Теория вероятностей и мат. статистика

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

11.04.2020

Распределение функций он случайно величины

Задача №7

Пусть ξ - случайная величина. Задача: найти распределение $\eta = f(\xi)$.
Используем определение:

$$F_\xi = p(\xi < x) \text{ для любой с. величины } \xi$$

Тогда:

$$F_\eta = p(\eta < x) = p(\xi \in f^{-1}(-\infty, x)), \text{ где}$$
$$f^{-1}(-\infty, x) = \{y : f(y) \in (-\infty, x)\}$$

Определить распределение величины $\eta = G(\xi)$:

а) если

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -2 \\ \frac{1}{8}, & x \in (-2, -1] \\ \frac{1}{3}, & x \in (-1, 0] \\ \frac{1}{2}, & x \in (0, 2] \\ 1, & x > 2 \end{cases}$$

$$G(t) = t^4 - t^2 + 2, t \in \mathbb{R}$$

б) если

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 1 \\ 1 - \frac{1}{n}, & x \in (n-1, n], n = 1,2,\dots \end{cases}$$

$$G(t) = \sin \pi t, t \in \mathbb{R}$$

Решение:

а) Соотношение между возможными значениями случайной величины и их вероятностями называется законом распределения дискретной случайной величины (ДСВ). Запишем его в виде таблицы:

k	-2	-1	0	2
$P(\xi = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

Проверка: $p(\xi \in [0,1]) = \sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$

Посмотрев на функцию $G(\xi)$ заключаем, что она является чётной: $G(-t) = (-t)^4 - (-t)^2 + 2 = G(t)$.

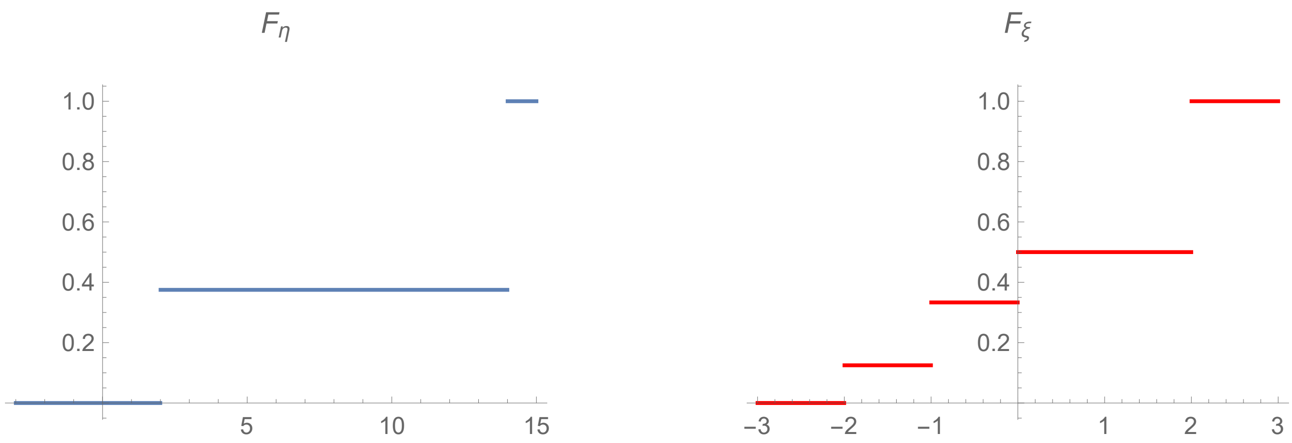
Вычислим значения функции величины $\eta = G(\xi)$:

- $\xi = 2, G(2) = G(-2) = 16 - 4 + 2 = 14 \Rightarrow p(\eta = 14) = \frac{1}{8} + \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$
- $\xi = -1, G(-1) = 2$ аналогично $\xi = 0, G(0) = 2 \Rightarrow p(\eta = 2) = \frac{5}{24} + \frac{1}{6} = \frac{3}{8}$

Таким образом, функция распределение величины η имеет следующий вид:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 2 \\ \frac{3}{8}, & x \in (2, 14] \\ \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1, & x > 14 \end{cases}$$

График (F_ξ - красный, F_η - синий)



б) Аналогично предыдущему пункту, представим распределение в виде таблицы:

k	n	1	2	3	4	5	...
$P(\xi = k)$	$\cancel{1} - \frac{1}{n+1} - \cancel{1} + \frac{1}{n} = \frac{1}{n(n+1)}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	...

Для любой с. величины $\xi : \eta = G(\xi) = \sin \pi\xi = 0$ (т.к. на какой коэффициент $\in \mathbb{R}$ мы не домножим, всё равно значение синуса будет лежать на оси абсцисс). Следовательно,

$$p(\eta = 0) = \sum_{i=1}^{\infty} p(\xi = i) = 1$$

Таким образом, функция распределение величины η имеет следующий вид:

$$F_\eta = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Задача №8

Носитель функции $u : X \to \mathbb{R}$ — это замыкание подмножества X, на котором вещественно-значная функция u не обращается в ноль:

$$\operatorname{supp} u = \overline{\{x | u(x) \neq 0\}}$$

$$p(\xi \in [0,1]) = 1,$$
$$\operatorname{supp}(\xi) = [0,1] \Rightarrow \operatorname{supp}(\eta) = [-\infty, \infty]$$

Вычислить распределение величины $\eta = G(\xi)$, если величина ξ имеет плотность распределения:

а)

$$p_\xi = \begin{cases} |x|, x \in [-1,1] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$
$$G(t) = t^2 - 1$$

$p(\xi \in [-1,1]) = 1$, т.е. $\operatorname{supp}(\xi) = [-1,1] \Rightarrow \operatorname{supp}(\eta = G(\xi)) = [-1,0]$,
т.к. $G(-1) = 1 - 1 = 0$ и $G(0) = 0 - 1 = -1$.
$F_\eta = P(\eta < x) = p(\xi^2 - 1 < x) \underset{\text{реш. нер-во}}{=} p(\xi^2 < x+1) = p(|\xi| < \sqrt{x+1})$(по опр., см. табл. 1-ый пункт)

Заметим, что по опр. функции модуля, ф-ия $p_\xi(x)$ явл-ся чётной, как следствие,

$$F_\eta(x) = \int_{-\sqrt{x+1}}^{\sqrt{x+1}} |t| dt = 2\int_0^{\sqrt{x+1}} t dx = x + 1 \text{ для } x \in (-1,0] (\Re(x) \leqslant -1 \wedge \Im(x) = 0)$$

Таким образом, величина ξ имеет следующее распределение:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ x+1, & x \in (-1,0] \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения, получаем плотность распределения:

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [-1,0] \\ 1, & x \in [-1,0] \end{cases}$$

б)

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), x \in \mathbb{R}, G(t) = at + b, t \in \mathbb{R}, a,b - const$$

В данном случае величина ξ и отображение G абсолютно непрерывны и G монотонна (знак её производной определяется знаком константы $a : G'(t) = a$), следовательно, можно применить следующую формулу, связывающую плотности распределения ξ и η:

$$p_\eta(x) = p_\xi(G^{-1}(x))|(G^{-1})'(x)| \text{ для почти всех } x \in \mathbb{R}$$

$$G^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}; (G^{-1})'(x) = \frac{1}{a}$$

$$p_\eta(x) = \frac{1}{|a|} p_\xi\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{|a|\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right)$$

в)

$$p_\xi(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sin x, x \in [0,\pi] \\ 0 - \text{ в остальных случаях} \end{cases}$$

$$G(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}$$

Посмотрев на ф-ию распределения, заключаем, что носитель распределения ξ совпадает с интервалом $[0,\pi]$. Образ данного интервала при отображении "косинус" совпадает с интервалом $[-1,1]$. Следовательно, $F_\eta(x) = 0$ при $x \leqslant -1$, $F_\eta(x) = 1$ при $x > 1$.

$$p(\xi \in [0,\pi]) = 1 \Rightarrow \mathrm{supp}(\xi) = [0,\pi] \Rightarrow \mathrm{supp}(\eta = G(\xi)) = [-1,1]$$

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \int_0^x \frac{1}{2}\sin t dt = \sin^2\left(\frac{x}{2}\right), & x \in (0,\pi] \\ 1, & x > \pi \end{cases}$$

$$F_\eta(x) = P(\eta < x) = p(\cos\xi < x) = p(\xi > \arccos x) = \int_{\arccos x}^{\pi} \frac{1}{2}\sin t dt =$$

$$= -\frac{\cos x}{2}\bigg|_{\arccos x}^{\pi} = \frac{x+1}{2}$$

Таким образом, функция распределения:

$$F_\eta = \begin{cases} 0, & x \leqslant -1 \\ \frac{x+1}{2}, x \in (-1,1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения, получаем плотность распределения:

$$p_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, x \in [-1,1] \\ 0 - \text{ в остальныых случаях} \end{cases}$$

г)

$$p_\xi = \frac{1}{2}\exp(-|x|), x \in \mathbb{R}, G(t) = t^2, t \in \mathbb{R}$$

Носитель распределения будет совпадать с интервалом $\mathrm{supp}(\eta) = [0,+\infty)$. Следовательно, $F_\eta(x) = 0$ при $x \leqslant 0$. При $x > 0$:

$$F_\eta(x) = \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} p_\xi(t)dt = s\int_0^{\sqrt{x}} \frac{1}{2}\exp(-t)dt = 1 - \exp(-\sqrt{x})$$

Таким образом, величина ξ имеет следующее распределение:

$$F_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ 1 - \exp(-\sqrt{x}), & x > 0 \end{cases}$$

Дифференцируя функцию распределения, получаем плотность распределения:

$$p_\eta(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ \frac{\exp(-\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}, & x > 0 \end{cases}$$