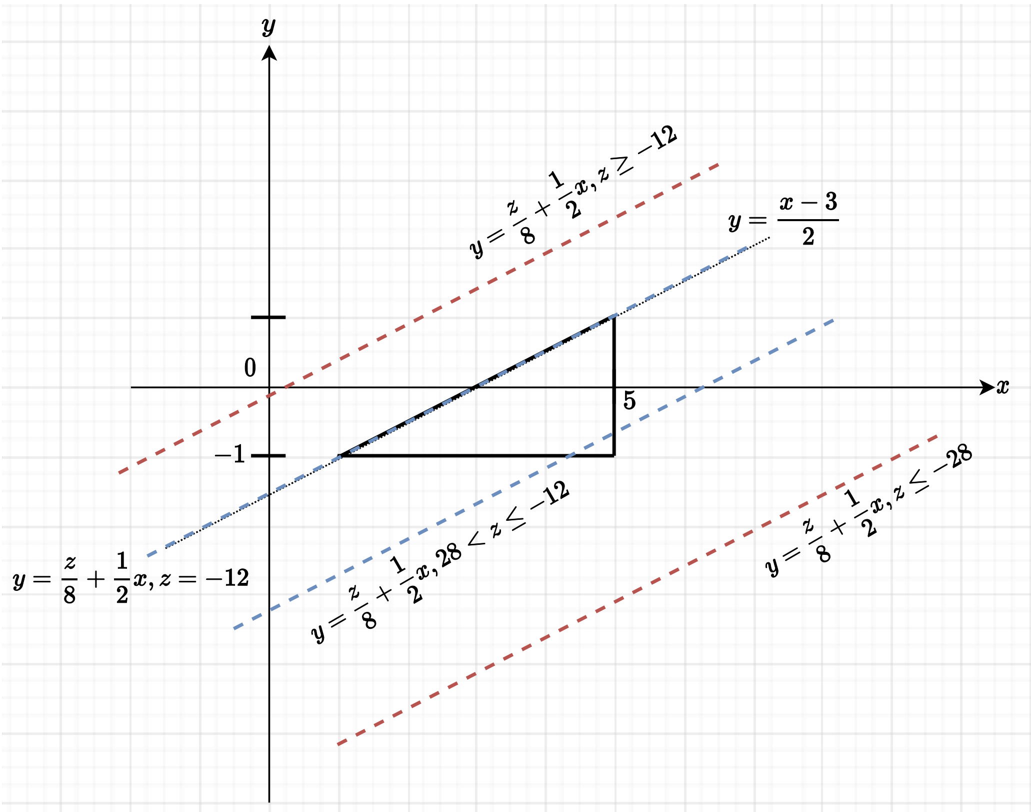
Условное мат. ожидание:

$$E(\xi|\eta = y_0) = \int_1^5 x \cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx = \int_1^5 \frac{x}{2(1-y_0)}dx = -\frac{6}{y-1} \Rightarrow E(\xi|\eta) = \frac{-6}{\eta - 1}$$

$$E(\xi^2|\eta = y_0) = \int_1^5 x^2 \cdot p_{\xi|\eta=y_0}(x)dx = \int_1^5 \frac{x^2}{2(1-y_0)}dx = \frac{62}{3-3y_0}$$

$$D(\xi|\eta = y_0) = \frac{62}{3-3y_0} - \left(-\frac{6}{y_0 - 1}\right)^2 = -\frac{2(31y_0+23)}{3(y_0-1)^2} \Rightarrow D(\xi|\eta) = -\frac{2(31\eta+23)}{3(\eta-1)^2}$$

$$F_\mu(z) = P(-4\xi + 8\eta < z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -28 \\ *, & z \in (-28, -12] \\ 1, & z > -12 \end{cases}, \operatorname{supp}(\mu) = [-28, -12]$$



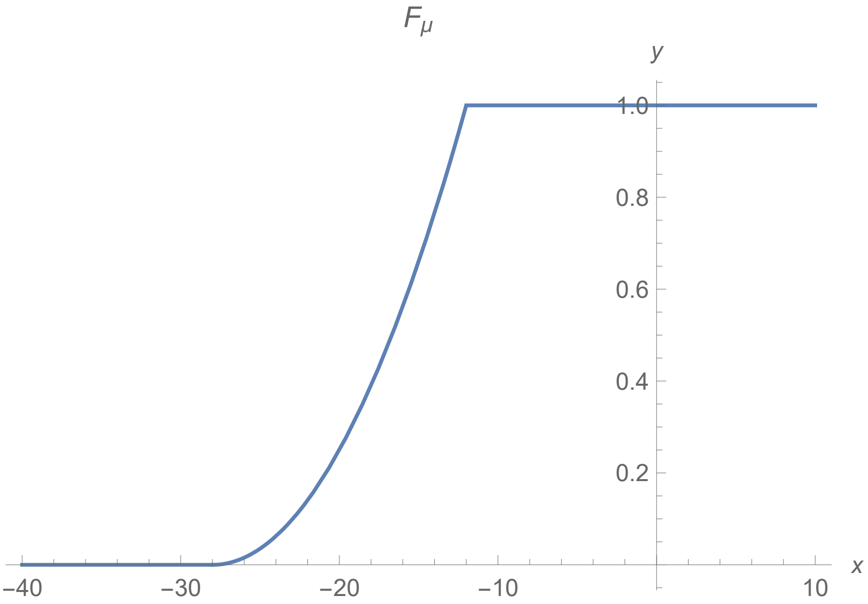
При $z \in (-28, -12] : -4x + 8y = z, y = -1.5 \Rightarrow x = -\left(\frac{z}{4} + 2\right)$.

$$* = F_\mu(z) = \int_{-\left(\frac{z}{4}+2\right)}^5 dx \int_{-1}^{\frac{z}{8}+\frac{1}{2}x} \frac{1}{4}dy = \int_{-\left(\frac{z}{4}+2\right)}^5 \frac{1}{32}(4x + z + 8)dx = \frac{1}{256}(z+28)^2$$

Итак, функция распределения:

$$F_\mu(z) = P(-4\xi + 8\eta < z) = \begin{cases} 0, & z \leqslant -28 \\ \frac{1}{256}(z+28)^2, & z \in (-28, -12] \\ 1, & z > -12 \end{cases}$$

График функции приведён ниже:



$$p_\nu(z) = \begin{cases} \dfrac{z+28}{128}, z \in [-28, -12] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$E\mu \int_{-28}^{-12} z \cdot \frac{z+28}{128} dx = -\frac{52}{3} \approx -17.333; \qquad E\mu^2 \int_{-28}^{-12} z^2 \cdot \frac{z+28}{128} dx = \frac{944}{3} \approx 314.667$$

$$D\mu^2 = E\mu^2 - (E\mu)^2 = \frac{944}{3} - \left(-\frac{52}{3}\right)^2 = \frac{128}{9} \approx 14.\bar{2}$$