Санкт-Петербургский политехнический университет имени Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №1

Выполнил:

Студент: Аникин Александр
Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

1.1 Выявление радиуса элементов матрицы, при котором она становиться особенной

1.1.1 Постановка задачи для матрицы линейной регрессии

Рассмотреть интервальную матрицу 2×2

$$\begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

и определить при каком значении ε она содержит особенные точечные матрицы.

1.1.2 Постановка задачи для матрицы задач томографии

Рассмотреть интревальную матрицу 2×2

$$\begin{pmatrix} [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] \end{pmatrix} \tag{2}$$

и определить при каком значении ε она содержит особенные точечтные матрицы.

1.2 Глобальная оптимизация

Выбрать 2 функции для оптимизации:

- С одним экстремумом
- С несколькими экстремумами

Для них найти глобальный минимум. Привести иллюстрации

- Положения брусов из рабочего списка алгоритма и положения их центров
- Графики радиусов рабочих брусов в логарифмическом масштабе
- Сходимость алгоритма

2 Теория

2.1 Критерии неособенности интервальной матрицы

2.1.1 Критерий Баумана

Интервальная матрица A неособенна тогда и только тогда, когда определители всех её крайних матриц имеют одинаковый знак, т. е.

$$(\det A^{'}) \cdot (\det A^{''}) > 0 \tag{3}$$

$\forall A^{'}, A^{''} \in \mathrm{vert} A$.

2.1.2 Признак Румпа

Если для интервальной матрицы A имеет место

$$\sigma_{max}(radA) \leq \sigma_{min}(midA) \tag{4}$$

тогда A неособенна.

2.2 Глобальная оптимизация

Предложение.
Пусть даны брус $\mathbf{X} \subseteq R^n$, целевая функция $f : X \to R$ и её интервальное расширение $\mathbf{f} : IX \to IR$. Тогда глобальный минимум $f^* = \inf_{x \in \mathbf{X}} f(x)$ существует, и для всех ведущих брусов $\mathbf{Y}$ алгоритма GlobOpt имеет место включение $f^* \in f(\mathbf{Y})$.

3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки Visual Studio Code.

4 Результаты

4.1 Выявление радиуса элементов матрицы, при котором она становиться особенной

Значение ε вычислялось с начального значения $\varepsilon_0 = 0$ и шагом $\Delta = 0.0001$

4.1.1 Матрица линейной регресии

Критерий Баумана: интервальная матрица A становиться особенной при знвчении $\varepsilon = \varepsilon_B \approx 0.05$. Полученная интервальная матрица:

$$\begin{pmatrix} [0.95, 1.05] & 1 \\ [1.05, 1.15] & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

имеет особенную точечную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 1.05 & 1 \\ 1.05 & 1 \end{vmatrix} = 0 \tag{6}$$

Признак Румпа: интервальная матрица A становиться особенной при значении $\varepsilon = \varepsilon_R \approx 0.0345$. Полученная интервальная матрица:

$$\begin{pmatrix} [0.9655, 1.0345] & 1 \\ [1.0655, 1.1345] & 1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

не имеет особенной точечной матрицы.

4.1.2 Матрица задач томографии

Критерий Баумана и признак Румпа: интреваьная матрица становиться особенной при значении $\varepsilon \approx 0.0244$ Полученная интервальная матрица:

$$\begin{pmatrix} [0.9756, 1.0244] & [0.9756, 1.0244] \\ [1.0756, 1.1244] & [0.9756, 1.0244] \end{pmatrix} \tag{8}$$

имеет особенную точечную матрицу.

$$\begin{vmatrix} 1.0244 & 0.9756 \\ 1.0756 & 1.0244 \end{vmatrix} = 0.00004 \approx 0 \tag{9}$$

4.2 Глобальная оптимизация

Для проверки работы алгоритма для функции с одним экстремумом была выбрана функция Бута:

$$f(x, y) = (x + 2y - 7)^2 + (2x + y - 5)^2 \tag{10}$$

которая имеет минимум $f(1, 3) = 0$. Начальный брус: $-10 \leq x \leq 10, -10 \leq y \leq 10$. Заданная точность решения: $\varepsilon = 10^{-5}$ (Здесь и далее имеется в виду погрешность значения минимума)
Были полученны следующие результаты:

Точка минимума: $x_0 = (1.00037, 2.99988)$.
Значение минимума: $f(x_0) = -6.32 \cdot 10^{-6}$.
Число итераций: $i = 195$.
Ведущий брус: $0.99976 \le x \le 1.00098, 2.99227 \le y \le 3.00049$

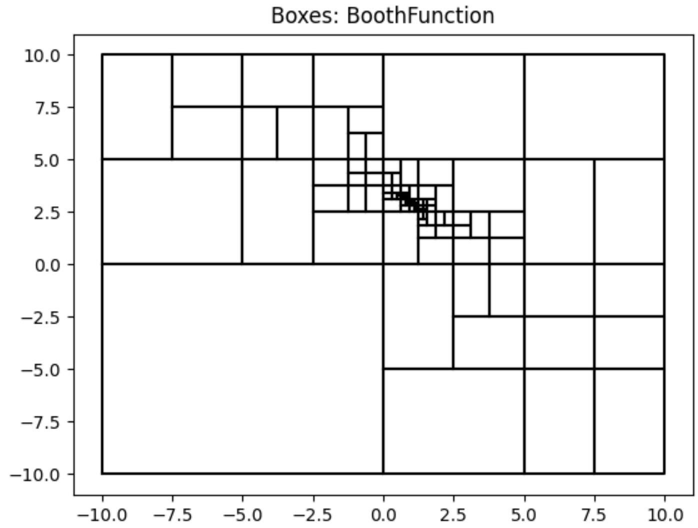

Рис. 1: Положения брусов из рабочего списка

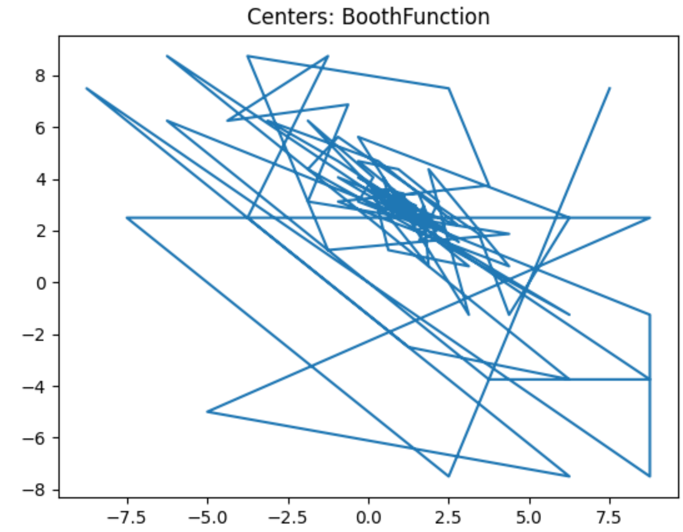

Рис. 2: Положения центров брусов

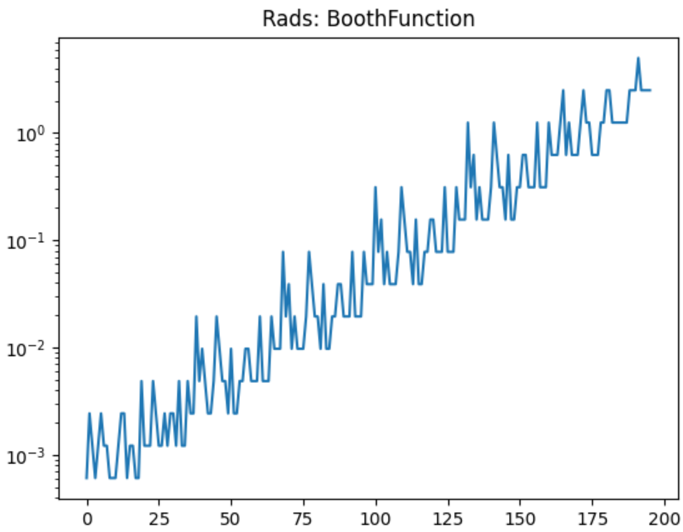

Рис. 3: График радиусов рабочих брусов

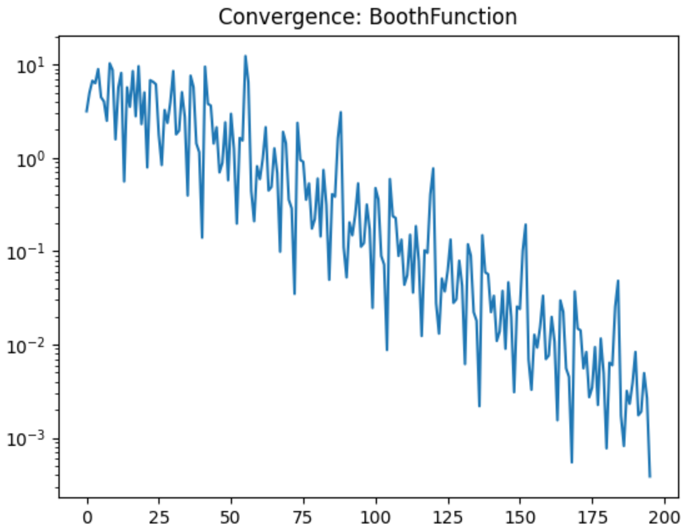

Рис. 4: Сходимость алгоритма

Для проверки работы алгоритма для функции с одним экстремумом была выбрана функция Химмельблау.

$$f(x, y) = (x^2 + y - 11)^2 + (x + y^2 - 7)^2 \tag{11}$$

которая имеет минимумы $f(3, 2) = f(-2.81, 3.13) = f(-3.78, -3.28) = f(3.58, -1.85)$. Начальный брус: $-5 \leq x \leq 5, -5 \leq y \leq 5$. Заданная точность решения: $\varepsilon = 10^{-5}$

Были полученны следующие результаты:

Точка минимума: Значение точки минимума "мечется"между несколькими значениями, близкими к реальным точкам минимума. Значения в первых пяти брусах рабочего списка:

$x_0 = (3.00018, 1.99981)$;

$x_0 = (3.58429, -1.84844)$;

$x_0 = (-2.80502, 3.13141)$;

$x_0 = (-2.80548, 3.13141)$;

$x_0 = (-3.77944, -3.28339)$.

Значение минимума: $f(x_0) = -5.75 \cdot 10^{-6}$

Число итераций: $i = 375$

Ведущий брус: $2.99988 \leq x \leq 3.00049, 1.99951 \leq y \leq 2.00012$

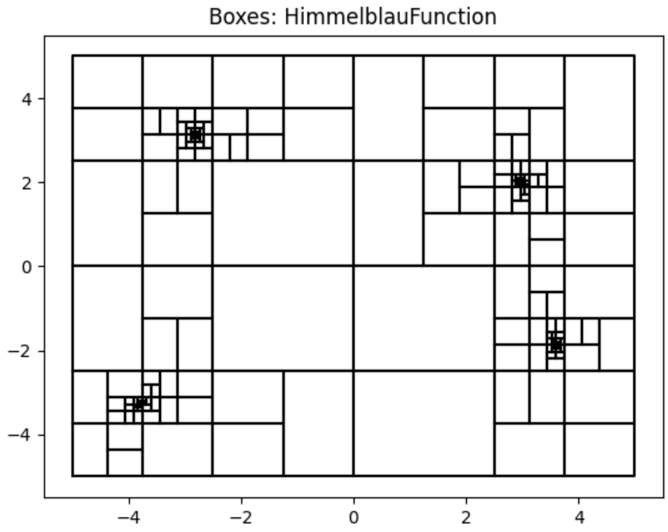

Рис. 5: Положения брусов из рабочего списка

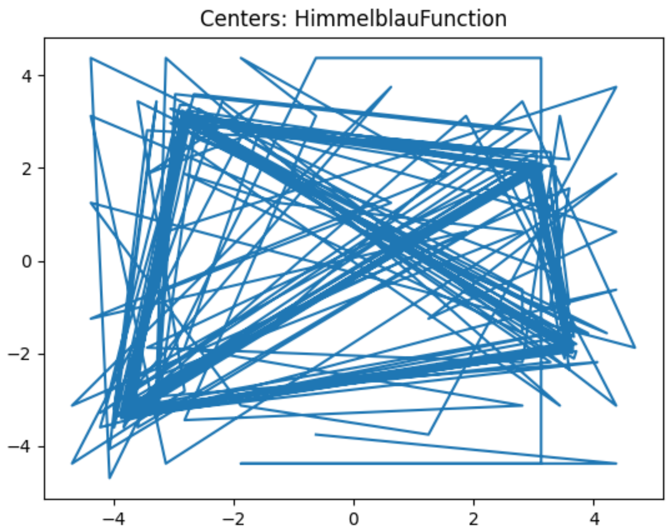

Рис. 6: Положения центров брусов

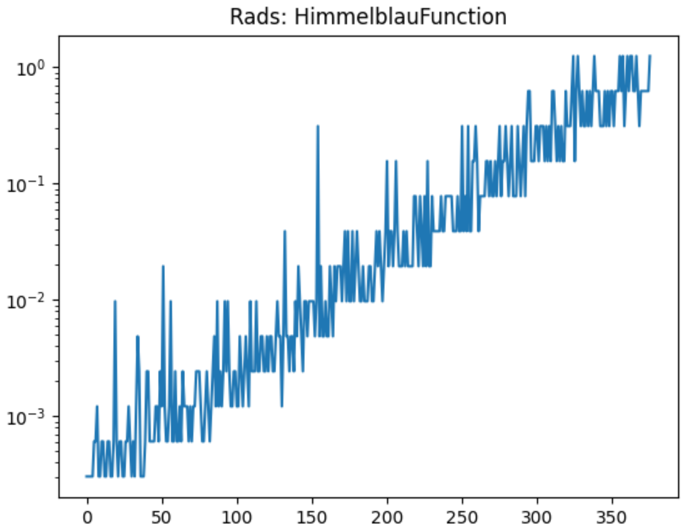

Рис. 7: График радиусов рабочих брусов

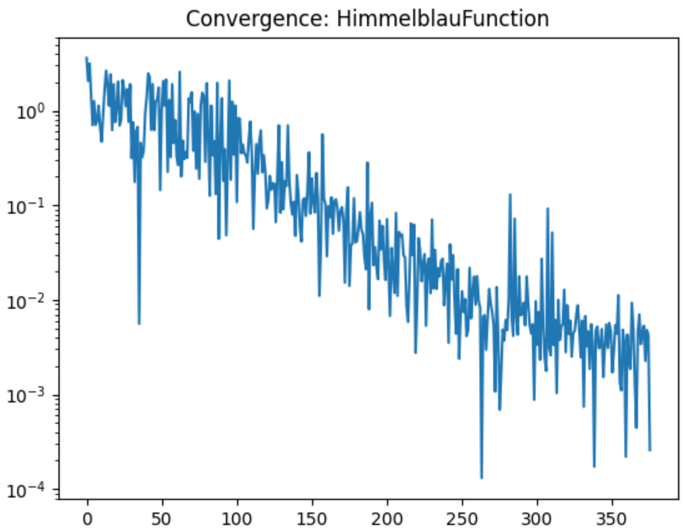

Рис. 8: Сходимость алгоритма

(На рисунке 8 считается расстояние до ближайшей реальной точки минимума)

5 Обсуждение

5.1 Выявление радиуса элементов матрицы, при котором она становиться особенной

Из результатов видно, что матрица 1 становиться особенной при большем радиусе элементов $\varepsilon = 0.05$, чем матрица 2, для которой $\varepsilon = 0.0244$. Что неудивительно, так как множество всех точечных матриц 1 содержиться в множестве всех точечных матриц 2..
Так же стоит отметить, что для матрица 1 признак Румпа дал неверное значение радиуса $\varepsilon = 0.0345$, так как признак Румпа не является достаточным условием для особенности матрицы.
Также можно рассмотреть матрицу не линейной, а полиномиальной регресии. Она будет иметь вид:

$$X = \begin{pmatrix} x_1^n & ... & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^n & ... & x_2^2 & x_2 & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ x_m^n & ... & x_m^2 & x_m & 1 \end{pmatrix} \tag{12}$$

Рассмотрим пример. Интервальная матрица 1 становиться особенной при $\varepsilon = 0.05$. Перейдём к матрице полиномиальной регресии:

$$\begin{pmatrix} [a-\varepsilon, a+\varepsilon]^2 & [a-\varepsilon, a+\varepsilon] & 1 \\ [1-\varepsilon, 1+\varepsilon]^2 & [1-\varepsilon, 1+\varepsilon] & 1 \\ [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon]^2 & [1.1-\varepsilon, 1.1+\varepsilon] & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Эта интервальная матрица содержит точечную матрицу

$$\begin{pmatrix} a^2 & a & 1 \\ 1.05^2 & 1.05 & 1 \\ 1.05^2 & 1.05 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

которая для любого a будет особенной (что видно, если, например, разложить определитель этой матрицы по первой строке). Таким образом, если интервальная матрица является особенной, тогда и матрица для полиномиальной регресии большего порядка будет особенной. Отсюда можно сделать вывод, что радиус ε, при котором матрица полиномиальной регресии становиться особенной не уменьшается с увеличением степени полинома.

5.2 Глобальная оптимизация

Из рисунка 1 видно, как в увеличивается количество брусов, и как уменьшается радиус брусов в окрестности точки минимума. Также из рисунка 2 видно, с увеличением номера итерации центры брусов из рабочего списка сгущаются в окрестности точки минимума. Стоит отметить, что в для обеих функций радиусы(имеется в виду максимальный радиус из обоих интервалов) брусов в рабочем списке увеличиваются не равномерно. Из рисунка 5 видно, что алгоритм глобальной оптимизации находит все минимумы функции Химмельблау: в окрестности всех точек минимума заметно сильное дробление брусов. Точка минимума "мечется"между окрестностемя реальных точек минимума, при этом это "метание"никак неупорядоченно, что вижно на рисунке 6 На рисунках 2, 6 можно заметить, что несколько первых итерация алгоритм почти никак не приближается к точке минимума, и только с некоторой итерации начинает приближаться стабильно улучшать значение. Что также подтверждают рисунки 4, 8: примерно на пятидесяти первых итерациях расстояние до реальной точки минимума не уменьшается (за исклюяением редких выбросов). Но после пятидесятой итерации наблюдается стабильное (хотя и не монотонное) приближение к точке минимума.