

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ  
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

**Интервальный анализ**  
**Отчёт по лабораторной работе №2**

Выполнил:

Студент: Аникин Александр  
Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент  
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

# Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
1.1	Линейный случай . . . . .	2
1.2	Нелинейный случай . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>3</b>
2.1	Линейный метод Кравчика . . . . .	3
2.2	Общий метод Кравчика . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Реализация</b>	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Результаты</b>	<b>4</b>
4.1	Линейный случай . . . . .	4
4.2	Нелинейный случай . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>8</b>

# 1 Постановка задачи

## 1.1 Линейный случай

Выбрать ИСЛАУ  $2 \times 2$  вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $a, b$  - положительные числа,  $c, k$  - положительные интервалы.

Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.

- Определить спектральный радиус матрицы
- Провести оценку начального бруса решений

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусков при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусков
- Сходимость алгоритма

## 1.2 Нелинейный случай

Выбрать систему вида:

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ \frac{x_1}{x_2} = k \end{cases} \quad (2)$$

где  $a, b$  - положительные числа,  $c, k$  - положительные интервалы.

Оценить внешнее множество решений этой системы методом Кравчика.

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Положения брусков при итерациях
- Графики радиусов рабочих брусков
- Сходимость алгоритма

## 2 Теория

### 2.1 Линейный метод Кравчика

Рассматриваем ИСЛУА  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ .

Выбираем начальное приближение  $\mathbf{x}^{(0)}$  так, чтобы  $\Xi_{uni} \subseteq \mathbf{x}^{(0)}$  и затем итерируем:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (\Lambda \mathbf{b} + (I - \Lambda \mathbf{A})\mathbf{x}^{(k)}) \cap \mathbf{x}^{(k)}, k = 0, 1, \dots \quad (3)$$

где  $\Lambda$  - некоторая фиксированная точечная матрица, которая является предобуславливающей матрицей для исходной ИСЛАУ.

Обычно  $\Lambda$  берут следующим образом.

$$\Lambda = (\text{mid}\mathbf{A})^{-1} \quad (4)$$

Если  $\eta = \|I - \Lambda \mathbf{A}\|_{\infty} \leq 1$ , тогда в качестве начального приближения можно выбрать брус:

$$\mathbf{x}^{(0)} = ([-\theta, \theta], \dots, [-\theta, \theta])^T \quad (5)$$

где  $\theta = \frac{\|\Lambda \mathbf{b}\|_{\infty}}{1-\eta}$ .

Предложение. Итерационный процесс

$$x^{(k+1)} = C(x^{(k)}) + d, k = 0, 1, \dots \quad (6)$$

сходится, когда  $\rho(|C|) \leq 1$ , где  $|C|$  - матрица составленная из модулей элементов  $C$ .

### 2.2 Общий метод Кравчика

Пусть на бресе  $\mathbf{X} \in IR$  задана система  $n$  линейных уравнений с  $n$  неизвестными:

$$F(x) = 0 \quad (7)$$

где  $F(x) = \{F_1(x), \dots, F_n(x_n)\}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Оператором Кравчика относительно точки  $\bar{x}$  называется отображение  $K : ID \times R \rightarrow IR^n$ :

$$K(\mathbf{X}, \bar{x}) = \bar{x} - \Lambda \cdot F(\bar{x}) - (I - \Lambda \cdot \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{X} - \bar{x}) \quad (8)$$

где  $\mathbf{L}$  - интервальная матрица Липшица отображения  $F$  на бресе  $\mathbf{X}$ ,  $\Lambda$  - некоторая точечная матрица, выполняющая роль предобуславливателя. Тогда итерационный процесс:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{X}^{(k)} \cap K(\mathbf{X}^{(k)}, \bar{x}^{(k)}) \quad (9)$$

где  $k = 0, 1, 2, \dots$ , и  $\bar{x}^{(k)} \in \mathbf{X}^{(k)}$ , сходится для некоторого начального бруса  $\mathbf{X}^{(0)}$ .

В качестве интервальной матрицы  $\mathbf{L}$  можно взять Якобиан  $J(\mathbf{X})$ , а в матрицу  $\Lambda = (\text{mid}J(\mathbf{X}))^{-1}$

### 3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки Visual Studio Code.

### 4 Результаты

#### 4.1 Линейный случай

Рассмотрим систему:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ 1 \cdot x_1 - [1, 2] \cdot x_2 = 0 \end{cases} \quad (10)$$

Матрица  $I - \Lambda A$  имеем вид:

$$\begin{pmatrix} [0, 0] & [-0.25, 0.25] \\ [0, 0] & [-0.167, 0.167] \end{pmatrix} \quad (11)$$

Тогда  $\rho(|I - \Lambda A|) \approx 0.1667$ , значит итерационный процесс 3 сходиться.

Дадим оценку начального бруса:

$\eta = \|I - \Lambda A\|_\infty = 0.25 < 1$ , тогда справедлива оценка 5. Вычисляя коэффициент  $\theta$ , получим  $\theta \approx 1.667$ .

Критерий останова: малость изменения бруса,  $\varepsilon < 10^{-16}$ .

Процесс остановился после 22 итераций в точке:  $\mathbf{x} = ([0.750, 1.50], [0.50, 1.00])^T$ .

Приведём соответствующие иллюстрации:

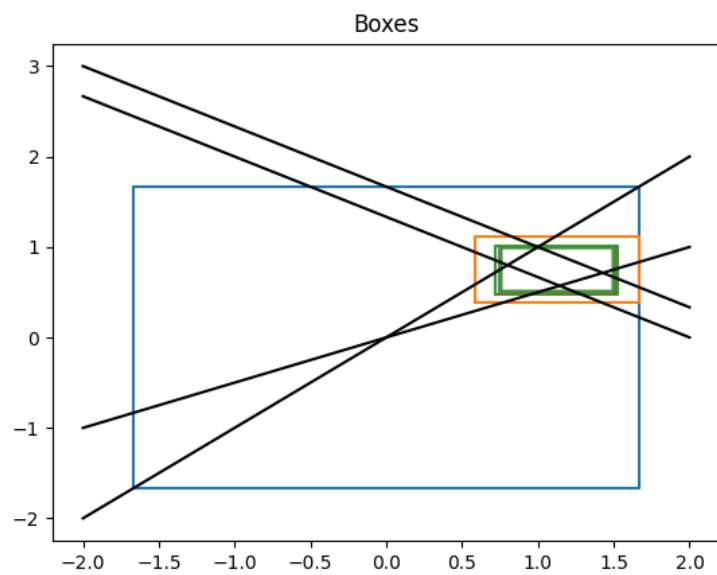


Рис. 1: Положения брусков при итерациях

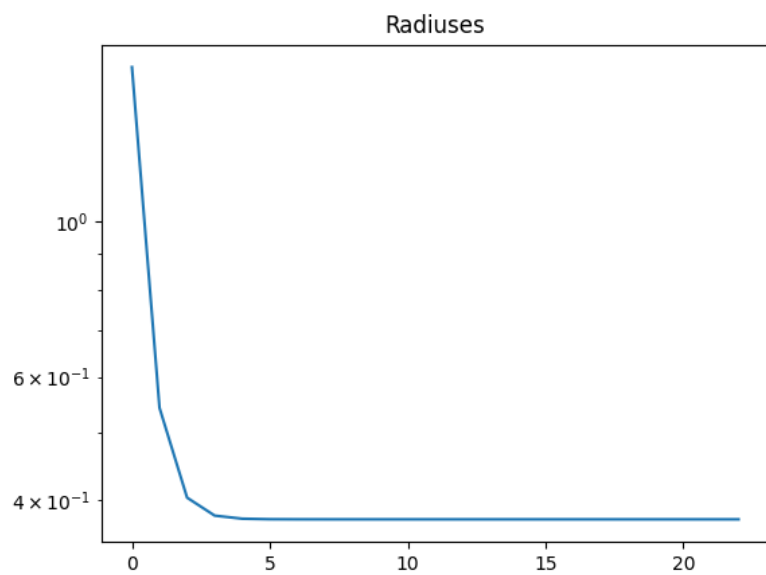


Рис. 2: График радиусов рабочих брусков

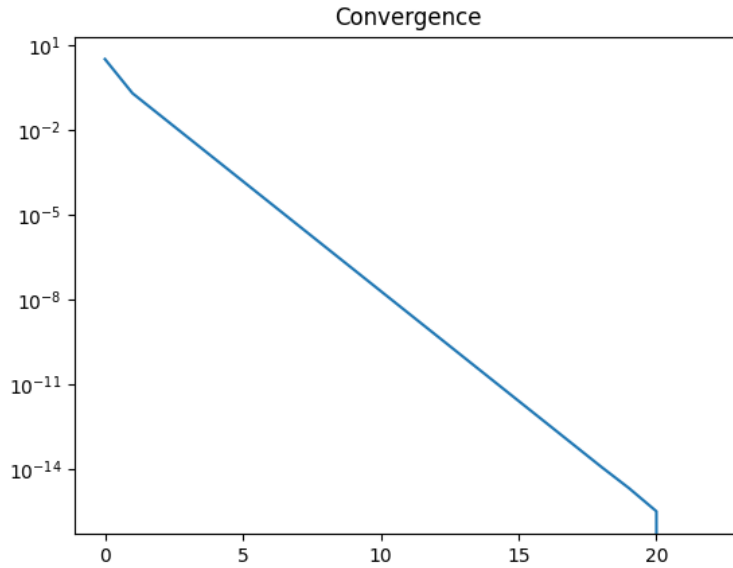


Рис. 3: Сходимость алгоритма

## 4.2 Нелинейный случай

Рассмотрим систему с теми же коэффициентами  $a, b$  и интервалами  $c, k$ , что и в 10:

$$\begin{cases} 2 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 = [4, 5] \\ \frac{x_1}{x_2} = [1, 2] \end{cases} \quad (12)$$

В качестве начального возьмём брус  $X^{(0)} = ([0.25, 4], [0.25, 4])^T$ .

Критерий останова: малость изменения бруса,  $\varepsilon < 10^{-16}$ .

Процесс остановился на 174 итерации в точке:  $\mathbf{x} = ([0.250, 2.111], [0.250, 1.412])^T$ .

Приведём соответствующие иллюстрации:

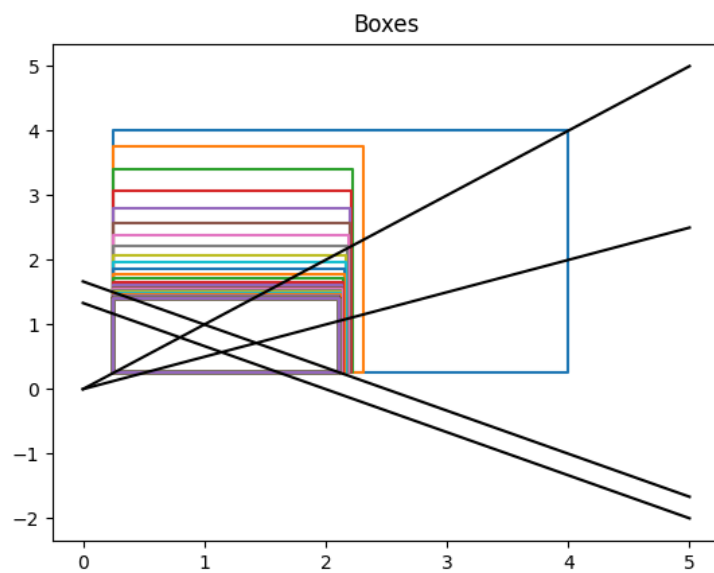


Рис. 4: Положения брусов при итерациях

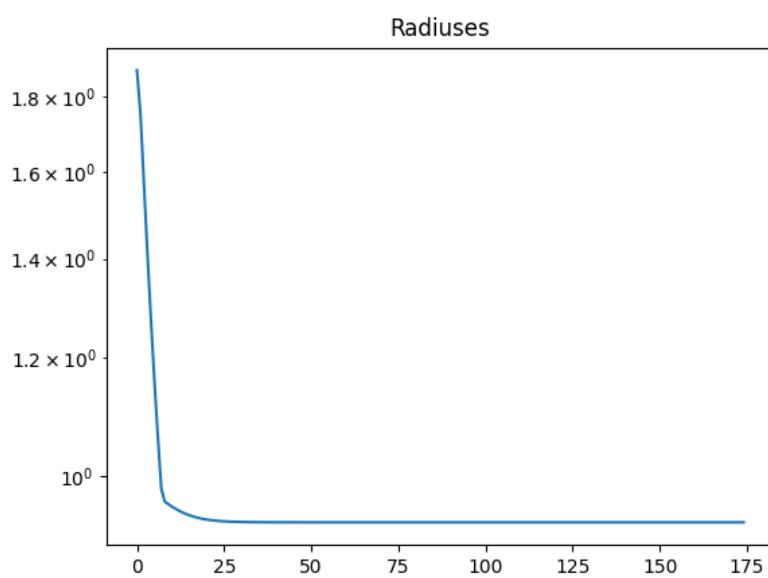


Рис. 5: График радиусов рабочих брусков



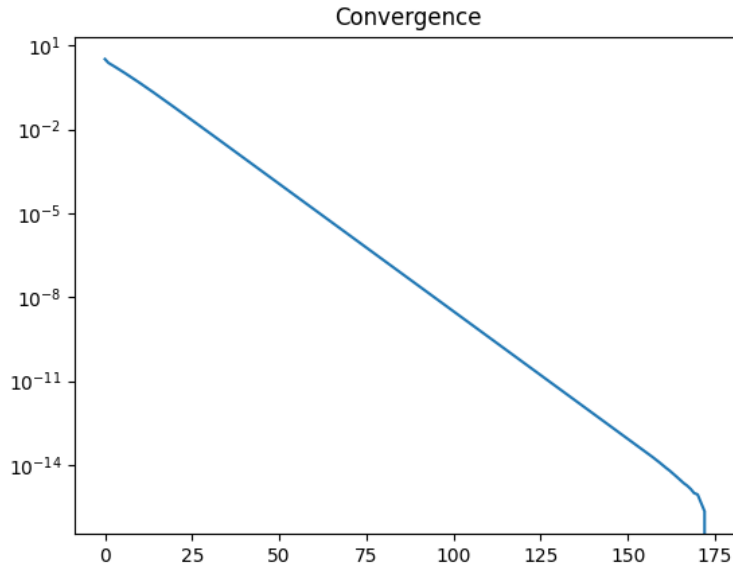


Рис. 6: Сходимость алгоритма

## 5 Обсуждение

Сначала отметим, что системы 10 и 12 имеют одинаковое объединённое множество решений, что также видно на рисунках 1, 4. На рисунках 1 и 4 видно, как с каждой итерацией уменьшается брус, только для линейного случая наблюдается куда более быстрая сходимость. Через три итерации радиус бруса почти перестаёт изменяться, а центр бруса почти не перемещается, что также подтверждают рисунки 2, 3. В свою очередь для нелинейного случая наблюдается куда более медленная сходимость: для достижения той же точности требуется на порядок больше итераций, также на каждой итерации заметно уменьшение радиуса бруса и смещение его центра, рисунки 5, 6. При этом в линейном случае брус значительно лучше приближает множество решений системы и со всех сторон почти "касается" множества решений. Также стоит отметить, что на рисунке 4 видно, как брус приближается только с двух сторон, и никак не улучшает нижнюю оценку по каждой их координат.