3 Лабораторная работа "Численное интегрирование"

3.1 Краткий теоретический материал

Для приближенного вычисления интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$ рассматривается число $I_n = \sum_{i=1}^n c_i f(x_i)$. Последняя формула, служащая для приближенного вычисления интеграла, называется *квадратурной формулой*. Числа c_i (не зависящие от выбора функции $f(x)$) называются *коэффициентами квадратурной формулы*, а значения $x_i : a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_n \leq b$ – *узлами квадратурной формулы*.

Погрешностью квадратурной формулы называется величина

$$R_n(f) = \int_a^b f(x)dx - \sum_{i=1}^n c_i f(x_i), \quad \text{или} \quad R_n(f) = I - I_n.$$

Коэффициенты и узлы квадратурной формулы имеет смысл выбирать так, чтобы минимизировать величину погрешности.

Простые квадратурные формулы для вычисления интеграла $\int_a^b f(x)dx$:

Формула прямоугольников $I_1 = (b-a)f(\xi)$, где ξ – некоторая точка отрезка $[a, b]$. Если $\xi = a$, то формула называется *формулой левых прямоугольников*, если $\xi = b$, то формула называется *формулой правых прямоугольников*, если $\xi = (a+b)/2$, то формула называется *формулой средних прямоугольников*. (Узлом здесь является точка $x_1 = \xi$, коэффициентом $c_1 = b - a$.)

Формула трапеций $I_2 = \frac{(b-a)}{2}(f(a) + f(b))$. (Узлами здесь являются точки $x_1 = a$, $x_2 = b$, коэффициентами $c_1 = c_2 = (b-a)/2$.)

Формула Симпсона $I_3 = \frac{(b-a)}{6}\left(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)\right)$. (Узлами здесь являются точки $x_1 = a$, $x_2 = \frac{a+b}{2}$, $x_3 = b$, коэффициентами $c_1 = c_3 = \frac{b-a}{6}$, $c_2 = \frac{2}{3}(b-a)$.)

Оценками для погрешностей этих формул являются соответствено

$$|R_1| \leq \frac{(b-a)^3}{24} \max_{t\in[a,b]} |f''(t)| \quad (\text{если } \xi = (a+b)/2), \tag{16}$$

$$|R_2| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \max_{t\in[a,b]} |f''(t)|. \tag{17}$$

$$|R_3| \leq \frac{(b-a)^5}{1536} \max_{t\in[a,b]} |f^{(4)}(t)|. \tag{18}$$

Как видно, при достаточно большом отрезке $[a,b]$ погрешность может быть велика, поэтому вместо простых квадратурных формул часто применяют составные формулы.

На отрезке $[a,b]$ вводится сетка с шагом $h = (b-a)/m$ (m-некоторое целое число). $x_i = a + ih$, $i = 0,\ldots,m$.

На каждом из отрезков $[x_i, x_{i+1}]$ применяют простую квадратурную формулу. Результат суммируют.

В результате получают следующие составные формулы:

Составная формула левых прямоугольников $I_m = \sum_{i=0}^{m-1} hf(x_i)$.

Составная формула правых прямоугольников $I_m = \sum_{i=1}^{m} hf(x_i)$.

Составная формула трапеций $I_m = \frac{f(x_0)+f(x_m)}{2}h + \sum_{i=1}^{m-1} hf(x_i)$.

Составная формула Симпсона

$I_m = \frac{f(x_0)+f(x_m)}{6}h + \sum_{i=1}^{m-1} \frac{h}{3}f(x_i) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{2h}{3}f(x_i + \frac{h}{2})$.

Константу m следут выбирать так, чтобы погрешность интегрирования не превосходила заданную точность ε. Это можно сделать, используя правило Рунге практической оценки погрешности.

Правило Рунге состоит в следующем: возьмем произвольное m ($h = \frac{b-a}{m}$) и по составной формуле найдем I_m. Затем увеличим вдвое число узлов и вычислим по той же составной формуле I_{2m}. Найдем величину $\varepsilon_m = \frac{|I_m - I_{2m}|}{2^s - 1}$ ($s = 1$ для составной формулы прямоугольников; $s = 2$ для составной формулы трапеций; $s = 4$ для составной формулы Симпсона).

Если $\varepsilon_m \leq \varepsilon$, то $I = I_{2m} \pm \varepsilon$ и вычисления заканчивают, в другом случае вновь увеличивают вдвое число m и повторяют описанную выше процедуру, полагая $m := 2m$.

Формулами высокой точности являются *квадратурные формулы Гауссова типа.* Напомним, что квадратурная формула I_n является *точной* для многочленов степени m, если для любого многочлена $p(x)$ степени меньше либо равной m точное значение интеграла $I(p) = I_n(p)$.

Узлы квадратуры Гауссова типа $I_n = \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$ можно определить из следующей системы:

$$\int_a^b (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)x^l dx = 0, \quad l = 0,1,\ldots,n-1. \tag{19}$$

Коэффициенты Гауссовой квадратуры находятся по формуле:

$$A_k = \int_a^b \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\dots(x-x_n)}{(x_k-x_0)(x_k-x_1)\dots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\dots(x_k-x_n)}dx, \quad (20)$$
$$k = 0,\dots,m$$

Квадратура Гауссова типа I_n точна для многочленов степени $2n-1$.

3.2 Примеры

1. Вычислить $\int_0^1 x^2 f(x)dx$, *если* $f(0)=-1$, $f(\frac{1}{2})=1$, $f(1)=2\frac{1}{2}$.

Решение.

Воспользуемся простой формулой Симсона.

$$\int_0^1 x^2 f(x)dx = \frac{1-0}{6}\left(0^2 f(0) + 4\left(\frac{1}{2}\right)^2 f\left(\frac{1}{2}\right) + 1^2 f(1)\right) =$$
$$= \frac{1}{6}(0 + \frac{1}{4}\cdot 1 + 1\cdot 2.5) = 0.46.$$

2. С какой погрешностью вычисляется интеграл $\int_{-1}^0 \sin x dx$ *по формуле средних прямоугольников?*

Решение.

Воспользуемся формулой (17.)

$$|R_2| \le \frac{(0-(-1))^3}{12}\max_{t\in[-1,0]}|(\sin x)''| = \frac{1}{12}\max_{t\in[-1,0]}|(\sin x)| \le \frac{\sin 1}{12} = 0.07.$$

3. Найти узлы и коэффициенты Гауссовой квадратуры $\int_0^1 f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1)$.

Решение.

$n=2$ (два узла, два коэффициента). Воспользуемся формулой (19) для поиска узлов. Имеем

$$\begin{cases}\int_0^1 (x-x_0)(x-x_1)dx = 0,\\ \int_0^1 (x-x_0)(x-x_1)xdx = 0.\end{cases}$$

Раскроем скобки и приведем подобные члены

$$\begin{cases}\int_0^1 x^2 - (x_0+x_1)x + x_0x_1 dx = 0,\\ \int_0^1 x^3 - (x_0+x_1)x^2 + x_0x_1 x dx = 0.\end{cases}$$

Введем замену $x_0 + x_1 = u$, $x_0 x_1 = v$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + u\frac{1}{2} + v = 0, \\ \frac{1}{4} + u\frac{1}{3} + v\frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы являются $u = -1, v = \frac{1}{6}$, или $x_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ $x_2 = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$.
Определим теперь коэффициенты по формуле (20).

$$\int_0^1 \frac{x - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}} dx = \frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 \frac{x - \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}} dx = \frac{1}{2}.$$

Таким образом $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}f(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}) + \frac{1}{2}f(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}})$.

3.3 Вопросы и задачи для самостоятельной работы

1. Оценить погрешность составных формул прямоугольников, трапеций, Симпсона и определить погрешность вычисления $\int_{-1}^{1} \frac{x}{1+x^2}dx$ по составной формуле Симпсона с шагом $h = 0.01$.

2. Повторите, что называется квадратурной формулой интерполяционного типа и решите следующую задачу: Вычислить $\int_{-2}^{3} xf(x)dx$, если известно, что $f(0) = 1, f(3) = 4$, $f(-1) = 1$. Можно ли оценить погрешность интегрирования, если известно, что $|f'''(x)| \leq 4$?

3. Являются ли интерполяционными формулы Симпсона, трапеций, составная формула прямоугольников, составная формула трапеций?

4. Выведите кубатурные формулы типа Симпсона, прямоугольников, трапеций.

5. Для вычисления интеграла предложена квадратурная формула Гауссова типа $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$. Найти значения ее узлов и коэффициентов.

6. Определить, в каких случаях формула прямоугольников (трапеций) дает верхнюю оценку для интеграла, в каких – нижнюю оценку.

7. Для вычисления интеграла с особенностью предложена квадратурная формула Гауссова типа $\int_{-1}^{1} \delta(x)f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$. ($\delta(x)$

фукция, имеющая особенность на отрезке $[-1,1]$). Как найти значения ее узлов и коэффициентов?

8. Для вычисления интеграла предложена квадратурная формула Гауссова типа $\int_{-1}^{1} f(x)dx = A_0 f(x_0) + A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2)$. Как использовать ее для вычисления $\int_a^b f(x)dx$?

3.4 Задание к лабораторной работе

1. С точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$. Значения a, b, функция f определяются вариантом задания.

2. Найти значение интеграла $\int_a^b f(x)dx$ по квадратурной формуле Гаусса с тремя узлами.

Номер варианта определяется как остаток от деления N на 15. N - количество букв в Ф.И.О.

Номер варианта	$f(x)$	$[a, b]$	вид составной квадратурной формулы
1	$\frac{1}{1+10x}$	$[0,1]$	левых прямоугольников
2	$\frac{1}{1+x^2}$	$[0,1]$	правых прямоугольников
3	$\frac{1}{1+10x^3}$	$[0,1]$	левых прямоугольников
4	$\frac{x^2}{1-x-x^2}$	$[0,1]$	трапеций
5	$\frac{0.1+x^2\sin x}{x^2+0.5}$	$[-0.2, 0.4]$	трапеций
6	$\sin\frac{1}{1+10x}$	$[0,1]$	Симпсона
7	$\sqrt{2-\cos\frac{1}{1+x^2}}$	$[0,1]$	левых прямоугольников
8	$e^{\frac{-1}{1+x}}$	$[0,1]$	правых прямоугольников
9	$\cos\frac{1}{1+x^2}$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$	трапеций
10	$\sqrt{\pi-\operatorname{arctg}\frac{1}{1+x^2}}$	$[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$	правых прямоугольников
11	$\sqrt{1+\sin^2\frac{1}{1+x^2}}$	$[0,\pi]$	Симпсона
12	$\sin\frac{1}{1+x^2}$	$[0,\frac{\pi}{2}]$	трапеций
13	$\ln\left(1+e^{\frac{1}{1+x^2}}\right)$	$[0,1]$	правых прямоугольников
14	$\cos\frac{1}{2-x^2}$	$[0,1]$	левых прямоугольников
0	$\sqrt{1+e^{\frac{2}{1+x^2}}}$	$[0,1]$	Симпсона