Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО»

Отчет

по лабораторной работе №1

по дисциплине «**Частотные методы**»

по теме «**Ряды Фурье**»

Выполнил: Братушка Н. И.

Факультет: СУиР

Группа: R3238

Поток: ЧМ 1.4

Преподаватель: Перегудин А. А.

Санкт-Петербург 2024

Оглавление

Ряд Фурье

Ряд Фурье позволяет представить периодическую функцию $f(t)$ с периодом T в виде тригонометрического ряда:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t)),$$

где

$$a_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cdot \cos(\omega_n t)\, dt, \qquad b_n = \frac{2}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cdot \sin(\omega_n t)\, dt,$$

$$\omega_n = \frac{2\pi n}{T},$$

h – начало промежутка, на котором происходит разложение функции.

Этот ряд может быть также представлен в комплексной форме:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t},$$

где

$$c_n = \frac{1}{T} \int_h^{h+T} f(t) \cdot e^{-i\omega_n t}\, dt.$$

Задание 1

Квадратная волна

Выберем числа $a = 2, b = 1, t_0 = 1, t_1 = 3, t_2 = 5$. Тогда получим функцию с периодом $T = 4$:

$$f(t) = \begin{cases} 2, & t \in [1,3), \\ 1, & t \in [3,5). \end{cases}$$

График функции приведен на рисунке 1 (см. ниже).

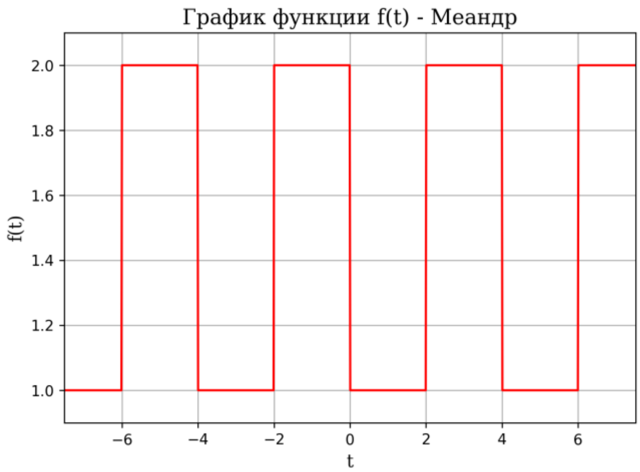

Рис. 1 График функции $f_1(t)$

Коэффициенты Фурье

Вычислим коэффициенты a, b, c для $n = 0, 1, 2$

$$a_n = \frac{2}{T} = \frac{2}{4}\int_1^3 2\cos\left(\frac{1}{4}(2\pi tn)\right)dt$$

$$+\frac{2}{4}\int_3^5 \cos\left(\frac{1}{4}(2\pi tn)\right)dt = \frac{2\left(\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right)\right)}{\pi n}$$

$$+\frac{\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\pi n}{2}\right)}{\pi n} = \frac{3\sin\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - 2\sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) - \sin\left(\frac{5\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

$$c_n = \frac{1}{T}\int_h^{h+T} f(t)e^{-i\omega_i t}dt = \frac{1}{4}\int_1^3 2e^{-i\omega_i t}dt + \frac{1}{4}\int_3^5 e^{-i\omega_i t}dt$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_h^{h+T} f(t)\sin(\omega_n t)\,dt$$

$$= \frac{2}{4}\int_1^3 2\sin\left(\frac{1}{4}(2\pi t n)\right)dt$$

$$+ \frac{2}{4}\int_3^5 \sin\left(\frac{1}{4}(2\pi t n)\right)dt$$

$$= \frac{2\left(\cos(\frac{\pi n}{2}) - \cos(\frac{3\pi n}{2})\right)}{\pi n} + \frac{(\cos\left(\frac{3\pi n}{2}\right) - \cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right))}{\pi n}$$

$$= \frac{2\cos(\frac{\pi n}{2}) - \cos(\frac{3\pi n}{2}) - \cos\left(\frac{5\pi n}{2}\right)}{\pi n}$$

Коэффициенты a_n, b_n, c_n связаны между собой, c_i и c_{-i} равны для вещественной функции, а значит с_n вычислять отдельно необходимости нет

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$$

Подставим значения:

$$a_0 = \frac{2}{4}\int_1^5 f_1(t)dt = \frac{2}{4}(\int_1^3 2dt + \int_3^5 dt) = \frac{2}{4}(t\,\Big|_1^2 + 4t\,\Big|_2^5) = \frac{2}{4}(4+2) = 3$$

Аналогично посчитаем для следующий значений:

$$a_1 \approx -1.9$$

$$a_2 = 0$$

$$b_1 = 0$$

$$b_2 = 0$$

$$c_{-2} = \overline{c_2} = 0$$

$$c_{-1} = \overline{c_1} = -0.95$$

$$c_0 = 1.5$$

Для вычисления коэффициентов более высокого порядка воспользуемся следующей программой:

```
def calculating_a(func, t, T, n):
    exp = lambda x: np.cos(2 * x * np.pi * n / T)
    result = np.round((2 / T) * dot_product(func, exp, t), 4)
    return result


def calculating_b(func, t, T, n):
    exp = lambda x: np.sin(2 * np.pi * n * x / T)
    result = np.round((2 / T) * dot_product(func, exp, t), 4)
    return result


def fourier_coefficients(func, t, T, n):
    c = [calculating_a(func, t, T, 0)]
    for i in range(1, n+1):
        c.append([calculating_a(func, t, T, i), calculating_b(func, t, T, i)])
    return c


def g_coefficients(func, t, T, n):
    g = []
    for i in range(-n, n+1):
        exp = lambda x: np.exp(-(1j * 2 * np.pi * i * x) / T)
        g.append((1/T)*(dot_product(func, exp, t)))
    return g
```

Листинг 1. Программа для расчёта коэффициентов Фурье

В результате выполнения программы (Листинг 1) получим следующие коэффициенты для $n = 3$:

n	a_n	b_n
0	3.001	-
1	-1.907	0.001
2	0.001	0.0
3	0.001	-0.001

Таблица 1. Коэффициенты Фурье для $n = 3$

n	c_n
-3	0.0005-0.00049i
-2	0.0005-0. 0005i
-1	0.95+0.0005i
0	1.501
1	-0.95-0.0005i
2	0.0005-0. 0005i
3	0.0005-0.00049i

Таблица 2. Коэффициенты Фурье для $n = 3$ (комплексная форма)

Графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$

В качестве значений N возьмем n = 3, 5, 10, 50, 100.

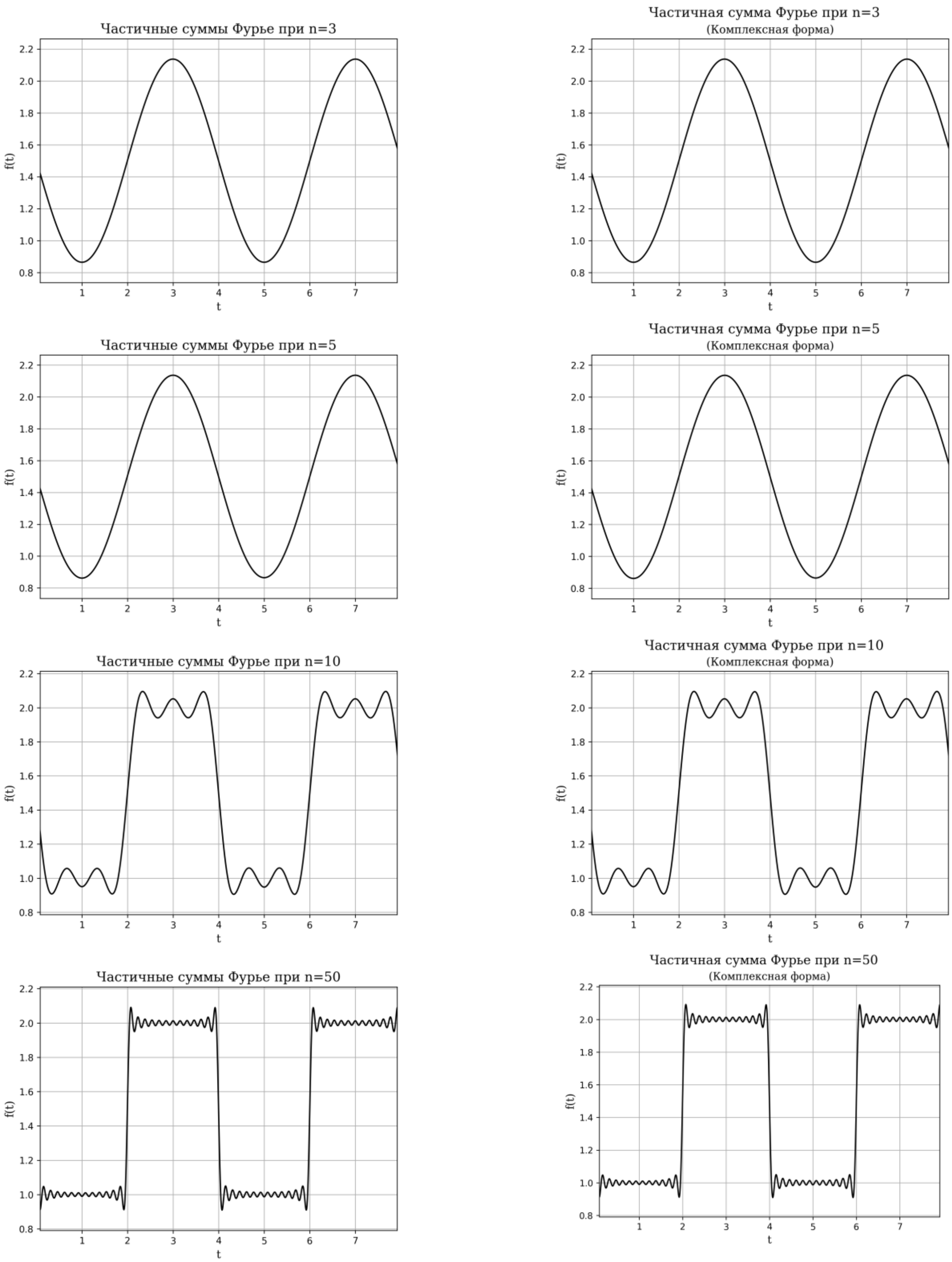

Рис. 2. Графики Функций $F_N(t)$ и $G_N(t)$

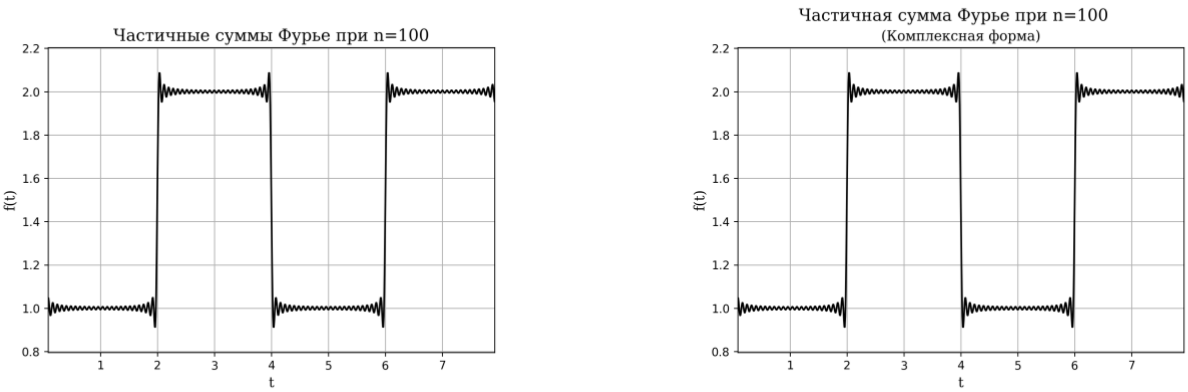

Рис. 3. Графики функций $F_N(t)$ и $G_N(t)$

Как мы можем заметить, графики функций абсолютно идентичны при равных значениях N (забегая наперёд, скажем, что это характерно для каждой функции). Поэтому далее в отчёте будут приводиться только общие графики (для более подробного рассмотрения графиков можно перейти по ссылке, в которой будут содержаться все графики). Более информативными для нас будут как раз общие графики, с помощью которых мы можем оценить степень приближения исходной функции рядом Фурье в зависимости от количества коэффициентов.

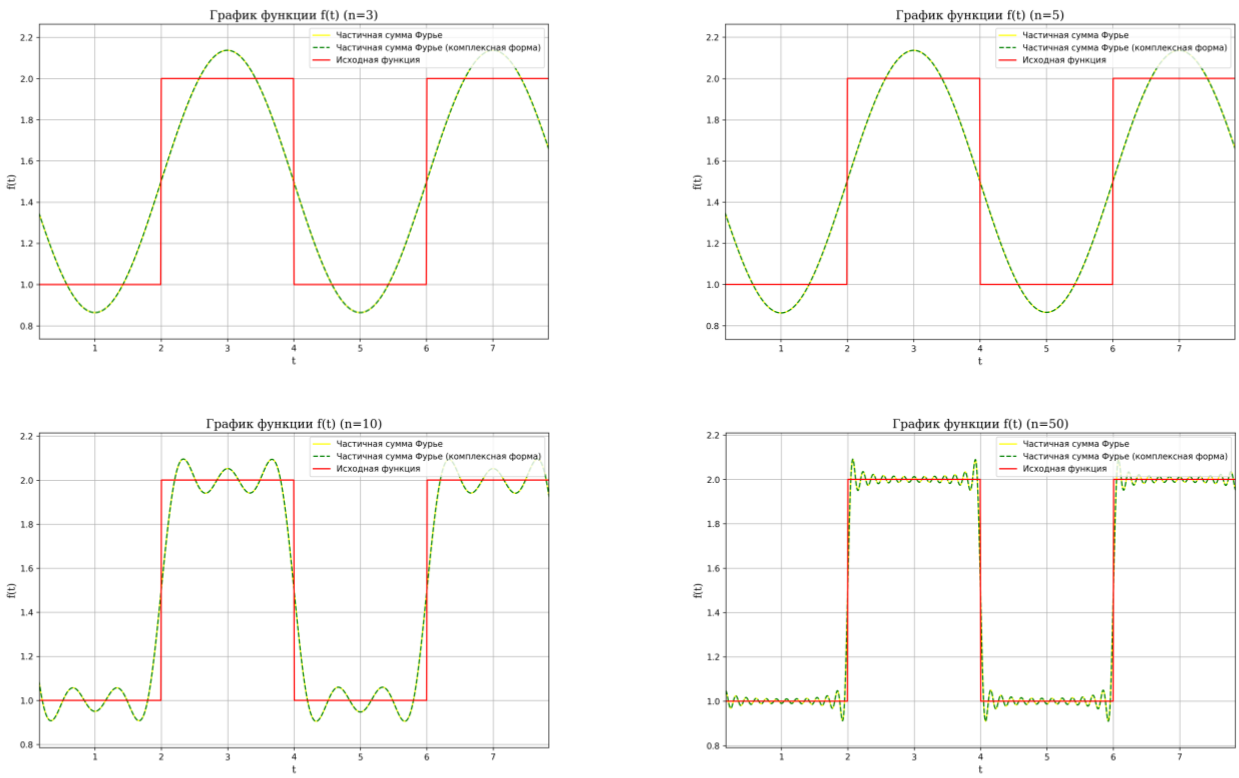

Рис. 4. Графики функций $F_N(t)$ и $G_N(t)$ и $f(t)$

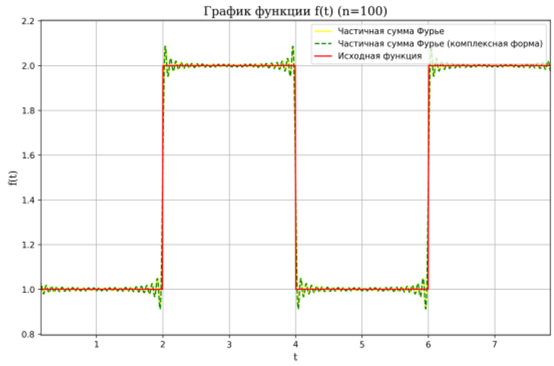

Рис. 5. Графики функций $F_N(t)$и$G_N(t)$и$f(t)$

Вполне очевидно, что при увеличении количества коэффициентов ряд Фурье приближается к исходной функции. Также стоит отметить одну интересную деталь: в точках разрыва (на фронтах) кусочно-постоянной функции появляются выбросы, которые обусловлены тем, что ряд Фурье сходится по норме, но не обязательно поточечно. Уже при n = 50 мы видим очень точное очертание исходной функции, которое не сходится поточечно, но позволяет нам представить приблизительный график функции. Также стоит отметить, что в частичные суммы Фурье неотличимы графически, то есть их графики совпадают.

Равенство Парсеваля

Для проверки данного равенства воспользуемся следующей программой:

```
def pars_check(func, n, t, label, T=2*np.pi,):
    norm_f = np.dot(func, func)*(t[1] - t[0])
    f_c = fourier_coefficients(func, t, T, n)
    g_c = g_coefficients(func, t, T, n)
    sm_ab = np.pi*((f_c[0] ** 2)/2 + sum(f_c[i][0] ** 2 + f_c[i][1] ** 2 for i in
range(1, n+1)))
    sm_c = 2*np.pi*sum(abs(g_c[i])**2 for i in range(len(g_c)))
    print(f'{label}:\nКвадрат нормы:{norm_f}\na, b: {sm_ab}\nc:{sm_c}\n')
```

Листинг 2. Программа для проверки равенства Парсеваля

Полученные результаты при $n = 200$ Отличаются на сотые доли, причем результаты коэффициентов (a_n, b_n) и c_n отличаются на тысячные:

Квадрат нормы $\|f\|^2$	(a_n, b_n)	c_n
24.7239	24.7391	24.7385

Таблица 3. Равенство Парсеваля

Поэтому можно утверждать, что равенство выполняется.

Четная функция

В качестве четной функции с периодом $T = \pi$

$$f(t) = |\cos(t)|$$

График функции приведен на рисунке 6 (см. ниже).

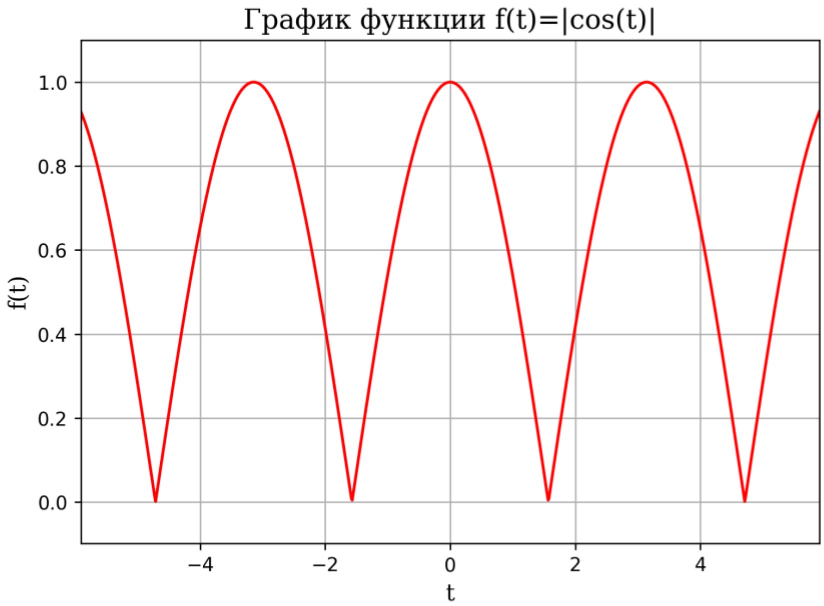

Рис. 6. График функции $f_2(t)$

Коэффициенты Фурье

Вычисление коэффициентов a, b, c :

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} |\cos(t)|\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_{-\pi}^{0} |\cos(t)|\sin(nt)dt$$

$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} |\cos(t)| \; e^{-int}dt$$

В результате выполнения программы (Листинг 1) получим следующие коэффициенты для $n = 3$:

n	a_n	b_n
0	1.2752	-
1	-0.002	0.0
2	0.002	0.0
3	-0.002	0.0

Таблица 4. Коэффициенты Фурье для n = 3

n	c_n
-3	$-0.001-5.699e^{-18}i$
-2	$0.001-1.04e^{-17}i$
-1	$-0.001-3.05e^{-17}i$
0	0.6376
1	$-0.001+3.05e^{-17}i$
2	$0.001-1.04e^{-17}i$
3	$-0.001+5.699e^{-18}i$

Таблица 5. Коэффициенты Фурье для n = 3 (комплексная форма)

Графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$

В качестве значений N возьмем n = 3, 5, 10,15, 50.

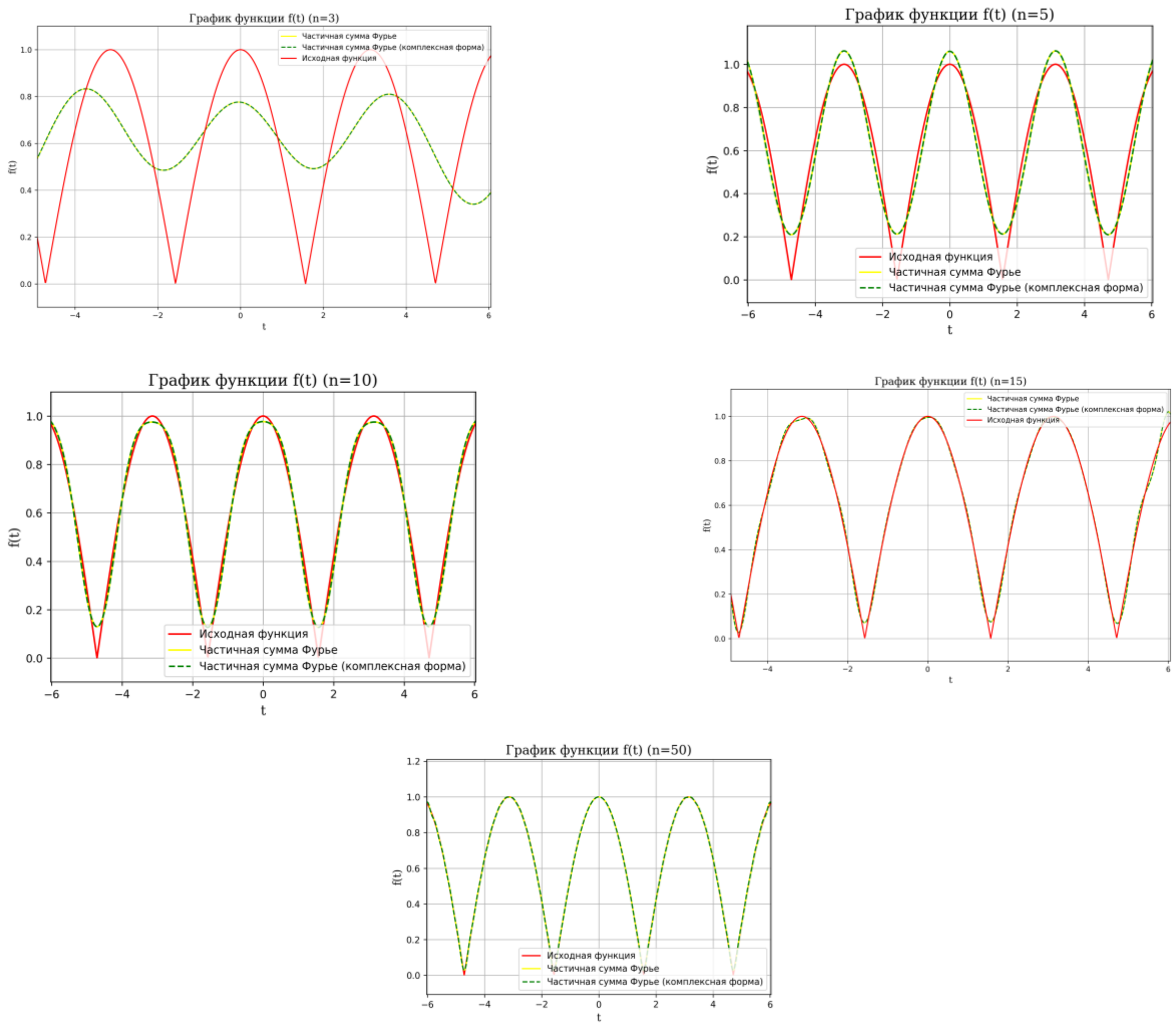

Рис. 7 Графики функций $F_N(t)$и$G_N(t)$и$f(t)$

Уже при n=10 графики частичных сумм Фурье почти совпадают с исходным графиком. А при n=50 графики становятся неотличимы, за исключением значений исходной функции, близких к 0.

Равенство Парсеваля

Для проверки данного равенства воспользуемся программой (см. Листинг 2). Полученные результаты при $n = 200$ Отличаются на сотые доли, причем результаты коэффициентов (a_n, b_n) и c_n отличаются на тысячные:

Квадрат нормы $\|f\|^2$	(a_n, b_n)	c_n
3.1479	3.1565	3.1567

Таблица 6. Равенство Парсеваля

Поэтому можно утверждать, что равенство выполняется.

Нечетная функция

В качестве нечетной функции с периодом $T = 2\pi$

$$f(t) = \sin(3t)\cos(4t)$$

График функции приведен на рисунке 8 (см. ниже).

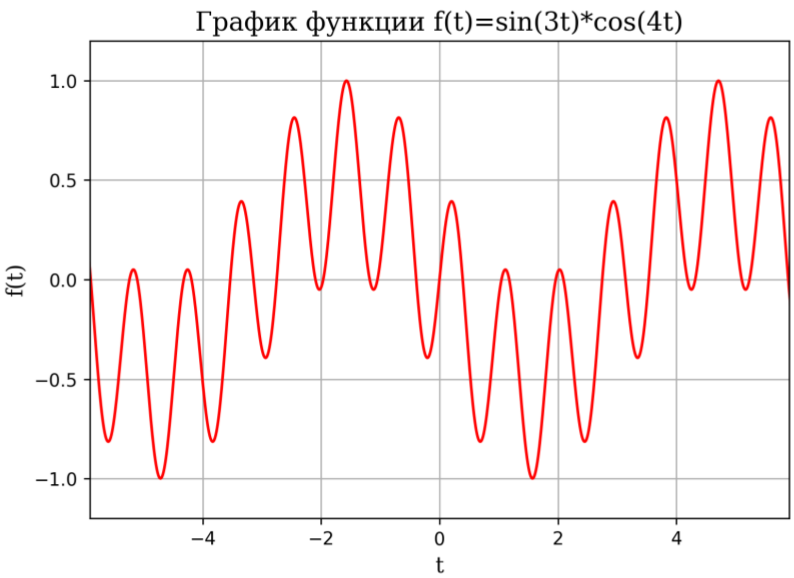

Рис. 8. График функции $f_3(t)$

Коэффициенты Фурье

Вычисление коэффициентов a, b, c :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\cos(4t)\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\cos(4t)\sin(nt)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sin(3t)\cos(4t)\quad \mathrm{e}^{-int}dt$$

В результате выполнения программы (Листинг 1) получим следующие коэффициенты для $n = 3$:

n	a_n	b_n
0	0.0	-
1	0.0	0.0
2	0.0	-0.5
3	0.0	0.0

Таблица 7. Коэффициенты Фурье для $n = 3$

n	c_n
-3	$1.122e^{-18}+1.039e^{-17}i$
-2	$-4.1997e^{-18}-0.25i$
-1	$2.742e^{-17}+1.1718e^{-18}i$
0	$1.238e^{-18}$
1	$2.742e^{-17}-1.1718e^{-18}i$
2	$-4.1997e^{-18}+0.25i$
3	$1.122e^{-18}-1.039e^{-17}i$

Таблица 8. Коэффициенты Фурье для $n = 3$ *(комплексная форма)*

Графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$

В качестве значений N возьмем n = 3, 5, 10, 15, 50.

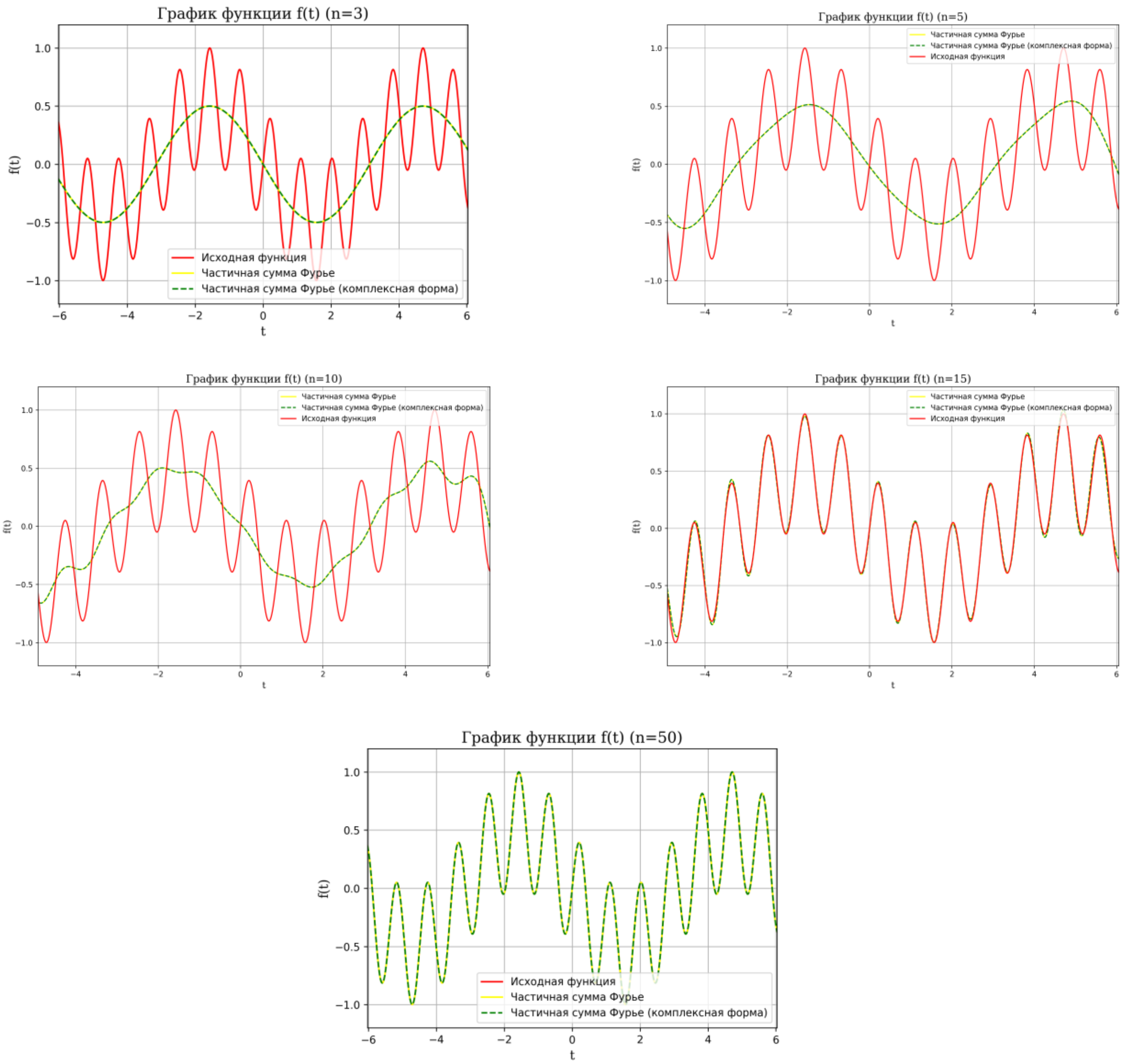

Рис. 9 Графики функций $F_N(t)$и$G_N(t)$и$f(t)$

В данном случае при коэффициентах n=3, 5, 10 графики частичных сумм вряд ли походят на исходный, однако при n=15 график уже почти идентичен исходному.

Равенство Парсеваля

Для проверки данного равенства воспользуемся программой (см. Листинг 2). Полученные результаты при $n = 200$ в этот раз почти не отличаются, вплоть до 13 знака после запятой!

Квадрат нормы $\|f\|^2$	(a_n, b_n)	c_n
1.5707963267948877	1.5707963267948966	1.5707963267948777

Таблица 9. Равенство Парсеваля

Поэтому можно утверждать, что равенство выполняется.

Функция общего вида

В качестве функции общего вида с периодом $T = 2\pi$

$$f(t) = \sin(3t) + \cos(t - 5)$$

График функции приведен на рисунке 9 (см. ниже).

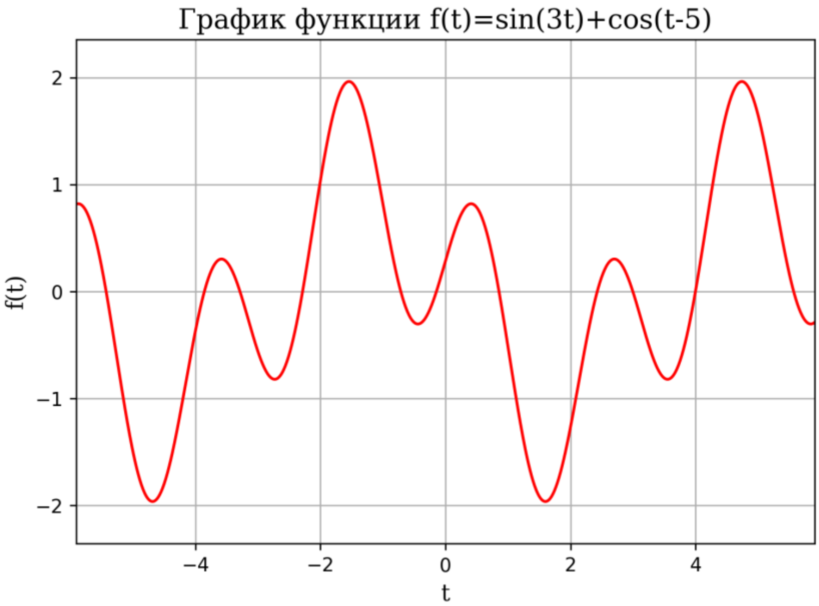

Рис. 10. График функции $f_4(t)$

Коэффициенты Фурье

Вычисление коэффициентов a, b, c :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t) + \cos(t-5))\cos(nt)dt$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t) + \cos(t-5))\sin(nt)dt$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\sin(3t) + \cos(t-5))\ \ \mathrm{e}^{-int}dt$$

В результате выполнения программы (Листинг 1) получим следующие коэффициенты для $n = 3$:

n	a_n	b_n
0	0.0006	-
1	-0.0006	0.0
2	0.2842	-0.9589
3	-0.0006	0.0

Таблица 10. Коэффициенты Фурье для $n = 3$

n	c_n
-3	*-0.00028+2.951*$e^{-17}i$
-2	*0.142-0.4795i*
-1	*-0.00028-4.314* $e^{-18}i$
0	*0.00028*
1	*-0.00028+4.314* $e^{-18}i$
2	*0.142+0.4795i*
3	*-0.00028- 2.951*$e^{-17}i$

Таблица 11. Коэффициенты Фурье для $n = 3$ (комплексная форма)

Графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$

В качестве значений N возьмем n = 3, 5, 10, 15, 50.

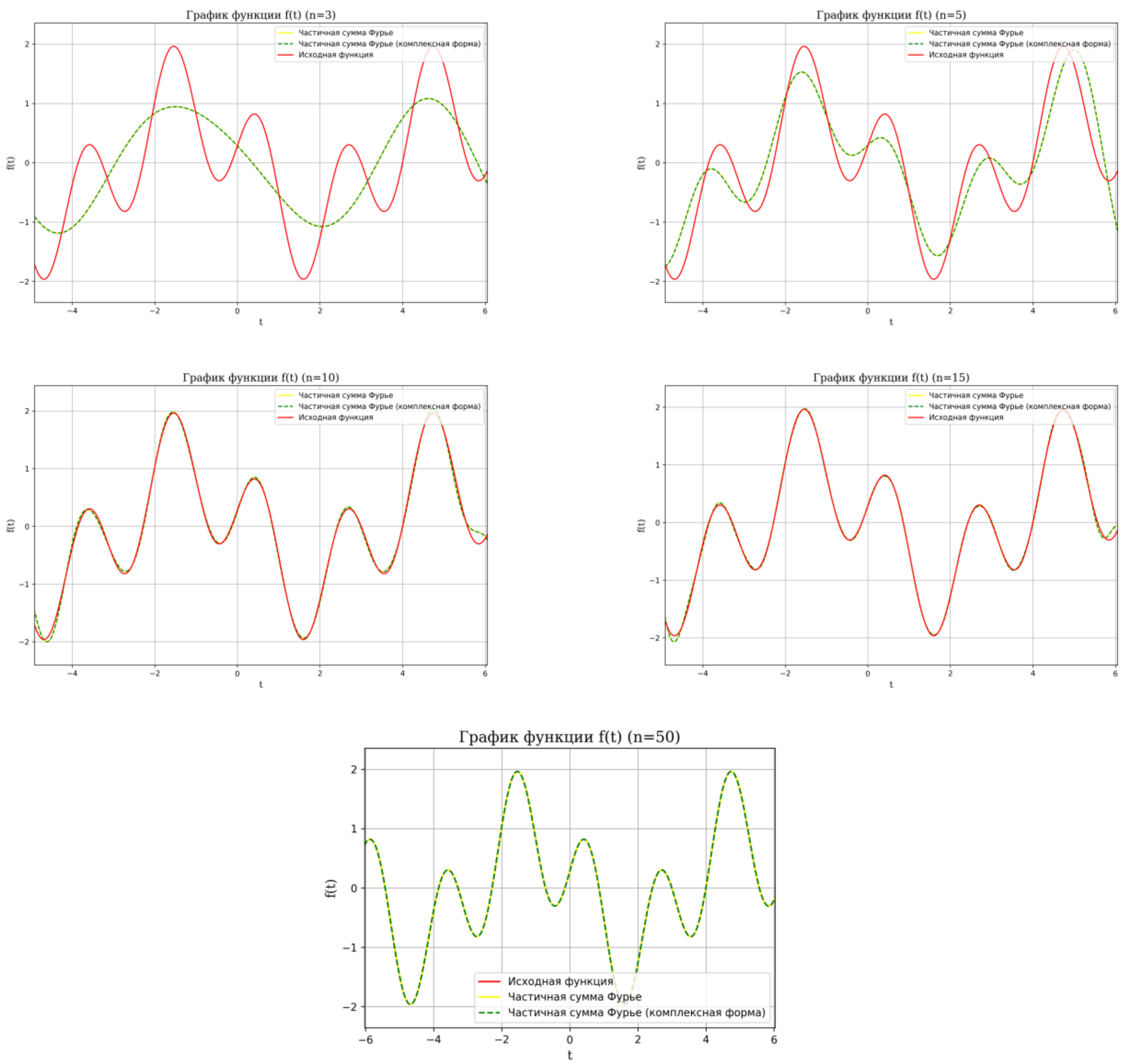

Рис. 11 Графики функций $F_N(t)$*и*$G_N(t)$*и*$f(t)$

При n=5 графики частичных сумм уже близки по поведению с исходным графиком.

При n=10 и далее графики почти полностью повторяют график исходной функции.

При n=50 мы получаем полное совпадение.

Равенство Парсеваля

Для проверки данного равенства воспользуемся программой (см. Листинг 2). Полученные результаты при $n = 200$ в этот раз отличаются третьим и последующими знаками после запятой. Поэтому можно говорить о выполнении неравенства.

Квадрат нормы $\|f\|^2$	(a_n, b_n)	c_n
6.283	6.284	6.284

Таблица 12. Равенство Парсеваля

Задание 2

Наша комплексная функция выглядит следующим образом:

$$Ref(t) = \begin{cases} 2, & t \in [-1, 1) \\ 4 - 2t, & t \in [1, 3) \\ -2, & t \in [3, 5) \\ -12 + 2t, & t \in [5, 7) \end{cases} \quad Imf(t) = \begin{cases} 2t, & t \in [-1, 1) \\ 2, & t \in [1, 3) \\ 8 - 2t, & t \in [3, 5) \\ -2, & t \in [5, 7) \end{cases}$$

Параметрический график выглядит следующим образом:

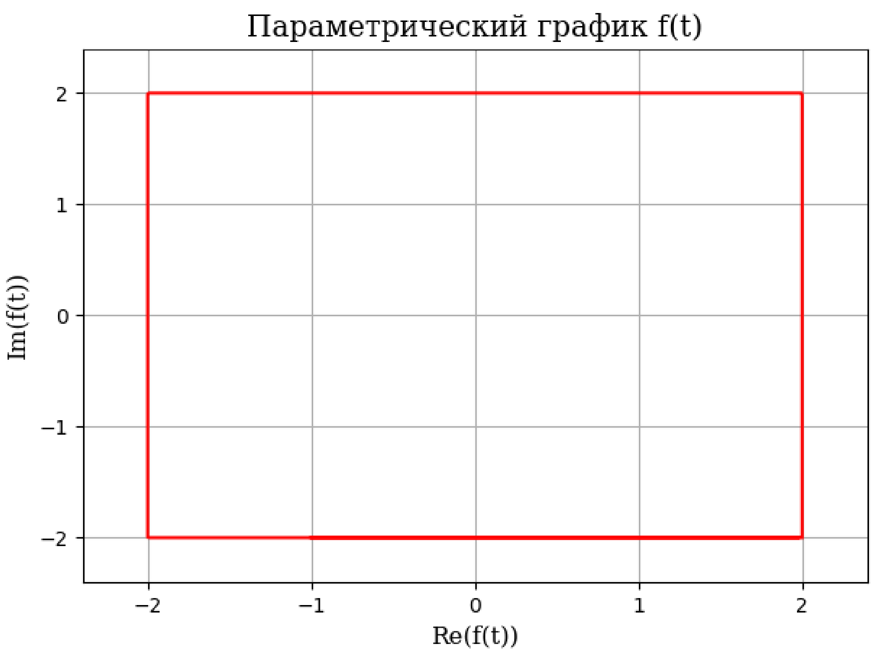

Рис. 12. Параметрический график $f(t)$

Коэффициенты Фурье

$$c_n = \frac{1}{8}\int_{-1}^{7} f(t)e^{-i\omega_i t}dt$$
$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1}(2+2ti)e^{-i\omega_i t}dt + \frac{1}{8}\int_{1}^{3}(4-2t+2i)e^{-i\omega_i t}dt$$
$$+\frac{1}{8}\int_{3}^{5}(-2+(8-2t)i)e^{-i\omega_i t}dt + \frac{1}{8}\int_{5}^{7}(-12+2t-2i)e^{-i\omega_i t}dt$$

С помощью следующей программы получим значения коэффициентов для n = 0, 1, 2 и 3:

```
def function(t):
    r, img = -1, -2
    if -(T/8) <= t < (T/8):
        r, img = R, 8*R*t/T
    elif (T/8) <= t < (3*T/8):
        r, img = 2*R-8*R*t/T, R
    elif (3*T/8) <= t < (5*T/8):
        r, img = -R, 4*R-8*R*t/T
    elif (5*T/8) <= t < (7*T/8):
        r, img = -6*R+8*R*t/T, -R
    return r + img*1j

def g_coefficients(func, t, T, n):
    g = []
    for i in range(-n, n+1):
        exp = lambda x: np.exp(-(1j * 2 * np.pi * i * x) / T)
        g.append((1/T)*(dot_product(func, exp, t)))
    return np.array(g)
```

Листинг 3. Программа для вычисления коэффициентов Фурье (комплексная функция)

Результат:

n	c_n
-3	*-0.256+0.0021i*
-2	*-0.0021+0.001i*
-1	*-0.0021-0.00071i*
0	*-0.001-0.002i*
1	*2.293-0.002i*
2	*0.002i-0.00099i*
3	*0.0021+0.00071i*

Таблица 13. Коэффициенты Фурье для n=3

Графики $G_N(t)$

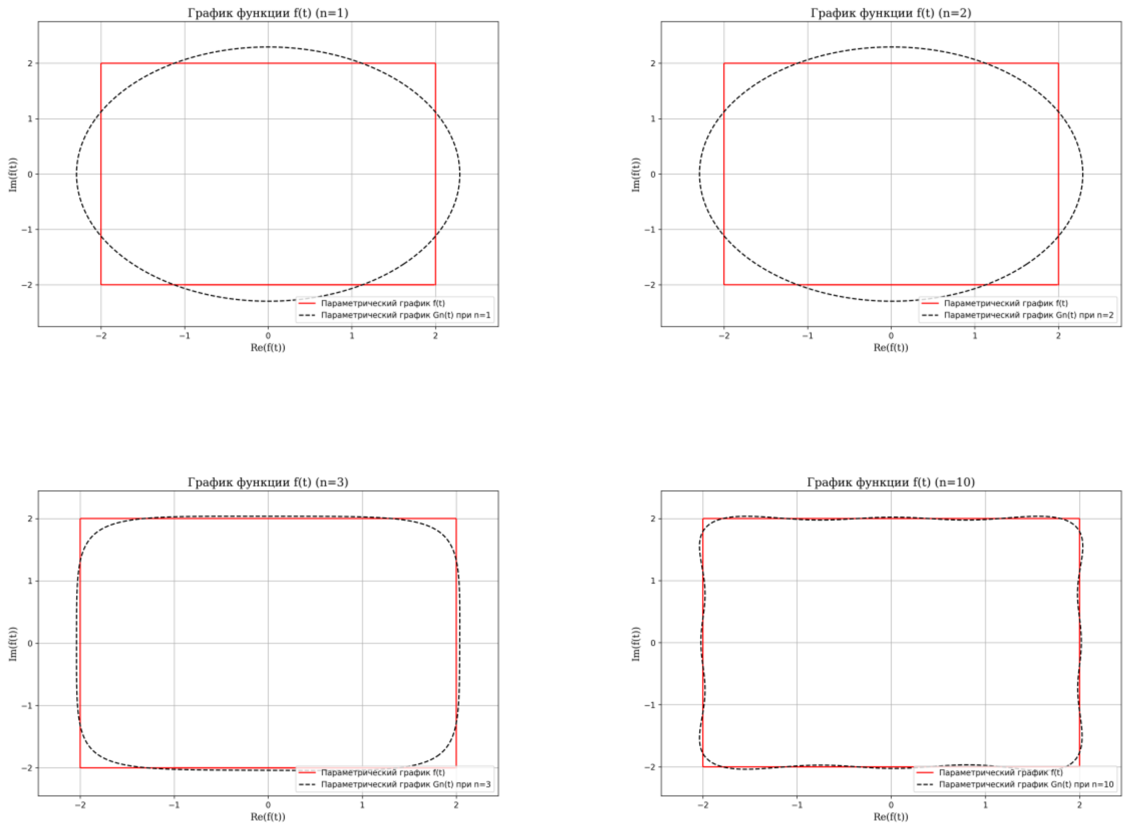

Рис. 13. Графики $G_N(t)$ *и* $f(t)$

Можно заметить, что, как и в случае с вещественными функциями, увеличение количества коэффициентов приводит к более точному приближению исходной функции. При n=1, 2, график суммы является эллипсом, при n=3 он уже принимает более похожую на исходный график форму. При n = 10 приближенный график довольно точно повторяет исходный контур.

Графики $Ref(t), Imf(t), ReG_N(t), ImG_N(t)$

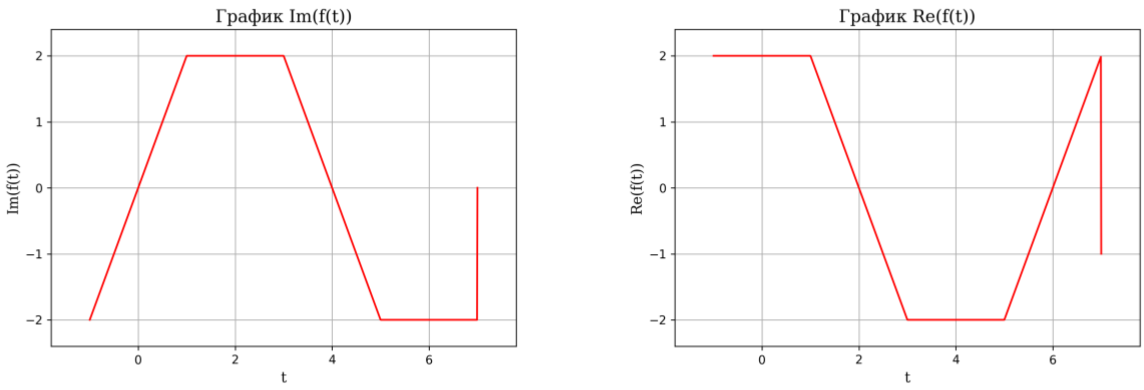

Таблица 14. Графики $\mathrm{Im}f(t), Ref(t)$

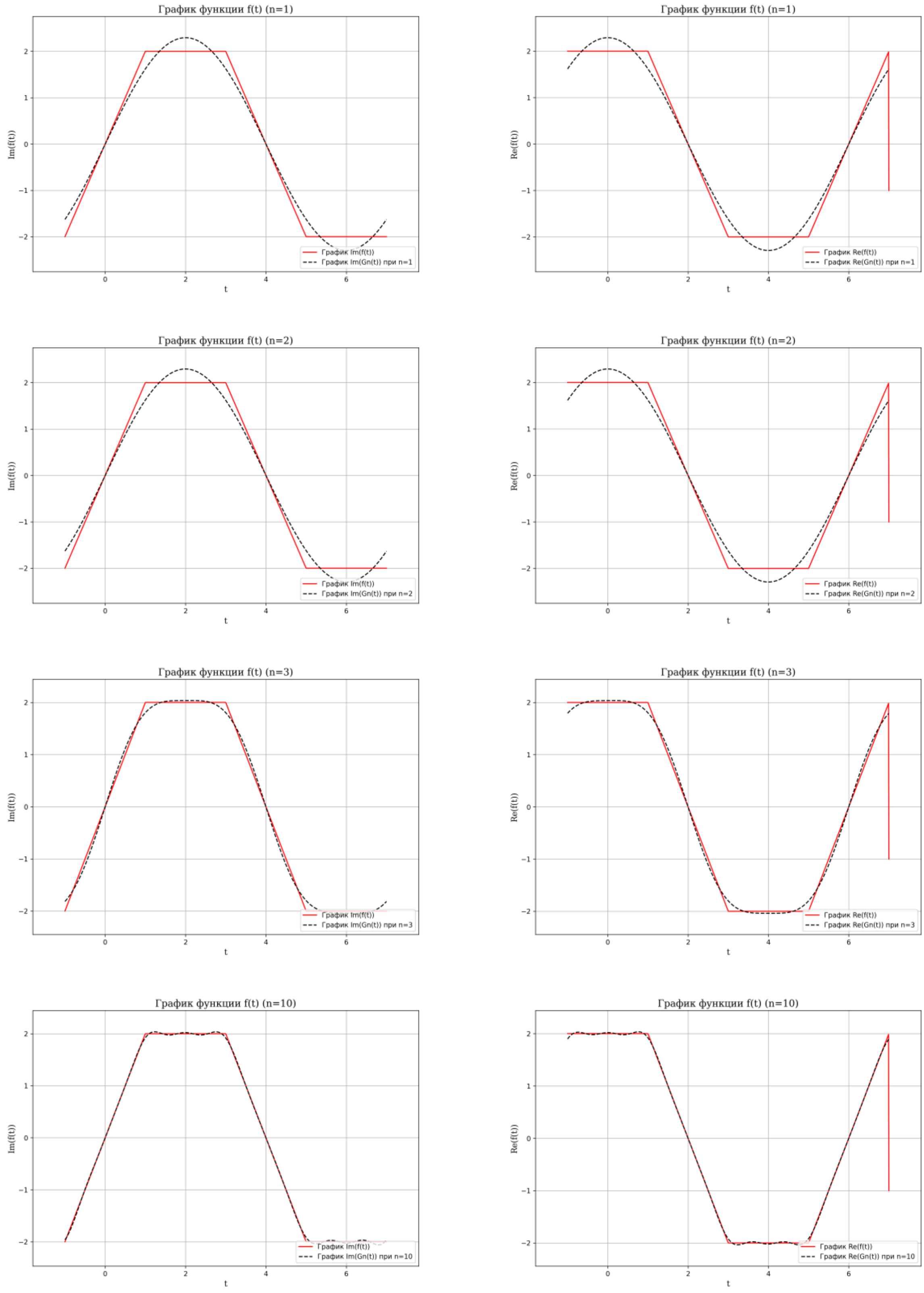

Таблица 15. Общие графики $Ref(t), ReG_N(t)$ и $\mathrm{Im}f(t)$ $\mathrm{Im}G_N(t)$

Проанализировав данные графики, можно так же сделать вывод, что большее значение n точнее приближает график частичной суммы Фурье к графику исходной функции. Более того, мы наблюдаем, что увеличение n влечет более точное сближение как к действительной части функции, так и к мнимой.

Равенство Парсеваля

Для проверки данного равенства воспользуемся программой (см. Листинг 2). Полученные результаты при $n = 200, 300, 400$

Квадрат нормы $\|f\|^2$	c_n	n
33.135	33.0899	200
33.135	33.1036	300
33.135	33.1113	400

С увеличением значения n разница становится всё меньше и меньше, поэтому можно говорить о том, при достаточном большом n мы сможем получить значение, равное квадрату норме. Поэтому равенство Парсеваля выполнено.

Выводы

В результате выполнения мы смогли убедиться в том, что ряд Фурье позволяет с высокой точностью приблизить исходную функцию при использовании достаточного количества элементов ряда. При большем числе элементов точность приближения растет. При этом ряд не гарантирует поточечной сходимости (пример с квадратной волной).

Графики частичных сумм Фурье для вещественного и комплексного представления идентичны. Во всех случаях также удалось подтвердить равенство Парсеваля.