

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ПЕТРА ВЕЛИКОГО

ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

Интервальный анализ
Отчёт по лабораторной работе №4

Выполнил:

Студент: Аникин Александр
Группа: 3630102/80201

Принял:

к. ф.-м. н., доцент
Баженов Александр Николаевич

2022 г.

Содержание

1	Постановка задачи	2
1.1	Получение решения по теореме Зюзина	2
1.2	Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона	2
2	Теория	2
2.1	Теорема Зюзина	2
2.2	Субдифференциальный метод Ньютона	3
3	Реализация	4
4	Результаты	4
4.1	Получение решения по теореме Зюзина	4
4.2	Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона	6
5	Обсуждения	10

1 Постановка задачи

1.1 Получение решения по теореме Зюзина

Выбрать ИСЛАУ 2×2 . Построить итерационную схему с разложением матрицы на диагональную и недиагональную части.

Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Радиусов решения в зависимости от номера итерации

1.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Для ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 3] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (1)$$

построить итерационную схему субдифференциального метода Ньютона. Провести вычисления и привести иллюстрации:

- Брусов итерационного процесса
- Сравнить результаты с решением ИСЛАУ

$$\begin{pmatrix} [3, 4] & [5, 6] \\ [-1, 1] & [-3, 1] \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} [-3, 4] \\ [-1, 2] \end{pmatrix} \quad (2)$$

2 Теория

2.1 Теорема Зюзина

Говорят, что квадратная интервальная $n \times n$ матрица \mathbf{A} имеет диагональное преобладание, если для любого $i = 1, 2, \dots, n$, если

$$\langle \mathbf{a}_{ii} \rangle > \sum_{j \neq i} |\mathbf{a}_{ij}| \quad (3)$$

$\langle \mathbf{a} \rangle$ - мигнитуда интервала.

Теорема Зюзина

Для ИСЛАУ

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (4)$$

где $\mathbf{C} \in KR^{n \times n}$, $\mathbf{d} \in KR^n$. Правильная проекция матрицы \mathbf{C} имеет диагональное преобладание. Тогда решение системы существует и единственно. Пусть $\mathbf{D} = \text{diag}\{\mathbf{c}_{11}, \mathbf{c}_{22}, \dots, \mathbf{c}_{nn}\}$, \mathbf{E} - матрица, полученная из \mathbf{C} занулением диагональных элементов. Тогда для некоторого x^0 итерационный процесс:

$$x^{k+1} = \text{inv}\mathbf{D}(\mathbf{d} \ominus \mathbf{E}x^{(k)}), k = 0, 1, \dots \quad (5)$$

в силу диагонального преобладания \mathbf{C} будет сходиться к единственной неподвижной точке.

2.2 Субдифференциальный метод Ньютона

Рассматриваем ИСЛАУ:

$$\mathbf{C}x = \mathbf{d} \quad (6)$$

Отображение $\text{si} : KR^n \rightarrow R^{2n}$ вида

$$(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n) \rightarrow (\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_n, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) \quad (7)$$

называется простейшим погружением.

Для решения индуцированных уравнения $G(y) = 0$ такого что

$$G(y) = \text{si}(\mathbf{C}\text{si}^{-1}(\mathbf{y})) - \text{si}(\mathbf{d}) \quad (8)$$

в R^{2n} развит субдифференциальный метод Ньютона:

Выбираем некоторое начальное приближение $x^0 \in R^{2n}$. Если $(k-1)$ приближение $x^{(k-1)} \in R^{2n}$, $k = 1, 2, \dots$ уже найдено, то вычисляем какой-нибудь субградиент $D^{(k-1)}$ отображение G в точке $x^{(k-1)}$ и полагаем

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \tau(D^{(k-1)})^{-1}G(x^{(k-1)}) \quad (9)$$

где $\tau \in [0, 1]$ - некоторая константа. Начальное приближение можно найти из решения "средней" системы.

$$(\text{mid}\mathbf{C})' \cdot x^{(0)} = \text{sid} \quad (10)$$

где через $'$ обозначена точечная матрица вида:

$$A = \begin{pmatrix} A^+ & -A^- \\ -A^- & A^+ \end{pmatrix} \quad (11)$$

3 Реализация

Язык программирования: Python. Среда разработки: Visual Studio Code.

4 Результаты

4.1 Получение решения по теореме Зюзина

Возьмём матрицу

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} [5, 6] & [3, 4] \\ [-1, 1] & [2, 3] \end{pmatrix} \quad (12)$$

и вектор $\mathbf{x} = ([1, 2], [2, 4])^T$ и построим вектор правых частей:

$$\mathbf{b} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{x} = \begin{pmatrix} [11, 28] \\ [2, 14] \end{pmatrix} \quad (13)$$

Будем рассматривать систему:

$$\begin{cases} [5, 6] \cdot x_1 + [3, 4] \cdot x_2 = [11, 28] \\ [-1, 1] \cdot x_1 + [2, 3] \cdot x_2 = [2, 14] \end{cases} \quad (14)$$

В качестве начального приближения возьмём точку $\mathbf{x}^{(0)} = ([-10, 10], [-10, 10])^T$

Видно, что интервальная матрица \mathbf{C} имеет диагональное преобладание.

Значит для ИСЛАУ 14 справедлива теорема Зюзина.

Критерий останова итерационного процесса 5 - малость изменения бруса на текущей итерации относительно бруса на предыдущей итерации: $\varepsilon < 10^{-16}$.

Процесс остановился после 52 итераций в точке $\mathbf{x} = ([1.0, 2.0], [2.0, 4.0])^T$.

Приведём соответствующие иллюстрации:

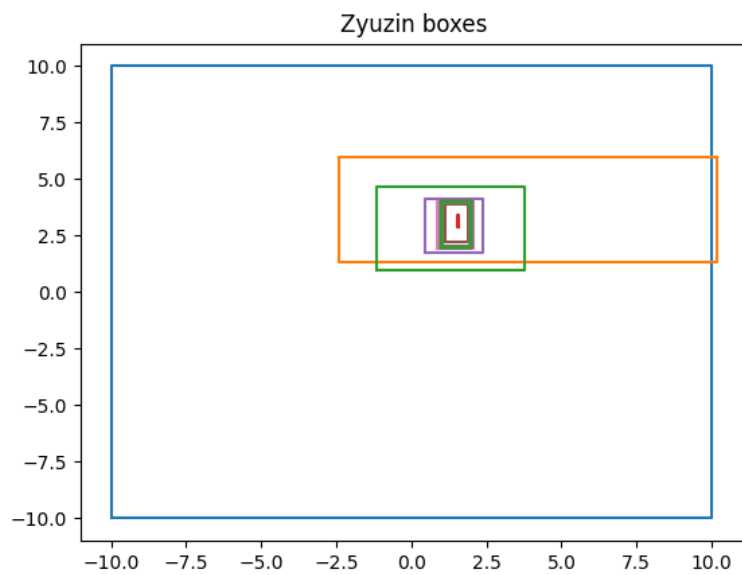


Рис. 1: Положения брусов при итерациях

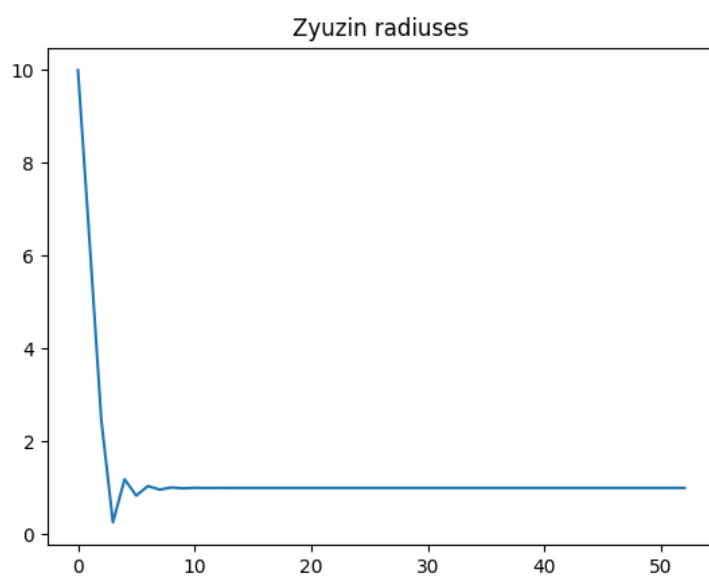


Рис. 2: График радиусов брусов в зависимости от номера итерации

4.2 Получение формального решения ИСЛАУ субдифференциальным методом Ньютона

Сначала рассмотрим решение системы 1.

Критерий останова итерационного процесса 9 - малость изменения бруса на текущей итерации относительно бруса на предыдущей итерации: $\varepsilon < 10^{-16}$. Параметр $\tau = 1$.

Процесс остановился после 4 итераций в точке $\mathbf{x} = ([0.0, 0.5], [-0.5, 0.167])^T$. Приведём соответствующие иллюстрации.

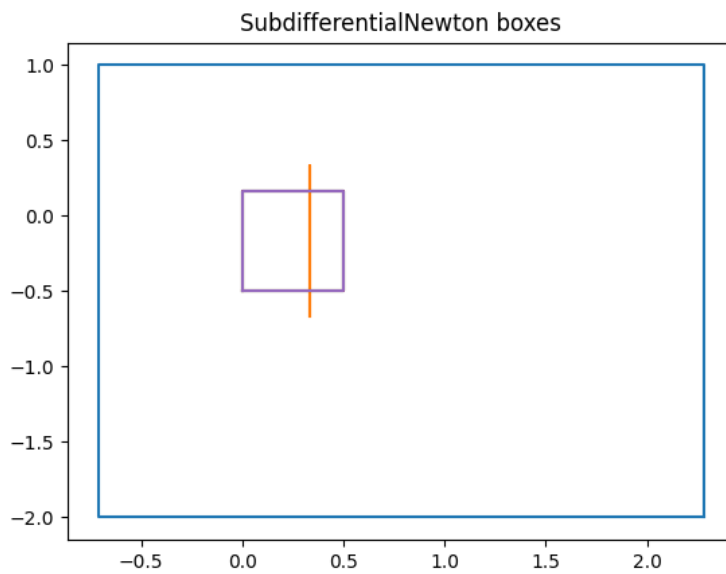


Рис. 3: Положения брусков при итерациях

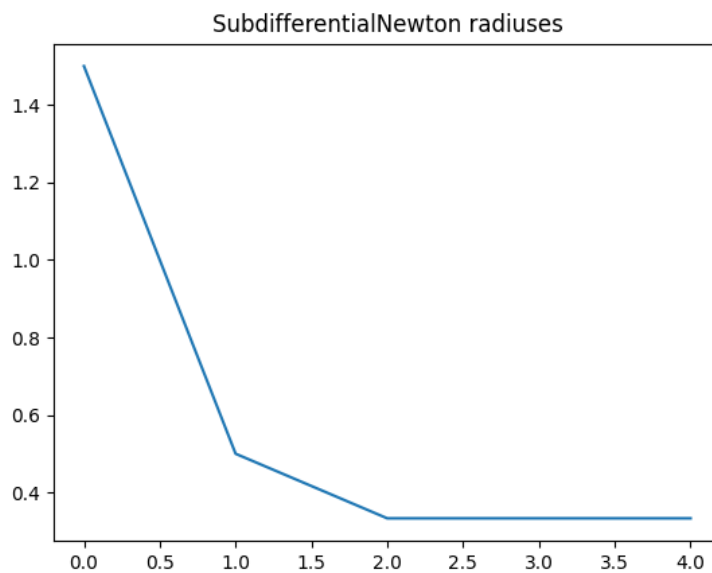


Рис. 4: График радиусов брусков в зависимости от номера итерации

Теперь рассмотрим решение системы 1.2.

Итерационный процесс не сходится, а через 8 итерации уходит в цикл длиной 4 точки. Параметр $\tau = 1$. Соответствующие иллюстрации для первых 100 итераций.

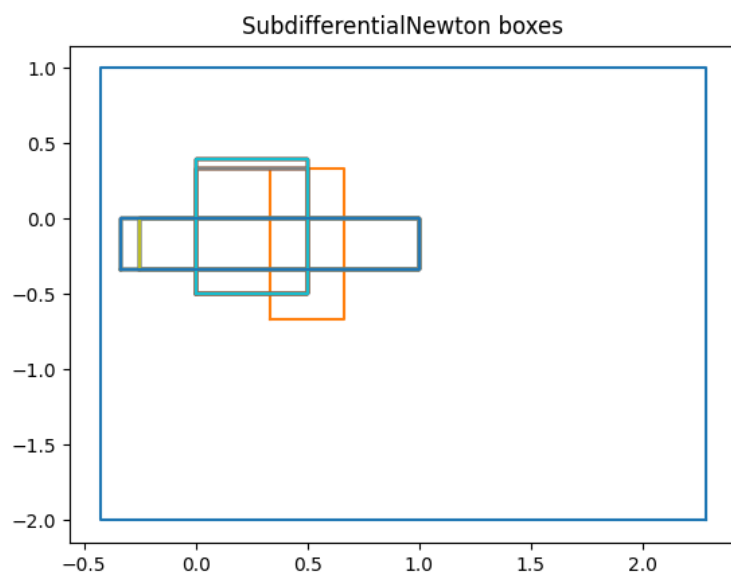


Рис. 5: Положения брусов при итерациях, $\tau = 1$

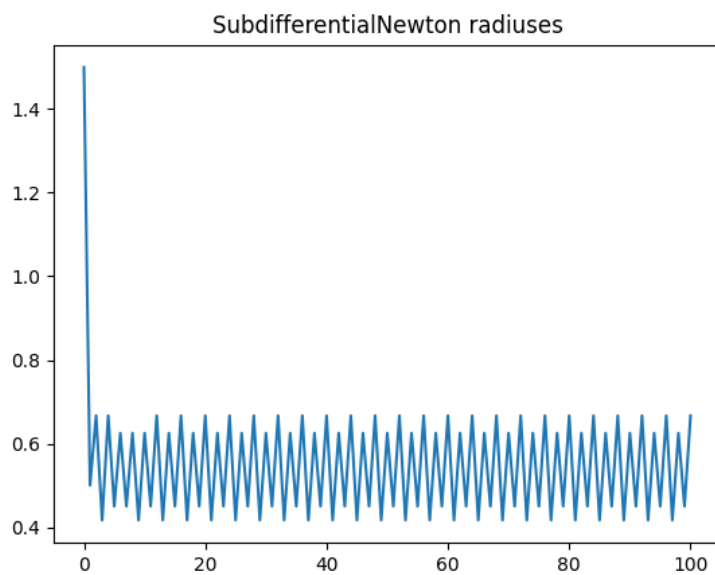


Рис. 6: График радиусов брусов в зависимости от номера итерации, $\tau = 1$

Уменьшим параметр $\tau = 0.1$. Соответствующие иллюстрации для пер-

вых 100 итераций.

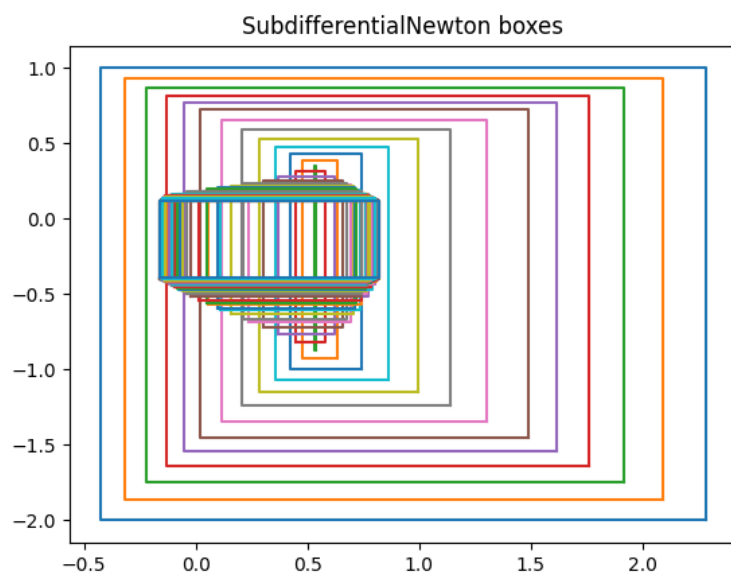


Рис. 7: Положения брусков при итерациях, $\tau = 0.1$

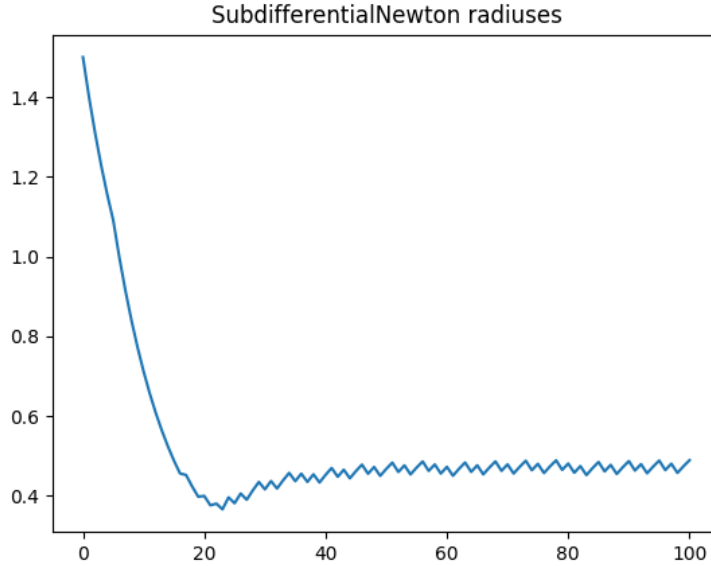


Рис. 8: График радиусов брусков в зависимости от номера итерации, $\tau = 0.1$

Итерационный процесс также не сходится, как и в случае с $\tau = 1$, а ходит по циклу той длины 5.

5 Обсуждения

Из результатов решения системы 14 видно, что итерационная схема с разложением матрицы на диагональную и недиагональную для системы, удовлетворяющей условию теоремы Зюзина, сходиться. На рисунках 1 - 2 можно заметить, что до четвёртой итерации радиус бруса монотонно убывает и, достигнув минимального значения, которое сильно меньше радиуса бруса решения, на четвёртой итерации, затем постепенно начинает сходиться к решению системы.

Из результатов решения систем 1, 1.2 видно, что у субдифференциального метода Ньютона могут возникнуть проблемы со сходимостью. Итерационный процесс 9 для системы 1 сходится достаточно быстро. В свою очередь для системы 1.2 процесс не сходится, а заиклиивается. В таком случае подбор параметра τ может улучшить ситуацию:

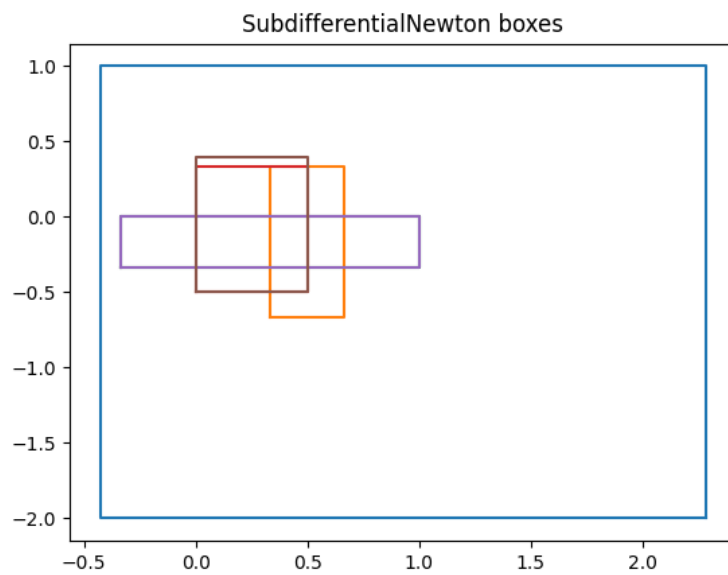


Рис. 9: Цикл брусьев при итерациях, система 1.2, $\tau = 1$

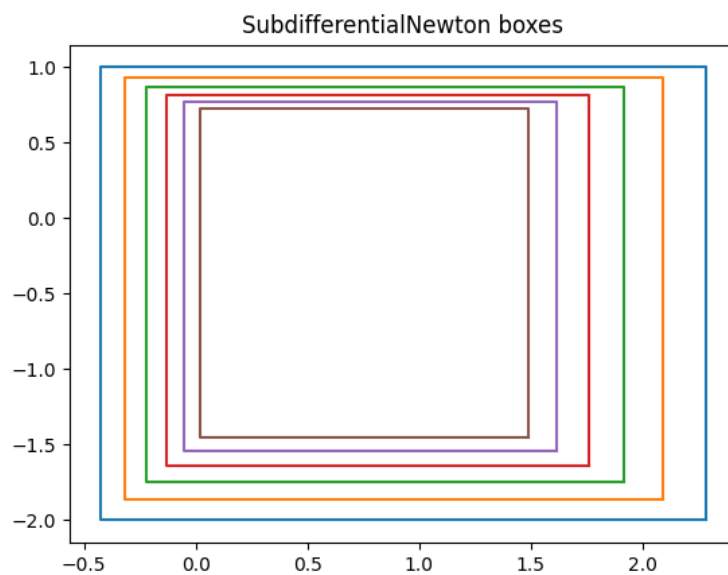


Рис. 10: Цикл брусьев при итерациях, система 1.2, $\tau = 0.1$

На рисунках 9 - 10 видно, что при значении $\tau = 0.1$ брусья в цикле

изменяются на каждой итерации меньше, чем при $\tau = 1$. Хотя радиус брусьев почти не меняется при разных значениях τ , что видно на рисунках 6, 8. Также стоит отметить, что при $\tau = 0.1$ средний брус в цикле $\mathbf{x} = ([-0.15, 0.8], [-0.4, 0.13])$ достаточно близко к решению системы 1.2.