

Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова
Факультет вычислительной математики и кибернетики

**Отчёт по второму заданию в рамках курса «Суперкомпьютерное
моделирование и технологии»**

Вариант 16

Скляр Никита Алексеевич, группа 614

Математическая постановка задачи и численный метод ее решения

Функция $f(x, y, z)$ - непрерывна в ограниченной замкнутой области $G \subset \mathbb{R}^3$. Требуется вычислить определённый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz$$

В моем варианте $f(x, y, z) = x^2 y^2 z^2$

где область $G = \{(x, y, z) : |x| + |y| \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$

Предлагается использовать численный метод Монте-Карло для решения данной задачи.

Пусть область G ограничена параллелепипедом: $\Pi : \begin{cases} a_1 \leq x \leq b_1 \\ a_2 \leq y \leq b_2 \\ a_3 \leq z \leq b_3 \end{cases}$

Рассмотрим функцию: $F(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z), & (x, y, z) \in G \\ 0, & (x, y, z) \notin G \end{cases}$

Преобразуем искомый интеграл:

$$I = \iiint_G f(x, y, z) \, dx dy dz = \iiint_{\Pi} F(x, y, z) \, dx dy dz$$

Пусть $p_1(x_1, y_1, z_1), p_2(x_2, y_2, z_2), \dots$ — случайные точки, равномерно распределённые в Π . Возьмём n таких случайных точек. В качестве приближённого значения интеграла предлагается использовать выражение:

$$I \approx |\Pi| \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n F(p_i) \quad (1)$$

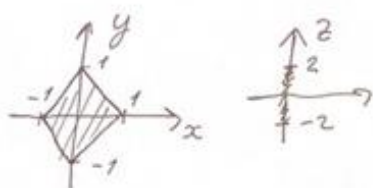
где $|\Pi|$ — объём параллелепипеда Π . $|\Pi| = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)(b_3 - a_3)$

Объем параллелепипеда $(\Pi) = 16$.

Нахождение точного значения интеграла аналитически

$$I = \iiint_G x^2 y^2 z^2 dx dy dz$$

$$G = \{(x, y, z): |x| + |y| \leq 1, -2 \leq z \leq 2\}$$



$$\begin{aligned} \iiint_G x^2 y^2 z^2 dx dy dz &= \{\text{п.к. } x^2 y^2 z^2 - \text{симметрич. функ.}\} \\ &= 8 \int_0^2 dz \int_0^1 dx \int_0^{-x+1} x^2 y^2 z^2 dy = \\ &= 8 \int_0^2 dz \int_0^1 dx \cdot \left(-\frac{1}{3} (x-1)^3 x^2 z^2 \right) = \\ &= 8 \int_0^2 \frac{z^2}{180} dz = \boxed{\frac{16}{135}} \end{aligned}$$

Краткое описание программной реализации

Программа была написана на языке C++. Мастер процесс генерирует точки, отправляет их рабочим при помощи MPI_Send и ожидает сложение сумм рабочих при помощи MPI_Reduce. Затем, если текущая точность удовлетворяет введенному значению, то мастер процесс отправляет каждому рабочему процессу сообщение 0, иначе 1. Рабочие ожидают точки при помощи MPI_Recv, а затем вычисляют значение функции, суммируют и отправляют мастеру, используя MPI_Reduce и MPI_Bcast. Когда достигается необходимая точность, рабочим отправляется 0 и выполняется редукция по максимальному времени работы процессов, выводится необходимая информация и выполняется MPI_Finalize.

Исследование масштабируемости программы на системе Polus

| Точность eps | Число MPI-процессов | Время работы программы (с) | Ускорение | Ошибка |
|--------------|---------------------|----------------------------|--------------------|-------------|
| 0.00003 | 2 | 0.00458883 | 1 | 1.62921e-06 |
| | 4 | 0.00271619 | 1.6894363060021574 | 1.62921e-06 |
| | 16 | 0.00336581 | 1.363365727714874 | 4.95751e-06 |
| 0.000005 | 2 | 0.00462808 | 1 | 1.62921e-06 |
| | 4 | 0.00277205 | 1.6695514150177666 | 1.62921e-06 |
| | 16 | 0.00294746 | 1.5701926404429577 | 4.95751e-06 |
| 0.0000015 | 2 | 0.0156421 | 1 | 1.31817e-06 |
| | 4 | 0.0115087 | 1.3591543788612093 | 6.68818e-07 |
| | 16 | 0.0105921 | 1.4767704232399619 | 5.82976e-07 |

Графики ускорений на системе Polus

