5 Лабораторная работа "Методы решения систем линейных алгебраических уравнений"

5.1 Краткий теоретический материал

Методы решения систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) $Ax = b$ можно разделить на две основные группы: прямые методы и итерационные. Из прямых методов наибольшее распространение получили метод Гаусса (несомненно, уже известный студентам), метод квадратного корня, метод Холецкого. Из итерационных наиболее известны некоторые модификации метода простой итерации: метод Якоби, метод Зейделя.

Приведем алгоритмы вышеперечисленных методов.

Метод квадратного корня применяется, если матрица A – симметричная ($A' = A$).

Прямой ход. Представим матрицу A в виде произведения $A = T'T$, где T – верхняя треугольная матрица, T' – транспонированная к ней.

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты t_{ij}, $i = 1, n$, $j = i, n$ матрицы T определяются по следующим формулам

$$\begin{cases} t_{11} = \sqrt{a_{11}}, \quad t_{1j} = \frac{a_{1j}}{t_{11}}, \quad j = 2, \dots, n, \\ t_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}^2}, \\ t_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} t_{kj}}{t_{ii}}, \quad i = 2, \dots, n, \quad j = i+1, n. \end{cases} \tag{35}$$

Обратный ход. Так как $Ax = b \Leftrightarrow T'(Tx) = b$. Сделаем замену $Tx = y$. Тогда $T'y = b$. Последовательно находим решения систем $T'y = b$, $Tx = y$. Это удобно делать по следующим формулам:

$$y_1 = \frac{b_1}{t_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki} y_k}{t_{ii}}, \quad i = 2, \dots, n \tag{36}$$

$$x_n = \frac{y_n}{t_{nn}}, \quad x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{n} t_{ik} x_k}{t_{ii}}, \quad i = n-1, \dots, 1 \tag{37}$$

Заметим, что в некоторых случаях получаются чисто мнимые t_{ij}. Метод остается применимым и в этом случае.

Метод Холецкого

Прямой ход. Представим матрицу A в виде произведения двух матриц $A = PC$, где C – верхняя треугольная матрица с единицами на диагонали, P – нижняя треугольная матрица.

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2n} \\ \dots \\ 0 & 0 & \dots & _{nn} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & 0 \\ \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты c_{ij}, $i = 1, \dots n$, $j = i, \dots n$, p_{ij}, $i = 1, \dots n$, $j = 1, \dots i$

матриц C, P определяются по следующим формулам

$$p_{i1} = a_{i1}, \quad p_{ij} = a_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} p_{ik}c_{kj}, \quad i = 1, \dots n, j = 1, \dots i. \tag{38}$$

$$c_{1j} = \frac{a_{1j}}{p_{11}}, \quad c_{ij} = \frac{1}{p_{ii}}\left(a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} p_{ik}c_{kj}\right), \quad j = i+1, \dots n. \tag{39}$$

Отсюда искомый вектор x может быть найден из цепи уравнений $Py = b$, $Cx = y$.

$$y_1 = \frac{b_1}{p_{11}}, \quad y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} p_{ik}y_k}{p_{ii}}, \quad i = 2, \dots n. \tag{40}$$

$$x_n = y_n, \quad x_i = y_i - \sum_{k=i+1}^{n} c_{ik}x_k, \quad i = n-1, \dots 1. \tag{41}$$

Метод простой итерации состоит в замене системы $Ax = b$ эквивалентной системой $x = Bx + d$, и организации итераций по правилу $x_{n+1} = Bx_n + d$, $n = 0, 1, \dots$. Начальное приближение x_0 задается произвольно. Процесс итераций сходится, если $||B|| = q < 1$. Чтобы найти решение с точностью ε итерационный процесс надо продолжать, пока не выполнится неравенство $||x_{n+1} - x_n|| < \frac{q}{1-q}\varepsilon$.

Метод Якоби. Пусть A – матрица с диагональным преобладанием, т.е. $|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, $i = 1, \dots, n$.

Перепишем систему $Ax = b$ в виде $x = Bx + d$, где

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & -\frac{a_{13}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1k}}{a_{11}} \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & -\frac{a_{23}}{a_{22}} & \dots & -\frac{a_{2k}}{a_{22}} \\ \dots \\ -\frac{a_{k1}}{a_{kk}} & -\frac{a_{k2}}{a_{kk}} & \dots & -\frac{a_{kk-1}}{a_{kk}} & 0 \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \dots \\ \frac{b_k}{a_{kk}} \end{pmatrix}.$$

Положим $x_0 = b$. Далее $x_{n+1} = Bx_n + d$, $n = 0, 1, 2 \dots$. В этом случае

$$q = \max_i \frac{\sum_{j\neq i} |a_{ij}|}{|a_{ii}|}.$$

Заметим, что для матрицы с диагональным преобладанием всегда $q < 1$.

Метод Зейделя. Пусть A – матрица с диагональным преобладанием.

Рассмотрим систему $x = Bx + d$, где матрица B и столбец d такие же, как в предыдущем методе. Построим следующий итерационный процесс

$$
\begin{cases}
x_1^{n+1} = b_{11}x_1^n + b_{12}x_2^n + \dots + b_{1k}x_k^n,\\
x_2^{n+1} = b_{21}x_1^{n+1} + b_{22}x_2^n + \dots + b_{2k}^n x_k^n,\\
x_3^{n+1} = b_{31}x_1^{n+1} + b_{32}x_2^{n+1} + \dots + b_{3k}^n x_k^n,\\
\dots\\
x_k^{n+1} = b_{k1}x_1^{n+1} + b_{k2}x_2^{n+1} + \dots + b_{kk}x_k^{n+1}.
\end{cases}
\tag{42}
$$

Заметим, что здесь для вычисления, например x_5^{n+1} используются значения, вычисленные на $n+1$ итерации (это $x_1^{n+1}, x_2^{n+1}, x_3^{n+1}, x_4^{n+1}$) и значения, вычисленные на предыдущей итерации ($x_5^n, x_6^n, \dots, x_k^n$).

Процесс сходится несколько быстрее метода Якоби, однако можно использовать те же условия окончания итераций.

5.2 Примеры

1. Методом квадратного корня решить систему

$$
\begin{cases}
-4x_1 + x_2 + x_3 = 2,\\
x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 5,\\
x_1 + 2x_2 - 16x_3 = 13.
\end{cases}
$$

Решение.

Матрица $U = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 1\\ 1 & -9 & 3\\ 1 & 2 & -16 \end{pmatrix}$ не является симметричной, поэтому домножим слева систему на матрицу, транспонированную к U. Имеем систему

$$
\begin{pmatrix} 18 & -11 & -17\\ -11 & 86 & -58\\ -17 & -58 & 266 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10\\ -17\\ -191 \end{pmatrix}
$$

с симметричной матрицей A.

Найдем элементы матрицы T по формулам (35).

$$
t_{11} = \sqrt{18} = 4.24, \quad t_{12} = \frac{-11}{4.24} = -2.59, \quad t_{13} = \frac{-17}{4.24} = -4.01,
$$
$$
t_{22} = \sqrt{86 - (-2.59)^2} = 8.90, t_{23} = \frac{-58 - (-2.59)(-4.01)}{8.90} = -7.68,
$$
$$
t_{33} = \sqrt{266 - (-4.01)^2 - (-7.68)^2} = 13.82.
$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что $T'T = A$, где

$$T = \begin{pmatrix} 4.24 & -2.59 & -4.01 \\ 0 & 8.9 & -7.68 \\ 0 & 0 & 13.82 \end{pmatrix}.$$

Проведем обратный ход по формулам (36)-(37).

$$y_1 = \frac{10}{4.24} = 2.36, \quad y_2 = \frac{-17-(-2.59)2.36}{8.9} = -1.22,$$

$$y_3 = \frac{-191-(-4.01)2.36-(-7.68)(-1.22)}{13.82} = -13.81,$$

$$x_3 = \frac{-13.81}{13.82} = -1.00, \quad x_2 = \frac{-1.22-(-7.68)(-1.00)}{8.9} = -1,$$

$$x_1 = \frac{2.36-(-2.59)(-1)-(-4.01)(-1)}{4.24} = -1.$$

Таким образом, решение системы $x_1 = -1, x_2 = -1, x_3 = -1$.

2. Методом Холецкого решить систему

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 16x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение.

Найдем элементы матриц C, P по формулам (38)-(39).

$$p_{11} = a_{11} = -4, \quad p_{21} = a_{21} = 1, \quad p_{31} = a_{31} = 1.$$

$$c_{11} = 1,$$

$$c_{12} = \frac{a_{12}}{p_{11}} = \frac{1}{-4} = -0.25,$$

$$c_{13} = \frac{a_{13}}{p_{11}} = \frac{1}{-4} = -0.25;$$

$$p_{22} = a_{22} - p_{21}c_{12} = -9 - 1(-0.25) = -8.75,$$

$$p_{32} = a_{32} - p_{31}c_{12} = 2 - 1(-0.25) = 2.25;$$

$$c_{23} = \frac{1}{p_{22}}(a_{23} - p_{21}c_{13}) = \frac{1}{-8.75}(3 - 1(-0.25)) = -0.37,$$

$$c_{22} = 1;$$

$$p_{33} = a_{33} - p_{31}c_{13} - p_{32}c_{23} = -16 - 1(-0.25) - 2.25(-0.37) = -14.91;$$

$$c_{33} = 1.$$

Произведение матриц $P = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 1 & -8.75 & 0 \\ 1 & 2.25 & -14.91 \end{pmatrix}$ и $C = \begin{pmatrix} 1 & -0.25 & -0.25 \\ 0 & 1 & -0.37 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ равно исходной матрице.

Обратный ход осуществим по формулам (40)–(41).

$$y_1 = \frac{2}{-4} = -0.5,$$
$$y_2 = \frac{5 - 1(-0.5)}{-8.75} = -0.63,$$
$$y_3 = \frac{13 - 1(-0.5) - 2.25(-0.63)}{-14.91} = -1.0.$$

$$x_3 = -1.0,$$
$$x_2 = -0.63 - (-0.37)(-1) = -1,$$
$$x_1 = -0.5 - (-0.25)(-1) - (-0.25)(-1) = -1.$$

3. Методом Якоби решить систему с точностью $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 16x_3 = 13. \end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}(-2), \\ x_2 = \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{9}3x_3 + \frac{1}{9}(-5), \\ x_3 = \frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{16}2x_2 + \frac{1}{16}(-13), \end{cases}$$

или $x = Bx + d$, где $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$, $d = \mathrm{col} - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{9} & \frac{13}{16} \end{pmatrix}$. Найдем $q = \max(0 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}, \frac{1}{9} + 0 + \frac{1}{3}, \frac{1}{16} + \frac{1}{8} + 0) = \frac{1}{2}$, тогда условие окончание итераций

$||x^{n+1} - x^n|| < \frac{1-0.5}{0.5}\varepsilon = \varepsilon$. Выберем $x^0 = (0, 0, 0)$, тогда

$$x^1 = Bx^0 + d = d = -\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix},$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} x^1 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.56 \\ -0.81 \end{pmatrix},$$

$$||x^2 - x^1|| = \max(0.5, 0, 56, 0.81) = 0.81 > 2 \cdot 10^{-2};$$

$$x^3 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.84 \\ -0.88 \\ -0.91 \end{pmatrix},$$

$$||x^3 - x^2|| = \max(0.34, 0, 33, 0.10) = 0.34 > 2 \cdot 10^{-2};$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} x^3 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.95 \\ -0.95 \\ -0.98 \end{pmatrix},$$

$$||x^4 - x^3|| = \max(0.11, 0, 07, 0.06) = 0.11 > 2 \cdot 10^{-2};$$

$$x^5 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} x^4 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.98 \\ -0.99 \\ -0.99 \end{pmatrix},$$

$$||x^5 - x^4|| = \max(0.03, 0, 03, 0.02) = 0.03 > 10^{-2};$$

$$x^6 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{16} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix} x^5 - \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{5}{9} \\ \frac{13}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.99 \\ -1.0 \\ -1.0 \end{pmatrix},$$

$$||x^5 - x^4|| = \max(0.01, 0, 01, 0.01) = 0.01 < 2 \cdot 10^{-2}.$$

Последнее значение x^5 можно принять за неизвестное x с точностью $\varepsilon = 2 \cdot 10^{-2}$.

4. Методом Зейделя решить систему с точностью $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - 9x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 16x_3 = 13. \end{cases}$$

Перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{2}, \\ x_2 = \frac{1}{9}x_1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{5}{9}, \\ x_3 = \frac{1}{16}x_1 + \frac{1}{8}x_2 - \frac{13}{16}. \end{cases}$$

(см. предыдущий пример). Матрица такая же, как и в предыдущем примере, поэтому условие окончание итераций $||x^{n+1} - x^n|| = \max_{i=1}^{3}(|x_i^{n+1} - x_i^n|) < \varepsilon$ Зададим итерационный процесс

$$\begin{cases} x_1^{n+1} = \frac{1}{4}x_2^n + \frac{1}{4}x_3^n - \frac{1}{2}, \\ x_2^{n+1} = \frac{1}{9}x_1^{n+1} + \frac{1}{3}x_3^n - \frac{5}{9}, \\ x_3^{n+1} = \frac{1}{16}x_1^{n+1} + \frac{1}{8}x_2^{n+1} - \frac{13}{16}. \end{cases}$$

Выберем

$$x^0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x_1^1 = \frac{1}{4}x_2^0 + \frac{1}{4}x_3^0 - \frac{1}{2} = -0.5, \\ x_2^1 = \frac{1}{9}x_1^1 + \frac{1}{3}x_3^0 - \frac{5}{9} = -0.61, \\ x_3^1 = \frac{1}{16}x_1^1 + \frac{1}{8}x_2^1 - \frac{13}{16} = -0.92, \end{cases}$$

$$||x^1 - x^0|| = \max(0.5, 0.61, 0.92) = 0.92 > 10^{-2};$$

$$\begin{cases} x_1^2 = \frac{1}{4}(-0.61) + \frac{1}{4}(-0.92) - \frac{1}{2} = -0.88, \\ x_2^2 = \frac{1}{9}(-0.88) + \frac{1}{3}(-0.92) - \frac{5}{9} = -0.96, \\ x_3^2 = \frac{1}{16}(-0.88) + \frac{1}{8}(-0.96) - \frac{13}{16} = -0.99, \end{cases}$$

$$||x^2 - x^1|| = \max(0.38, 0.35, 0.07) = 0.38 > 10^{-2};$$

$$\begin{cases} x_1^3 = \frac{1}{4}(-0.96) + \frac{1}{4}(-0.99) - \frac{1}{2} = -0.98, \\ x_2^3 = \frac{1}{9}(-0.98) + \frac{1}{3}(-0.99) - \frac{5}{9} = -0.99, \\ x_3^3 = \frac{1}{16}(-0.98) + \frac{1}{8}(-0.99) - \frac{13}{16} = -1.00, \end{cases}$$

$$||x^3 - x^2|| = \max(0.10, 0.03, 0.01) = 0.1 > 10^{-2};$$

$$\begin{cases} x_1^4 = \frac{1}{4}(-0.99) + \frac{1}{4}(-1.00) - \frac{1}{2} = -1.00, \\ x_2^4 = \frac{1}{9}(-1.00) + \frac{1}{3}(-1.00) - \frac{5}{9} = -1.00, \\ x_3^4 = \frac{1}{16}(-1.00) + \frac{1}{8}(-1.00) - \frac{13}{16} = -1.00, \end{cases}$$

$$||x^4 - x^3|| = \max(0.02, 0.01, 0.00) = 0.02 > 10^{-2};$$

$$\begin{cases} x_1^5 = \frac{1}{4}(-1.00) + \frac{1}{4}(-1.00) - \frac{1}{2} = -1.00, \\ x_2^5 = \frac{1}{9}(-1.00) + \frac{1}{3}(-1.00) - \frac{5}{9} = -1.00, \\ x_3^5 = \frac{1}{16}(-1.00) + \frac{1}{8}(-1.00) - \frac{13}{16} = -1.00, \end{cases}$$

$$||x^5 - x^4|| = \max(0.00, 0.00, 0.00) < 10^{-2}.$$

Значит

$$x = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} -0.01 \\ -0.01 \\ -0.01 \end{pmatrix}.$$

5.3 Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Как можно использовать метод Холецкого и метод квадратного корня для вычисления определителей? Найти определители матриц

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -25 & 3 & 1 \\ 3 & -25 & 1 \\ 1 & 3 & -25 \end{pmatrix}.$$

2. Можно ли использовать методы Холецкого и квадратного корня для систем, матрицы которых имеют нулевой определитель? Как в этом случае искать решение? Найти решение систем

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 15 \\ 24 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -8 \\ -10 \end{pmatrix}.$$

3. Решить систему методом квадратного корня

$$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 1 \\ 1 & -16 & 1 \\ 1 & 1 & -81 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 14 \\ 79 \end{pmatrix}.$$

4. Удовлетворяет ли число $||x||_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ аксиомам векторной нормы?

5. Может ли быть число $||A|| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ быть нормой матрицы, подчиненной некоторой векторной норме?

6. Удовлетворяет ли число $||A|| = \sum_{i,j} |a_{ij}|$ аксиомам матричной норме?

7. Если для оценки погрешности выбрана следующая векторная норма

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

то какую норму матрицы следует брать для вычисления числа q?

8. Как применить метод простой итерации (метод Якоби, метод Зейделя) для системы

$$\begin{pmatrix} 1 & 26 & 1 \\ 45 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 34 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}?$$

Оценить, сколько итераций потребуется, чтобы получить решение с точностью 10^{-4}?

5.4 Задание к лабораторной работе

Задание 1. Пусть число k – количество букв в вашем Ф.И.О., m – количество букв в вашем полном имени.

Решить систему

$$\begin{pmatrix} 12+k & 2 & m/4 & 1 & 2 \\ 4 & 113+k & 1 & m/10 & m-4 \\ 1 & 2 & -24-k & 3 & 4 \\ 1 & 2/m & 4 & 33+k & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 3+m & -44-k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

методами

Холецкого и Зейделя, если m – четное,

квадратного корня и Якоби, если m – нечетное.

В итерационных методах решение найти с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$.

Проверить выполнение условий сходимости применяемых итерационных методов.

Оценить число шагов, достаточных для достижения заданной точности.

Сделать проверку решения.

Задание 2. Рассмотрим систему линейных уравнений $Ax = b$ с трехдиагональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & c_0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_1 & c_1 & 0 & & \dots & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_i & a_i & c_i & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & b_{n-1} & a_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & b_n & a_n \end{pmatrix},$$

где $n = 500$, $a_i = 1 + h^2 i \cos^2 Nih$, $b_i = c_i = -h \sin^2 Nih$, $i = 0, \dots 500$ $h = 10^{-1}$, N – количество букв в Ф.И.О. Элементы столбца b определяются по формуле $b_i = (ih)^2 + i$. Используя подпрограмму пакета ScaLAPACK для решения систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей, решить систему. Сделать проверку, используя процедуру для умножения матриц.