Теория вероятностей и мат. статистика
ИДЗ1

Почаев Никита Алексеевич, гр. 8381
pochaev.nik@gmail.com
Преподаватель: Малов Сергей Васильевич

28.03.2020

Вар. 14 (838120)

1. Найти вероятность того, что среди 9 выбранных наудачу цифр будут представлены ровно 3 различных цифры.
2. Продавец берет у поставщика партию 3000 единиц товара. Считается, что вероятность того, что каждая единица товара бракованная независимо от других равна 0.002. Если продавец обнаруживает в партии более 4-х бракованных деталей, то вся партия возвращается поставщику. Определить вероятность того, что покупатель, приобретающий 200 единиц товара, получит не более одной бракованной.
3. Система охраны некоторого объекта, имеющего форму прямоугольника 600× 300м, состоит из трех контуров ограждений, соединяющихся между собой через каждые 100 м. Вероятность повреждения каждого участка контура между двумя соседними соединениями независимо от других равна $0,3$. Определить вероятность того, что данная система охраны будет нарушена.
4. Вероятность успеха в схеме Бернулли равна 1/1000. Проводится 1000 испытаний. Написать точную формулу и вычислить приближенно вер-ть того, что число успехов равно 2.

Задача 1.

Для удобства обозначений будем называть выбранные цифры *разрядами*, т.е. 9 выбранных цифр образуют 9-ти разрядную комбинацию (не число, т.к. мы в том числе учитываем варианты, где в начале могут стоять 0-ли). Кол-во таких комбинаций будет определяться по ф-ле числа размещений с повторениями: $\#\Omega = A_n^{-k} = A_{10}^{-9} = 10^9 = 1000000000$.

Событие A - 9-ти значная комбинация содержит ровно 3 различные цифры.

Способов выбрать 3 разные цифры из всех доступных $(0-9)$: $C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot(10-3)!} = 120$.

Из 3-х цифр можно составить $A_n^{-k} = 3^9$ 9-ти разрядных комбинаций. Из них необходимо вычесть комбинации, составленные только из 2-х или 1-ой цифр (пользуемся формулой включения исключения), т.е. $C_3^2 \cdot (2^9 - 2)$ (3 позиции на которой может стоять одна из 2-х взятых из 9-ти выбранных цифр, минус 2 варианта включённых дважды), тут же замечаем, что вычли комбинации по типу 111111111111 по два раза $\Rightarrow$ прибавляем их. В итоге: $3^9 - C_3^2 \cdot (2^9 - 2) + 3 = 18156$.

$$\Rightarrow P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{C_{10}^3 \cdot (3^9 - C_3^2 \cdot (2^9 - 2) - 3)}{10^9} = \frac{120 \cdot 18156}{1000000000} = 0.00217872$$

Ответ: 0.00217872

Задача 2.

Если количество испытаний n достаточно велико, а вероятность p появления события A в отдельно взятом испытании весьма мала (0,05-0,1 и меньше), то вероятность того, что в данной серии испытаний событие A появится ровно m раз, можно приближенно вычислить по формуле Пуассона:

$$P_m \approx \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}$$

где $\lambda = np$.

Покупатель сможет приобрести товар у продавца только в том случае, если в партии из 3000 единиц товара будет от 0 до 4 бракованных детали. Событие B_i - партии оказалось $i \in [0-4]$ бракованных деталей. Количество испытаний - единиц товаров в партии велика, а вер-ть неисправности одной мала $\Rightarrow$ можно использовать ф-лу Пуассона и получить вероятность того, что в партии будет следующее количество бракованных деталей:

$$\lambda = np = 3000 \cdot 0.002 = 6$$

$$P(B_0) = \frac{6^0}{0!} \cdot e^{-6} \approx 0.002478752 \qquad P(B_1) = \frac{6^1}{1!} \cdot e^{-6} \approx 0.014872513$$

$$P(B_2) = \frac{6^2}{2!} \cdot e^{-6} \approx 0.044617539 \qquad P(B_3) = \frac{6^3}{3!} \cdot e^{-6} \approx 0.089235078$$

$$P(B_4) = \frac{6^4}{4!} \cdot e^{-6} \approx 0.133852618$$

Событие A - партия будет выставлена на продажу продавцом:

$$P(A) = \sum_{i=0}^{4} P(B_i) = 0.002478752 + 0.014872513 + 0.044617539 + 0.089235078 + 0.133852618 = 0.2850565$$

Считаем, что продавец перебирает всю партию и если находит $\leqslant 4$ бракованных деталей, то отправляет её всю (в том числе бракованные детали) в продажу. Таким образом, мы гарантировано знаем, что в поступивших в продажу 3000 деталях будет $\leqslant 4$ бракованных.

Пересчитаем найденные вероятности в условные: в партии $i \in [0-4]$ бракованных деталей, при условии, что она поступила в продажу - событие A. Если событие A выполнено, то в партии точно меньше 4 бракованных.

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i \cap A)}{P(A)}$$

$$P(B_i \cap A) = P(B_i)P(A|B_i) = P(B_i),$$

т.к. $P(A|B_i) = 1$ - если в партии $\leqslant 4$ бракованных деталей, она обязательно поступает в продажу

$$\Rightarrow P(B_i|A) = \frac{P(B_i)}{P(A)}$$

Таким образом,

i	0	1	2	3	4
$P(B_i\|A)$	0.008695667	0.052173913	0.156521739	0.313043477	0.469565220

$$\sum_{i=0}^{4} P(B_i|A) = 1 \Rightarrow \text{это ПГС}$$

Событие C - среди 200 единиц товара из 3000-ой партии будет *не более одной* бракованной.

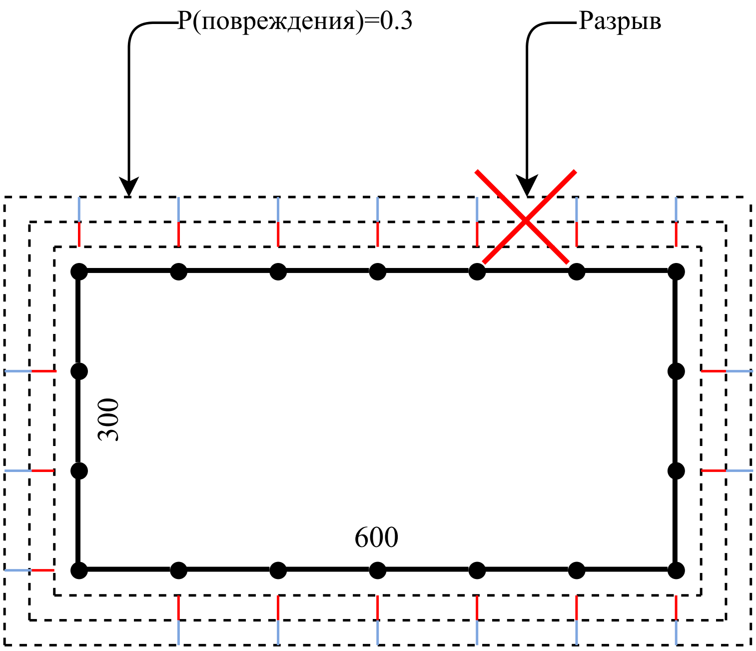
i	0	1	2	3	4
$P(C_i)$	1	1	$1 - \frac{C_{3000}^{2}}{C_{3000}^{200}}$	$1 - \left(\frac{C_{3000}^{2}}{C_{3000}^{200}} + \frac{C_{3000}^{3}}{C_{3000}^{200}}\right)$	$1 - \left(\frac{C_{3000}^{2}}{C_{3000}^{200}} + \frac{C_{3000}^{3}}{C_{3000}^{200}} + \frac{C_{3000}^{4}}{C_{3000}^{200}}\right)$
$P(B_i\|A)$	0.008695667	0.052173913	0.156521739	0.313043477	0.469565220

По формуле полной группы событий: $P(C) = \sum\limits_{i=0}^{4} P(B_i|A)P(C_i)$

Отметим, что даже при наличии 4-х бракованных деталей в партии, вероятность, что покупатель получит хотя бы одну слишком мала. Соответствующие вычисления приведены в прикреплённом блокноте Wolfram Mathematica. Таким образом, можно утверждать, что итоговая вероятность того, что покупатель получит $\leqslant 1$ бракованной детали будет стремится к единицу (т.к. события $P(B_i|A)$ образуются ПГС).

Ответ: ≈ 1

Задача 3.



Событие A - охранная система была нарушена.

По условию задачи условием нарушения безопасности является разрыв соединения у всех трёх контуров в едином месте. Рассмотрим один такой фрагмент, вероятность его разрыва: $0.3^3 = 0.027$. Охранная система будет нарушена, если произошёл хотя бы один разрыв (возможно и больше), таким образом, вероятность данного событие (B) равна: 1 - вероятность, что абсолютно все участки не были разрушены. Вероятность, что целостность какого-то участка не нарушилась: $1 - 0.3^3$. Всего таких участков 18 $\Rightarrow$

$$P(B) = (1 - 0.3^3)^{18} = 0.610985811$$

В результате:

$$P(A) = 1 - P(B) = 1 - 0.610985811 = 0.389014189$$

Ответ: 0.389014189

Задача 4.

Точная формула:

$$P(\mu_{1000} = 2) = C_{1000}^2 \left(\frac{1}{1000}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{1000}\right)^{1000-2} = 499500 \cdot 10^{-6} \cdot 0.368431920 \approx 0.184031744$$

Заметим, что выполнено условие для для применения формулы Пуассона:

$$\lambda = np = \frac{1}{1000} \cdot 1000 = 1 \leqslant 10$$

Таким образом, приближённая вероятность равна:

$$P(\mu_{1000} = 2) \approx \frac{\lambda^2}{2} \cdot e^{-\lambda} \approx 0.183940$$

Дополнительно:

В данном случае не выполнено условие для применения теоремы Муавра-Лапласа ($\lambda \not> 10$), однако, попробуем воспользоваться ею, что оценки точности.

Из локальной предельной теоремы Муавра-Лапласа следует приближенная формула:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi\left(\frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

где $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}$.

Приближённая вероятность таким образом будет равна:

$$P(\mu_{1000} = 2) \approx \frac{1}{\sqrt{np(1-p)}\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x_k^2}{2}} \approx$$

Учитывая, что:

$$p = 0.001, q = 0.999$$

$$x_k^2 = \left(\frac{k - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)^2 = \left(\frac{2-1}{\sqrt{1 \cdot 0.999}}\right)^2 = 1.\overline{001}$$

$$\approx \left(\frac{1}{\sqrt{0.999}\sqrt{2\pi}}\right) \cdot e^{-0.\overline{500}} \approx 0.241970664$$

В результате видно, что для данной ситуации ф-ла Пуассона даёт куда лучшее приближение, чем т. Муавра-Лапласа.

Ответ: 0.184031744