

НИУ ИТМО

Отчет по лабораторной работе №3

Жёсткая фильтрация

Выполнил: Братушка Н. И.

Группа: Р3238

Поток: ЧМ 1.4

Преподаватель: Перегудин А. А.,

Пашенко А. В.

ИТМО

Санкт-Петербург, 2024

Содержание

1. Задание 1. Жёсткие фильтры	3
1.1. Высокие частоты	4
1.1.1. Режем Фурье-образы и фильтруем сигнал!	6
1.2. Специфические частоты	15
1.2.1. Рассматриваем зашумленные сигналы при $b = 0$	15
1.2.2. Влияние параметра b	21
1.2.3. Подбираем правильные частоты среза	28
1.3. Низкие частоты	34
1.3.1. Частоты, частоты и ещё раз частоты!	34
2. Задание 2. Фильтрация звука	40

1. Задание 1. Жёсткие фильтры

В качестве исходного сигнала рассмотрим следующую функцию

$$g(t) = \begin{cases} 3, & t \in [-2, 5] \\ 0, & t \in (-\infty, -2) \cup (5, \infty) \end{cases}, \quad (1)$$

график которой приведен ниже:

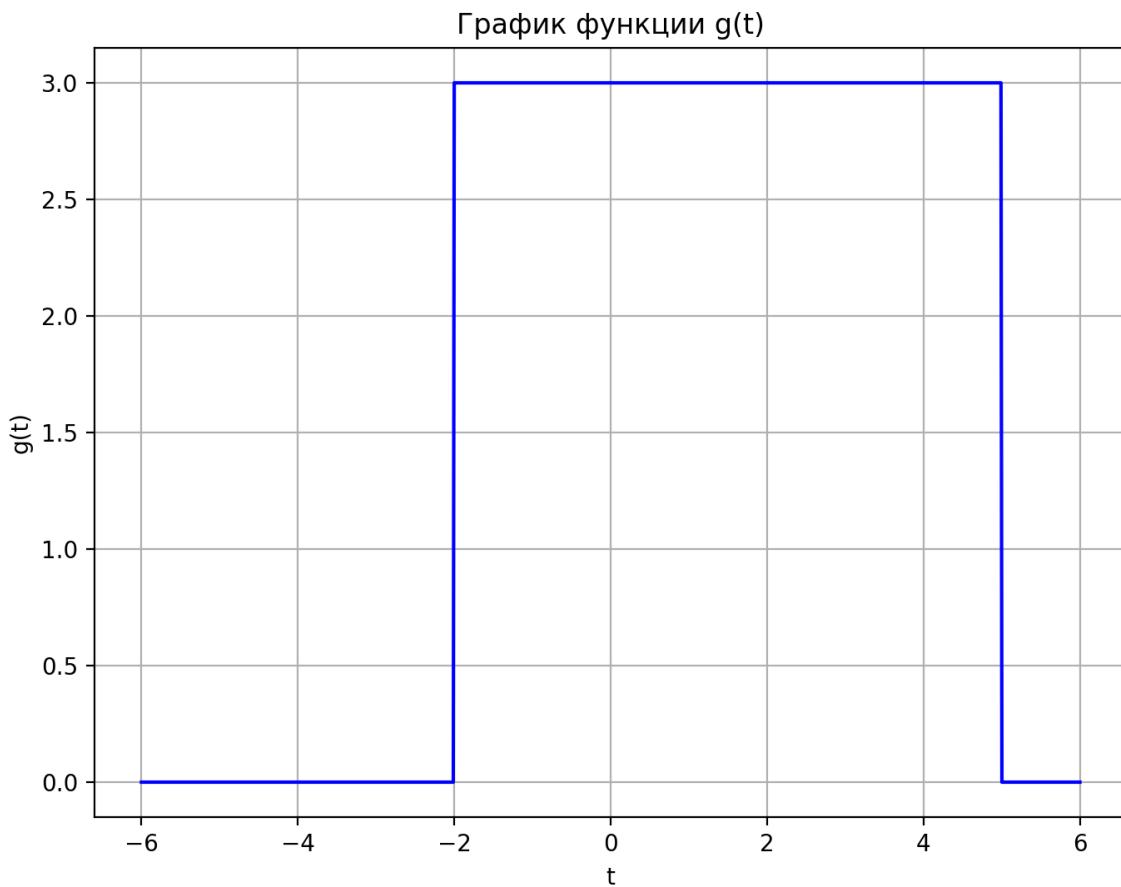


Рис. 1: График функции $g(t)$

Для выполнения первого задания нам необходимо создать зашумленную версию функции, или сигнала, при помощи функции

$$u(t) = g(t) + b(\text{rand}(\text{size}(t)) - 0.5) + c * \sin(d * t), \quad (2)$$

В которой b, c, d - параметры, чьё влияние на фильтрацию сигнала $u(t)$ мы будем исследовать в этом задании.

1.1. Высокие частоты

При выполнении этого пункта значение параметра c мы примем равным 0. Параметр b принимает значения 0.25, 1, 4. Графики зашумленного сигнала приведены ниже:

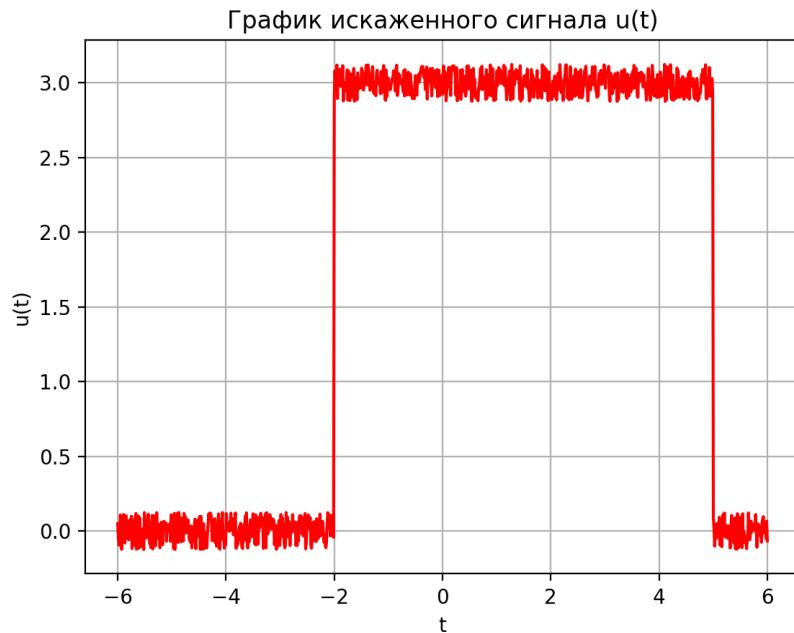
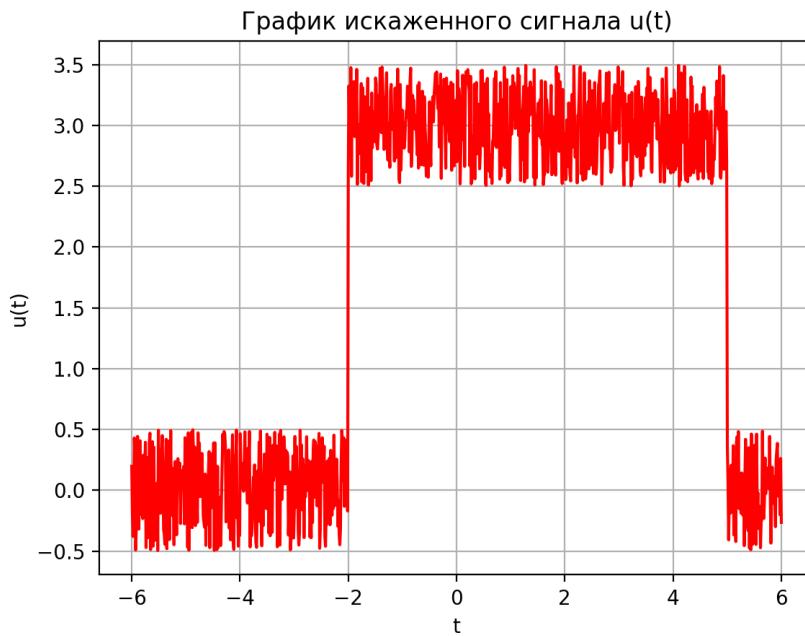
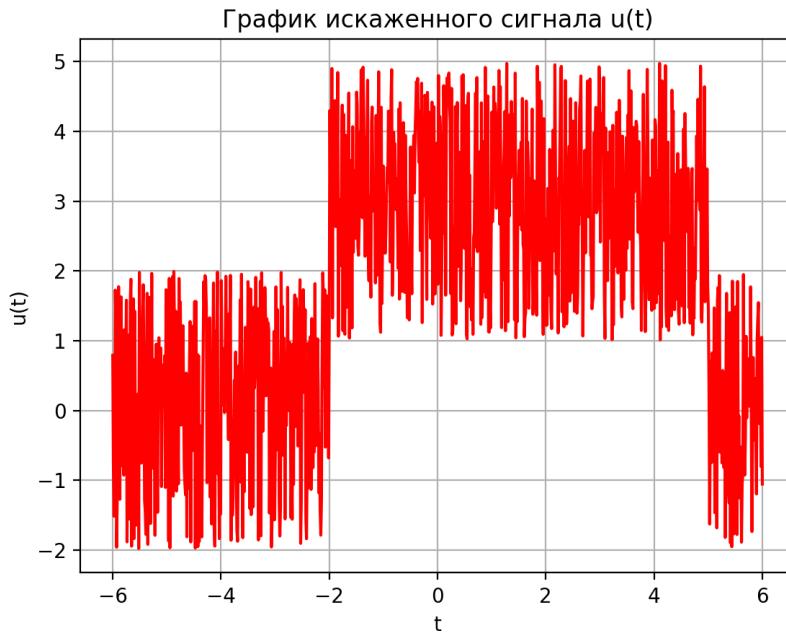


Рис. 2: График функции $u(t)$ при $b = 0.25$

Рис. 3: График функции $u(t)$ при $b = 1$ Рис. 4: График функции $u(t)$ при $b = 4$

Благодаря графикам мы можем сделать вывод о том, что параметр b влияет на степень хаотического шума, точнее на его амплитуду. Переходим к фильтрации!

1.1.1. Режем Фурье-образы и фильтруем сигнал!

Снова обращаемся к замечательному Фурье-преобразованию! Для выполнения 1 задания будем выполнять его для частоты ν . В качестве частот среза (ν_0) будут выступать значения 0.6, 1.2, 1.8 Гц. Построим графики модулей Фурье-образов сигнала $u(t)$ и отфильтрованного сигнала, а также сравнительные графики модулей $g(t)$ и отфильтрованного сигнала:

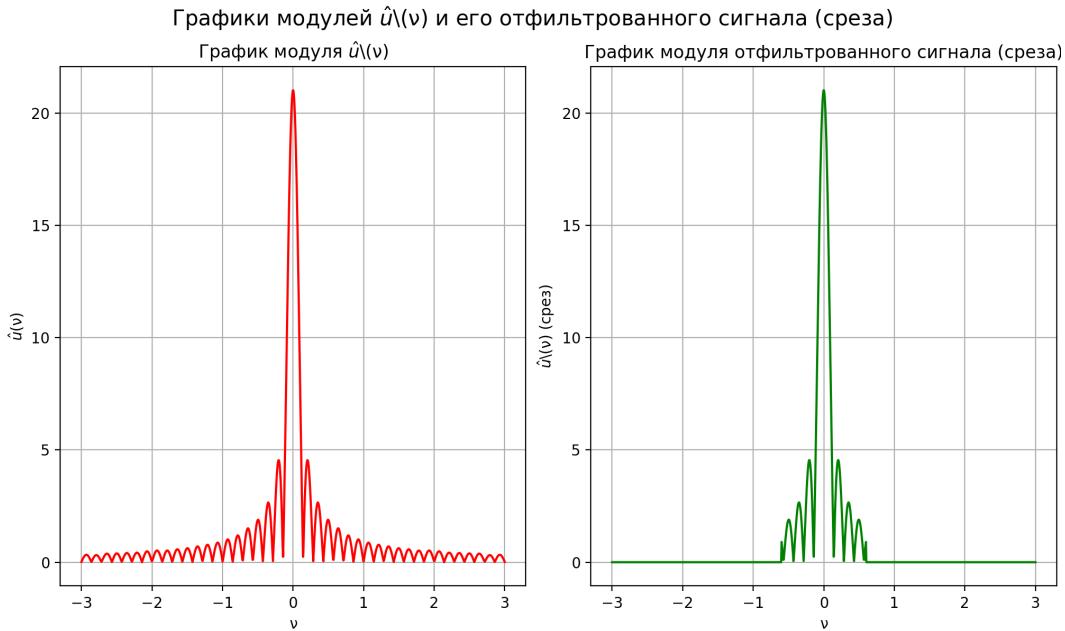


Рис. 5: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 0.6$ Гц

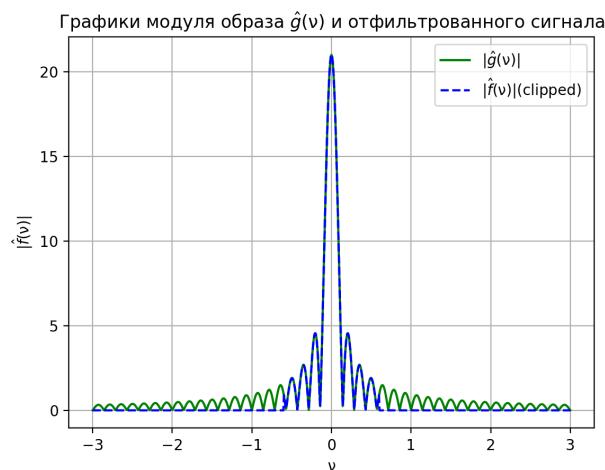


Рис. 6: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 0.6$ Гц

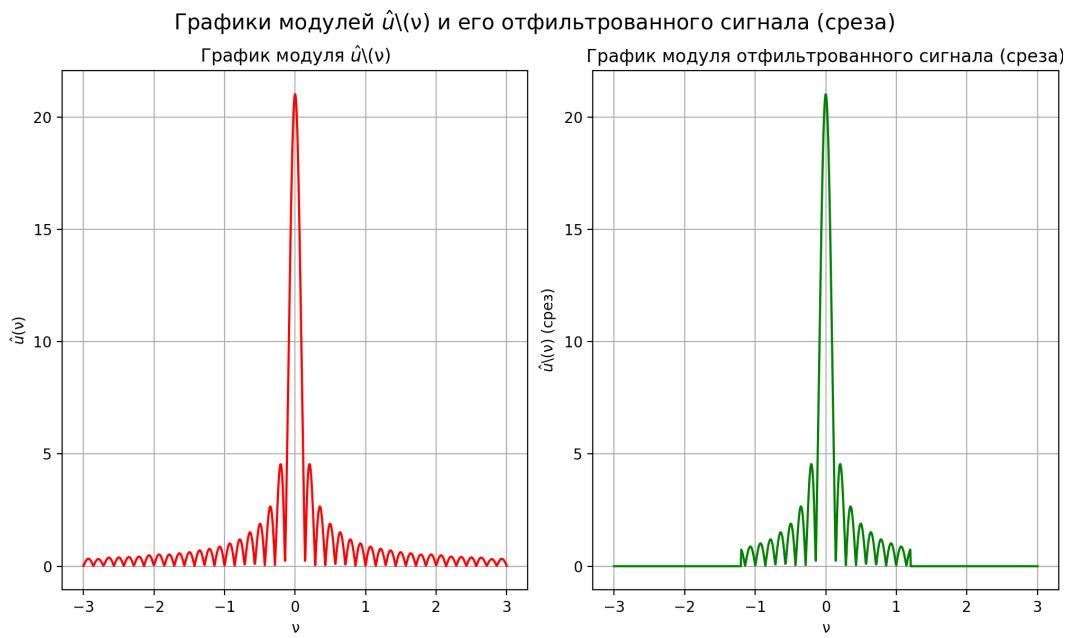


Рис. 7: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.2$

$\Gamma_{\text{Ц}}$

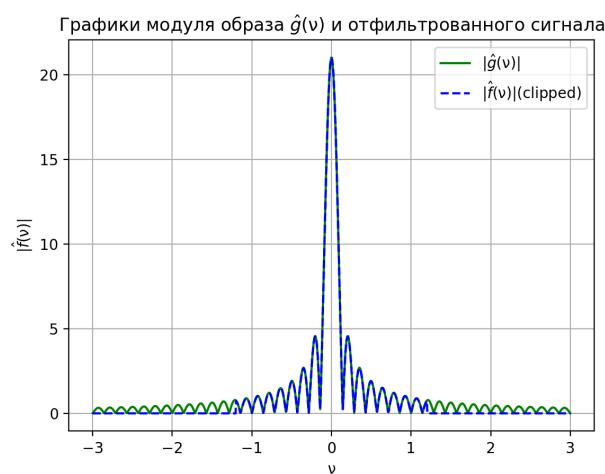


Рис. 8: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

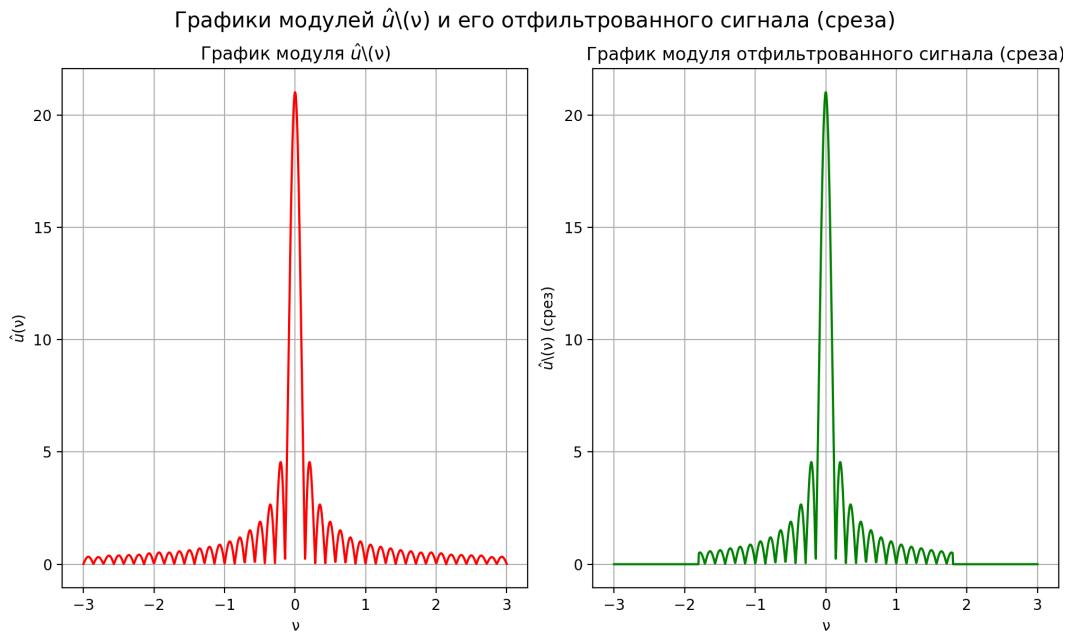


Рис. 9: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.8$ Гц

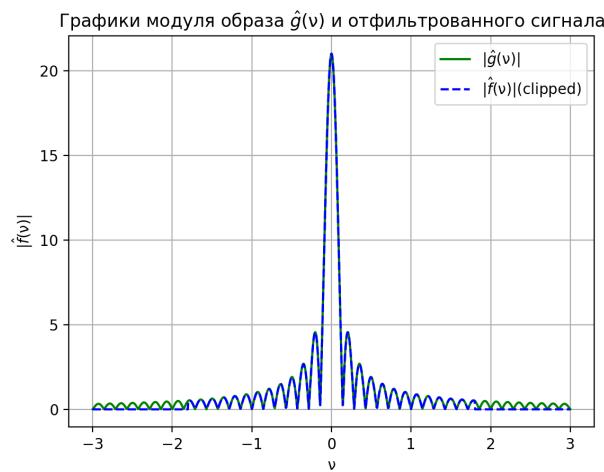
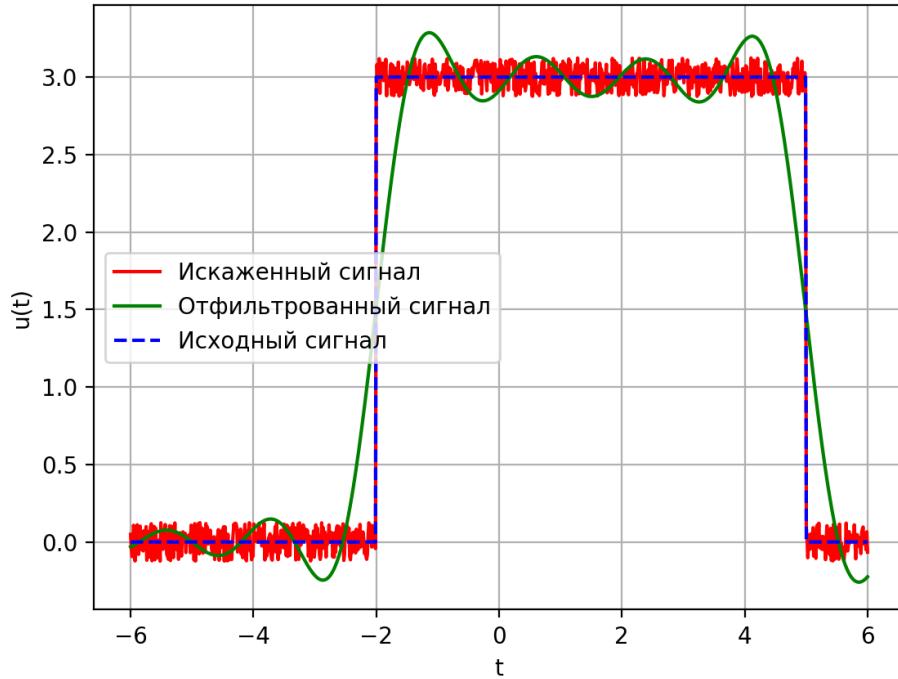
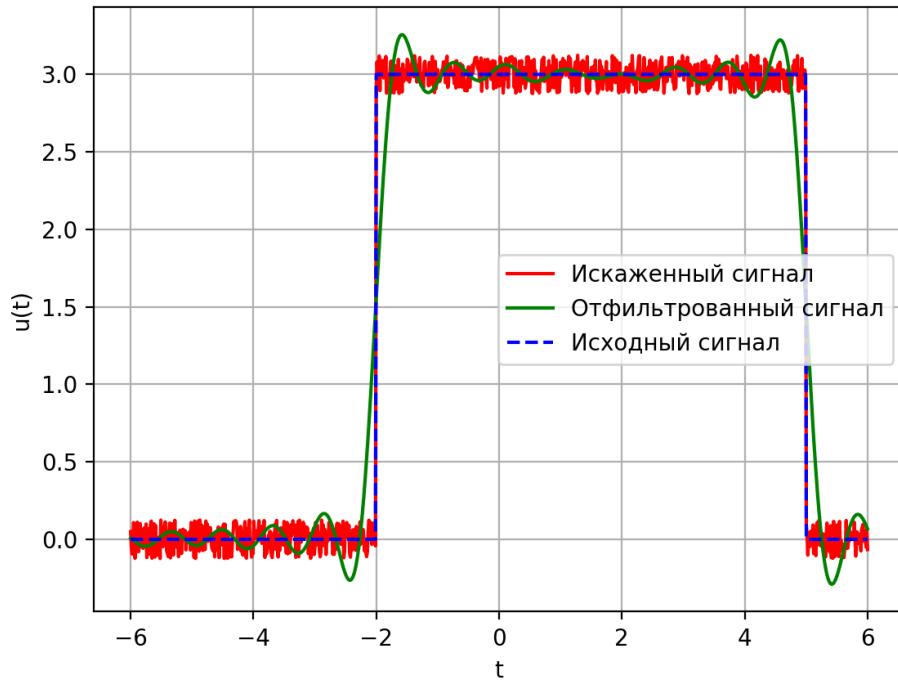


Рис. 10: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.8$ Гц

Выше были приведены графики для сигнала $u(t)$ при $b = 0.25$, но с разными частотами среза. Это сделано для того, чтобы мы смогли узнать влияние частоты среза на отфильтрованный сигнал. Так что выполняем обратное преобразование Фурье «обрезанного» образа и сопоставляем полученный отфильтрованный сигнал с зашумленным и исходным:

Графики искаженного ($u(t)$), отфильтрованного и исходного сигналовРис. 11: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 0.6$ ГцГрафики искаженного ($u(t)$), отфильтрованного и исходного сигналовРис. 12: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

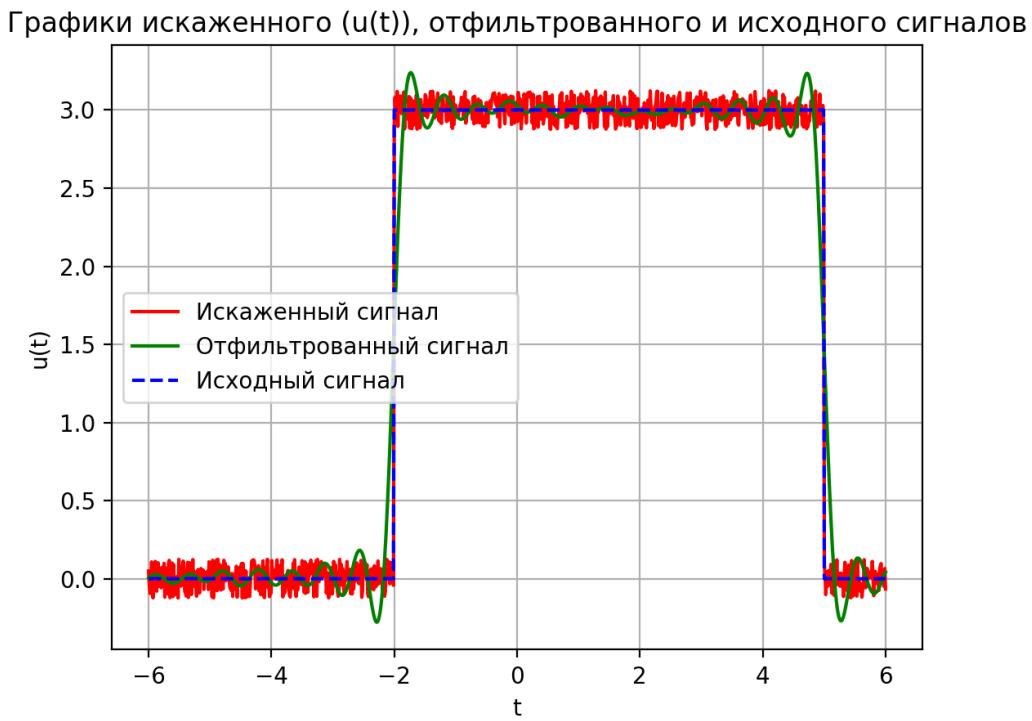


Рис. 13: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0.25$ и $\nu_0 = 1.8$ Гц

Из полученных графиков можно заключить, что при увеличении частоты среза отфильтрованный сигнал приближается к исходному по норме. В то же время увеличиваются колебания сигнала, что свидетельствуют о большем влиянии хаотического шума. При меньшей частоте среза колебания (шумы) уменьшаются, но при этом функция становится более искажённой: сведение к минимуму влияния шума приводит к тому, что мы теряем часть высокочастотных компонент исходного сигнала.

Теперь зафиксируем частоту среза $\nu_0 = 1.2$ и проанализируем влияние параметра b на фильтрацию сигнала. Строим графики модулей Фурье-образов сигнала $u(t)$ и отфильтрованного сигнала, а также сравнительные графики модулей $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при разных значениях b :

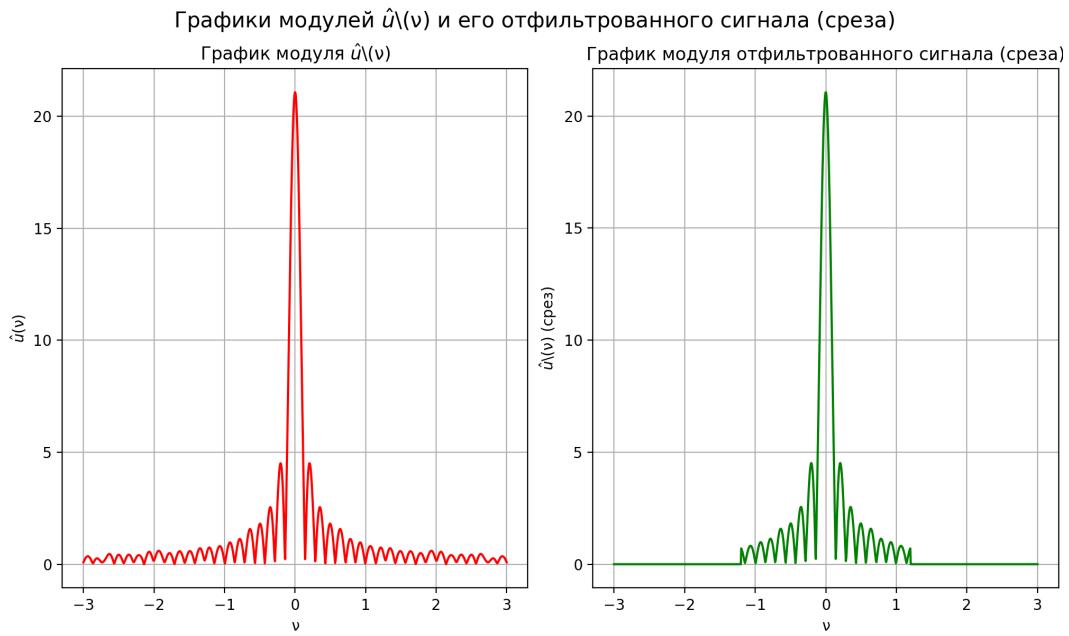


Рис. 14: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 1$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

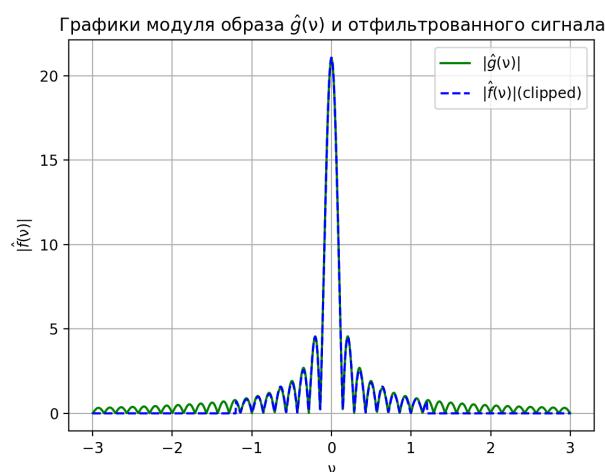


Рис. 15: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 1$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

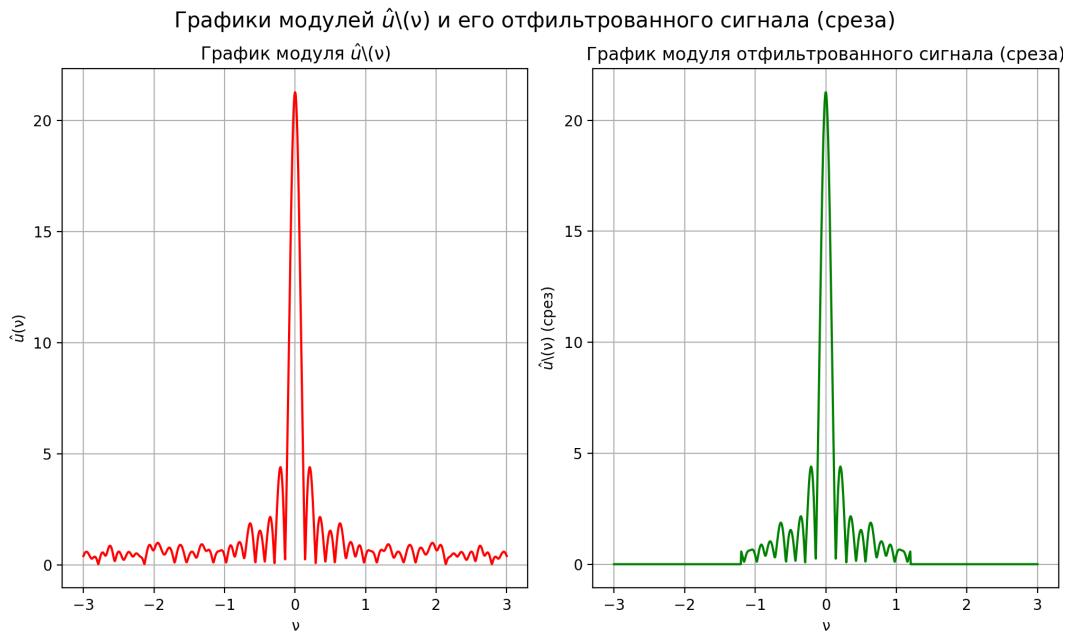


Рис. 16: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 4$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц



Рис. 17: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 4$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

Графики зашумленного, отфильтрованного и исходного сигналов:



Рис. 18: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 1$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц



Рис. 19: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 4$ и $\nu_0 = 1.2$ Гц

Обратим внимание на модули Фурье-образов при значениях 0.25, 1, 4 параметра b (рисунки 7, 14 и 16 соответственно). Стоит отметить, что при увеличении значения графики значения модуля Фурье-образа становятся более хаотичным при высоких частотах. Это свидетельствует о том, что увеличивается влияние высокочастотного шума на сигнал $u(t)$. Далее перейдём к графикам отфильтрованного сигнала (рисунки 12, 18, 19). При увеличении параметра уменьшается приближение отфильтрованного сигнала к исходному по норме, что является признаком большего влияния высокочастотного шума на сигнал. Однако это также приводит к тому, что при большем значении b отфильтрованный сигнал имеет меньше колебаний, так как высокочастотные компоненты фурье-образа в большей степени вызваны искажением сигнала, а не природой исходной функции $g(t)$.

1.2. Специфические частоты

Теперь мы будем оставлять значение лишь определённого диапазона частот при фильтрации. Это означает, что мы будем отбрасывать частоты таким образом, чтобы график модуля образа Фурье отфильтрованного сигнала как можно точнее совпадал с аналогичным графиком исходного сигнала $g(t)$. Для того, чтобы проанализировать влияние параметров на фильтрацию сигнала, мы для начала зафиксируем диапазон определённых частот, а затем рассмотрим влияние частот среза. В этом пункте параметры c и d будут ненулевыми.

1.2.1. Рассматриваем зашумленные сигналы при $b = 0$

Начнём наши исследования при $b = 0$. Строим графики аналогично пункту выше и анализируем их:



Рис. 20: График функции $u(t)$ при $b = 0$, $c = 2$, $d = 2$

Рис. 21: График функции $u(t)$ при $b = 0, c = 4, d = 2$ Рис. 22: График функции $u(t)$ при $b = 0, c = 2, d = 4$

На основе графиков можно сделать вывод, что параметр c влияет на амплитуду зашумленного сигнала, параметр d — частоту сигнала. Теперь оценим влияние этих параметров на фильтрацию при исключении частот $\nu_0 \in [0.156, 0.805]$:

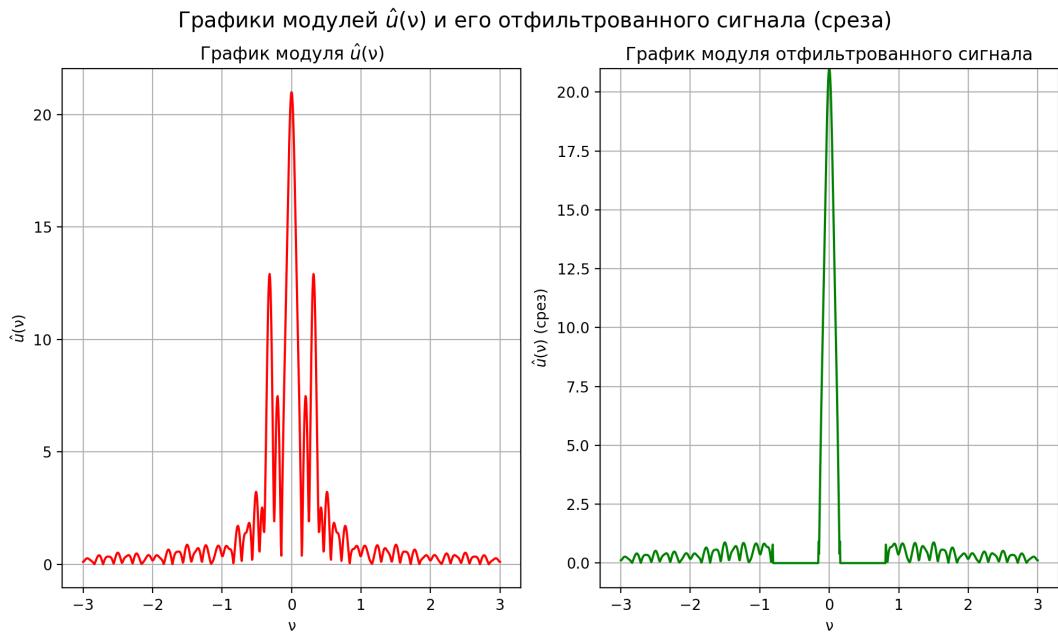


Рис. 23: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 2, d = 2$

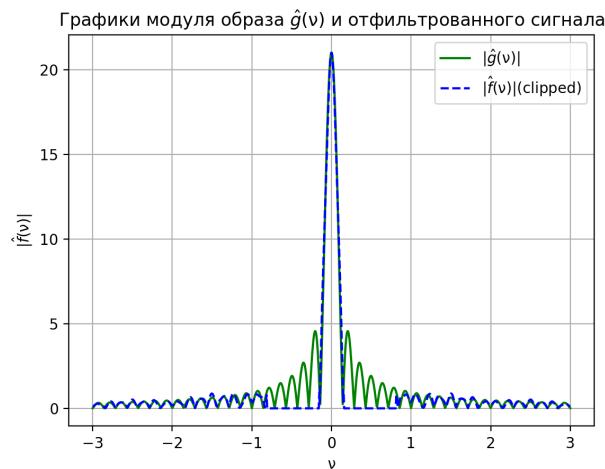


Рис. 24: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 2, d = 2$

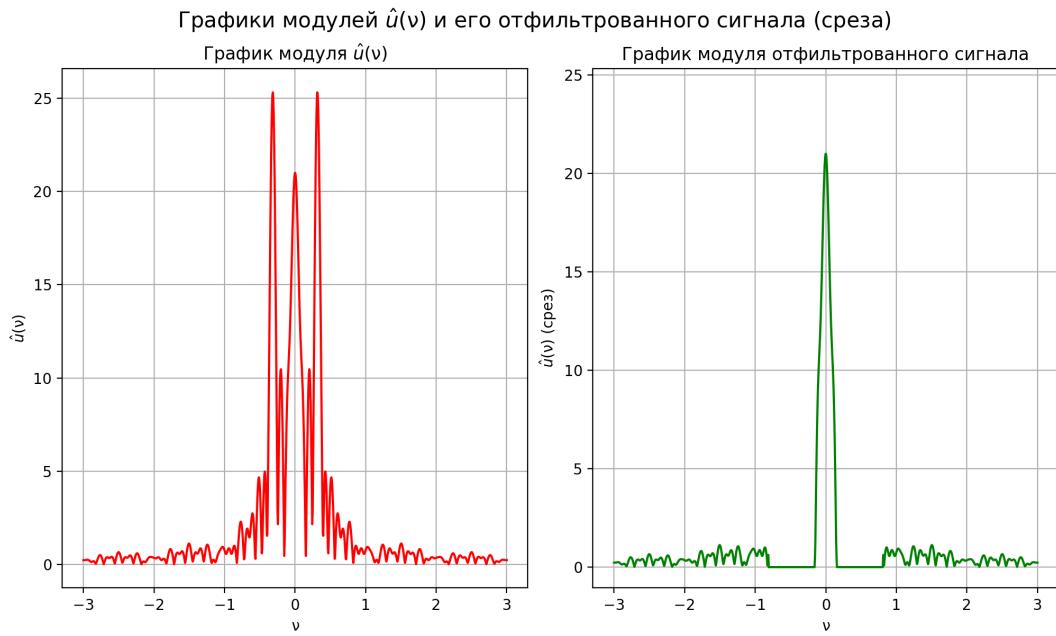


Рис. 25: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 4, d = 2$

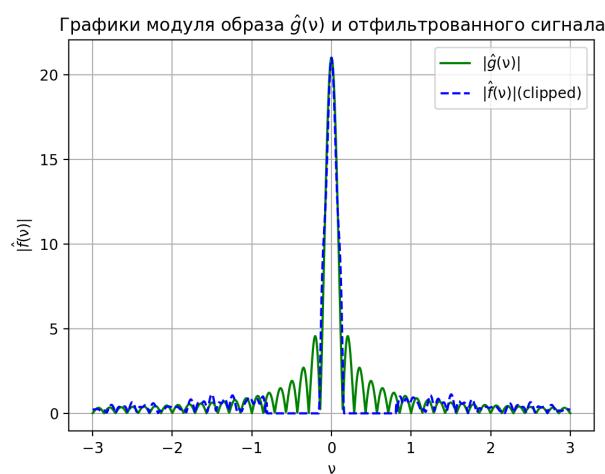


Рис. 26: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 4, d = 2$

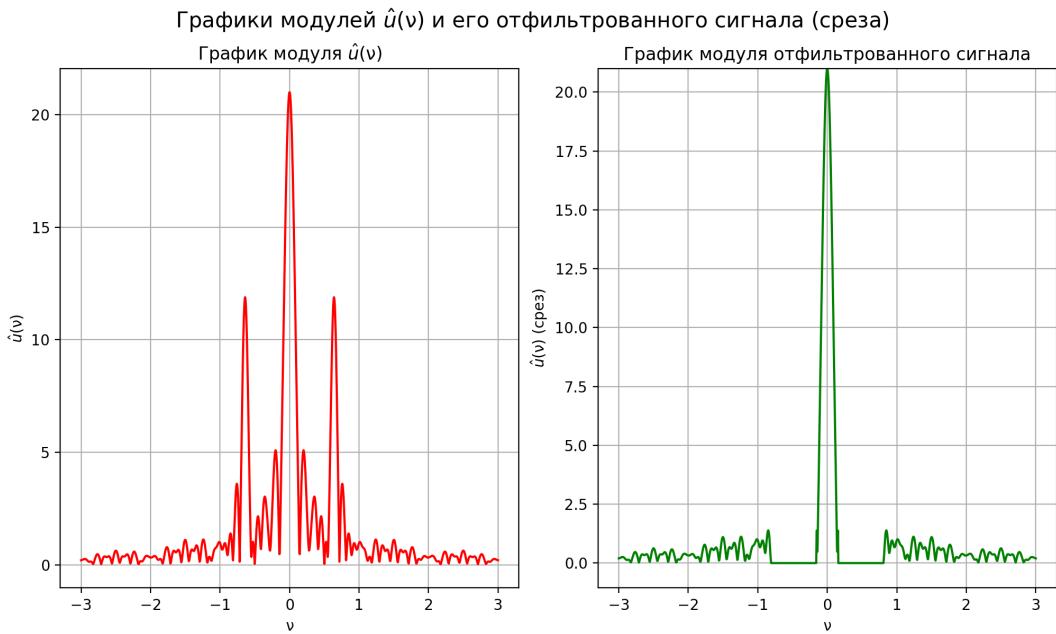


Рис. 27: Графики модулей Фурье-образа $f(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 2, d = 4$

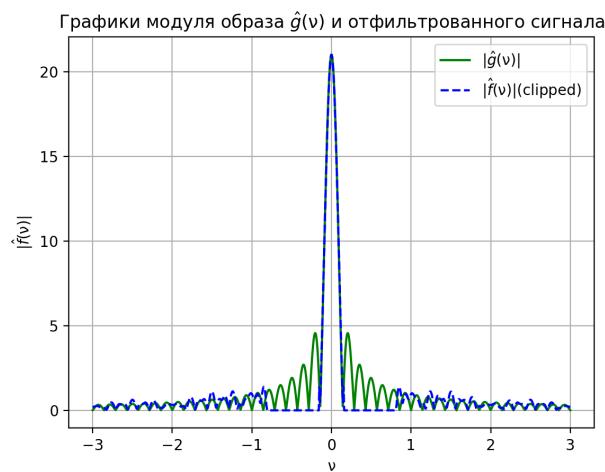


Рис. 28: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 0, c = 2, d = 4$

Внимательно рассмотрев графики модулей Фурье-образов, можно прийти к выводу, что параметр c прямо пропорционально влияет на значение модуля при частотах ниже 0.5 Гц. Параметр d при возрастании уменьшает влияние частот ниже 0.5 Гц и увеличивает влияние частот диапазона $\nu_0 \in [0.5, 1]$. При этом оба параметра увеличивают шум графика модуля образа Фурье для интервала остальных частот. Подобные выводы можно также сделать, взглянув на функцию $g(t)$.

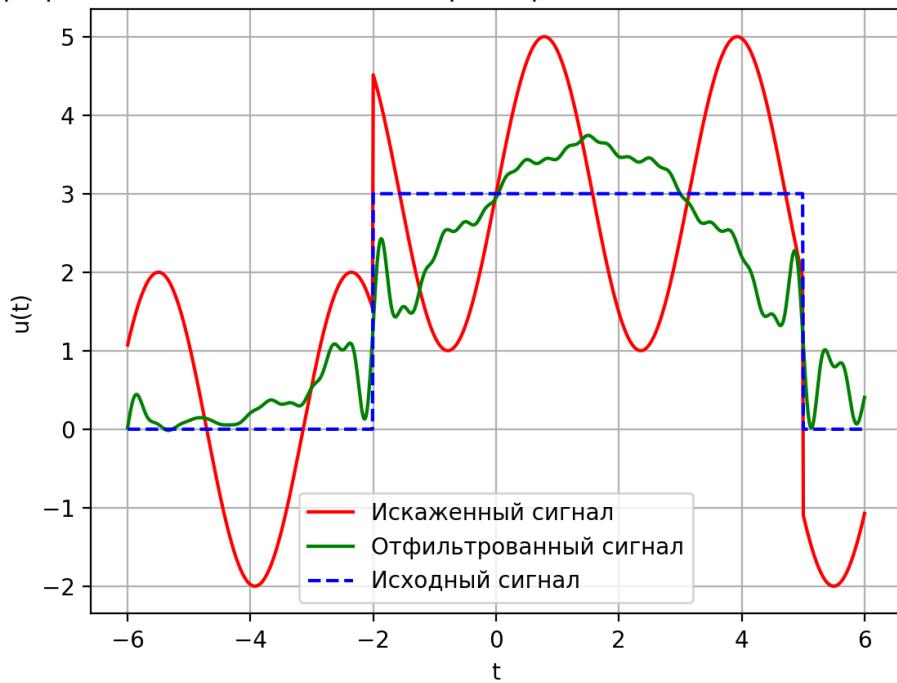
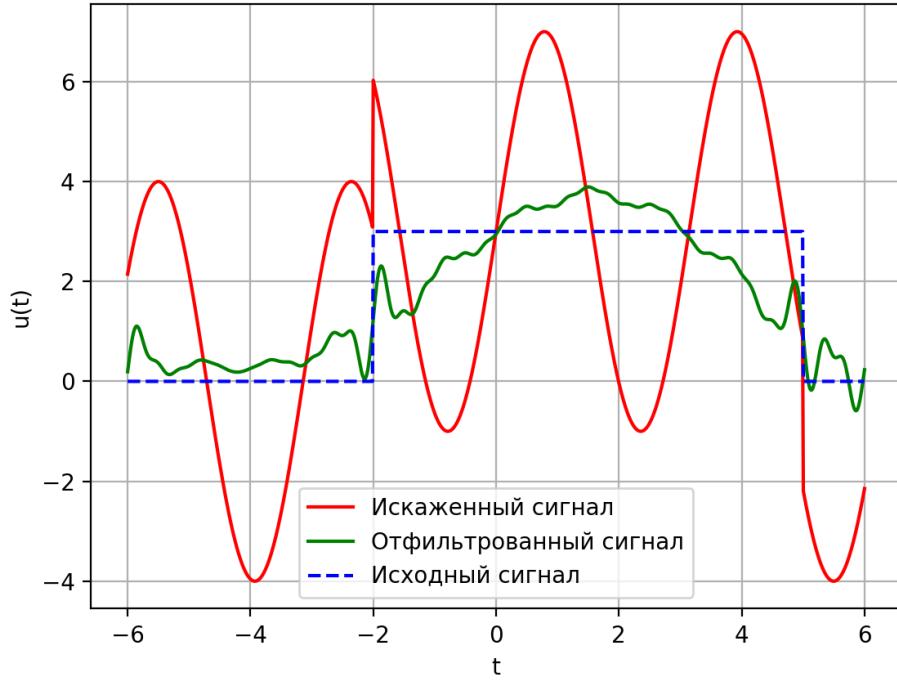
Графики искаженного ($u(t)$), отфильтрованного и исходного сигналовРис. 29: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0$, $c = 2$, $d = 2$ Графики искаженного ($u(t)$), отфильтрованного и исходного сигналовРис. 30: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0$, $c = 4$, $d = 2$



Рис. 31: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 0$, $c = 2$, $d = 4$

Сравнение графиков подтверждает ранее сделанные нами выводы. Так как параметр c оказывает влияние на амплитуду зашумленного сигнала, то у графика отфильтрованного сигнала также увеличиваются значения пиков. Параметр d , в свою очередь, оказывает влияние на частоту зашумленного и отфильтрованного сигнала, так что при увеличении значения этого параметра увеличивается частота отфильтрованного сигнала, и сигнал становится менее слаженным.

1.2.2. Влияние параметра b

Теперь рассмотрим влияние параметра b и разного диапазона частот на фильтрацию. Зафиксируем параметры $c = 4$, $d = 2$ и частоты $\nu_0 \in [0.153, 0.8]$

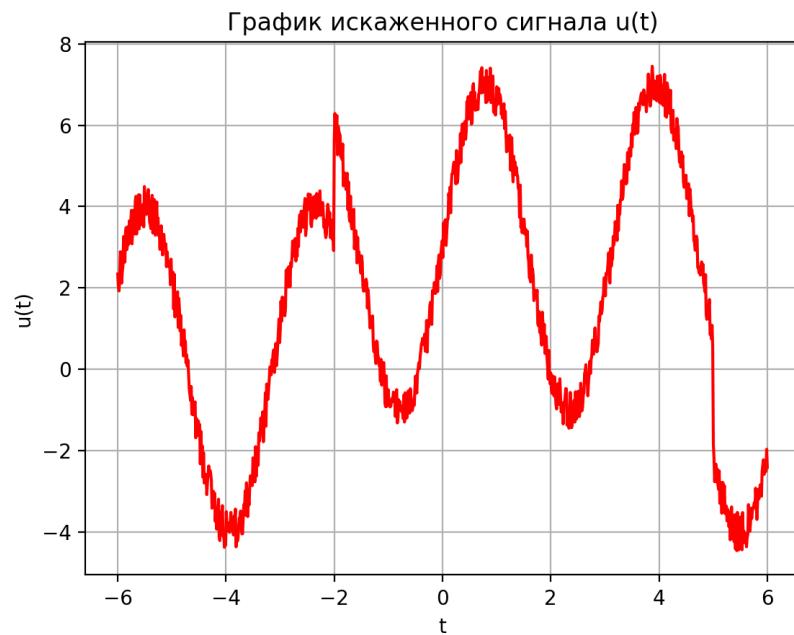
Рис. 32: График функции $u(t)$ при $b = 1, c = 4, d = 2$ Рис. 33: График функции $u(t)$ при $b = 2, c = 4, d = 2$



Рис. 34: График функции $u(t)$ при $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$

Графики подтверждают вывод, сделанный в пункте 1.1. о влиянии параметра b на хаотический шум в зашумленном сигнале. А мы идём дальше к Фурье-образам!

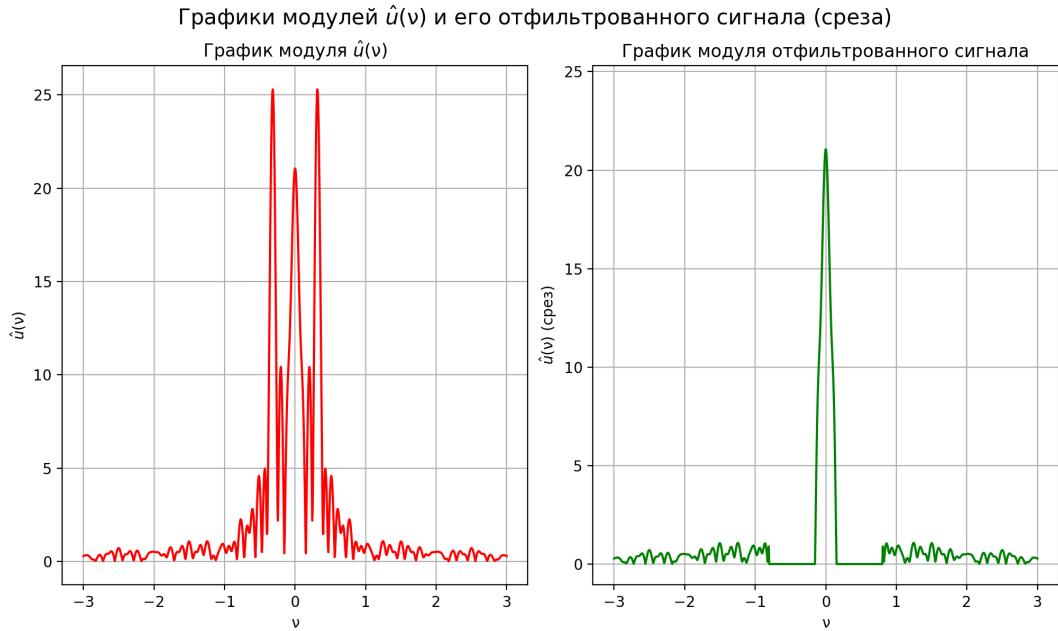


Рис. 35: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 1, c = 4, d = 2$

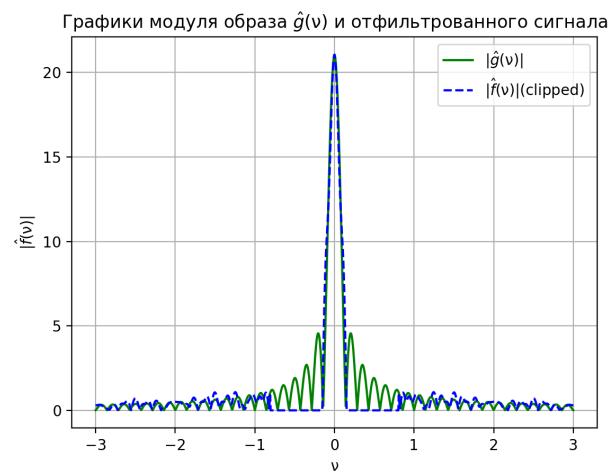


Рис. 36: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 1, c = 4, d = 2$

На графиках можно чётко проследить влияние параметра b на Фурье-образ. При увеличении значения параметра мы видим, что значение модуля при некоторых частотах возрастает, при других — уменьшается. В сравнении с графиками из пункта 1.2.1. заметно появление хаотического шума.

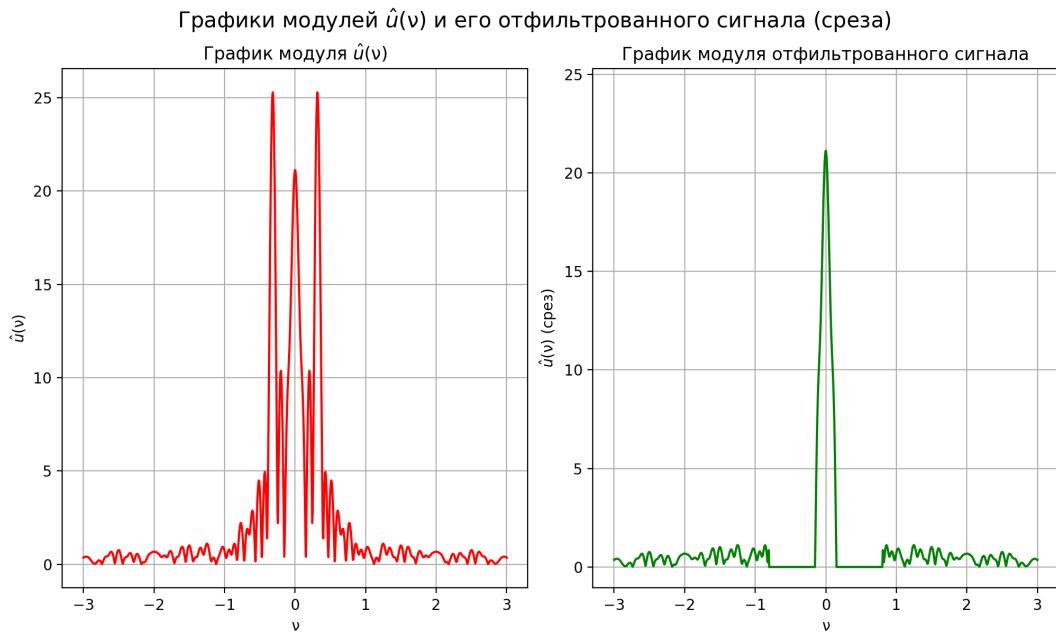


Рис. 37: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2, c = 4, d = 2$

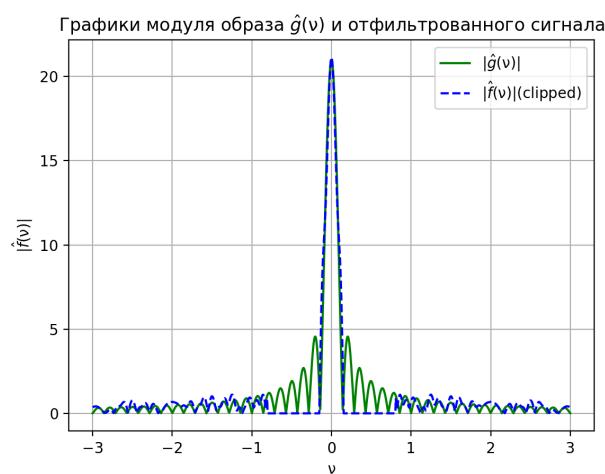


Рис. 38: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2, c = 4, d = 2$

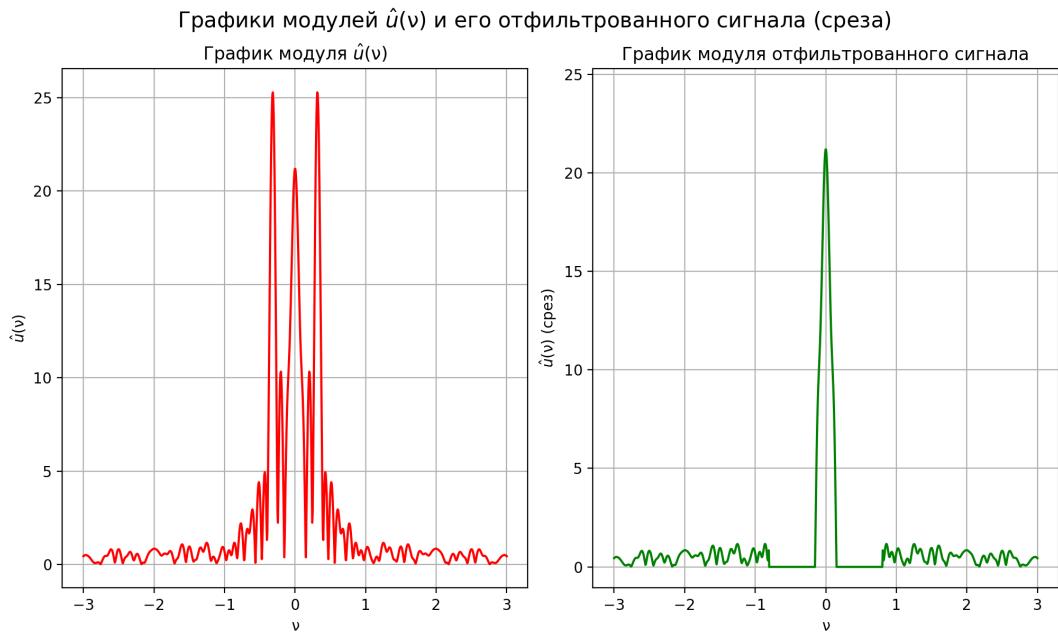


Рис. 39: Графики модулей Фурье-образа $f(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 3, c = 4, d = 2$

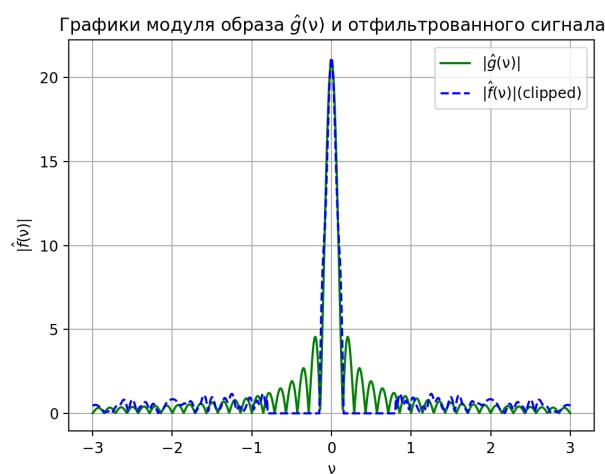


Рис. 40: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 3, c = 4, d = 2$



Рис. 41: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 1$, $c = 4$, $d = 2$



Рис. 42: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$



Рис. 43: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 3$, $c = 4$, $d = 2$

При увеличении b , как говорилось ранее, увеличивается влияние хаотического шума, поэтому при одинаковом фильтрационном интервале отфильтрованный Фурье-образ начинает удаляться по норме от образа исходного сигнала (см. рисунки 36, 38, 40). Это приводит к тому, что у отфильтрованного сигнала увеличиваются значения пиков при одном и том же значении t .

1.2.3. Подбираем правильные частоты среза

Возьмём сигнал с параметрами $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$ из прошлого пункта 1.2.2.. График сигнала представлен на рисунке 33. Нами уже был рассмотрен промежуток $\nu_0 \in [0.153, 0.8]$. Теперь попробуем подобрать частоты таким образом, чтобы максимально приблизить его к исходному сигналу $g(t)$.

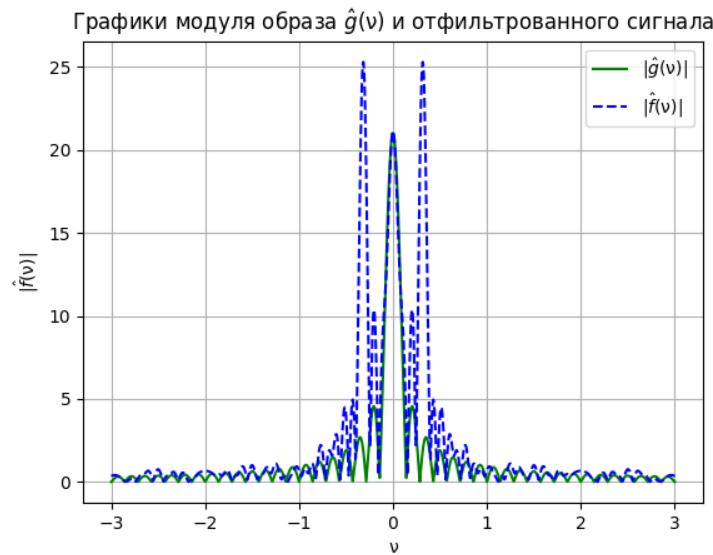


Рис. 44: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и сигнала при $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$

Для начала попробуем более точечнее отфильтровать частоты из уже использованного диапазона. Интервалы частот, которые мы отбросим:

$$\nu_0 \in [0.153, 0.65] \cup [0.72, 0.8044]$$

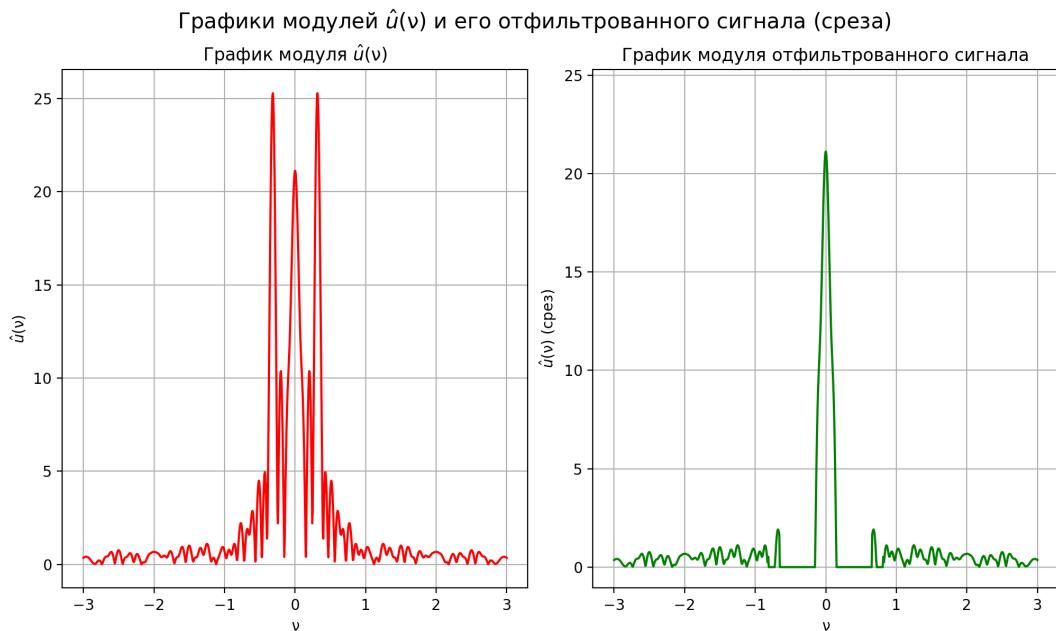


Рис. 45: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$



Рис. 46: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2, c = 4, d = 2$



Рис. 47: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 2, c = 4, d = 2$

Теперь попробуем дополнительно отбросить некоторые высокие частоты. Тогда интервал частот, которые мы отбросим, будут выглядеть следующим образом:

$$\nu_0 \in [0.153, 0.65] \cup [0.72, 0.8044] \cup [1.21, 1.3] \cup [1.922, 2.07] \cup [2.47, 2.67]$$



Рис. 48: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2, c = 4, d = 2$

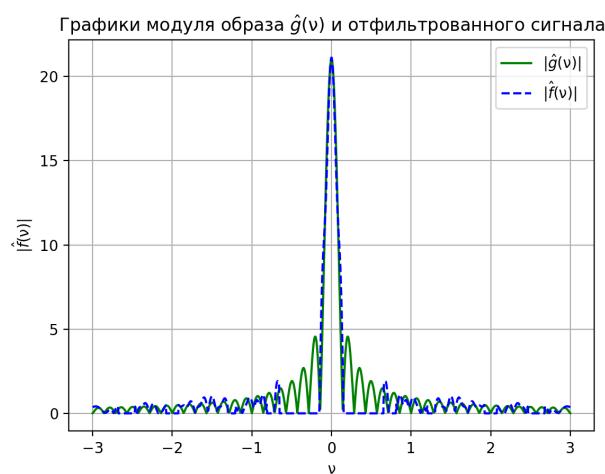


Рис. 49: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $b = 2, c = 4, d = 2$



Рис. 50: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $b = 2$, $c = 4$, $d = 2$

К сожалению, с помощью жёсткой фильтрации нам не удалось добиться того, чтобы отфильтрованный сигнал был бы идентичен или близок к исходному сигналу. Перебрав множество комбинаций интервалов, было решено остановится на интервалах, изображенных на рисунках 42, 47 и 50, так как при них мы смогли добиться наилучших результатов. Стоит отметить, что наиболее сглаженный сигнал был получен при фильтрации 5 интервалов. Однако стоит отметить, что мы не можем выделить наиболее близкого к исходному сигнала, потому что во всех 3 случаях мы получили очень похожие между собой по графику сигналы, которые могут в определённой степени отличаться значениями в один и тот же момент времени, но общая картина остаётся во всех случаях одинаковой.

Жёсткая фильтрация не может эффективно сглаживать искажения, которые одновременно вызваны синусоидальным и хаотическим шумами. Подобная комбинация шумов искажает Фурье-образ таким образом, что его фильтрация только методом исключения определённых диапазонов частот не позволяет качественно избавиться от шумов. Нам приходится отбрасывать слишком много интервалов ради сглаживания шумов, что, в свою очередь, приводит к тому, что мы также исключаем большой диапазон частот, который присутствовал в

оригинальном сигнале. В итоге мы получаем сигнал, имеющий черты исходного, но не являющейся результатом, который мы хотели бы получить.

1.3. Низкие частоты

Возьмём сигнал с параметрами $b = 4$, $c = 2$, $d = 2$, график которого приведён ниже:



Рис. 51: График $u(t)$ при $b = 4$, $c = 2$ и $d = 2$

1.3.1. Частоты, частоты и ещё раз частоты!

В качестве частоты среза будут выступать значения 0.4, 0.6, 1.2, 1.8 Гц. Графики приведены ниже:

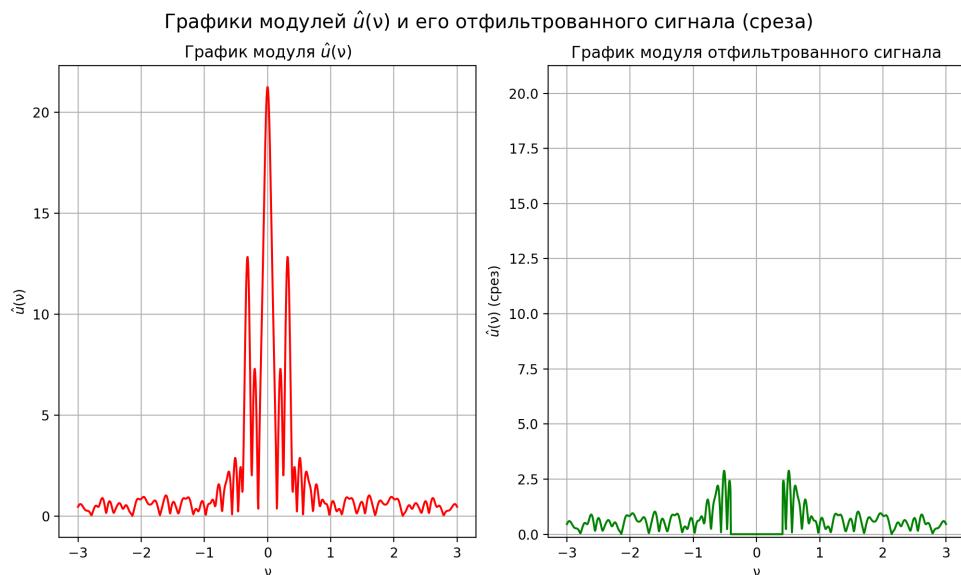


Рис. 52: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 0.4$ Гц

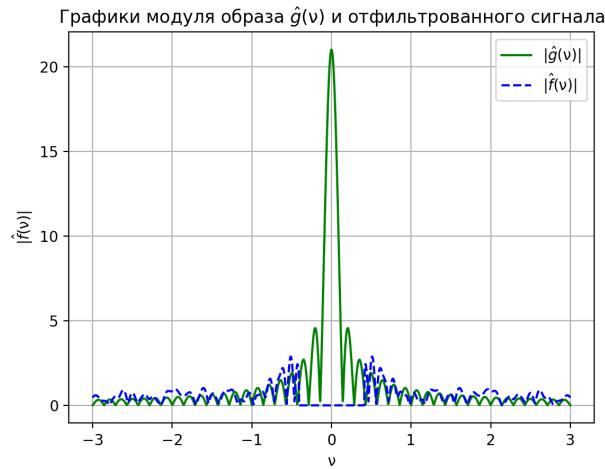


Рис. 53: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 0.4$ Гц

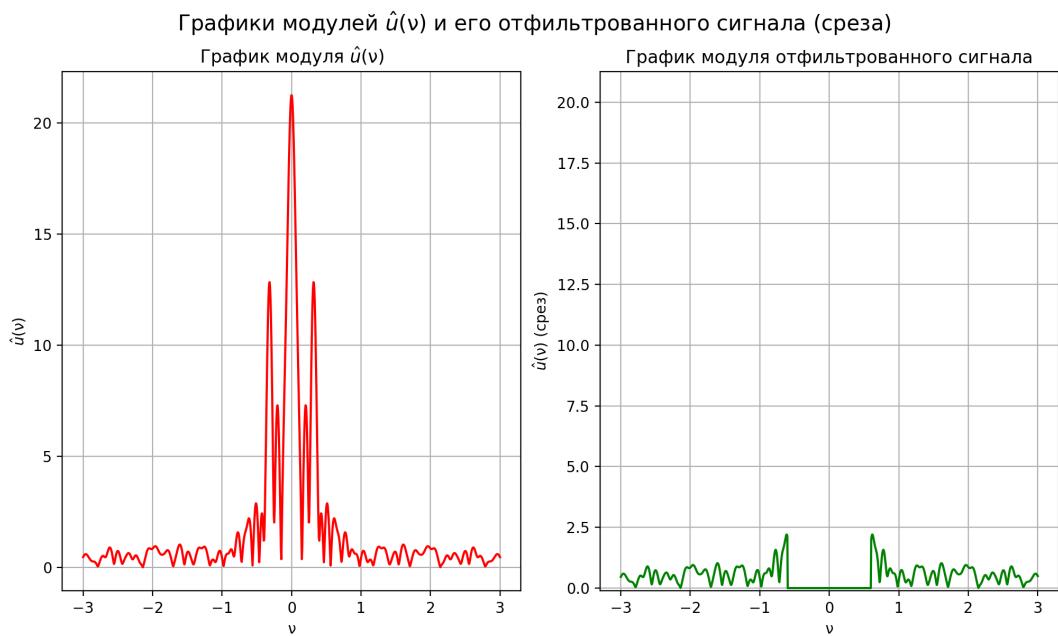


Рис. 54: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 0.6$ Гц



Рис. 55: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 0.6$ Гц

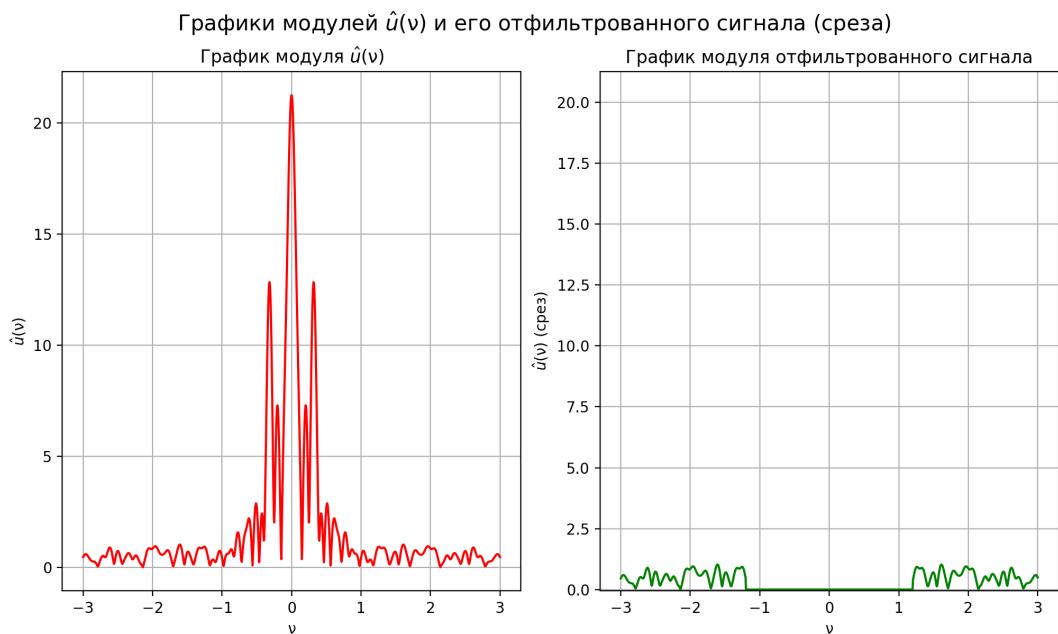


Рис. 56: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 1.2$ Гц

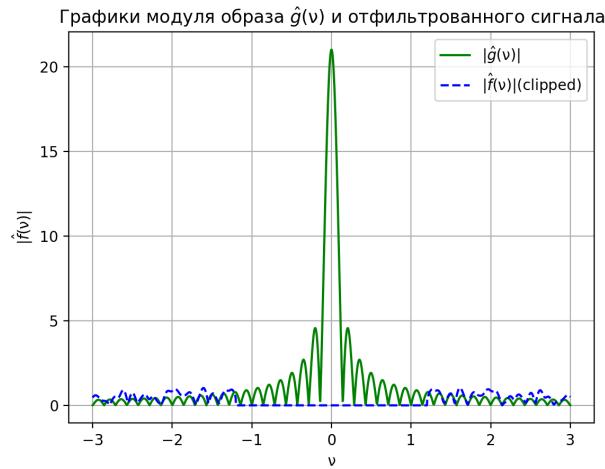


Рис. 57: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 1.2$ Гц

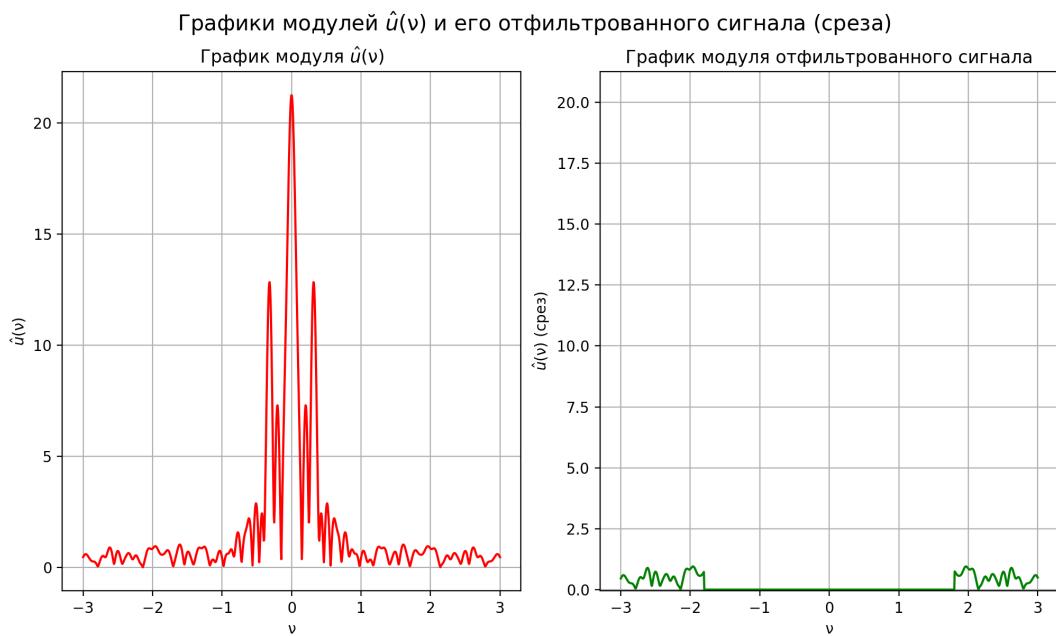


Рис. 58: Графики модулей Фурье-образа $u(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 1.8$ Гц

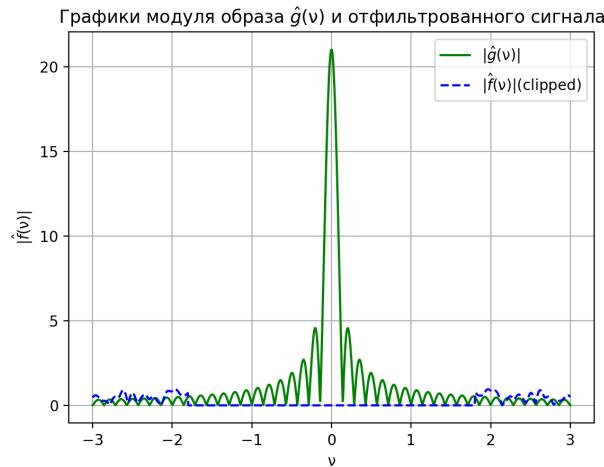


Рис. 59: Сравнительные графики модулей Фурье-образа $g(t)$ и отфильтрованного сигнала при $\nu_0 = 1.8$ Гц

Каждый раз мы берём всё более высокую частоту среза. Посмотрим, как это отразиться на фильтрации:

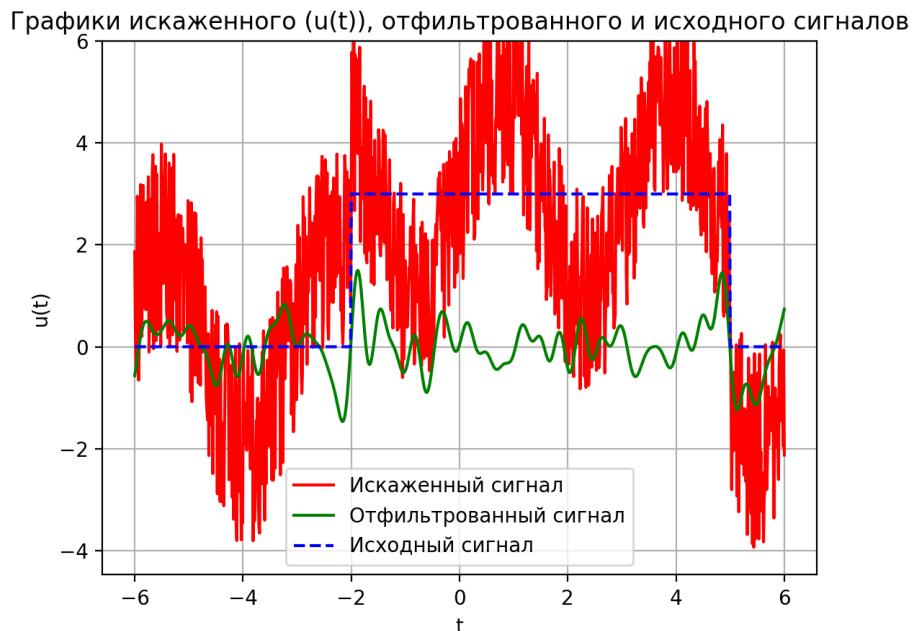


Рис. 60: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $\nu_0 = 0.4$ Гц

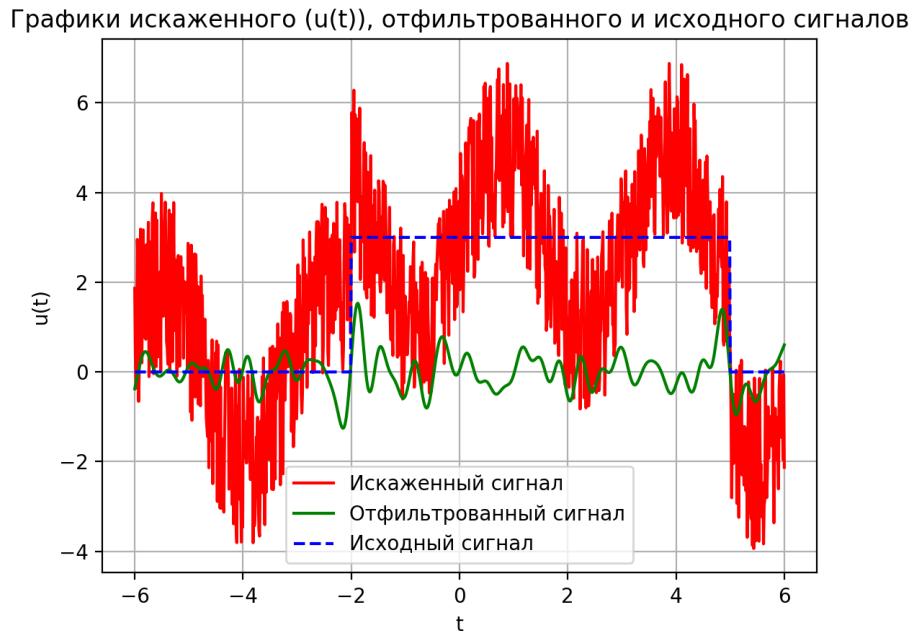
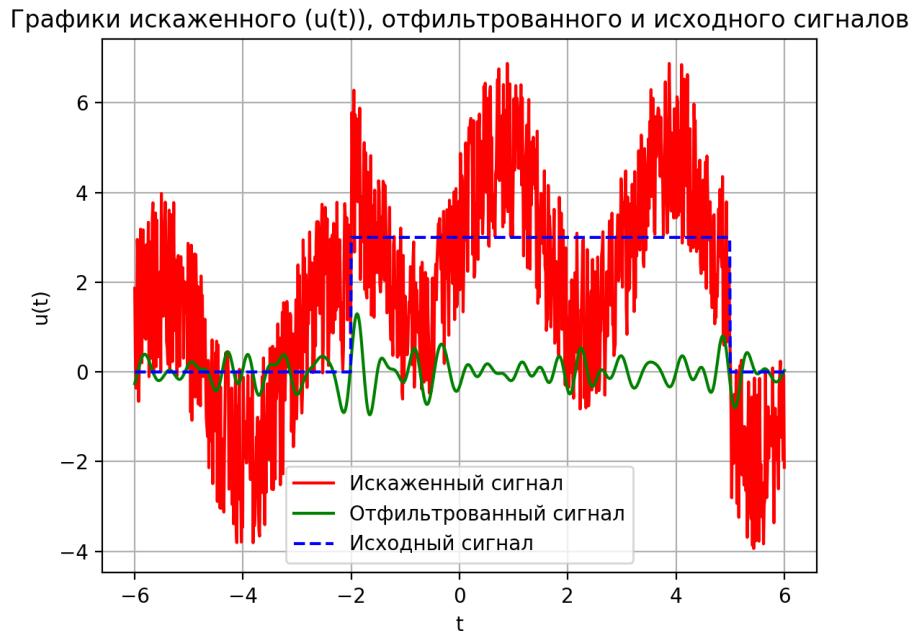
Рис. 61: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $\nu_0 = 0.6$ ГцРис. 62: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $\nu_0 = 1.2$ Гц



Рис. 63: Графики $u(t)$, отфильтрованного и исходного сигналов при $\nu_0 = 1.8$ Гц

Во всех случаях у отфильтрованного сигнала отсутствуют характерные для $g(t)$ скачки в точках разрыва. При увеличении частоты разреза ν_0 колебания сигнала становятся похожими на синусоидальные, хаотический шум становится менее заметным, а амплитуда отфильтрованного сигнала становится меньше.

Это происходит из-за исключения низких частот, которые играют важную роль в исходном сигнале, а при дальнейшем увеличении частоты среза мы оставляем компоненты, вклад которых не столь существенен, поэтому мы получаем графики, частота которых увеличивалась, а амплитуда — уменьшалась.

2. Задание 2. Фильтрация звука