

Санкт-Петербургский политехнический университет  
Петра Великого

Физико-механический институт

Кафедра «Прикладная математика»

**Отчёт по лабораторной работе №1  
по дисциплине «Анализ данных с интервальной  
неопределённостью»**

Выполнил студент:  
Аникин Александр Алексеевич  
группа: 5040102/20201

Проверил:  
к.ф.-м.н., доцент  
Баженов Александр Николаевич

Санкт-Петербург  
2023 г.

## Содержание

<b>1</b>	<b>Постановка задачи</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теория</b>	<b>2</b>
2.1	Индекс Жаккара . . . . .	2
2.2	Нахождение оптимального значения $R$ . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Результаты</b>	<b>3</b>
<b>4</b>	<b>Обсуждение</b>	<b>14</b>

## Список иллюстраций

1	Исходные данные выборка $X_1$ . . . . .	3
2	Гистограмма распределения $\delta_i$ для $X_1$ . . . . .	4
3	Исходные данные выборка $X_2$ . . . . .	4
4	Гистограмма распределения $\delta_i$ для $X_2$ . . . . .	5
5	Интервальная выборка $X_1$ . . . . .	5
6	Интервальная выборка $X_2$ . . . . .	6
7	Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки $X_1$ . . . . .	6
8	Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки $X_2$ . . . . .	7
9	Зависимость индекса Жаккара от значения $R$ . . . . .	8
10	Объединённая выборка $X_1 \cup R_{opt}X_2$ . . . . .	8
11	Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки $X_1 \cup R_{opt}X_2$ . . . . .	9
12	Зависимость частоты пересечения моды с интервалами $X_1 \cup RX_2$ . . . . .	10
13	Внутренняя и внешняя оценки $R$ . . . . .	11
14	Интервальная выборка $X'_1$ . . . . .	12
15	Интервальная выборка $X'_2$ . . . . .	12
16	Зависимость индекса Жаккара от значения $R$ . . . . .	13
17	Зависимость числа интервалов в моде от $R$ . . . . .	13
18	Объединённая выборка $X'_1 \cup R'_{opt}X'_2$ . . . . .	14

# 1 Постановка задачи

Имеется две вещественные выборки  $\overline{X_1}, \overline{X_2}$ . Необходимо построить из них две интервальные выборки  $X_1, X_2$  и найти такой вещественный коэффициент  $R$ , что выборка  $X_1 \cup RX_2$  будет наиболее совместной в смысле индекса Жаккара.

## 2 Теория

### 2.1 Индекс Жаккара

Индекс Жаккара определяет степень совместности двух интервалов  $x, y$ .

$$JK(x, y) = \frac{wid(x \wedge y)}{wid(x \vee y)} \quad (1)$$

Здесь  $\wedge, \vee$  представляют собой операции взятия минимума и максимума по включению в полной арифметике Каухера. Формула 2.1 легко может быть обобщена на случай интервальной выборки  $X = \{x_i\}_{i=1}^n$ .

$$JK(X) = \frac{wid(\wedge_{i=1,n} x_i)}{wid(\vee_{i=1,n} x_i)} \quad (2)$$

Видно, что  $JK(X) \in [-1, 1]$ . Для удобства перенормируем значение  $JK(X)$  так, чтобы оно было в интервале  $[0, 1]$ .

$$JK(X) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} JK(X) \quad (3)$$

### 2.2 Нахождение оптимального значения $R$

Для нахождения оптимального  $R$  необходимо сначала найти верхнюю и нижнюю границы  $\underline{R}, \overline{R}$ .

$$\underline{R} = \frac{\min_{i=1,n} \underline{x_{1i}}}{\max_{i=1,n} \underline{x_{2i}}} \quad (4)$$

$$\overline{R} = \frac{\max_{i=1,n} \overline{x_{1i}}}{\min_{i=1,n} \overline{x_{2i}}} \quad (5)$$

Затем оптимальное значение  $R$  может быть найдено методом половинного деления.

### 3 Результаты

Данные были взяты из файлов *data/dataset1/+0\_5V/+0\_5V\_0.txt* и *data/dataset/-0\_5V/-0\_5V\_42.txt*. Обинтерваливание было произведено следующим образом.

$$\mathbf{x}_i = [(x_i - \delta_i) - \varepsilon, (x_i - \delta_i) + \varepsilon], \varepsilon = \frac{1}{2^{14}} \quad (6)$$

где  $x_i$  - точечное значение,  $\delta_i$  - точечная погрешность. Набор  $\delta_i$  получен из соответствующих файлов в *data/dataset1/ZeroLine.txt*

Для начала рассмотрим исходные данные с учётом и без учёта  $\delta_i$ .

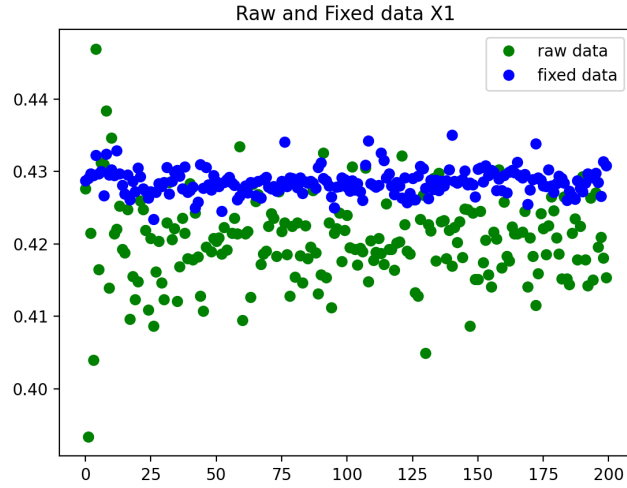


Рис. 1: Исходные данные выборка  $X_1$

Гистограмма распределения  $\delta_i$  для  $X_1$  имеет вид.

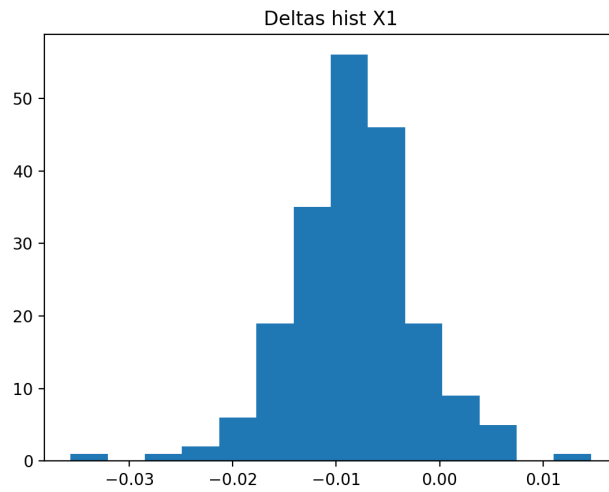


Рис. 2: Гистограмма распределения  $\delta_i$  для  $X_1$

Тоже самое для  $X_2$

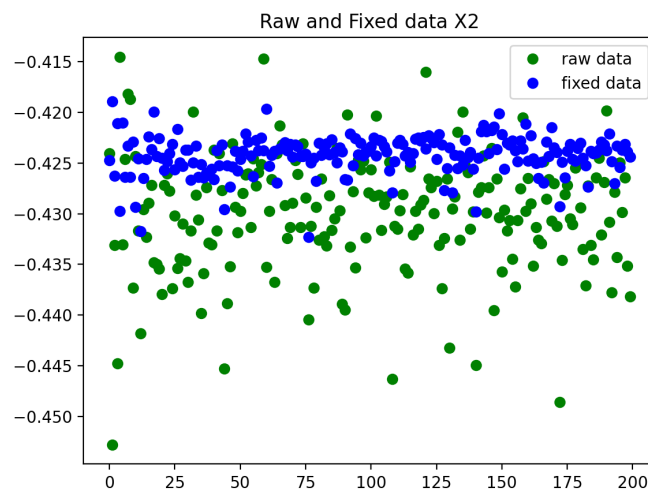


Рис. 3: Исходные данные выборка  $X_2$

Гистограмма распределения  $\delta_i$  для  $X_2$  имеет вид.

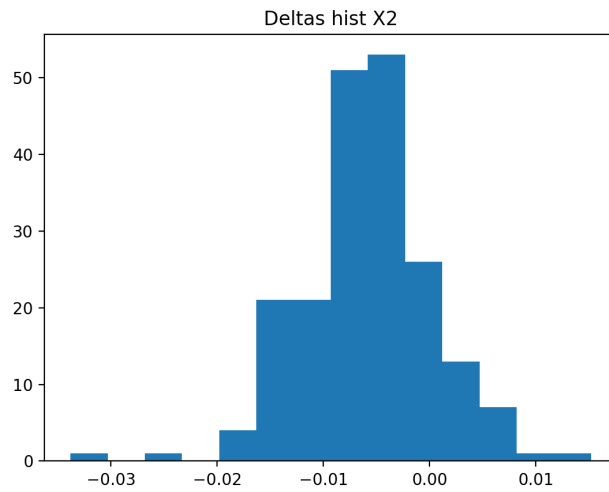


Рис. 4: Гистограмма распределения  $\delta_i$  для  $X_2$

На рис. 1, 3 видно, что учёт  $\delta_i$  значительно уменьшил разброс исходных данных.

Теперь посмотрим на построенные интервальные выборки  $X_1, X_2$ .

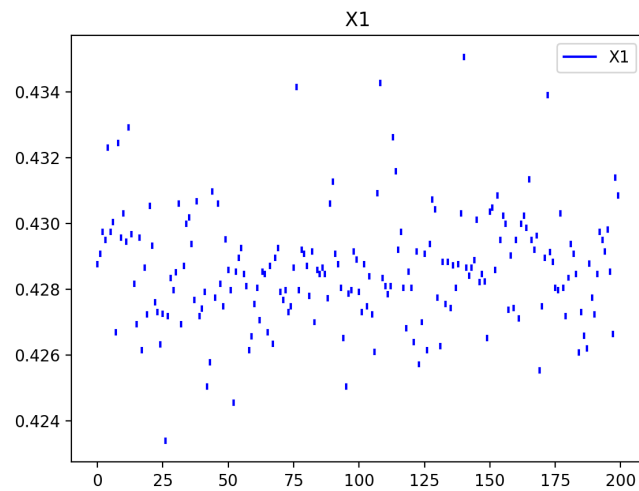


Рис. 5: Интервальная выборка  $X_1$

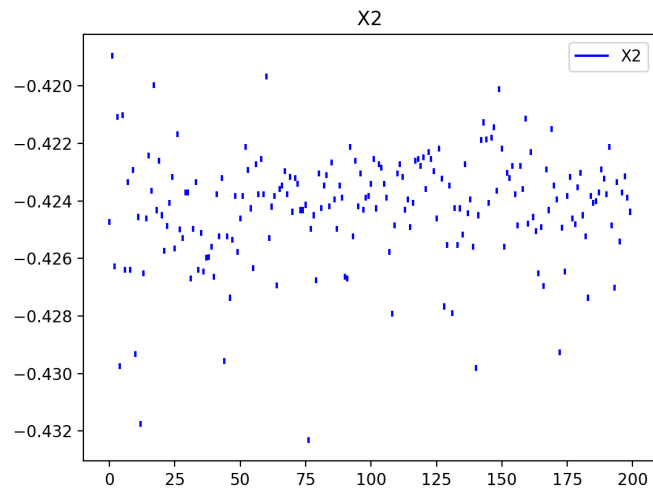


Рис. 6: Интервальная выборка  $X_2$

Также построим график частоты пересечений подинтервалов для построения моды с исходными интервалами выборок. Сначала для  $X_1$ .

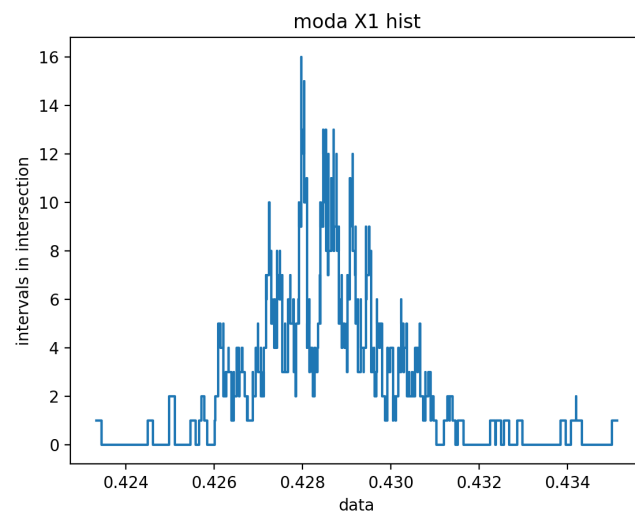


Рис. 7: Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки  $X_1$

Затем для  $X_2$ .

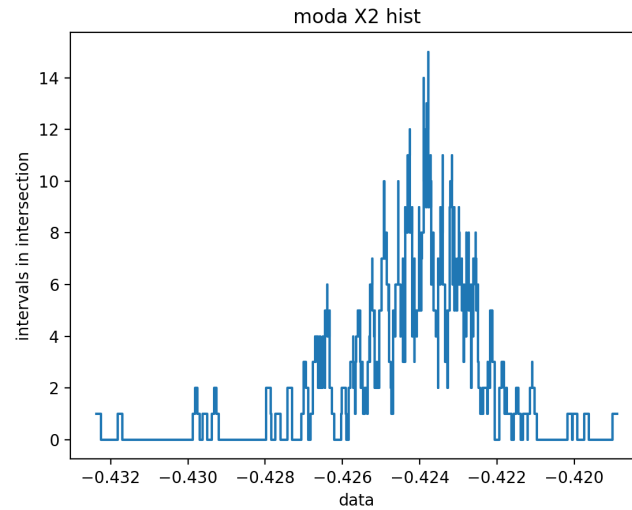


Рис. 8: Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки  $X_2$

Мода для выборки  $X_1$  равна интервалу  $\mu_{X_1} = [0.427979, 0.427981]$ , для выборки  $X_2$  мода равно интервалу  $\mu_{X_2} = [-0.423771, -0.423769]$ .

Посчитаем индекс Жаккара обеих выборок.  $JK(X_1) = 0.01036$ ,  $JK(X_2) = 0.00905$ . Найдем оптимальное значение  $R$  (для наглядности на графике 9 изображён более широкий интервал значений  $R$ ).



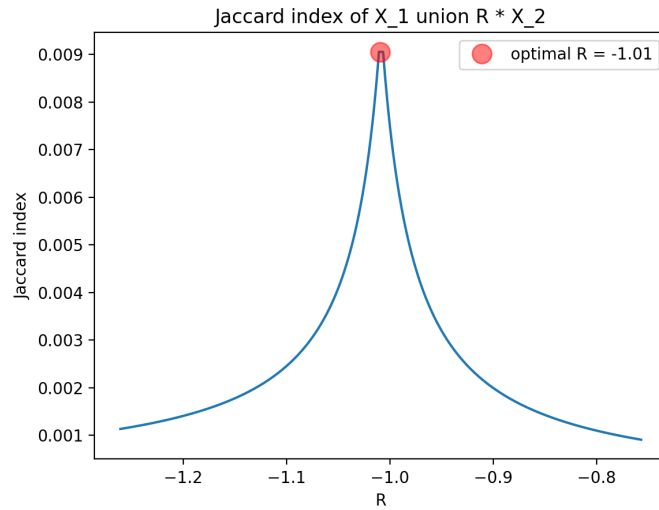


Рис. 9: Зависимость индекса Жаккара от значения  $R$

Оптимальное значение  $R$  оказалось равно  $R_{opt} = -1.0095$ . Построим объединённую выборку  $X = X_1 \cup R_{opt}X_2$ .

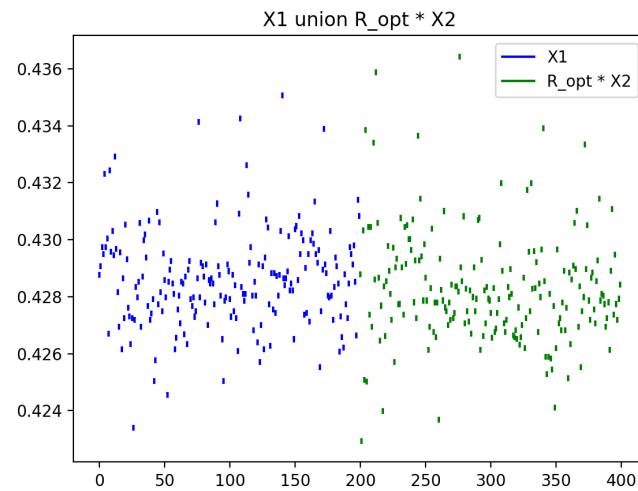


Рис. 10: Объединённая выборка  $X_1 \cup R_{opt}X_2$

Индекс Жаккара полученной выборки равен  $JK(X) = 0.00905$ .

Построим график частоты пересечений подинтервалов с объединённой выборкой  $X_1 \cup R_{opt}X_2$ .

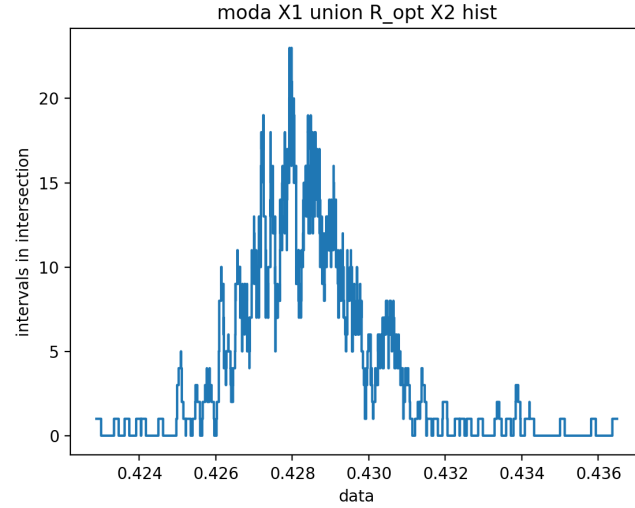


Рис. 11: Частота пересечений подинтервалов с интервалами выборки  $X_1 \cup R_{opt}X_2$

Мода для объединённой выборки  $X_1 \cup R_{opt}X_2$  равна интервалу  $\mu_{X_1 \cup R_{opt}X_2} = [0.427926, 0.427928]$ .

Посмотрим на зависимость частоты пересечений моды  $\mu(R)$  с интервалами для объединённой выборки  $X_1 \cup RX_2$  в зависимости от значений  $R$ .

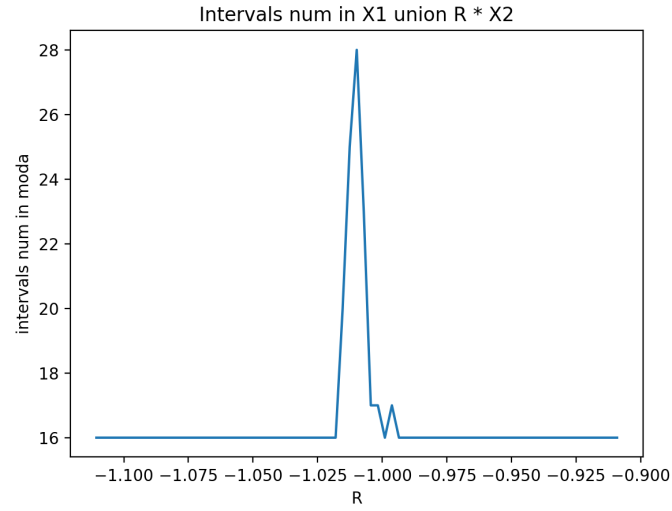


Рис. 12: Зависимость частоты пересечения моды с интервалами  $X_1 \cup R X_2$

Найдём внутреннюю оценку  $\mathbf{R}$  двумя способами: используя индекс Жаккара и моду. Для этого введём уровень доверия  $\alpha = 0.95$  и найдем крайние значений  $R$ , удовлетворяющие  $JK(R) > JK(R_{opt}) * \alpha$  в случае индекса Жаккара и  $\mu(R) > \mu(R_{opt}) * \alpha$  в случае моды. Результаты представлены на рис. 13 (график  $\mu(R)$  нормирован так, чтобы  $\max_R \mu(R)$  и  $\max_R JK(R)$  были равны).

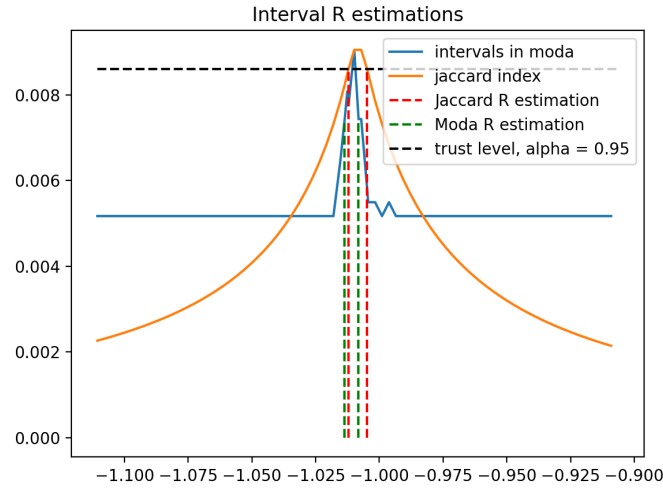


Рис. 13: Внутренняя и внешняя оценки  $R$

В итоге получили следующие оценки:  $R_{JK} = [-1.012119, -1.004806]$ ,  
 $R_\mu = [-1.01361, -1.008163]$ .

Внешнюю оценку получим по формулам 2.2, 2.2  $R_{out} = [-1.01062, -1.006362]$ .

Сравним полученные результаты с теми, что будут без учёта  $\delta_i$ .  $X'_k = \{[x_i - \varepsilon, x_i + \varepsilon]\}_{i=1}^n, k = 1, 2$ .

$X'_1$  имеют вид.

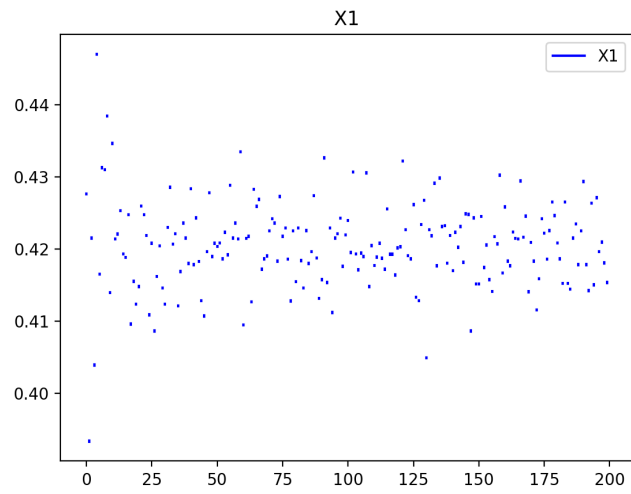


Рис. 14: Интервальная выборка  $X'_1$

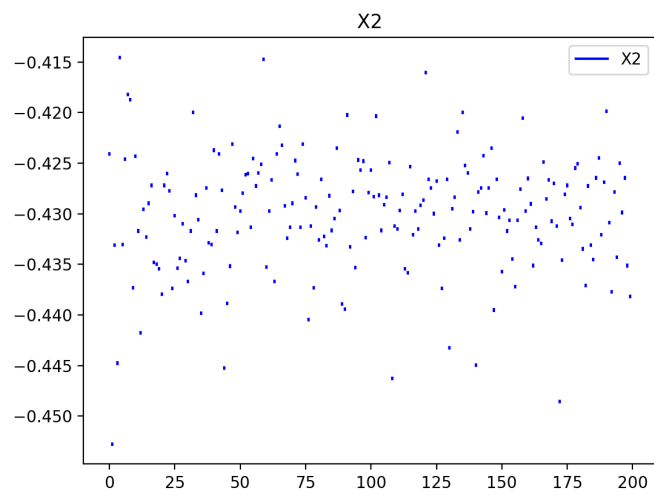


Рис. 15: Интервальная выборка  $X'_2$

Вычислим индекс Жаккара  $JK(X'_1) = 0.00227$ ,  $JK(X'_2) = 0.00318$ .  
 Зависимость индекса Жаккара от значения параметра  $R$  имеет вид.

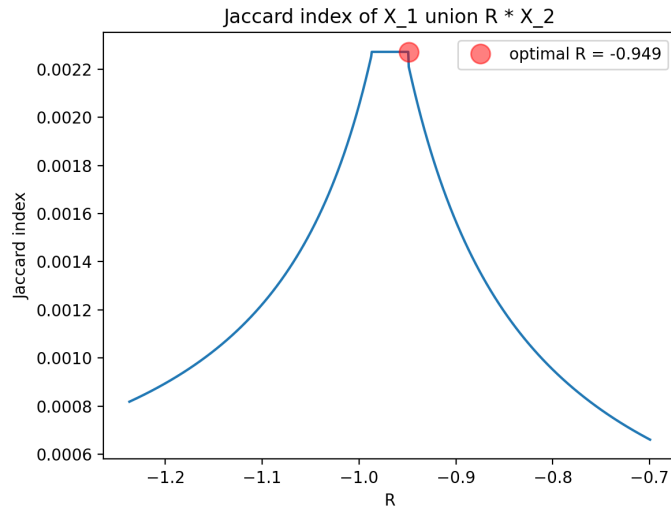


Рис. 16: Зависимость индекса Жаккара от значения  $R$

Также построим зависимость числа интервалов в моде от параметра  $R$ .

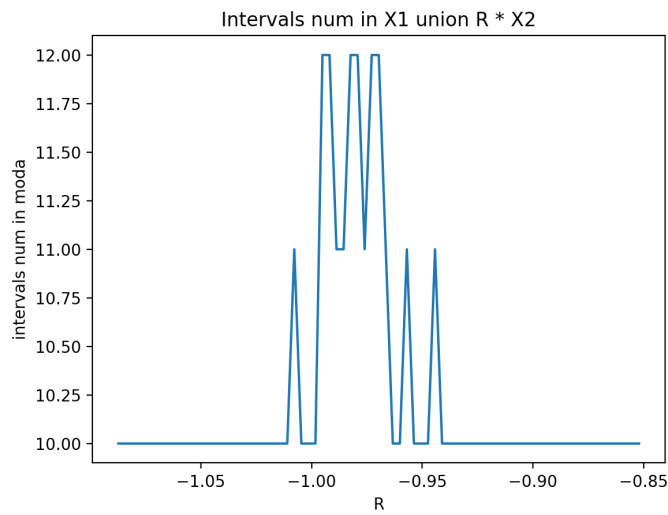


Рис. 17: Зависимость числа интервалов в моде от  $R$

Видно, что оптимальное значение параметра  $R$  равно  $R'_{opt} = -0.94892$ ,

что значительно отличается от первого случая. Тогда объединённая выборка  $X'_1 \cup R'_{opt}X'_2$  имеет вид.

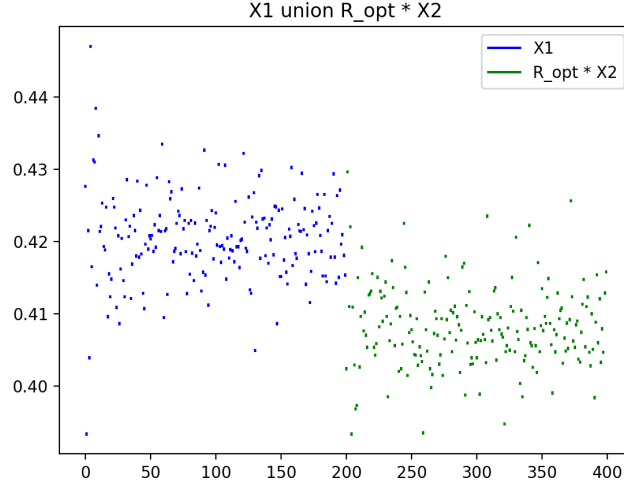


Рис. 18: Объединённая выборка  $X'_1 \cup R'_{opt}X'_2$

## 4 Обсуждение

Из полученных результатов можно заметить следующее. Как видно на рисунке 9 график значений индекса Жаккара в зависимости от параметра  $R$  имеет один локальный минимум. Также видно, что индекс Жаккара объединённой выборки  $X = X_1 \cup RX_2$  для любого значения  $R$  не превосходит значения индексов Жаккара для каждой выборки  $X_1, X_2$  по отдельности, что вполне ожидаемо. Несмотря на это,  $JK(X)$  не сильно отличается от значений  $JK(X_1), JK(X_2)$ , скорее всего это связано с тем, что интервалы из  $X_1$  и  $RX_2$  имеют примерно одинаковую длину, что видно на рисунке 10.