

## СЕМЕСТРОВОЕ ЗАДАНИЕ 2.8

### Прямые методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Рассмотрим СЛАУ

$$A\mathbf{y} = \mathbf{f}, \quad (1)$$

где  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  – матрица системы,  $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)^T$  – вектор-столбец правых частей,  $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$  – вектор-столбец неизвестных. Расширенной матрицей системы называют матрицу  $A$  с дописанным к ней справа столбцом  $\mathbf{f}$ .

**1. Метод Гаусса** (исключения неизвестных). Этот метод состоит в приведении матрицы системы к треугольному виду (прямой ход метода) с последующим решением СЛАУ с треугольной матрицей (обратный ход).

**Прямой ход метода Гаусса.** Обозначим  $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}$ ,  $f_i^{(1)} = f_i$ ,  $i, j = \overline{1, n}$ . На  $i$ -м шаге метода Гаусса ( $i = \overline{1, n-1}$ ) к каждой строке расширенной матрицы, имеющей номер, больший, чем  $i$ , прибавляется  $i$ -я строка, умноженная на  $c_j^{(i)} = -a_{ji}^{(i)} / a_{ii}^{(i)}$ , то есть

$$a_{jk}^{(i+1)} = a_{jk}^{(i)} + c_j^{(i)} a_{ik}^{(i)}, \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{i+1, n};$$

$$f_j^{(i+1)} = f_j^{(i)} + c_j^{(i)} f_i^{(i)}, \quad j = \overline{i+1, n}.$$

Эта операция эквивалентна исключению  $i$ -го неизвестного из всех уравнений с номером, большим, чем  $i$ .

В результате выполнения прямого хода метода Гаусса получим систему с треугольной матрицей, решение которой совпадает с решением (1).

**Обратный ход метода Гаусса.** Находим решение полученной СЛАУ по формулам:

$$y_n = \frac{f_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}, \quad y_i = \left( f_i^{(n)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(n)} y_j \right) / a_{ii}^{(n)}, \quad i = \overline{n-1, 1}.$$

**Выбор главного элемента.** С целью уменьшения влияния ошибок округления используют методы Гаусса с выбором главного элемента. В методе Гаусса с выбором главного элемента по столбцу на  $i$ -м шаге прямого хода среди элементов  $i$ -го столбца  $a_{ji}^{(i)}$ ,  $j = \overline{i, n}$  находят максимальный по модулю и переставляют содержащую его строку с  $i$ -й, после чего производят дальнейшие вычисления. Перестановка строк в расширенной матрице системы эквивалентна перестановке уравнений, а значит, не влияет на результат.

**2. Метод Гаусса-Жордана.** Вначале выполняется прямой ход метода Гаусса (с выбором главного элемента), затем прямой ход (без выбора главного элемента) производится в обратном направлении (т.е. для строк от  $n-1$ -й до 2-й). Решение полученной СЛАУ с диагональной матрицей находится по формулам:  $y_i = f_i / a_{ii}$ ,  $i = \overline{1, n}$ .

#### Задание

- Для  $n = 10$  решить СЛАУ с помощью заданного метода. Чтение данных осуществлять из файла. Вывести в файл значение решения и вектора невязки  $\mathbf{r} = A\mathbf{y} - \mathbf{f}$ .
- В случае вырожденной матрицы:
  - для метода Гаусса вывести сообщение "СЛАУ не имеет решения" или сообщение "СЛАУ имеет б.м. решений" и найти одно из решений;
  - для метода Гаусса-Жордана вывести сообщение о вырожденности матрицы.
- Имеется образец программы.