Семестровая курсовая работа на тему: Задача Ситникова

Лысенко Никита, Михайлов Сергей, Неизвестных Никита,
Самсонов Матвей, Соколова Маргарита, Б02-101

7 декабря 2021 г.

Описание

Система состоит из двух главных тел с одинаковой массой $m_1 = m_2 = \frac{m}{2}$, двигающихся по круговой или эллиптической кеплеровой орбите вокруг общего центра масс. Третье тело значительно меньше главных тел, его массу можно считать нулевой ($m_3 << m$), оно движется под действием главных тел в плоскости, перпендикулярной плоскости орбиты главных тел. Начало координат системы находится в центре масс.

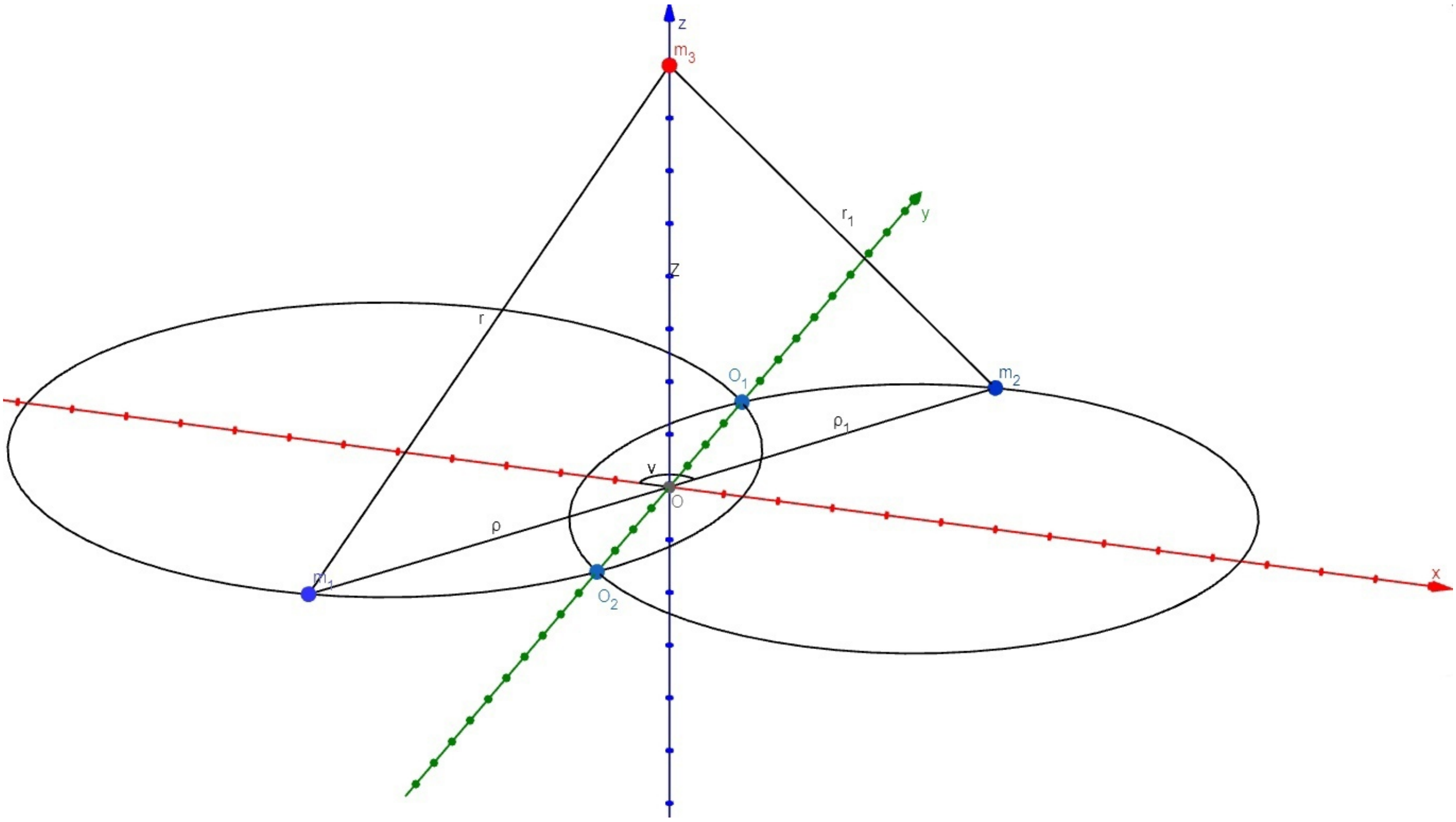

Рис. 1: Модель задачи Ситникова

Выберем единицы измерения так, что $m = 1$ — суммарная масса тел 1 и 2, $T = 2\pi$ — орбитальный период тел 1 и 2, $a = 1$ — большая полуось, $G = 1$ — гравитационная постоянная.

Вычислим удельную энергию третьего тела.

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 - \frac{1}{r}$$

Так как полная энергия постоянная, ее изменение с течением времени равно нулю.

$$\frac{d}{dt}\varepsilon = \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = 0,$$

Путем математических преобразований получаем:

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-z}{r^3}$$

Так как $r = \sqrt{z^2 + \rho^2}$, где $\rho = \rho(t)$ — расстояние от массивного тела до их общего центра масс,

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{-z}{(z^2 + \rho^2)^{3/2}}$$

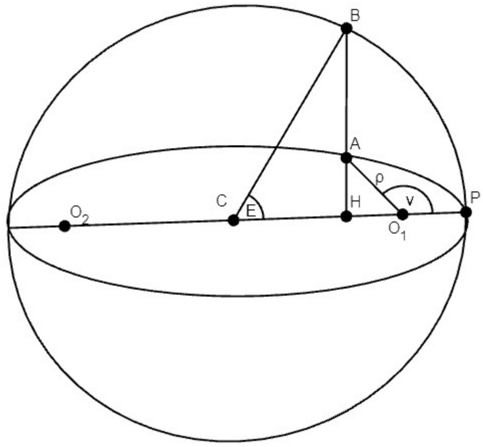

Рис. 2: Уравнение Кеплера

Найдем зависимость $\rho(t)$

Уравнение Кеплера имеет вид:

$$E - e \cdot \sin E = M = \frac{2\pi t}{T},$$

где ν — истинная аномалия (угол между радиус-вектором тела в данный момент времени и направлением на перицентр), E — эксцентрическая аномалия (параметр, используемый для выражения переменной длины радиус-вектора r), M — средняя аномалия (произведение его средней угловой скорости за один оборот и интервала времени после прохождения перицентра), e — эксцентриситет орбиты.

1) Так как $T = 2\pi$,

$$E - e \cdot \sin E = t$$

Из этого уравнения видно, что существует зависимость $E(t)$

2) Далее из геометрии находим зависимость $\nu(E)$, а, так как существует зависимость $E(t)$, то и зависимость $\nu(t)$ тоже существует.

$$tg\frac{\nu}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}$$

$$\nu = 2arctg\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}\right)$$

3) Следом также из геометрии определяем зависимость $\rho(\nu)$, а, значит, и $\rho(t)$

$$\rho = \frac{1-e^2}{1+ecos\nu}$$

Так как в процессе решения у нас получалось уравнение вида $E - e \cdot \sin E = t$, а такое уравнение не имеет решения в элементарных функциях, то и $\rho(t)$ тоже не выражается в элементарных функциях.

Назовем три предыдущих шага "Алгоритм 1".

Приведем уравнения системы к стандартному виду. Пусть $\dot{z} = v$, $u = t$, тогда $\dot{u} = 1$. Следовательно, система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{z} = v \\ \dot{v} = -\frac{z}{(\rho^2(u)+z^2)^{3/2}} \\ \dot{u} = 1 \end{cases}$$

Доказательство того факта, что данная система является хаотической, довольно громоздкое, однако наша же цель проверить этот факт экспериментально путём моделировании системы на языке python.

P.s. Для заинтересовавшихся прикладываем ссылки, где можно прочитать об этом подробнее

Википедия: Динамический хаос

В.О.Калас, П.С.Красильников: Исследование устойчивости равновесия в задаче Ситникова в нелинейной постановке

Н.Н. Васильев, Д.А. Павлов: Вычислительная сложность задачи Коши для задачи трёх тел

Реализация

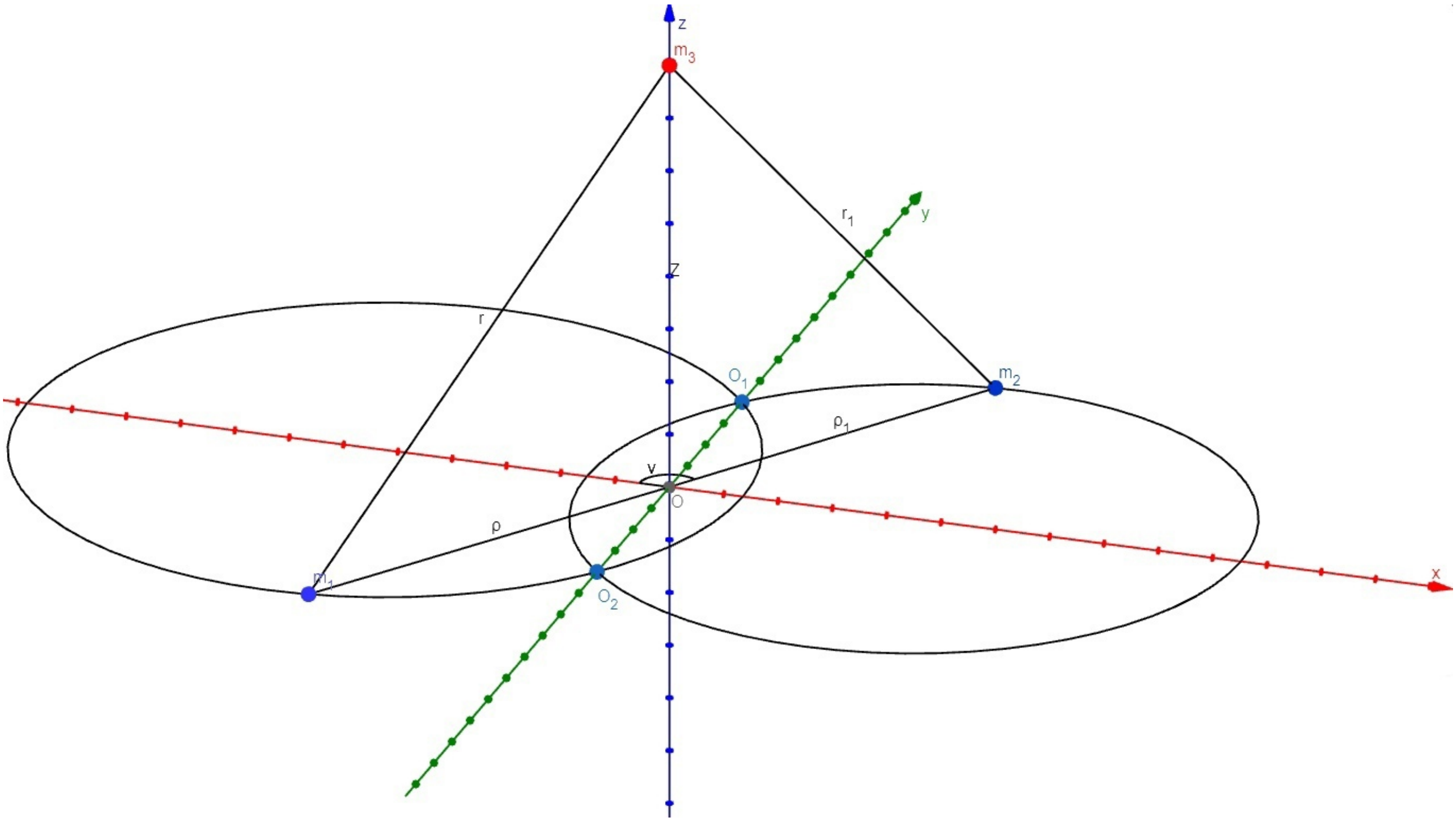

Рис. 3: Модель задачи Ситникова

Для упрощения, положения тел вычисляются по алгоритму 1, т.е. их координаты соответственно равны:

$$m_1 = \begin{pmatrix} -\rho \cos \nu \\ \rho \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_2 = \begin{pmatrix} \rho \cos \nu \\ -\rho \sin \nu \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$m_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Примечания к алгоритму 1:

1) E находим с помощью бинарного поиска по монотонно возрастающей функции: $f(x) = x - e \sin x - t$, где корень ищем в промежутке $[t - e, t + e]$

2) При вычислении ν в Python вместо $atan$ используем $atan2$, так как если $cos\frac{E}{2}$ обращается в 0, $atan2$ учитывает, какой знак был у аргумента и возвращает либо $\frac{\pi}{2}$, если тот был больше 0, либо $-\frac{\pi}{2}$, если меньше. Поэтому в коде формула $\nu = 2arctg\left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}tg\frac{E}{2}\right)$ выглядит следующим образом:

$$\nu = 2 * atan2(((1+e)/(1-e)) * *0,5 * sin(E/2),\ cos(E/2))$$

Отображение в 3D

3D-модель — это проекция на плоскоть $x'Oz'$, где $x'y'z'O$ — новые координаты, полученные путем поворота относительно старых.

Пусть углы поворота относительно оси x — α, относительно z — β. Составим матрицы поворота:

$$M_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\alpha & -sin\alpha \\ 0 & sin\alpha & cos\alpha \end{pmatrix}$$

$$M_z = \begin{pmatrix} cos\beta & -sin\beta & 0 \\ sin\beta & cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = M_z M_x$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Фон

Наши звезды — это случайные точки на сфере радиуса R ($R \to +\infty$). Будем задавать их в сферических координатах $(R,\ \vartheta,\ \varphi)$, то есть:

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta\sin\varphi \\ y = R\cos\vartheta\cos\varphi \\ z = R\sin\vartheta \end{cases}$$

Используя матрицу поворота,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

получаем:

$$\begin{cases} \varphi' = arctg\left(\frac{x'}{y'}\right) \\ \vartheta' = arctg\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \end{cases}$$

Положение наблюдателя

Пусть h — высота экрана, w — ширина экрана, l — расстояние наблюдателя до экрана. Наблюдатель находится в точке A.

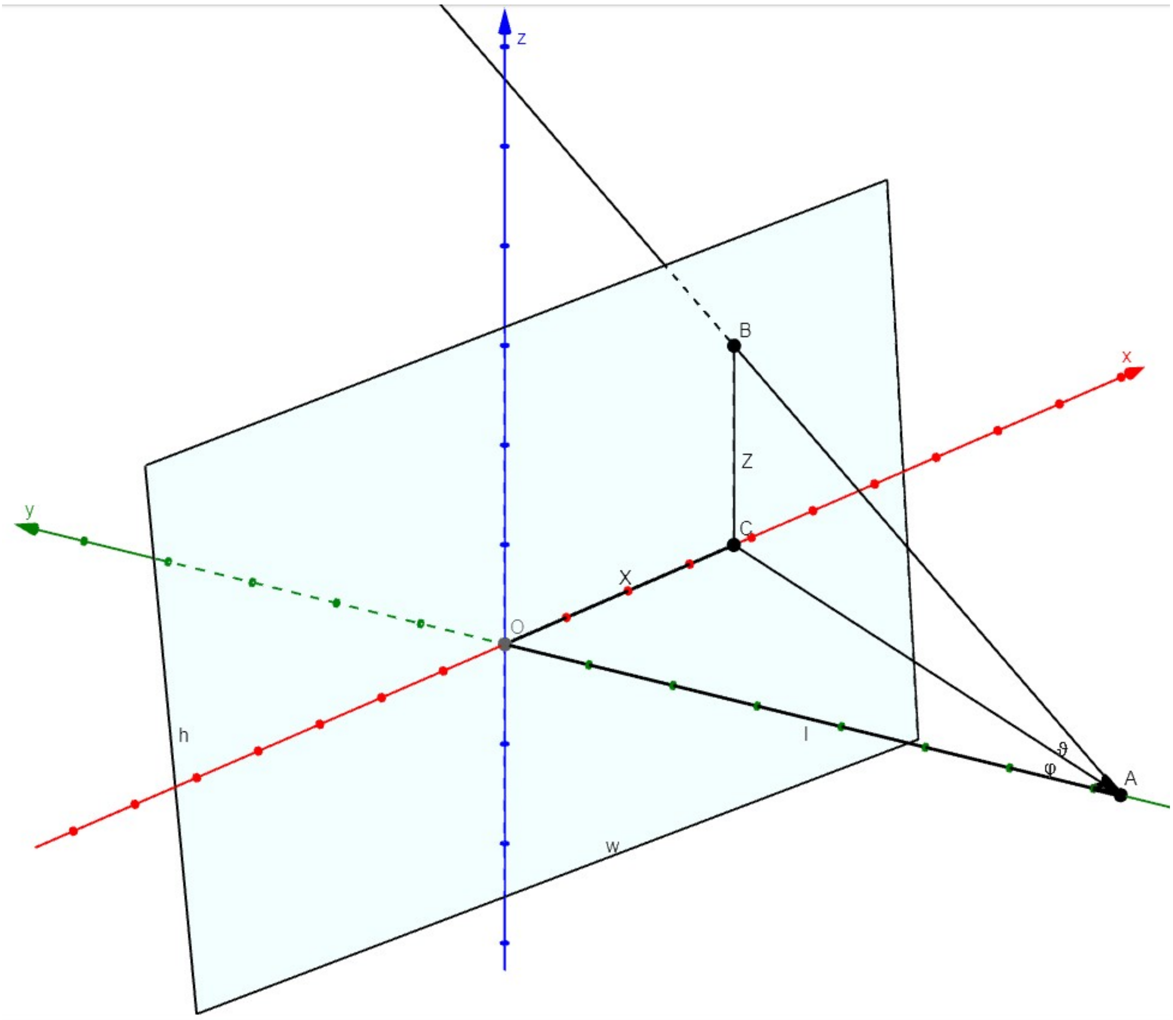

Рис. 4: Положение наблюдателя

Покажем, как это выглядит в проекциях на различные плоскости:

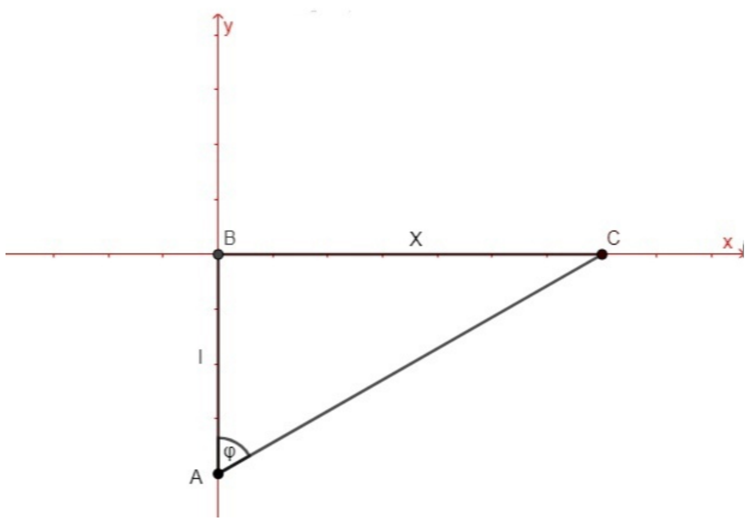

Рис. 5: Плоскость xOy

В плоскости xOy $x = l\,\mathrm{tg}\,\varphi$, $AC = \frac{l}{cos\varphi}$

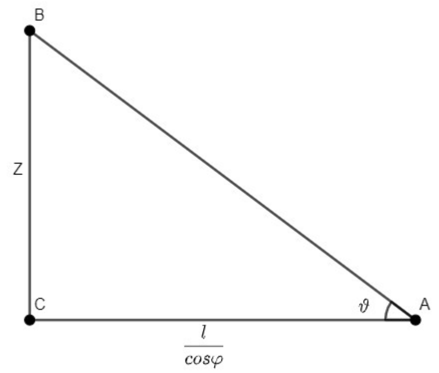

Рис. 6: Плоскость ABC

В плоскости ABC $z = l\frac{\mathrm{tg}\,\vartheta}{\cos\varphi}$

Также обозначим условия на φ и ϑ:

При $\varphi \neq \pm\frac{\pi}{2}$:	Для всех φ:
$\mathrm{tg}\,\varphi < \frac{w}{2l}$	$\sin\varphi < \frac{w}{2l}\cos\varphi$
При $\vartheta \neq \pm\frac{\pi}{2}$:	Для всех ϑ:
$\mathrm{tg}\,\vartheta < \frac{h}{2l}\cos\varphi$	$\sin\vartheta < \frac{h}{2l}\cos\varphi\cos\vartheta$