лицевых примитивов, полностью попадающих в окно видимости, вместе с атрибутами их освещенности передается на этап растеризации.

Обзор операций, образующих конвейер рендеринга, показывает, что значительное место среди них составляют геометрические преобразования. Они применяются при определении положения объектов в отдельности и сцены в целом, а также в процессе отсечения объектов и нахождения их образов на картинной плоскости.

2 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА ПЛОСКОСТИ

2.1 Аффинные преобразования

Под компьютерной графикой на плоскости, или двумерной компьютерной графикой понимают отображение на экране плоских, то есть двумерных объектов. В двумерной графике нет необходимости в операциях проецирования и наложения теней, так как объект плоский и расположен в одной плоскости – плоскости экрана. К геометрическим преобразованиям плоских объектов относятся сдвиг, поворот, масштабирование и отражение в плоскости экрана. Эти преобразования относятся к так называемым аффинным преобразованиям.

Напомним, что аффинной (общей декартовой) системой координат называется декартова система координат, в которой единицы масштаба (единицы отсчета) на координатных осях в общем случае различны.

Если в плоскости введены две аффинные системы координат, то преобразование, ставящее в соответствие точке P в одной системе координат точку P^* во второй системе координат и притом такую, которая во второй системе координат имеет такие же координаты, как и точка P в первой системе координат, называется аффинным. Аффинные преобразования сохраняют прямолинейность и параллельность линий, углы между ними, а также функциональные зависимости между параметрами геометрических фигур.

В компьютерной графике обычно применяются декартовы прямоугольные системы координат. В них точка на плоскости описывается парой координат x, y. При наличии в плоскости нескольких координатных систем перевод точки из одной системы в другую, в общем случае, описывается системой уравнений:

$$\begin{aligned} x^* &= t_{11}x + t_{12}y + x_0^*, \\ y^* &= t_{21}x + t_{22}y + y_0^*, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где x, y – координаты точки в «старой», а x^*, y^* – в «новой» системе координат;

t_{ij}, x_0^*, y_0^* – числа, связанные неравенством

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Приведенные выражения имеют и другой геометрический смысл. Они описывают новые координаты точки после выполнения над ней ряда геометрических преобразований в одной системе координат. Числа t_{ij}, x_0^*, y_0^* описывают параметры конкретных преобразований, но определить их значения для желаемого вида преобразований весьма затруднительно. В аффинных преобразованиях плоскости особую роль играют несколько важных частных случаев, для которых числовые коэффициенты уравнений перевода имеют ясный геометрический смысл. Это уже названные сдвиг, поворот, масштабирование и отражение.

Преобразование сдвига устанавливает соответствие между координатами точки в двух координатных системах, одна из которых сдвинута относительно другой на расстояние x_0^* по горизонтали и y_0^* по вертикали. Применительно к компьютерной графике преобразование сдвига переводит координаты точки объекта из СКО (xOy) в СКН (в систему координат экрана $x^*O^*y^*$) при перемещении объекта:

$$x^* = x + x_0^*,$$
$$y^* = y + y_0^*,$$

где x_0^*, y_0^* – координаты начала системы xOy в системе $x^*O^*y^*$.

Преобразование поворота (или – вращения) устанавливает соответствие между координатами точки объекта и экраном (СКН) при вращении объекта (без сдвига) относительно начала координат:

$$x^* = \cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y,$$
$$y^* = \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y,$$

где φ – угол поворота СКО в СКН.

Другими словами, если центры СКО и СКН совпадают, то точка объекта, имеющая в СКО координаты x, y, при повороте объекта на угол φ примет в СКН координаты x^*, y^* в соответствии с приведенными выражениями.

Преобразование масштабирования увеличивает или уменьшает размер изображения объекта в СКН по сравнению с исходным размером в СКО. При масштабировании назначается точка, относительно которой производится преобразование (неподвижная точка преобразования). Масштабирование относительно начала координат описывается уравнениями

$$x^* = k_x \cdot x, \qquad y^* = k_y \cdot y,$$

где k_x, $k_y \neq 0$ – коэффициенты преобразования по координатным осям.

При $k_{x,\ y} > 1$ происходит увеличение изображения, при $k_{x,\ y} < 1$ – уменьшение, а при $k_x \neq k_y$ форма изображения искажается.

Преобразование отражения (симметрии) формирует в СКН изображение объекта, симметричное исходному. Отражение относительно оси, проходящей через начало координат СКН под углом α к оси абсцисс, описывается уравнениями:

$$x^* = \cos 2\alpha \cdot x + \sin 2\alpha \cdot y,$$
$$y^* = \sin 2\alpha \cdot x - \cos 2\alpha \cdot y.$$

Геометрическая иллюстрация частных аффинных преобразований представлена на рисунке 2. Как видно, все они «привязаны» к началу СКН и потому являются частными вариантами общего случая, представленного выражениями (2.1).

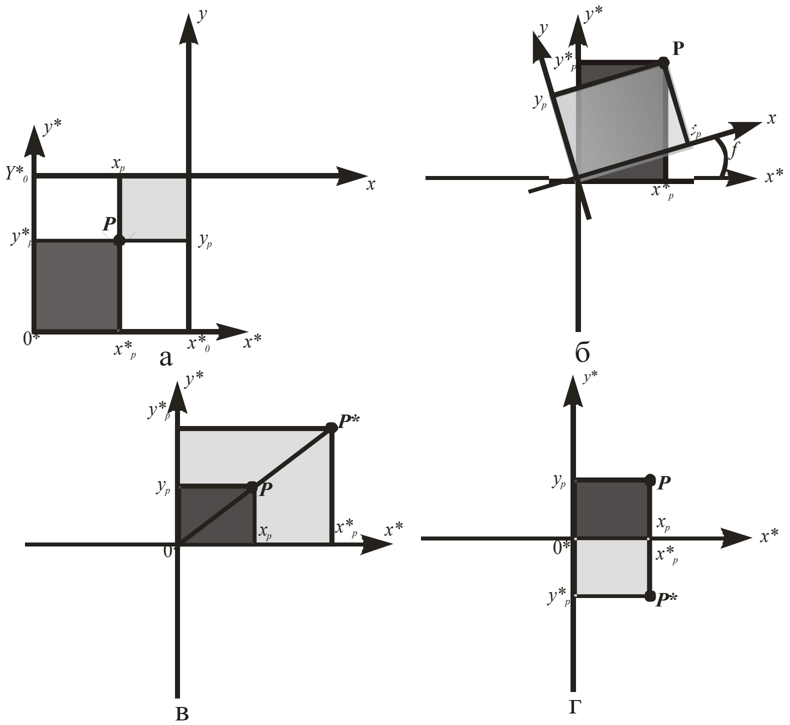

Рисунок 2 – Иллюстрация частных аффинных преобразований сдвига (а), поворота (б), масштабирования (в) и отражения (г)

Удобно записывать аффинные преобразования в матричной форме. Во-первых, можно компактно описывать сложные преобразования как сочетание (суперпозицию) простых. Во-вторых, в технических средствах компьютерной графики заложены возможности быстрого выполнения матричных операций (программно или аппаратно). Матричная запись в общем виде должна выглядеть так:

$$\begin{vmatrix} x^* & y^* \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y \end{vmatrix} \cdot T, \tag{2.2}$$

где T – матрица геометрического преобразования.

Для получения результирующих координат x^*, y^* нужно умножить матрицу-строку $\begin{vmatrix} x & y \end{vmatrix}$ на матрицу T. Матрицу T можно получить из системы уравнений (2.1), она может выглядеть только как транспонированная матрица коэффициентов этих выражений:

$$T = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} \\ t_{12} & t_{22} \\ x_0^* & y_0^* \end{vmatrix}.$$

Однако приведенный вид матрицы невозможен для матричного умножения (2.2). Поскольку не совпадают размерности перемножаемых матриц, получить исходные выражения перевода их перемножением нельзя. Для установления соответствия размерностей в выражении (2.2) матрицы-строки $\begin{vmatrix} x^* & y^* \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} x & y \end{vmatrix}$ должны иметь три элемента, то есть точка на плоскости должна описываться тремя координатами. Это возможно при использовании так называемых однородных координат.

2.2 Однородные координаты. Матричное представление аффинных преобразований

Однородным представлением n-мерного объекта в математике, в общем случае, называют его представление в $(n+1)$-мерном пространстве, полученное добавлением еще одной координаты – скалярного множителя. Однородные координаты на плоскости определяются следующим образом. Пусть на плоскости в аффинной системе координат задана точка P с координатами (x, y). Однородными координатами этой точки называется любая тройка одновременно не равных нулю чисел $[w_1\ w_2\ w_3]$, связанных с координатами точки P соотношениями:

$$\frac{w_1}{w_3} = x, \qquad \frac{w_2}{w_3} = y. \tag{2.3}$$

Безразмерное число w_3 называется скалярным множителем.

Геометрически можно пояснить однородные координаты точки на плоскости, представив точку в некоторой условной пространственной системе координат (x,y,w), как это показано на рисунке 3.

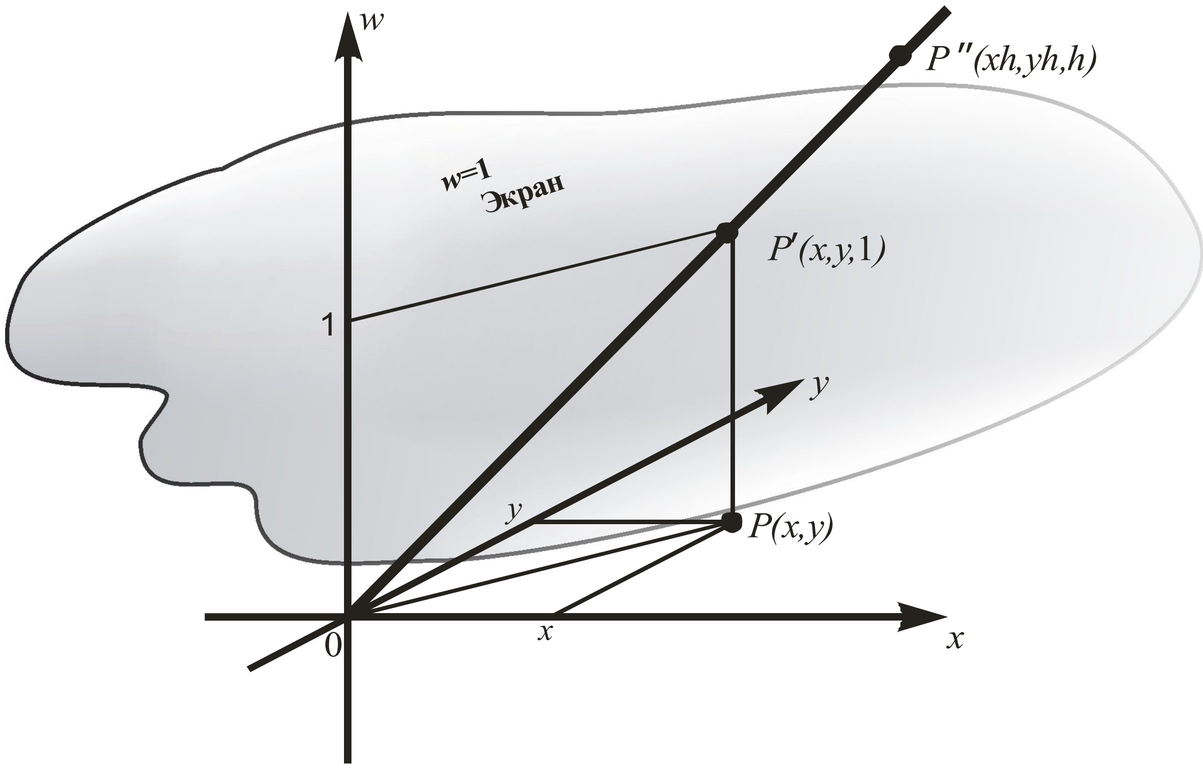

Рисунок 3 – Иллюстрация однородных координат точки на плоскости

Точку $P(x,y)$ может представлять тройкой своих координат w_1, w_2, w_3 произвольная точка на прямой, соединяющей начало координат O (0, 0, 0) с точкой P' (x, y, 1). В частности, и точка P' однозначно определяет точку P, а также и любая точка P'' с координатами (xh, yh, h), где h – скалярный множитель. В этом можно убедиться, воспользовавшись выражениями (2.3). Такое описание точки на плоскости называется в компьютерной графике описанием в однородных координатах. Представляют точку обычно так: $(x : y : 1)$, то есть принимают h=1 , но применяют и общую форму: $(w_1 : w_2 : w_3)$. Чтобы отличить однородное описание точки на плоскости (три координаты – w_1, w_2, w_3) от привычного описания точки в декартовом пространстве (тоже три координаты – x, y, z), однородные координаты в описании точки разделяют не запятой, а двоеточием, например, $A(x_A{:}y_A{:}1)$. Это правило не относится к матричному описанию точки, так как в математике знаки препинания между элементами матриц не ставятся, например, $K_A = |x_A \; y_A \; 1|$.

Теперь аффинное преобразование в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{vmatrix} x^* & y^* & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & 0 \\ x_0^* & y_0^* & 1 \end{vmatrix}$$

или $$K^* = K \cdot T, \tag{2.4}$$

где обозначения очевидны.

Перемножение матриц K и T даст два основных уравнения (2.1) перевода точки из СКО в СКН и верное числовое равенство 1=1. Следовательно, при помощи троек однородных координат и матриц третьего порядка можно описать любое частное аффинное преобразование.

Так, матрица преобразований для сдвига (translation – перенос) принимает вид:

$$TR = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_0^* & y_0^* & 1 \end{vmatrix},$$

для вращения (rotation) –

$$RT = \begin{vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

для масштабирования (scaling) –

$$SC = \begin{vmatrix} m_x & 0 & 0 \\ 0 & m_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

и для отражения (reflection) –

$$RF = \begin{vmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha & 0 \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Отметим, что последняя матрица принимает более простой вид, если описывает отражение относительно оси x (α=0) или оси y (α=90°). Справедливость представленных матриц можно проверить, подставив их в (2.4) и выполнив умножение. В результате получатся выражения аффинных преобразований в алгебраической форме.

Пользуясь матрицами частных аффинных преобразований, можно описать более сложные преобразования, представив их в виде последовательности частных аффинных преобразований [2].

Пример 1. Пусть требуется описать поворот точек объекта на угол θ вокруг произвольного центра C с координатами x_c, y_c.

Применить матрицу поворота RT нельзя, так как она описывает поворот относительно начала координат, а в задании требуется повернуть точку вокруг некоторого центра C. Значит, чтобы использовать RT, нужно сначала разместить начало координат СКН в точке C или, что то же самое, переместить точку C в начало СКН. При этом точка объекта $(x : y : 1)$ также изменит свои координаты. Чтобы найти ее координаты после сдвига, используется матрица TR. Теперь можно описывать поворот точки объекта с помощью матрицы RT. Однако предварительный сдвиг исказит результат преобразования поворота. Чтобы этого не произошло, нужно после поворота выполнить обратный сдвиг (возврат) системы координат, чтобы точка C вновь заняла свое место. Вместе с ней изменит свои координаты и повернутая точка объекта. Для нахождения ее новых координат применяется матрица сдвига с обратными значениями смещений по координатным осям. Таким образом, поворот объекта (каждой его точки) вокруг произвольного центра представляется в виде последовательности следующих действий: сдвиг центра вращения в начало СКН, поворот объекта на угол θ вокруг начала координат и сдвиг центра вращения в исходное положение. В итоге возникает описание

$$\begin{vmatrix} x^* & y^* & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & 1 \end{vmatrix} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_C & -y_C & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Сдвиг}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Поворот}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Возврат}},$$

или в «свернутом» виде: $K^* = K \cdot TR_1 \cdot RT \cdot TR_2$.

Произведение (суперпозиция) трех матриц частных аффинных преобразований представляет собой текущую матрицу геометрического преобразования. Она может быть вычислена, подставлена в выражение (2.4) и использована для нахождения координат всех точек графического объекта при его повороте.

Пример 2. Пусть требуется найти точку P^*, симметричную точке P относительно некоторого центра $C(x_c, y_c)$.

В задании требуется выполнить преобразование центральной симметрии (относительно точки), а частное преобразование отражения описывает осевую симметрию (относительно прямой). Однако центральную симметрию можно представить как результат двух последовательных преобразований осевой симметрии: сначала относительно горизонтальной оси, затем – относительно вертикальной. При этом обе оси должны проходить через центр симметрии. Так как матрица RF «работает» только относительно осей, проходящих через начало координат, перед симметрией нужно предусмотреть сдвиг центра C в начало СКН. Очевидно, после преобразований симметрии нужно предусмотреть возврат точки C на свое старое место (еще один сдвиг). В результате для выполнения задания нужно выполнить следующий ряд преобразований:

$$\begin{vmatrix} x_P^* & y_P^* & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_P & y_P & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -x_C & -y_C & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_C & y_C & 1 \end{vmatrix}.$$

Две средние матрицы суперпозиции (матрицы симметрии) можно поменять местами, но в остальном последовательность записи матриц имеет принципиальное значение.

Пример 3. Пусть требуется описать поворот точки на угол θ вокруг произвольного центра C с координатами x_c, y_c и последующее двукратное масштабирование результата относительно начала координат.

Очевидно, начальные преобразования в этом случае совпадают с преобразованиями примера 1, матричная запись которых уже получена. Затем к ним нужно добавить масштабирование, которое в суперпозиции матриц учитывается просто: в суперпозицию справа добавляется матрица

$$SC = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

В результате получается следующее выражение:

$$K^* = K \cdot TR_1 \cdot RT \cdot TR_2 \cdot SC.$$

Если теперь после описанных преобразований потребуется выполнить еще одно преобразование, например, еще один сдвиг, то его матрица TR_3 также записывается в «старую» суперпозицию справа. Таким образом, последовательность запланированных для выполнения задания геометрических преобразований записываются в виде своих матриц слева направо. При этом последовательность матриц строго соответствует последовательности запланированных преобразований.

Внимание! В приведенных примерах координаты точек записываются в виде матриц-строк. Возможна их запись и в виде матриц-столбцов. Она часто применяется в литературе по компьютерной графике. В этом случае все рассмотренные матрицы частных аффинных преобразований заменяются на транспонированные [2]. В матричной записи преобразования, по сравнению с (2.4), матрицы K и T меняются местами, иначе нельзя выполнить их перемножение. Кроме того, матрицы последовательности преобразований, запланированной для выполнения задания, записываются справа налево, то есть суперпозиция матриц «растет» справа налево. Например, матричное описание преобразований для примера 1 выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x^* \\ y^* \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_C \\ 0 & 1 & y_C \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x_C \\ 0 & 1 & -y_C \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x \\ y \\ 1 \end{vmatrix}.$$

3 ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

3.1 Особенности отображения пространственных объектов

Отображение пространственных объектов происходит гораздо сложнее плоских. Система координат объекта (СКО) становится трехмерной, геометрические примитивы образуют в ней пространственную композицию, которую нужно уметь описать. Сами примитивы тоже становятся пространственными, для их описания вводится трехмерная система координат примитива – СКП. Становится трехмерной и система координат наблюдателя (СКН), в ней сценарное пространство не совпадает с экраном. При этом система координат экрана остается плоской, экран лежит в плоскости *x0y* СКН (уравнение плоскости экрана z=0). Следовательно, возникает необходимость перехода от пространственного представления объекта к плоскому, то есть необходимость проецирования. Кроме того, чтобы пространственные объекты выглядели объемными и правильно передавались пространственные отношения между ними, нужно выполнить еще целый ряд операций, отсутствующих в двумерной графике. Это наложение теней от источников освещения и удаление на изображении тех участков объектов, которые не должен видеть наблюдатель. Таким образом, процесс отображения пространственных сцен включает все операции, описанные в 1.2.

К геометрическим преобразованиям пространственных объектов относятся уже названные аффинные преобразования: сдвиг, поворот, масштабирование и отражение. К ним добавляется преобразование проецирования. Однако разнообразие и сложность представления преобразований в трехмерной графике неизмеримо выше, чем в двумерной. Например, поворот объекта в двумерной графике возможен только в плоскости экрана, а поворот в пространстве может осуществляться вокруг оси, расположенной в СКН самым различным образом, к тому же возможно сочетание поворотов вокруг нескольких осей.

Математическое описание геометрических преобразований зависит от выбора пространственной системы координат и от размещения в ней точки наблюдения и картинной плоскости. Распространены правая и левая системы координат, они показаны на рисунке 4. В правой поворот оси x к оси y, оси y к оси z, оси z к оси x идет против часовой стрелки, а в левой системе координат эти повороты направлены по часовой стрелке.

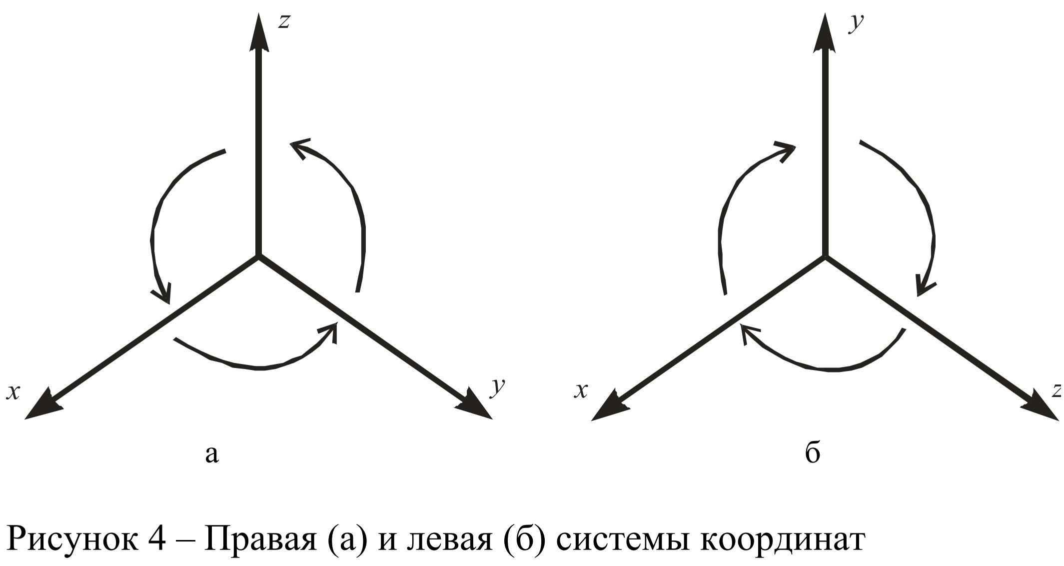

Рисунок 4 – Правая (а) и левая (б) системы координат

В данном конспекте лекций принята левая система координат, плоскость экрана совпадает с плоскостью $x^*O^*y^*$, точка наблюдения V размещена на отрицательной полуоси оси z^*, как это показано на рисунке 5.

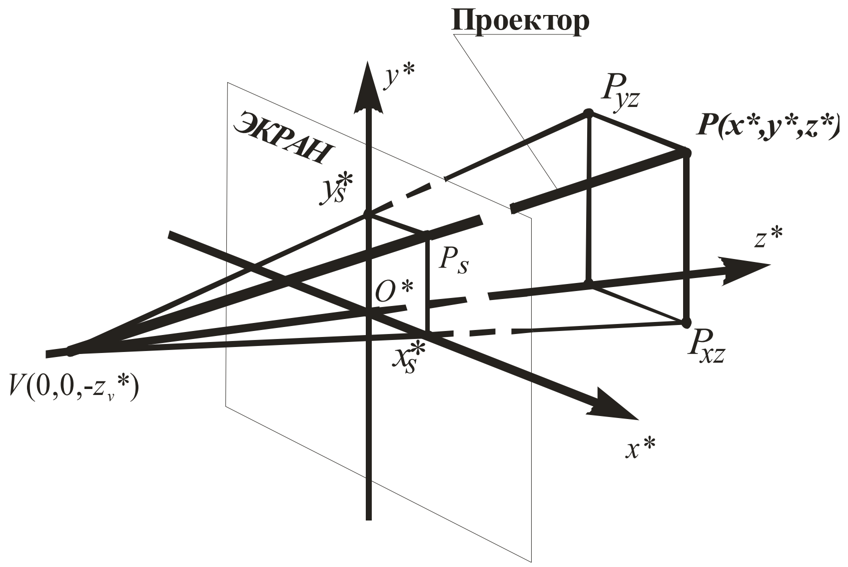

Рисунок 5 – Пространственная сцена в левой системе координат

Такой выбор геометрических параметров сцены делает координату глубины объекта положительной. Другими словами, удаление объекта от картинной плоскости получается положительным, что соответствует привычным пространственным представлениям. В литературе по компьютерной графике применяются и другие, в частности, левые системы координат, что будет учтено при дальнейшем изложении.

3.2 Аффинные преобразования в пространстве

Для описания динамики объекта в пространственной графике так же, как и в двумерной, используются аффинные преобразования.

Общее описание аффинных преобразований пространства, переводящих точку из одной системы координат, например из СКО, где ее координаты

x, y, z , в другую систему координат, например, СКН, где точка получает координаты x^*, y^*, z^*, имеет вид

$$\begin{aligned} x^* &= t_{11}x + t_{12}y + t_{13}z + x_0^*, \\ y^* &= t_{21}x + t_{22}y + t_{23}z + y_0^*, \\ z^* &= t_{31}x + t_{32}y + t_{33}z + z_0^*, \end{aligned} \tag{3.1}$$

где t_{ij}, x_0^*, y_0^*, z_0^* – коэффициенты, причем

$$\begin{vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

В пространственной графике также имеют особое значение частные случаи аффинных преобразований: сдвиг, поворот, масштабирование и отражение. По ранее упомянутым причинам к ним прибавляется проецирование. Оно не является аффинным, так как не сохраняет параллельности прямых линий, однако описывается аналогично с аффинными преобразованиями и потому рассматривается вместе с ними. При описании преобразований, как и ранее, удобно использовать матричное представление, для использования которого точка в пространстве должна описываться не тройкой, а четверкой координат. К этому и прибегают, вводя однородные координаты точки в пространстве: (x: y: z: 1), или в более общей форме – (xh: yh: zh: h), где $h<>0$ – скалярный множитель.

Теперь общий вид аффинных преобразований выглядит так:

$$\begin{vmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \end{vmatrix} \cdot T, \tag{3.2}$$

где T – матрица преобразований.

Для преобразования сдвига матрица T имеет следующий вид (обозначена TR):

$$TR = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0^* & y_0^* & z_0^* & 1 \end{vmatrix},$$

где x_0^*, y_0^*, z_0^* – координаты начала СКО в СКН.

Прежде чем привести матричное описание поворота, необходимо сделать ряд замечаний. Поворот объекта в пространстве наблюдателя представляется как поворот в СКН всей СКО, при этом вид (и описание) объекта в СКО не изменяется. В случае наклонного расположения СКО в СКН коэффициенты t_{ij} в выражении (3.1) представляют собой направляющие косинусы осей СКО в СКН, то есть косинусы углов наклона каждой оси СКО относительно каждой оси СКН. На рисунке 6 показано наклонное расположение оси x СКО в СКН ($x^*y^*z^*$). Направление вектора в трехмерной декартовой системе координат однозначно описывается тремя направляющими углами, на рисунке 6 они обозначены α, β, γ.

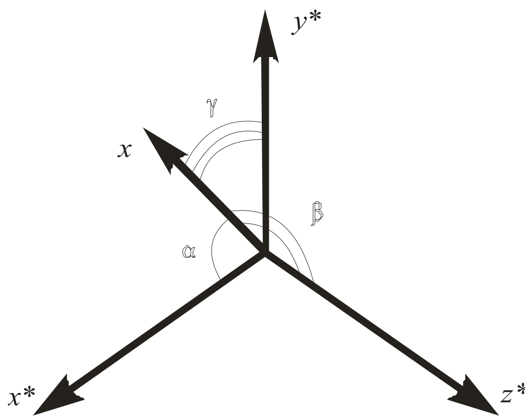

Рисунок 6 – Задание направления вектора в декартовом пространстве

Поскольку СКО имеет три оси, ее положение в СКН однозначно описывают девять направляющих углов. На практике применяют не углы, а их косинусы, которые и называют направляющими косинусами. Таким образом, в выражении (3.1) t_{11} – это косинус угла между осью x СКО и осью x^* СКН, t_{12} – косинус угла между осью x СКО и осью y^* СКН и так далее в соответствии с таблицей 3.1.

Таблица 3.1 Направляющие косинусы осей СКО в СКН

Оси СКН	Оси СКО		
	x	y	z
x^*	t_{11}	t_{12}	t_{13}
y^*	t_{21}	t_{22}	t_{23}
z^*	t_{31}	t_{32}	t_{33}

Если известны направляющие косинусы желаемого наклона объекта в пространстве, то для его отображения координаты всех точек объекта умножаются на матрицу поворота

$$RT = \begin{vmatrix} t_{11} & t_{21} & t_{31} & 0 \\ t_{12} & t_{22} & t_{32} & 0 \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

На практике наклон объекта часто задается с помощью трех углов поворота объекта вокруг собственных координатных осей: x (угол φ), y (ψ), z (θ), которые показаны на рисунке 7. Каждый угол считается положительным, если при наблюдении со стороны положительной полуоси он поворачивает объект против часовой стрелки. Определение сочетаний φ, ψ, θ и соответствующих им значений направляющих косинусов при эволюциях объекта (или примитива) является отдельной, часто непростой задачей и относится к моделированию или расчету поведения объекта.

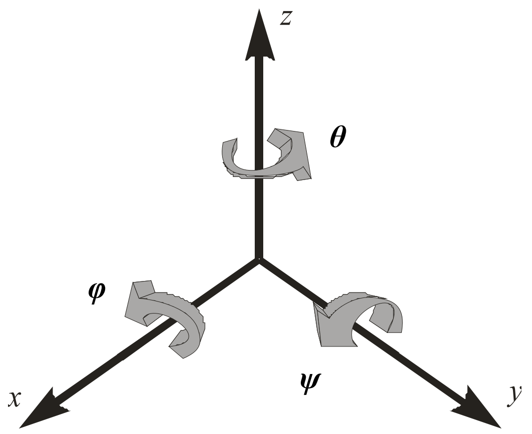

Рисунок 7 – Углы поворота СКО вокруг своих координатных осей

Гораздо проще описывать повороты объекта в виде последовательности элементарных поворотов вокруг координатных осей. В этом случае для отработки каждого угла в (3.2) применяется своя матрица поворота – RT_x, RT_y, RT_z, а результат трех поворотов описывается суперпозицией указанных матриц. Вид матриц поворота зависит от выбора системы координат. Для правой СКН они имеют следующий вид:

$$RT_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$RT_y = \begin{vmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$RT_z = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

а для левой СКН выглядят немного по-другому:

$$RT_x = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$RT_y = \begin{vmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

$$RT_z = \begin{vmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Следует отметить, что последовательность поворотов является критичной и при расстановке объектов (или примитивов) должна правильно выбираться

Преобразование масштабирования в трехмерном пространстве относительно начала координат осуществляется диагональными элементами матрицы преобразования *SC*:

$$SC = \begin{vmatrix} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

где k_x, k_y, k_z - коэффициенты масштабирования по координатным осям.

Нужно отметить, что в пространственной графике изменение размеров изображения объекта обычно является следствием удаления или приближения объекта по отношению к наблюдателю, то есть его перемещения по оси глубины. Чтобы реализовать этот эффект, нужно изображение на экранной плоскости формировать путем центрального проецирования точек объекта. При этом осуществляется перевод точки не из одной системы координат в другую, а из пространства x^*,y^*,z^* на экранную плоскость x^*y^*, лежащую в этом же пространстве, как это показано на рисунке 5. В результате находится экранный образ P_S пространственной точки P на экране. Экранные координаты точки P_S отметим нижним индексом s. Соответствующие алгебраические выражения при расположении центра проецирования в точке наблюдения $V(0,0,-z_v^*)$ выглядят следующим образом

$$\left.\begin{aligned} x_s^* &= \frac{x^*}{(1+\frac{z^*}{z_v^*})} \\ y_s^* &= \frac{y^*}{(1+\frac{z^*}{z_v^*})} \\ z_s^* &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

Выражения легко выводятся из подобных треугольников рисунка 5, лежащих в плоскостях x^*z^* и y^*z^*. Точки P_{XZ}, P_{YZ} на рисунке представляют собой проекции точки P на эти плоскости.

Для матричного описания рассматриваемого здесь частного случая проецирования используют следующую матрицу преобразования:

$$PR = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{z_v^*}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ее особенность в том, что с ее применением результат проецирования получается в однородных координатах со скалярным множителем, отличным от единицы. Действительно, умножив матрицу *PR* на матрицу-строку $\begin{vmatrix} x^* & y^* & z^* & 1 \end{vmatrix}$, получим координаты проекции точки на плоскость экрана в общей форме $(x_s^* h : y_s^* h : z_s^* h : h)$:

$$x_s^* h = x^*, \quad y_s^* h = y^*, \quad z_s^* h = 0, \quad h = \left(\frac{z^*}{z_v^*} \right) + 1 .$$

Приводя координаты делением на h к декартовой форме (x_s^*, y_s^*, z_s^*), приходим к уже записанным выражениям (3.3), что говорит о правильной работе матрицы проецирования *PR*. При использовании этой матрицы нужно помнить, что значение z_v^* в ней всегда положительно, так как представляет собой расстояние наблюдения экрана.

Преобразование отражения (симметрии) в пространстве осуществляется относительно некоторой плоскости. Если это координатная плоскость, то матрица преобразований проста. Например, для симметрии относительно плоскости $x^* y^*$ она имеет вид:

$$RF_{xy} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Симметрия относительно произвольной плоскости производится путем сложных преобразований, осуществляющих

- совмещение плоскости симметрии с одной из координатных плоскостей (для этого плоскость симметрии претерпевает два поворота вокруг координатных осей);
- преобразование симметрии относительно координатной плоскости;

- возврат плоскости симметрии в исходное положение. При возврате нужно помнить, что операции поворота некоммутативны, то есть последовательность поворота вокруг координатных осей имеет решающее значение (она должна быть обратной по отношению к исходной).

Сложные аффинные преобразования представляются в виде последовательности частных. Форма записи последовательности, как и в двумерной графике, зависит от формы представления координат точки: в виде матрицы-строки или матрицы-столбца. В случае использования матрицы-строки последовательность частных преобразований записывается слева направо.

Пример 1. Пусть нужно найти на экране образ пространственной точки A с координатами $(x_A,\ y_A,\ z_A)$ после ряда преобразований: перспективного проецирования, поворота проекции в плоскости экрана на угол β против часовой стрелки относительно центра $C(x_C,\ y_C,\ z_C)$ и отражения относительно центра экрана. Координаты точки наблюдения экрана V равны $(0,0,-z_v^*)$, начало координат СКН расположено в центре экрана, координатные оси направлены вправо и вверх.

Перечисленные в задании действия нужно описать с помощью суперпозиции матричных преобразований над однородными координатами точки A. На первом этапе выполняется перспективное проецирование точки на плоскость экрана. Оно обнуляет координату глубины точки, но от этого задача не перестает быть трехмерной, поэтому все преобразования будут описываться матрицами с размерностью 4×4. Поскольку в набор преобразований входит перспективное проецирование, результирующие координаты точки будут получены со значением скалярного множителя, отличным от 1, то есть в форме $\left| x^*_{sA}h \quad y^*_{sA}h \quad z^*_{sA}h \quad h \right|$.

Особое внимание нужно обратить на описание поворота. Судя по координатам точки V, в задании предусмотрена левая система координат наблюдателя x^*, y^*, z^*. Поворот проекции точки в плоскости экрана осуществляется вокруг оси z^*. Для правильной записи матрицы поворота его направление нужно оценивать со стороны положительной полуоси оси z^*, которая направлена от наблюдателя. В то же время направление поворота обычно задается наблюдателем и привязывается к экрану. Предположим, что в задании сделано именно так. Тогда поворот на угол β, который наблюдателем воспринимается как поворот против часовой стрелки, со стороны положительной полуоси z^* будет являться поворотом по часовой стрелке. Это означает, что в матрице поворота угол β является отрицательным и должен быть взят с отрицательным знаком.

Известная матрица поворота RT_z описывает поворот вокруг начала координат, тогда как в задании требуется иное. Как и в двумерной графике, поворот относительно произвольного центра приводится к повороту вокруг начала координат с помощью преобразования сдвига. После выполнения поворота этот сдвиг компенсируется обратным сдвигом повернутой точки.

Последнее действие в задании – отражение проекции точки относительно центра экрана. В центре экрана размещено начало СКН, значит, отражение выполняется относительно начала координат. Выполнение центральной симметрии можно представить как комбинацию трех отражений относительно трех координатных плоскостей, причем последовательность выполнения этих отражений неважна. С другой стороны, понимая сущность центральной симметрии, легко записать матрицу, выполняющую отражение как одно преобразование. Центральная симметрия изменяет значения всех трех координат точки на противоположные. При этом не важно, что отражение, по сути, осуществляется в плоскости экрана, а не в трехмерном пространстве – матрица все равно должна иметь общий вид.

В результате запись геометрических преобразований, необходимых для выполнения задания, принимает вид:

$$\left| x^*_{sA}h \quad y^*_{sA}h \quad z^*_{sA}h \quad h \right| = \left| x_A \quad y_A \quad z_A \quad 1 \right| \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\dfrac{1}{z^*_v} \right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -x^*_C & -y^*_C & -z^*_C & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos(-\beta) & -\sin(-\beta) & 0 & 0 \\ \sin(-\beta) & \cos(-\beta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x^*_C & y^*_C & z^*_C & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} .$$

Для нахождения экранных координат точки *A* после преобразований ее однородные координаты, вычисленные по полученному выражению, нужно разделить на скалярный множитель.

Пример 2. В качестве примера рассмотрим описание фазы динамики трехмерного объекта, который в процессе эволюций на какой-то момент времени приобрел значения углов поворота вокруг осей своей системы координат – α_x, α_y, α_z, а также координаты начала СКО в СКМ – x_0^w, y_0^w, z_0^w. Сама СКМ на данный момент времени получила углы поворота вокруг своих осей – β_x, β_y, β_z и координаты своего начала в СКН – x_0^v, y_0^v, z_0^v

. Объект состоит из примитивов-полигонов. Изображение на экране – перспективное. Все системы координат – правые. Подобную задачу приходится решать при отображении сцены, представляемой будущему летчику в авиационном тренажере.

Для решения задачи нужно найти текущую матрицу преобразования, то есть матрицу, которая описывает все геометрические преобразования, выполненные на данный момент над всеми полигонами объекта. Ясно, что эти преобразования нужно сначала определить. Если координаты всех вершин полигональной модели объекта умножить на текущую матрицу преобразования, то будут вычислены экранные координаты этих вершин, что и нужно для построения экранного образа объекта. Конечно, такое построение, кроме работы с геометрией, требует операций удаления невидимых участков, текстурирования, затенения, но здесь рассмотрим лишь геометрические преобразования.

В общем случае каждый геометрический примитив объекта размещается в своей системе координат – системе координат примитива (СКП). Однородные координаты вершины примитива в СКП описываются матрицей-строкой $KP = \begin{vmatrix} x^p & y^p & z^p & 1 \end{vmatrix}$. Для размещения примитива в объекте нужно перевести вершины примитива в СКО. Для этого необходимо выполнить соответствующие сдвиги и повороты СКП в СКО. Так поступают поочередно со всеми примитивами объекта, в результате чего происходит так называемая «сборка объекта», то есть расстановка примитивов в СКО. Пусть для задания нужного положения некоторого примитива в СКО его нужно повернуть относительно своих осей на углы γ_x, γ_y, γ_z и сдвинуть вдоль координатных осей СКО на x_0^o, y_0^o, z_0^o. Следующее преобразование дает матрицу-строку KO координат вершины в СКО:

$$KO = \begin{vmatrix} x^o & y^o & z^o & 1 \end{vmatrix} = KP \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\gamma_x & \sin\gamma_x & 0 \\ 0 & -\sin\gamma_x & \cos\gamma_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\gamma_y & 0 & -\sin\gamma_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\gamma_y & 0 & \cos\gamma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\gamma_z & \sin\gamma_z & 0 & 0 \\ -\sin\gamma_z & \cos\gamma_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0^o & y_0^o & z_0^o & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.4}$$

Теперь нужно описать размещение объекта в сцене, то есть размещение СКО в СКМ. Для этого координаты вершин объекта (вершин его примитивов) в виде матрицы KO умножаются на матрицы геометрических преобразований поворота и сдвига. Параметры этих преобразований указаны в задании. В результате получается матрица-строка KW, содержащая координаты вершины объекта в СКМ:

$$KW = \begin{vmatrix} x^w & y^w & z^w & 1 \end{vmatrix} = KO \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_x & \sin\alpha_x & 0 \\ 0 & -\sin\alpha_x & \cos\alpha_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\alpha_y & 0 & -\sin\alpha_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\alpha_y & 0 & \cos\alpha_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\alpha_z & \sin\alpha_z & 0 & 0 \\ -\sin\alpha_z & \cos\alpha_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0^w & y_0^w & z_0^w & 1 \end{vmatrix}. \tag{3.5}$$

Следующий шаг – определение положения объекта в СКН. Для этого вершины объекта, заданные матрицей-строкой KW, переводятся в СКН с помощью преобразований поворотов и сдвигов с параметрами, указанными в задании. Результатом является матрица-строка KV:

$$KV = \begin{vmatrix} x^v & y^v & z^v & 1 \end{vmatrix} = KW \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta_x & \sin\beta_x & 0 \\ 0 & -\sin\beta_x & \cos\beta_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \cos\beta_y & 0 & -\sin\beta_y & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sin\beta_y & 0 & \cos\beta_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} \cos\beta_z & \sin\beta_z & 0 & 0 \\ -\sin\beta_z & \cos\beta_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_0^v & y_0^v & z_0^v & 1 \end{vmatrix}. \quad (3.6)$$

Наконец, нужно получить образ пространственной точки (вершины) объекта на плоскости экрана. Это делает преобразование перспективного проецирования, результатом которого является матрица-строка KS с однородными координатами, записанными в общей форме:

$$KS = \begin{vmatrix} x^* h & y^* h & z^* h & h \end{vmatrix} = KV \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{1}{z_v^*}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

где z_v^* – расстояние наблюдения экрана, выраженное в тех же единицах, что использованы при задании координат вершин. Если расстояние наблюдения не задано, оно выбирается из эргономических рекомендаций.

Разделив значения однородных координат, получившихся в матрице KS, на величину скалярного множителя h, получим декартовы координаты проекции вершины объекта на экране, при этом значение z^* должно быть нулевым.

Преобразование (3.4) описывает конструирование объекта из примитивов, оно выполняется для каждой вершины один раз, так как расположение примитивов в составе объекта не меняется. Следовательно, матрица *KO* каждой вершины вычисляется заранее и становится элементом описания объекта (вместо *KP*). Преобразования (3.5),(3.6) в общем случае зависят от динамики объекта относительно сцены и сцены относительно наблюдателя, поэтому они выполняются многократно, с частотой смены фаз динамики сцены. Если выражение *KW* из (3.5) подставить в (3.6), а затем выражение *KV* из (3.6) подставить в (3.7), то получится описание всех геометрических преобразований вершины объекта (включая проецирование) в виде одного выражения. Перемножив матрицы этих преобразований, получим текущую матрицу преобразования. Теперь, умножая на нее последовательно матрицы *KO* всех вершин объекта, можно найти расположение этих вершин на экране как результат ряда геометрических преобразований, выполненных на некоторый момент времени. Текущая матрица преобразования, как уже указывалось, должна пересчитываться с частотой смены фаз динамики сцены.

4 КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задания по двумерной графике

Задание 4.1