

Задание 1. Вещественные функции. Придумайте числа a, b, t_0, t_1, t_2 такие, что $a, b > 0$ и $t_2 > t_1 > t_0 > 0$. Рассмотрите следующие функции $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

1. **Квадратная волна.** Периодическая функция с периодом $T = t_2 - t_0$ такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2). \end{cases}$$

2. Любая **чётная** периодическая функция по вашему выбору.

3. Любая **нечётная** периодическая функция по вашему выбору.

4. Любая периодическая функция по вашему выбору, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является **ни чётной, ни нечётной**.

Для каждой из функций f :

- Постройте график $f(t)$.
- Рассмотрите частичные суммы Фурье F_N и G_N вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left(a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right),$$
$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где $\omega_n = 2\pi n/T$.

- Приведите формулы для вычисления коэффициентов (a_n, b_n) и c_n для каждого случая. Если значения некоторых из них очевидны, укажите это. Для первой функции (квадратная волна) и $n = 0, 1, 2$ вычислите значения указанных коэффициентов вручную.
- Напишите программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье (a_n, b_n) и c_n для произвольного N . Приведите в отчёте коэффициенты для случая $N = 3$.
- Постройте графики $F_N(t)$ и $G_N(t)$ для пяти различных значений N . Сравните их друг с другом и с графиком исходной функции $f(t)$.
- Проверьте выполнение равенства Парсеваля для коэффициентов (a_n, b_n) и c_n .

Задание 2. Комплексная функция. Задайтесь числами $R, T > 0$ и рассмотрите комплекснозначную функцию $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ с периодом T такую, что

$$\operatorname{Re} f(t) = \begin{cases} R, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ 2R - 8Rt/T, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -6R + 8Rt/T, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases} \quad \operatorname{Im} f(t) = \begin{cases} 8Rt/T, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ R, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ 4R - 8Rt/T, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases}$$

Для рассматриваемой функции f :

- Постройте параметрический график $f(t)$ (кривую на комплексной плоскости).
- Рассмотрите частичные суммы Фурье $G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t}$, где $\omega_n = 2\pi n/T$.
- Вычислите вручную коэффициенты c_n для $n = 0, 1, 2$.
- Напишите программу, которая вычисляет коэффициенты Фурье c_n для произвольного N . Приведите в отчёте коэффициенты для случая $N = 3$.
- Постройте параметрические графики $G_N(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10$. Сравните их друг с другом и с параметрическим графиком исходной функции $f(t)$.
- Постройте графики $\operatorname{Re} f(t)$, $\operatorname{Im} f(t)$ и графики $\operatorname{Re} G_N(t)$, $\operatorname{Im} G_N(t)$ для $N = 1, 2, 3, 10$.
- Проверьте выполнение равенства Парсеваля.

Необязательное задание: произвольный рисунок. В этом задании вам предлагается воспроизвести результат, который можно увидеть в [этом](#) и [подобных ему](#) видео.

- Задайте произвольный рисунок на комплексной плоскости (это может быть сердечко, звёздочка, человечек – что угодно). Найдите способ сохранить его как набор последовательно расположенных точек, достаточно близких друг к другу.
- Задайте “расписание движения” по этим точкам: предположите, что движение между соседними точками происходит равномерно и прямолинейно.
- Найдите коэффициенты соответствующего ряда Фурье.
- Если чувствуете в себе силы, то можете сделать **анимацию**, соответствующую параметрическому графику частичной суммы ряда Фурье. Пусть ваш рисунок появляется прямо у вас на глазах – из суммы простых вращений! Если сделать анимацию кажется для вас слишком сложным, то постройте статичные параметрические графики по аналогии с предыдущим заданием.