СЕМЕСТРОВОЕ ЗАДАНИЕ 2.9

Итерационные методы решения СЛАУ

Рассмотрим СЛАУ

$$A\mathbf{y} = \mathbf{f}, \tag{1}$$

где $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ – матрица системы, $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)^T$– вектор-столбец правых частей, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^T$ – вектор-столбец неизвестных. Пусть $A = L + D + U$, где L – нижнетреугольная, U – верхнетреугольная, D – диагональная части матрицы A.

Итерационные методы решения СЛАУ состоят из следующих шагов:

1) выбирается некоторое начальное приближение $\mathbf{y}^{(0)}$;

2) следующее приближение вычисляется из предыдущих по некоторому правилу;

3) этот процесс повторяется, пока не станет выполняться условие $\|\mathbf{r}^{(k)}\| \leq \varepsilon$, где $\mathbf{r}^{(k)} = A\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{f}$; здесь $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}$.

При использовании двухслойных итерационных методов для определения каждого следующего приближения используются формулы вида

$$B_k \frac{\mathbf{y}^{(k+1)} - \mathbf{y}^{(k)}}{\tau_k} + A\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{f}.$$

Здесь B_k – некоторая матрица, τ_k – итерационный параметр.

1. Метод Якоби (простой итерации): $\tau_k = 1,\ B_k = D$. Вычисление $\mathbf{y}^{(k+1)}$ проводится по следующей формуле:

$$y_i^{(k+1)} = \Big(f_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij} y_j^{(k)}\Big)/a_{ii}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Метод сходится для любого $y^{(0)}$, если A – положительно определённая симметричная матрица с диагональным преобладанием, то есть выполняется условие

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|, \quad i = \overline{1,n}.$$

2. Метод Зейделя: $\tau_k = 1,\ B_k = D + L$. Вычисление $\mathbf{y}^{(k+1)}$ проводится по следующей формуле:

$$y_i^{(k+1)} = \Big(f_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} y_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_j^{(k)}\Big)/a_{ii}, \quad i = \overline{1,n}.$$

3. Метод наискорейшего спуска: $B_k = E$,

$$\tau_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)}, \mathbf{r}^{(k)})}{(\mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)})}.$$

4. Метод минимальных невязок: $B_k = E$,

$$\tau_k = \frac{(\mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)})}{(A\mathbf{r}^{(k)}, A\mathbf{r}^{(k)})}.$$

Методы 2–4 сходятся для положительно определённой симметричной матрицы A для любого $y^{(0)}$. Матрица A называется симметричной, если $A^T = A$ и положительно определённой, если все её главные миноры положительны.

Задание

1. Для $n = 10$ решить СЛАУ с помощью заданного итерационного метода. Чтение данных осуществлять из файла. Вывести в файл значение приближённого решения и значение номера итерации, при котором достигнута заданная точность ε.
2. Построить график зависимости нормы невязки от номера итерации.
2. Имеется образец программы.