Санкт-Петербургский политехнический университет имени
Петра Великого

Институт прикладной математики и механики

Кафедра прикладной математики

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №3

Выполнил:

Студент: Аникин Александр
Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

1 Постановка задачи

Выбрать ИСЛАУ 3×2

$$\begin{cases} a \cdot x_1 + b \cdot x_2 = c \\ 1 \cdot x_1 - k \cdot x_2 = 0 \\ d \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = e \end{cases} \tag{1}$$

где a, b, c, d, e - положительные интервалы, k - положительное число такие, что система 1 несовместна.
Провести вычисления:

- Максимума распознающего функционала
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счёт коррекции правой части
- Достижения разрешимости ИСЛАУ за счёт коррекции матрицы
- Оценки вариабельности решения

А также для системы исследовать управление положением решения системы 1:

- Провести исследование управления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом
- Провести исследование управления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы построчно (по уравнениям)

2 Теория

2.1 Изменение правой части

Введём распознающий функционал:

$$\mathrm{Tol}(x) = \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{1 \le i \le m} (\mathrm{rad}\mathbf{b}_i - |\mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j|) \tag{2}$$

который характеризует "дефицит разрешимости". Если $maxtol = \max_x \mathrm{Tol}(x) < 0$, то ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна.
Для системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b} + C\mathbf{e}$ (где $\mathbf{e} = ([-1, 1], ..., [-1, 1])^T, C > 0$) с уширенной правой частью значение распознающего функционала равно: $\max_x \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}+$

$C\mathbf{e} = \max_x \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b}) + C)$.
Более эффективно расширять разные компоненты правой части по-разному, для этого к правой части будем добавлять: $b + C\nu_i \cdot [-1, 1], i = 1, ..., m$, где ν_i - индивидуальные веса для разных компонент. И тогда оперируем модифицированным распознающим функционалом:

$$\mathrm{Tol}_\nu(x) = \min_{1 \le i \le m}(\nu_i^{-1}(\mathrm{rad}\mathbf{b}_i - |\mathrm{mid}\mathbf{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_{ij} x_j|)) \tag{3}$$

Если системы $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ не имела решения, то система с расширенной правой частью $\mathbf{b} + C\nu \cdot \mathbf{e}$ при $C > |maxtol_v| = |\mathrm{Tol}_v(x)|$ становится разрешимой. Наиболее важный частный случай $\nu_i = |\mathbf{b}_i|, i = 1, ..., m$ для ненулевых $\mathbf{b}_i$.

2.2 Изменение матрицы

Пусть ИСЛАУ $\mathbf{A}x = \mathbf{b}$ несовместна, $\tau = \arg\max \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A}, \mathbf{b})$ и $\mathrm{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = T < 0$. При условии, что у ИСЛАУ:

- все компоненты вектора правой части $\mathbf{b}$ являются не невырожденными интервалами ($\mathrm{rad}\mathbf{b}_i > 0, \forall i = 1, ..., m$)
- в каждой строке матрицы $\mathbf{A}$ существуют элементы с ненулевой шириной ($\sum_{j=1}^{n} \mathrm{rad}\mathbf{a}_{ij} > 0, \forall i = 1, ..., m$)

можно добиться совместности системы следующим образом.
Используя величины $|\tau_i|$ в качестве весовых множителей, посчитаем $\min_{1 \le i \le m}(\sum_{j=1}^{n} |\tau_i| \mathrm{rad}\mathbf{a}_{ij}) = \Delta$. Построим интервальную матрицу $m \times n$ $E = (\mathbf{e}_{ij})$, где $\mathbf{e}_{ij} = [-e_{ij}, e_{ij}]$ такие, что $\sum_{j=1}^{n} e_{ij}\tau_j = K, i = 1, ..., m$. K - некоторая положительная константа $0 < K \le \Delta$, и $\mathbf{a}_{ij} \ge e_{ij} \ge \forall i, j$.
Тогда ИСЛАУ с тем же вектором правых частей $\mathbf{b}$ и матрицей $\mathbf{A} \ominus \mathbf{E}$ является "менее неразрешимой".
$\max_x \mathrm{Tol}(x, \mathbf{A} \ominus \mathbf{E}, \mathbf{b}) \ge K + \mathrm{Tol}(\tau, \mathbf{A}, \mathbf{b}) = K + T$.

2.3 Оценивание вариабельности решения

Для интервально заданных величин имеют место две оценки:

Оценка абсолютной вариабельности:

$$\mathrm{ive}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \mathrm{cond} A \cdot ||\arg\max \mathrm{Tol}|| \cdot \frac{\max \mathrm{Tol}}{||\mathbf{b}||} \tag{4}$$

Оценка относительной вариабельности:

$$\mathrm{rve}(\mathbf{A}, \mathbf{b}) = \min_{A \in \mathbf{A}} \mathrm{cond} A \cdot \max \mathrm{Tol} \tag{5}$$

3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки: Visual Studio Code.

4 Результаты

Рассмотрим ИСЛАУ:

$$\begin{cases} [0.5, 1.5] \cdot x_1 + [1.5, 2.5] \cdot x_2 = [3, 5] \\ 1 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 = 0 \\ [-0.5, 0.5] \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = [-1, 1] \end{cases} \tag{6}$$

Проверим несовместность системы 6. $argmax = [2.182, 0.909], maxtol = -0.545 < 0$, значит система не совместна.

4.1 Коррекция правой части

Так как в правой части ИСЛАУ 6 есть нуль, то нельзя воспользоваться модифицированным распознающим функционалом с $\nu_i = |\mathbf{b}_i|$. Поэтому будем использовать распознающий функционал 2.
После коррекции правой части получили следующий вектор правых частей:

$$\mathbf{b}^{'} = ([2.456, 5.545], [-0.545, 0.545], [-1.545, 1.545])^T \tag{7}$$

И система $\mathbf{A}x = \mathbf{b}^{'}$ совместна: $argmax = (2.182, 0.909), maxtol = 3.5 \cdot 10^{-8}$.
Оценки вариабельности:
$\mathrm{ive} = 3.7 \cdot 10^{-8}, \mathrm{rve} = 9.2 \cdot 10^{-8}$.

4.2 Коррекция матрицы

Так как для ИЛАУЮ 6 не выполнены условия из пункта 2.2, то метод из 2.2 неприменим. Поэтому поступим следующим образом: на каждой итреции будем уменьшать радиусы интревалов в матрице в 2 раза до тех пор, пока максимальное значение распознающего функционала не станет положительным (или хотя бы близким к нулю). После сужения элементов матрицы получили следующую матрицу:

$$\mathbf{A}^{'} = \begin{pmatrix} [0.9843, 1.0156] & [1.9843, 2.0156] \\ 1 & -3 \\ [-0.0156, 0.0156] & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

И система $\mathbf{A}^{'}x = \mathbf{b}$ совместна $argmax = (1.823, 0.608), maxtol = 10^{-11}$.
Оценки вариабельности:
$\mathrm{ive} = 9.9 \cdot 10^{-12}, \mathrm{rve} = 2.6 \cdot 10^{-11}$.

4.3 Управление аргументом решения ИСЛАУ

Управления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом

В каждой строке на каждой итерации радиусы интервалов уменьшаются в 2 раза. Поэтому координаты каждой точки argmax (за исключением последней) в 2 раза больше координат предыдущей

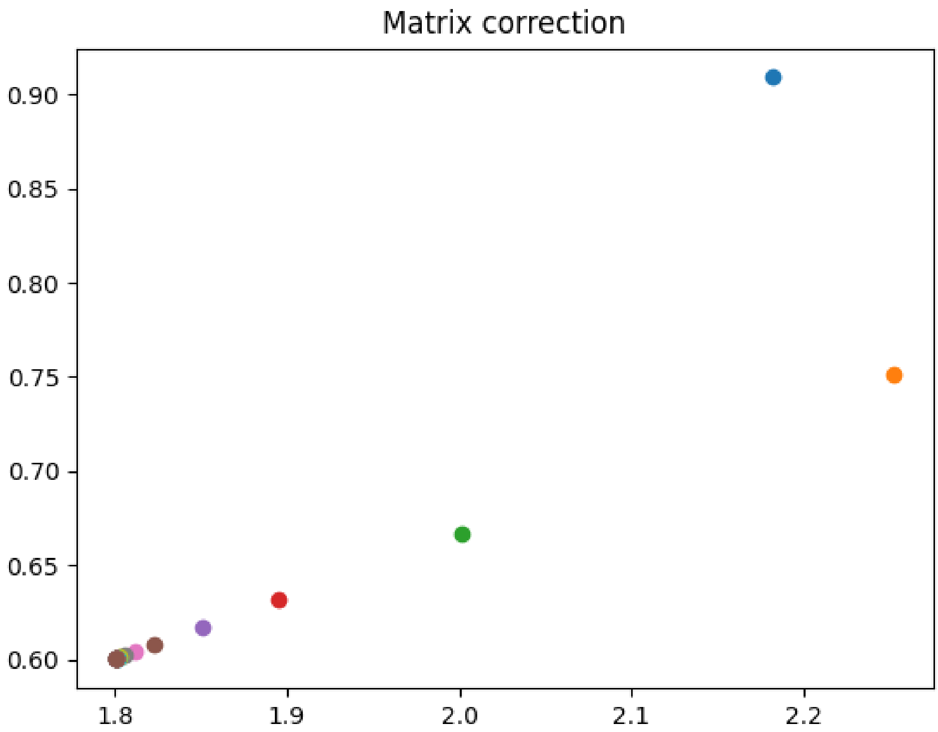

Рис. 1: Положение решения за счёт радиусов элементов матрицы в целом

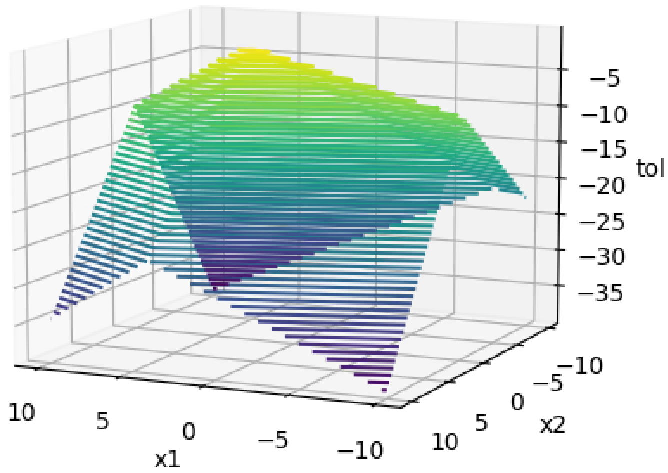

Рис. 2: График $Tol(x_1, x_2)$

Управления положением решения за счёт радиусов элементов матрицы построчно

На каждой итерации уменьшаются радиусы только в одной строке в 2 раза.

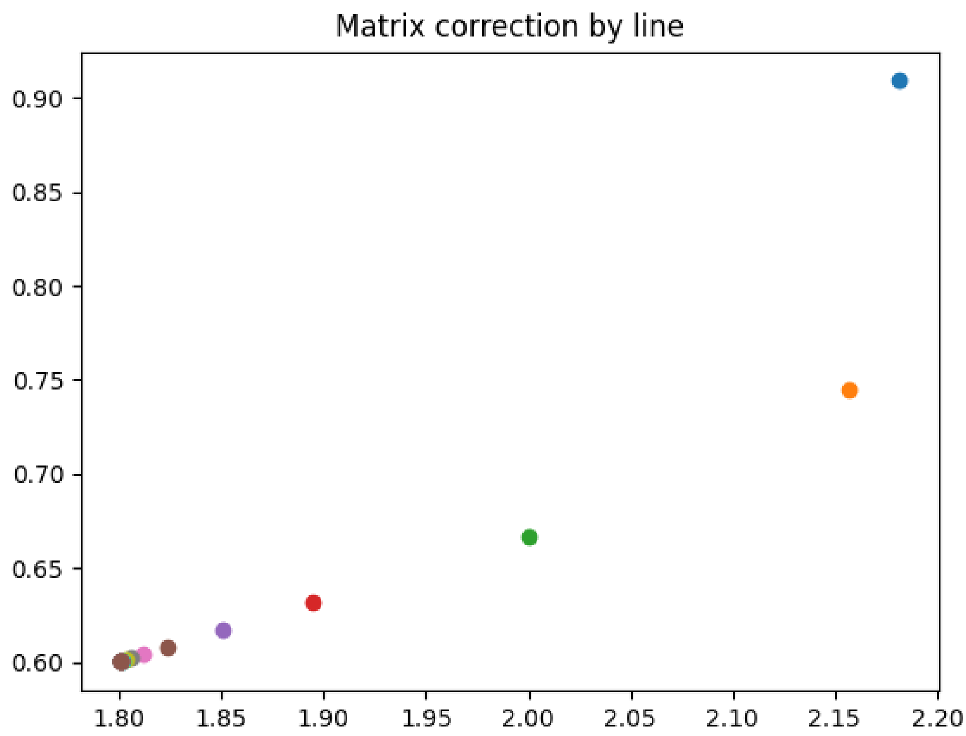

Рис. 3: Положение за счёт радиусов элементов матрицы в первой строке

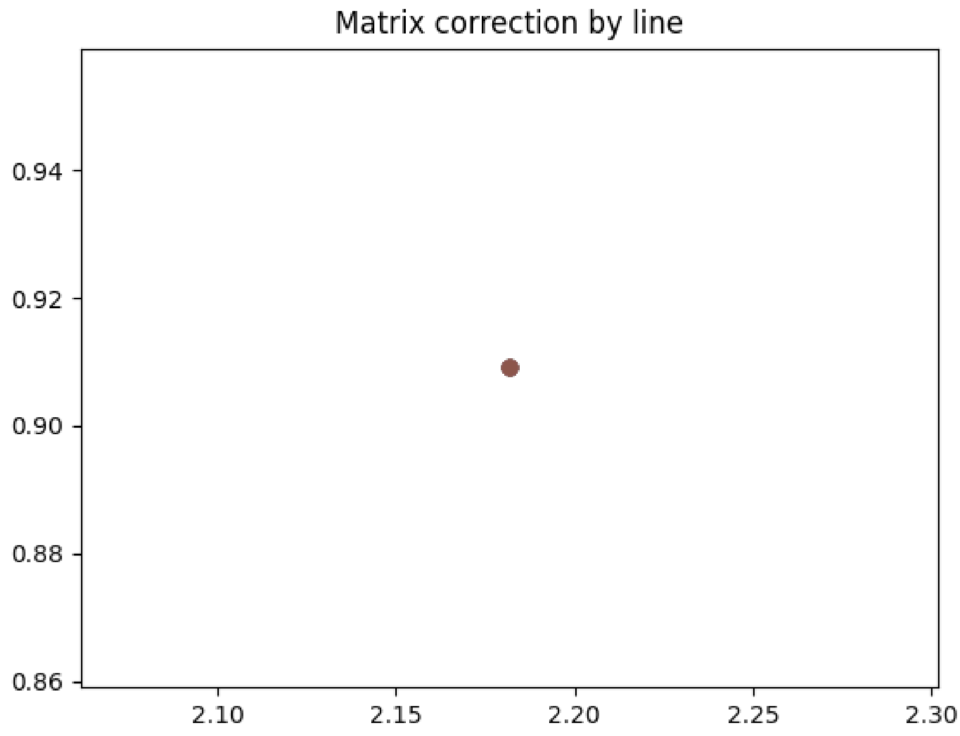

Рис. 4: Положение за счёт радиусов элементов матрицы в третьей строке

5 Обсуждения

Из результатов видно, что в случае изменения правой части точка максимума распознающего функционала не меняется после расширения интервалов в векторе правых частей. А в случае с изменением матрицы значение максимума изменяется, при чем все значения максимума, кроме начального, лежат на одной прямой, что видно на рисунке 2. Также стоит отметить, что коррекция матрицы даёт меньшие значения для оценок вариабельности ive, rve.

Рисунки 2, 3 сильно похожи, положение точки максимума распознающего функционала отличаются только на первых итерациях при сужении интервалов, и то не сильно, а сами точки лежат на одно прямой, соответствующей второму уравнению системы 6. Отсюда можно сделать вывод, что для системы 6 наибольший вклад в изменение точки максимума распознающего функционала вносит первое уравнение системы. Второе уравнение не может вносить изменения, так как не содержит интервальных величин. А на рисунке 4 видно, что сужение интервала в только в третьем уравнении никак не влияет на положение точки максимума распознающего функционала, что подтверждает предыдущий вывод.