

## Глава 8. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ИЗОБРАЖЕНИЙ

Геометрические преобразования заключаются в пространственном преобразовании положения совокупности пикселей из одной двумерной системы координат в другую. При этом изображение удобно рассматривать в виде прямоугольной сетки раstra (пикселей), заданного в прямоугольной системе координат. При выполнении геометрических преобразований исходное множество пикселей с координатами  $(x, y)$  преобразуется в новое множество (т. е. «сетка» трансформируется пространственно) с координатами  $(x', y')$  и сохранением яркости в этих пикселях. Поскольку цифровое изображение представляет собой дискретное множество, кратко опишем основы геометрических преобразований для непрерывных множеств, а затем адаптируем их для растровых изображений.

При изучении геометрических преобразований плоских изображений (2D) предполагается, что имеются евклидово пространство с ортонормированной декартовой системой координат с взаимно ортогональными осями. Тогда каждому пикселю изображения ставится в соответствие пара  $(x, y)$  декартовых координат: их можно интерпретировать как двумерный вектор  $X$ , представленный отрезком, проведенным из точки  $(0,0)$  до точки  $(x, y)$ .

Двумерные преобразования на плоскости можно интерпретировать как движение точек, соответствующих множеству пикселей. Выделим **линейные преобразования**, представляемые матрицами, т. е. преобразования, при которых новые координаты точки линейно зависят от исходных координат этой точки следующим образом:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{T}\mathbf{x}. \quad (8.1)$$

Для удобства матричного описания и комбинирования геометрических преобразований в 2D-плоскости используется формализм, называемый однородными координатами. Точки плоскости описываются трехмерными векторами вида  $(x, y, 1)$ , а преобразование – в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ w' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ w \end{pmatrix}. \quad (8.2)$$

К линейным преобразованиям можно отнести кусочно-линейные, т. е. такие, при которых изображение разбивается на части, к каждой из которых применяются разные линейные преобразования.

**Нелинейные преобразования:** полиномиальные (посредством полиномиальных функций), синусоидальные преобразования и т. п. в данном издании не рассматриваются.

## 8.1. Аффинные преобразования

Основные типы **аффинных преобразований** и их матричные представления показаны на рис. 8.1.

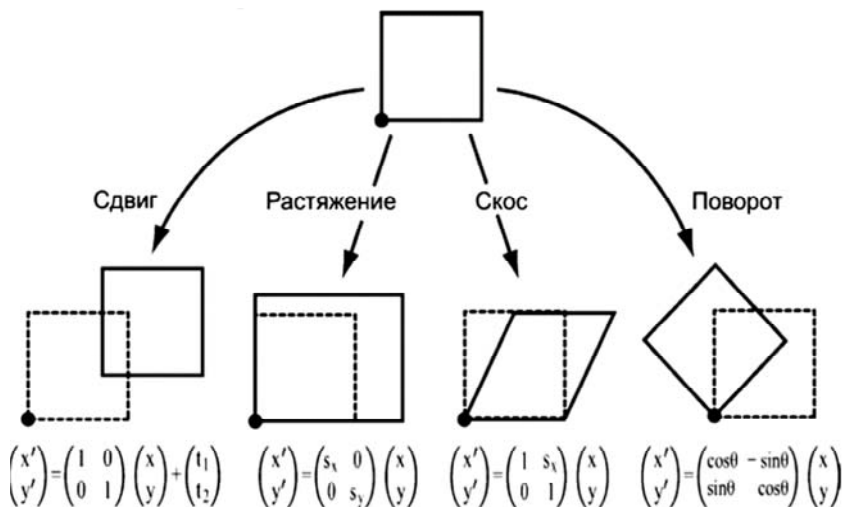


Рис. 8.1. Базовые преобразования аффинного типа

В общем виде любое аффинное преобразование на плоскости описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}x' &= ax + bx + c; \\y' &= dx + ey + f,\end{aligned}\tag{8.3}$$

или в матричном виде

$$\begin{aligned}x' &= Ax + c; \\x' &= \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}; \\A &= \begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}; \\c &= \begin{pmatrix} c \\ f \end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{8.4}$$

В однородных координатах это преобразование можно описать одной матрицей  $T$  или

$$\begin{vmatrix} x' & y' & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ x'_0 & y'_0 & 1 \end{vmatrix}.\tag{8.5}$$

Опишем параметры базовых аффинных преобразований (масштабирование, поворот, перенос, отражение относительно оси).

### ***8.1.1. Сдвиг изображения***

Сдвиг задается соотношениями

$$\begin{aligned}x' &= x + c; \\y' &= y + f.\end{aligned}\tag{8.6}$$

Матрица сдвига имеет вид

$$\mathbf{T}_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{8.7}$$

### 8.1.2. Отражение изображения относительно оси

Отражение относительно оси абсцисс задается формулами:

$$\begin{aligned}x' &= x; \\ y' &= -y.\end{aligned}\tag{8.8}$$

Матрица отражения имеет вид

$$T_{af} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{8.9}$$

### 8.1.3. Масштабирование изображения

Преобразование задается в виде:

$$\begin{aligned}x' &= \alpha x, \quad \alpha > 0; \\ y' &= \beta y, \quad \beta > 0.\end{aligned}\tag{8.10}$$

В однородных координатах матрица преобразования имеет вид:

$$T_{af} = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{8.11}$$

Не обязательно  $\alpha = \beta$ . Если  $\alpha$  и  $\beta$  меньше единицы, изображение уменьшается, если больше единицы – увеличивается. При увеличении изображения количество пикселей возрастает, появляются новые с неопределенным значением яркости. Их значения вычисляются путем интерполяции, т. е. локальными методами, описанными ниже.

### 8.1.4. Скос изображения

Скос вдоль оси  $OX$  описывается формулами

$$\begin{aligned}x' &= x + sy; \\ y' &= y.\end{aligned}\tag{8.12}$$

Матрица преобразования в однородных координатах имеет вид:

$$T_s = \begin{bmatrix} 1 & s & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{8.13}$$

### 8.1.5. Поворот изображения

Поворот вокруг начала координат на угол  $\varphi$  описывается формулами:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi - y \sin \varphi; \\ y' &= x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}\tag{8.14}$$

Матрица вращения в однородных координатах имеет вид

$$T_{af} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.\tag{8.15}$$

Отметим, что при повороте на  $90^\circ$   $\cos \varphi = 0$ ,  $\sin \varphi = 1$ , поэтому

$$\begin{aligned}x' &= -y; \\ y' &= x.\end{aligned}\tag{8.16}$$

При повороте изображения координаты пикселя могут принять нецелые значения и их округляют до целого. Это создает в повернутом изображении пиксели с неопределенной яркостью. На рис. данные пиксели отмечены черными точками.

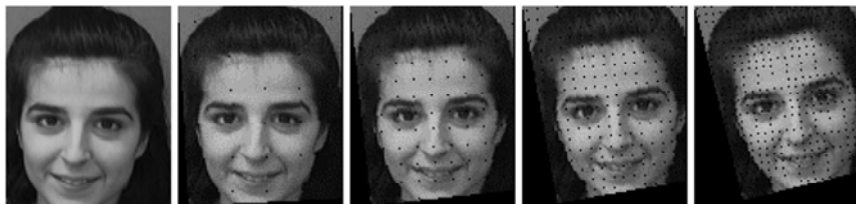


Рис. 8.2. Изображение, повернутое на 3, 6, 10, 14° вокруг верхнего левого угла.  
В черных пикселях яркость не определена

Пикселям с неопределенной яркостью можно присвоить, например, значение яркости ближайшего пикселя. Альтернативой является поворот посредством выполнения трех операций сдвига вдоль оси  $OX$ , затем  $OY$  и еще раз вдоль  $OX$ . Матрица вращения описывается в виде декомпозиции трех матриц:

$$R(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{tg} \alpha / 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sin \alpha & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & -\operatorname{tg} \alpha / 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (8.17)$$

После каждой операции сдвига выполняется округление координат до целых значений.

Произвольное аффинное преобразование можно записать в виде композиции последовательно выполняемых простейших преобразований означенного вида. Суперпозиция аффинных преобразований также является аффинным преобразованием. Преимущество суперпозиции: сложное преобразование изображения можно описать шестью параметрами, вычисленными один раз, и применить к координатам всех пикселей.

Любое аффинное преобразование имеет **обратное**, которое также является аффинным. Произведение прямого и обратного преобразований дает **единичное преобразование**, оставляющее все точки на месте.

### Свойства аффинных преобразований:

сохраняются прямые линии;

сохраняются отношения длин отрезков, лежащих на одной прямой (или на параллельных прямых);

сохраняются отношения площадей фигур;

параллельные прямые переходят в параллельные.

Множество аффинных преобразований образует **аффинную группу**. Отметим, что аффинная группа является подгруппой проективной группы преобразований, а евклидова группа – частным случаем аффинной группы, и они формируют следующую иерархию:

**евклидово преобразование  $\subset$  аффинное  $\subset$  проективное преобразование**

## 8.2. Проективные преобразования

Общими линейными преобразованиями  $T$  в однородных координатах описывается группа проективных преобразований:

$$\begin{pmatrix} \bar{x}' \\ \bar{y}' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.18)$$

При представлении в обычных координатах соотношение (8.18) будет иметь нелинейный вид:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{t_{11}x + t_{12}y + t_{13}}{t_{31}x + t_{32}y + t_{33}}; \\ y' &= \frac{t_{21}x + t_{22}y + t_{23}}{t_{31}x + t_{32}y + t_{33}}. \end{aligned} \quad (8.19)$$

В общем случае проективные преобразования не сохраняют параллельности линий. Свойством, сохраняющимся при проективном преобразовании, является **коллинеарность** точек: три точки, лежащие на одной прямой (т. е. коллинеарные), после преобразования остаются лежать на одной прямой.

Проективное преобразование связано с отображением трехмерной визуальной информации на двумерную плоскость. С математической точки зрения мир удобно рассматривать как трехмерное проективное пространство  $P^3$ , а плоскость изображения, включенную в проективное пространство, – размерности два  $P^2$ . Точки на трехмерной сцене и на изображении представляются в проективных пространствах как векторы в однородных координатах. Проективное преобразование из  $P^3$  в  $P^2$  (перспективная проекция), отображающее евклидову точку сцены

$$p = (X, Y, Z)^t$$

в точку изображения

$$x = (x, y)^t$$

и выраженное в однородных координатах, задается в виде

$$\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{w} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} wx \\ wy \\ w \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} WX \\ WY \\ WZ \\ W \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & p_{14} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & p_{24} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \\ \bar{Z} \\ \bar{W} \end{pmatrix}. \quad (8.20)$$

Изображения на рис.8.3, б и в получены следующими проективными преобразованиями:

$$x' = \frac{1,1x + 0,35y}{0,00075x + 0,0005y + 1}, \quad y' = \frac{0,2x + 1,1y}{0,00075x + 0,0005y + 1}$$

и

(8.21)

$$x' = \frac{1,1x - 0,2y}{0,00075x + 0,00005y + 1}, \quad y' = \frac{0,1x + 0,9y}{0,00075x + 0,00005y + 1}.$$



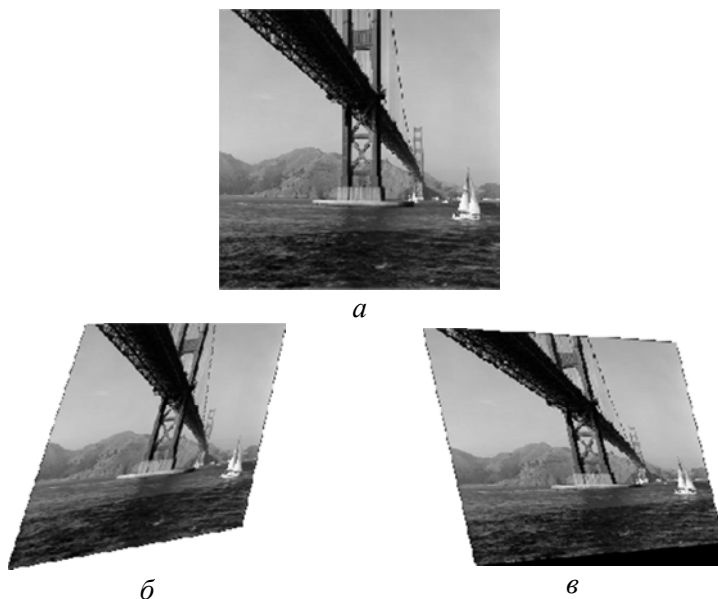


Рис. 8.3. Изображения: *a* – исходное изображение; *б* и *в* – два варианта его проективного преобразования

Однородные координаты векторов проективного пространства  $(\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, W)^t$  и проективной плоскости  $(\bar{x}, \bar{y}, w)^t$  соотносятся с неоднородными (евклидовыми) координатами векторов  $p$  и  $x$  следующим образом:

$$p = (\bar{X}/W, \bar{Y}/W, \bar{Z}/W)^t \quad \text{и} \quad x = (\bar{x}/w, \bar{y}/w)^t. \quad (8.22)$$

Изображение объектов на снимке, сформированном регистрирующей камерой, связано с проектированием при помощи пучка прямых, поскольку каждая 2D-точка является проекцией множества 3D-точек вдоль некоторого направления (луча проектирования) в плоскость снимка.

При рассмотрении геометрических преобразований использована идеальная модель камеры. В действительности формирование изображений сопровождается различными нелинейными искажениями.

ями (типа оптической дисторсии линзы). Приведение снимков к реальному представлению можно выполнить нелинейной функцией геометрического преобразования. Для этого используют полиномиальную аппроксимирующую функцию преобразования:

$$\begin{aligned}x' &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + \dots + a_px^m; \\y' &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2 + \dots + b_py^m,\end{aligned}\tag{8.23}$$

где  $(x, y)$  – координаты точек идеального изображения,  
 $(x', y')$  – соответствующие им координаты на его проекции.

Полиномиальная аппроксимирующая функция преобразования для снимка на рис. 8.4 принимает вид

$$\begin{aligned}x' &= 0,1x + 0,9y + 0,002xy, \\y' &= 0,2x + 1,1y + 0,0022xy.\end{aligned}\tag{8.24}$$



Рис. 8.4. Билинейное геометрическое преобразование снимка с параметрами преобразования (8.2)

### 8.3. Уточнение координат и яркости пикселей после преобразования

После поворота или увеличения изображения часто возникает задача уточнения новых координат пикселей (на рис. 8.5 показаны серым) в целочисленной системе координат. Она решается путем округления координат пикселей до целых значений и двумерной интерполяции

значений яркости в неопределенных пикселях. Наиболее простой является интерполяция методом ближайшего соседа, где значения координат округляются до ближайших точек дискретного растра.

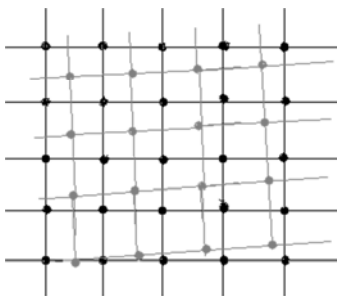


Рис. 8.5. Несовпадение координат пикселей (выделены серым фоном) дискретной целочисленной системой координат

Алгоритм ближайшего соседа присваивает неопределенному пикселю яркость ближайшего после геометрического преобразования с неокругленными координатами.

Методы увеличения изображений помимо «растяжения» пиксельной сетки требуют интерполяционного вычисления яркости дополнительных пикселей. Эти методы можно разделить на две группы: с произвольным и двукратным увеличением (метод zoom).

Отметим, что при уменьшении изображения его качество практически не меняется при использовании разных методов интерполяции, поэтому можно использовать простые методы.

## **8.4. Геометрическая коррекция изображений**

### **8.4.1. Построение мозаики из изображений**

Как можно использовать геометрические преобразования? Рассмотрим задачу построения мозаики из двух изображений. Мозаика или сшивка – это объединение двух или более изображений в единое. Пусть два изображения получены путем сканирования по частям одного большого рисунка (рис. 8.6). Обязательное условие: на обоих изображениях частично присутствуют одни и те же объекты, т. е. изображения имеют области перекрытия.



Рис. 8.6. Пример сканирования документа большого размера

Системы координат двух изображений будут различаться из-за разного ракурса съемки, вращения камеры и движения самого фотографируемого объекта. Для изображений, представленных на рис. 8.6, освещение, расстояние до камеры, оптика одинаковые, поэтому основной задачей обработки таких изображений является приведение изображений в общую систему координат. Если изображения регистрировались в разное время, необходимо учесть изменения яркости, возникающие из-за изменения освещения, сезонных и суточных изменений, использования другой камеры.

Рассмотрим задачу нахождения такого пространственного преобразования, которое позволяет преобразовать пиксели обоих изображений, представленных на рис. 8.7, в единую систему координат таким образом, чтобы точки, соответствующие одинаковым объектам на двух изображениях, совпали. Для упрощения в качестве общей системы координат можно использовать систему левого изображения, тогда требуется найти преобразование координат всех пикселей второго изображения  $(x, y)$  в общую систему координат  $(x', y')$ . Для упрощения задачи считаем, что в процессе регистрации не произошло искривление прямых линий, а лишь аффинные трансформации (поворот, сдвиг). Аффинные преобразования являются подмножеством полиномиальных преобразований первого порядка и описываются двумя уравнениями:

$$x' = a_0 + a_1x + a_2y; \quad (8.25)$$

$$y' = b_0 + b_1x + b_2y.$$

На обоих изображениях можно интерактивно выбрать или найти с помощью специальных методов пиксели, соответствующие одинаковым объектам (рис. 8.7).



Рис. 8.7. Соответствующие точки

Обозначим через  $(x_i, y_i)$  координаты таких точек на правом изображении в системе координат этого изображения,  $(x'_i, y'_i)$  – координаты в системе координат левого изображения. Эти координаты известны (точки заданы или вычислены), коэффициенты  $a_0$ – $a_2$ ,  $b_0$ – $b_2$  неизвестны. Для решения задачи вычисления коэффициентов  $a_0$ – $a_2$ ,  $b_0$ – $b_2$  аффинного преобразования минимальное количество общих точек  $n = 3$ . Если задать больше точек, то необходимо минимизировать ошибки их задания, которые неизбежны в силу неточного задания и округления координат до целых значений.

Итак, имеем 6 неизвестных, для их поиска требуются три пары точек с известными координатами до и после трансформации  $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3)$  и  $(x'_1, y'_1); (x'_2, y'_2); (x'_3, y'_3)$ . Подставив координаты  $(x, y)$  в уравнение (8.25), получим три пары уравнений с неизвестными  $a_i$  и  $b_i$ :

$$\begin{aligned}
x'_1 &= a_0 + a_1 x_1 + a_2 y_1, & y'_1 &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1, \\
x'_2 &= a_0 + a_1 x_2 + a_2 y_2, & y'_2 &= b_0 + b_1 x_2 + b_2 y_2, \\
x'_3 &= a_0 + a_1 x_3 + a_2 y_3, & y'_3 &= b_0 + b_1 x_3 + b_2 y_3.
\end{aligned} \tag{8.26}$$

В матричной форме это выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}; \\
\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.27}$$

Для вычисления коэффициентов  $a_i$  и  $b_i$  каждая часть матричного уравнения должна быть умножена на обратную матрицу с коэффициентами, например для  $a_i$ :

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}. \tag{8.28}$$

В матричной форме коэффициенты вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}; \\
\begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{8.29}$$

Полученный набор коэффициентов подставляется в исходные уравнения (8.25), и новые координаты вычисляются для каждого пиксела второго изображения. Осталось определить, какую часть второго изображения необходимо «пришить» к первому.

К полученному изображению можно «пришивать» справа и снизу другие изображения. Результирующее изображение представлено на рис. 8.8.



Рис. 8.8. Пример мозаики из двух изображений

При фотографировании больших объектов можно делать фотографии по частям, а затем выполнить сшивку полученных изображений. Пример обработки панорамных фотографий приведен на рис. 8.9. Таким же образом была создана панорама г. Праги из 2600 снимков. В результате получено изображение размером  $260\,000 \times 130\,000$  пикселей. Если его распечатать с разрешением 150DPI, получится фотография длиной почти 40 м.



Рис. 8.9. Пример сшивки из двух фотографий одного объекта

### 8.4.2. Коррекция проективных искажений

Проективное преобразование описывается уравнениями:

$$\begin{aligned}
 u_1 &= \frac{a_{01}x_1 + a_{10}x_2 + a_{00}}{c_{01}x_1 + c_{10}x_2 + 1}; \\
 u_2 &= \frac{b_{01}x_1 + b_{10}x_2 + b_{00}}{c_{01}x_1 + c_{10}x_2 + 1},
 \end{aligned}
 \tag{8.30}$$



где  $x_1$  и  $x_2$  — точки идеального изображения,

$u_1$  и  $u_2$  — точки проективно искаженного изображения.

При коррекции перспективных искажений исходное изображение одно. На корректируемом изображении интерактивно задаются концы вертикальных и горизонтальных отрезков; посредством решения системы линейных уравнений вычисляются неизвестные параметры  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$ . Исходное изображение трансформируется так, чтобы отмеченные отрезки стали вертикальными и горизонтальными.

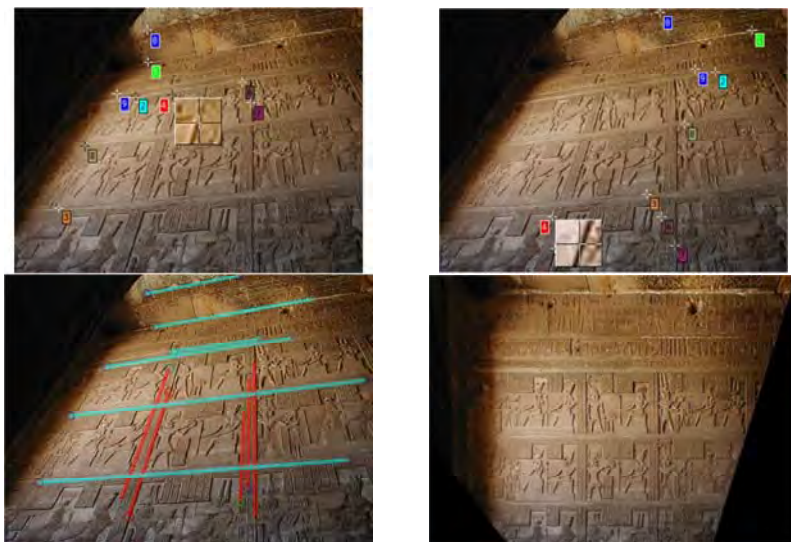


Рис. 8.10. Пример перспективной коррекции изображения

## 8.5. Нелинейная геометрическая коррекция

### 8.5.1. Общий подход к вычислению параметров преобразования

Не всегда задачу можно решить с помощью линейных преобразований. Нелинейные преобразования (второго и более порядка) помогают корректировать нелинейные искажения изображения, возникшие в процессе его регистрации (рис. 8.11).



Рис. 8.11. Примеры некоторых нелинейных преобразований

Преобразования второго порядка могут быть использованы для преобразования данных из географической системы координат (широта, долгота) в прямоугольную, преобразования данных больших областей (для учета кривизны Земли), точной привязки искаженных по той или иной причине данных (например, из-за искажений линз камеры, плохо отсканированных материалов) и т. д.

Способ решения задачи трансформации аналогичен предыдущему и сводится к нахождению коэффициентов системы уравнений. В случае полиномиального преобразования 2-й степени система уравнений выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} x' &= a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2; \\ y' &= b_0 + b_1x + b_2y + b_3x^2 + b_4xy + b_5y^2, \end{aligned} \quad (8.31)$$

где  $x, y$  – координаты точек в одной системе координат (известны);

$x', y'$  – координаты этих точек в другой системе координат (известны);

$a_0$ – $a_5, b_0$ – $b_5$  – коэффициенты преобразования (неизвестны).

В данном случае минимально необходимо знать координаты шести пар соответствующих точек до и после трансформации  $(x_1, y_1); (x_2, y_2); (x_3, y_3); (x_4, y_4); (x_5, y_5); (x_6, y_6)$  и  $(x'_1, y'_1); (x'_2, y'_2); (x'_3, y'_3); (x'_4, y'_4); (x'_5, y'_5); (x'_6, y'_6)$ .

Подставим их в (8.31), перегруппируем и вычислим 12 неизвестных  $a_i$  и  $b_i$ :

$$\begin{aligned} x'_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_1 + a_3x_1^2 + a_4x_1y_1 + a_5y_1^2; \\ &\dots \\ x'_6 &= a_0 + a_1x_6 + a_2y_6 + a_3x_6^2 + a_4x_6y_6 + a_5y_6^2; \end{aligned} \quad (8.32)$$

$$\begin{aligned}
y'_1 &= b_0 + b_1 x_1 + b_2 y_1 + b_3 x_1^2 + b_4 x_1 y_1 + b_5 y_1^2; \\
&\dots \\
y'_6 &= b_0 + b_1 x_6 + b_2 y_6 + b_3 x_6^2 + b_4 x_6 y_6 + b_5 y_6^2.
\end{aligned} \tag{8.33}$$

Запишем эти уравнения для поиска  $a_i$  в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x'_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_6 \end{bmatrix}. \tag{8.34}$$

В матричной форме коэффициенты  $a_0$ – $a_5$ ,  $b_0$ – $b_5$  вычисляются по формулам

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x'_6 \end{bmatrix}; \tag{8.35}$$

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ b_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_6 & y_6 & x_6^2 & x_6 y_6 & y_6^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} y'_1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ y'_6 \end{bmatrix}.$$

Полученный набор коэффициентов подставляется в исходные уравнения (8.31) для пересчета координат всех пикселей. Сначала нужно определить размер нового изображения, найдя минимум и максимум координат углов исходных изображений в единой системе координат. Как правило, пиксели левого изображения переносятся с теми же координатами, а правого – с учетом уравнений (8.31), т. е. новые координаты вычисляются для каждого пиксела второго изображения.

Преобразования более высоких порядков могут быть использованы для корректировки более сложных типов искажений, например при сшивке снятых с самолета изображений горной местности.

Для вычисления параметров преобразований высших порядков требуется большее количество контрольных точек. Минимальное количество пар соответствующих точек для преобразования  $t$ -го порядка вычисляется по формуле

$$\frac{((t+1)(t+2))}{2}. \quad (8.36)$$

### 8.5.2. Коррекция дисторсии

При фотографировании на изображении может возникнуть оптическое искривление, которое называется дисторсия.

**Дисторсия** – это аберрация оптических систем, при которой линейное увеличение изменяется по полю зрения. Световые лучи проходят через центр линзы и сходятся в точке, расположенной дальше от линзы, чем лучи, которые проходят через ее края (рис. 8.12).

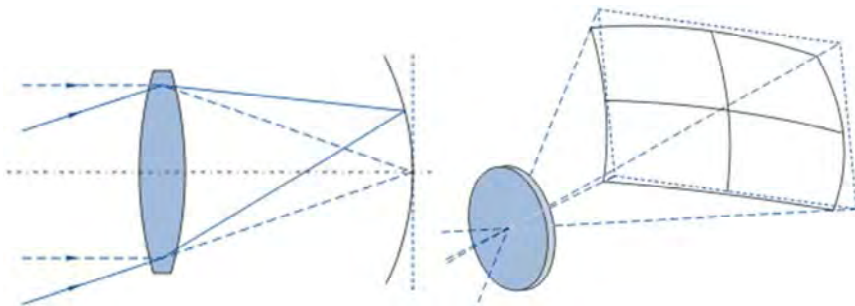


Рис. 8.12. Порождение дисторсии оптическими искажениями

Дисторсия не нарушает резкость и яркость изображения, но вносит искажение в его форму. Прямые линии изображаются кривыми, кроме тех, которые лежат в одной плоскости с оптической осью. Например, изображение квадрата, центр которого пересекает оптическая ось, имеет вид подушки (подушкообразная дисторсия) при положительной дисторсии у широкоугольных объективов при съемке на максимальном фокусном расстоянии и вид бочки (бочкообразная дисторсия) при отрицательной дисторсии при съемке телеобъективом на минимальном фокусном расстоянии (рис. 8.13). Это наиболее распространенные варианты дисторсии оптических систем фотоаппаратов с осевой симметрией.

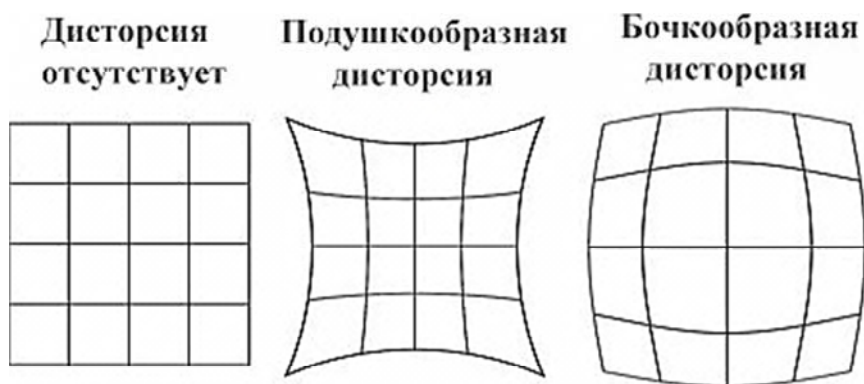


Рис. 8.13. Основные варианты дисторсии фотообъективов

Дисторсия объектива может быть скорректирована оптически за счет особой конструкции объектива, использования асферических линз либо программно. Как правило, такая дисторсия имеет осевую симметрию, это значит, что горизонтальная и вертикальная оси, проходящие через центр изображения, не искажены.

Если искривление присутствует в цифровом изображении, его программно можно исправить методом, описанным ниже.

Будем считать, что центр системы координат находится в центре изображения. Пусть  $\vec{r} = (y, z)$  – вектор, задающий две координаты в плоскости, расположенной перпендикулярно оптической оси (координата  $x$  вдоль оси сюда не входит).

Для идеального изображения все лучи, вышедшие из точки с координатами  $\vec{r}$  и прошедшие через оптическую систему, попадут в точку изображения с координатами  $\vec{R}$ , которые определяются по формуле

$$\vec{R} = b_0 \vec{r}, \quad (8.37)$$

где  $b_0$  – коэффициент линейного увеличения.

Если присутствует дисторсия третьего порядка (для осесимметричных оптических систем бывает только нечетных порядков: третьего, пятого, седьмого и т. д.), тогда лучи из  $\vec{r}$  попадут в

$$\vec{R} = b_0 \vec{r} + F_3 r^2 \vec{r}, \quad (8.38)$$

где  $r$  – длина  $\vec{r}$ ,

$F_3$  – дисторсия третьего порядка, которая обычно вносит наибольший вклад в искажение формы;

если  $F_3$  имеет тот же знак, то и  $b_0$ , возникает «подушка», в противном случае – «бочка».

Для вычисления параметров корректирующего преобразования используют, например, изображение регулярной сетки и ее искривленные изображения (рис. 8.14). На них выбирают пары соответствующих точек, по координатам которых вычисляются неизвестные коэффициенты  $b_0$  и  $F_3$ .

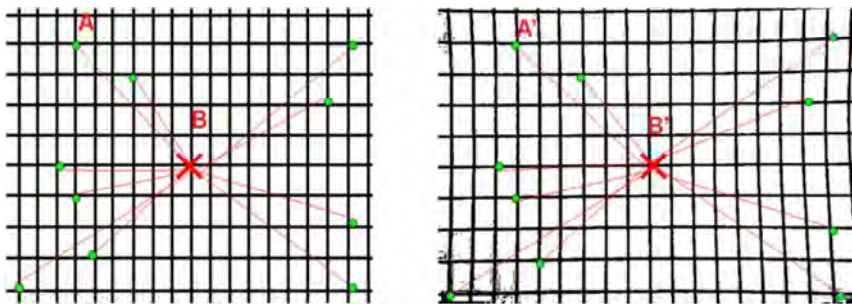


Рис. 8.14. Изображение сетки без искажений (слева) и ее фотография мобильным телефоном Nokia 6103 (справа) с соответствующими точками

Этим же преобразованием изменен рис. 8.15.



Рис. 8.15. Примеры двух видов дисторсии и исправленное изображение