МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

КАФЕДРА СИСТЕМОТЕХНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичного заняття з дисципліни

“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”

за темою

"**Випадкові величини**"

для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності
122 «Комп’ютерні науки»

Харків 2023

Методичні вказівки до практичного заняття з дисципліни «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика» за темою "Випадкові величини" для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Упоряд.: І.В. Гребеннік, Г.Є. Безугла, Т.Є.Романова, С.Б.Шеховцов.– Харків: ХНУРЕ, 2023– 64с.

Упорядники: І.В. Гребеннік
Г.Є. Безугла
Т.Є. Романова
С.Б. Шеховцов

Зміст

Завдання практичного заняття 4
4. Випадкові величини 4
4.1. Види, способи завдання випадкових величин 4
4.2. Числові характеристики випадкової величини 11
4.2.1. Математичне сподівання 11
4.2.2. Дисперсія 12
4.2.3. Середнє квадратичне відхилення 14
4.2.4. Моменти випадкової величини 17
4.2.5. Мода. Медіана 18
4.3. Закони розподілу випадкових величин 19
4.3.1. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини 19
4.3.2. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини ... 21
4.3.3. Гіпергеометричний закон розподілу дискретної випадкової величини 22
4.3.4. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини 24
4.3.5. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини 27
4.3.6. Показовий закон розподілу неперервної випадкової величини 32
Контрольні питання 34
Література 34
Варіанти індивідуальних розрахункових завдань 35

«Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика»

Тема 4. Випадкові величини

Мета заняття: побудова законів розподілу, обчислення числових характеристик випадкових величин.

Рекомендована література: [1-7].

Завдання практичного заняття

1. Вивчити методи побудови законів розподілу, функцій розподілу випадкових величин, обчислення математичного сподівання, дисперсії та середнього квадратичного відхилення випадкових величин; ймовірності належності значень випадкової величини заданому інтервалу.
2. Розв'язати задачі практичного заняття.
3. Оформити звіт по практичному заняттю (титульний лист, основні визначення, формули, теореми, розв'язання задач заданого варіанта)

4. Випадкові величини

4.1. Види, способи завдання випадкових величин

Випадковою називається величина, що приймає в результаті випробування те або інше (але при цьому тільки одне) можливе значення, заздалегідь невідоме, що змінюється від випробування до випробування та залежне від дії випадкових факторів.

Випадкова величина характеризує всі можливі результати випробування з кількісної сторони.

Випадкові величини будемо позначати звичайно останніми заголовними буквами латинського алфавіту: $X,Y,Z,\ldots$, а їхні можливі значення відповідними малими буквами – $x_1, x_2,\ldots,x_n, y_1, y_2,\ldots,y_n, z_1,z_2,\ldots,z_n$... Ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення x_1 або значення x_2, позначають через p_1, p_2 і т.д. Таким чином, $P(X=x_1)=p_1$, $P(X=x_2)=p_2$ і т.д.

Дискретними називаються випадкові величини, які приймають скінченну або нескінченну зліченну множину значень.

Неперервними називаються випадкові величини, які можуть приймати будь-які значення з деякого скінченного або нескінченного інтервалу.

Законом розподілу (*рядом розподілу*) *дискретної випадкової величини* називається відповідність, що встановлює зв'язок між можливими значеннями випадкової величини і їх ймовірностями:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n
P	p_1	p_2	$\ldots$	p_{n-1}	p_n

При цьому виконується умова:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

При графічному зображенні ряду розподілу в прямокутній системі координат по осі абсцис відкладають всі можливі значення x_i випадкової величини X, а по осі ординат – відповідні ймовірності $P(X = x_i) = p_i$. Далі будують точки $M_i(x_i, p_i)$ і з'єднують їх ламаною лінією. Отримана фігура називається *багатокутником* або *полігоном розподілу*.

Найбільш загальною формою завдання закону розподілу є функція розподілу. Вона використовується для завдання як дискретних, так і неперервних випадкових величин.

Функцією розподілу випадкової величина X називається функція $F(x)$, яка визначає ймовірність того, що випадкова величина X прийме значення, менші фіксованого дійсного числа x, тобто

$$F(x) = P(X < x). \tag{4.1}$$

Геометрично рівність (4.1) можна трактувати наступним чином: функція $F(x)$ є ймовірність того, що випадкова величина X набуває значень, які зображуються на числовій прямій точками, які лежать зліва від точки x.

Функція $F(x)$ також називається *інтегральною функцією розподілу* або *інтегральним законом розподілу*.

На основі ряду розподілу можна одержати *функцію розподілу дискретної випадкової величини X.* Ця функція виражається наступною формулою:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} p_i \tag{4.2}$$

Формулу (4.2) можна записати в наступному вигляді, що наочно ілюструє неперервність зліва функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1, \\ p_1, & x_1 < x \le x_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ \sum_{i=1}^{n-1} p_i, & x_{n-1} < x \le x_n, \\ 1, & x > x_n. \end{cases} \tag{4.3}$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	6	8	11	13	14
P	0,14	0,09	0,22	0,11	0,17	0,08	0,19

1. Побудувати багатокутник розподілу.

2. Знайти функцію розподілу $F(x)$

Розв'язання.

1. Для побудови багатокутника (полігону) розподілу в прямокутній системі координат зобразимо точки $M_i(x_i, p_i),\ i=1,2,...,7$: $M_1(1;\ 0,14)$, $M_2(3;\ 0,09)$, $M_3(6;\ 0,22)$, $M_4(8;\ 0,11)$, $M_5(11;\ 0,17)$, $M_6(13;\ 0,08)$, $M_7(14;\ 0,19)$. Далі з'єднаємо ці точки ламаною лінією (рис. 4.1).

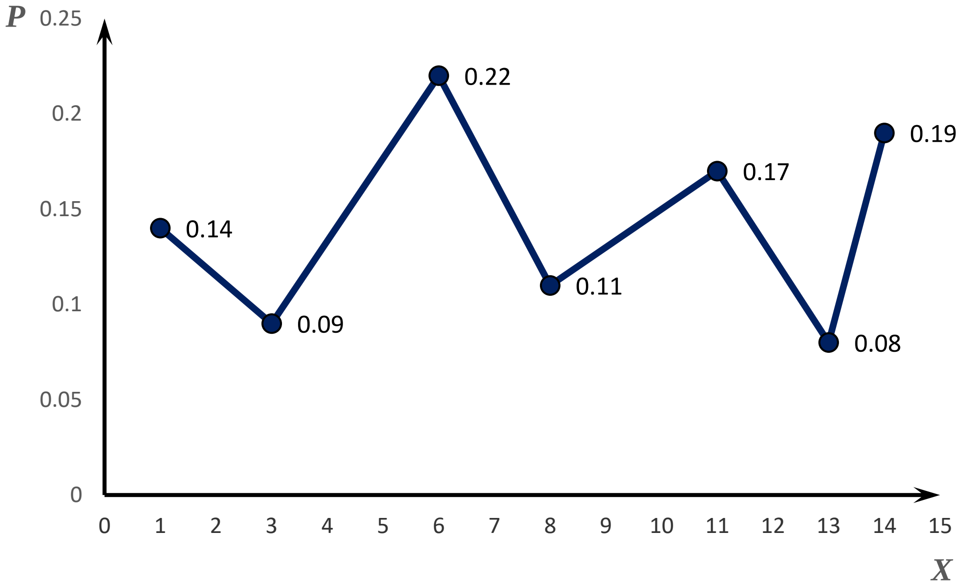

Рис 4.1. Багатокутник розподілу

2. Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ дискретної випадкової величини X.

Задаючи різні значення x, визначимо значення $F(x) = P(X < x)$:

1) Якщо $x \le 1$, то $F(x) = 0$. Дійсно, значень, менших числа 1, величина X не приймає. Отже, при $x \le 1$ функція

$$F(1) = P(X < 1) = 0.$$

2) Якщо $1 < x \le 3$, то $F(x) = 0,14$. Дійсно, X може прийняти значення 1 з ймовірністю 0,14. Отже,

$$F(3) = P(X < 3) = P(X = 1) = 0,14.$$

3) Якщо $3 < x \le 6$, то $F(x) = 0,23$. Дійсно, X може прийняти значення 1 з ймовірністю 0,14 або значення 3 з ймовірністю 0,09. Тоді по теоремі додавання ймовірностей несумісних подій одержимо

$$F(6) = P(X < 6) = P(X = 1) + P(X = 3) = 0,14 + 0,09 = 0,23.$$

4) Якщо $6 < x \le 8$, то $F(x) = 0,45$. Дійсно,

$$F(8) = P(X < 8) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 6) = 0,14 + 0,09 + 0,22 = 0,45.$$

5) Якщо $8 < x \le 11$, то $F(x) = 0,56$.

Дійсно, в силу рівності

$$F(11) = P(X < 11) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 6) + P(X = 8) = 0,14 + 0,09 + 0,22 + \\ + 0,11 = 0,56.$$

6) Якщо $11 < x \le 13$, то $F(x) = 0,73$. Дійсно

$$F(13) = P(X < 13) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 11) = \\ = 0,14 + 0,09 + 0,22 + 0,11 + +0,17 = 0,73.$$

7) Якщо $13 < x \le 14$, то $F(x) = 0,81$. Дійсно

$$F(14) = P(X < 14) = P(X = 1) + P(X = 3) + P(X = 6) + P(X = 8) + P(X = 11) + P(X = 13) + \\ = 0,14 + 0,09 + 0,22 + 0,11 + 0,17 + 0,08 = 0,81.$$

8) Якщо $14 < x$, то $F(x) = 1$. Дійсно, подія $X \le 14$ достовірна, а її ймовірність дорівнює 1.

Таким чином, функція розподілу має вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ 0,14, & 1 < x \le 3, \\ 0,23, & 3 < x \le 6, \\ 0,45, & 6 < x \le 8, \\ 0,56, & 8 < x \le 11, \\ 0,73, & 11 < x \le 13, \\ 0,81, & 13 < x \le 14, \\ 1, & x > 14. \end{cases}$$

Графік цієї функції розподілу наведений на рис 4.2.

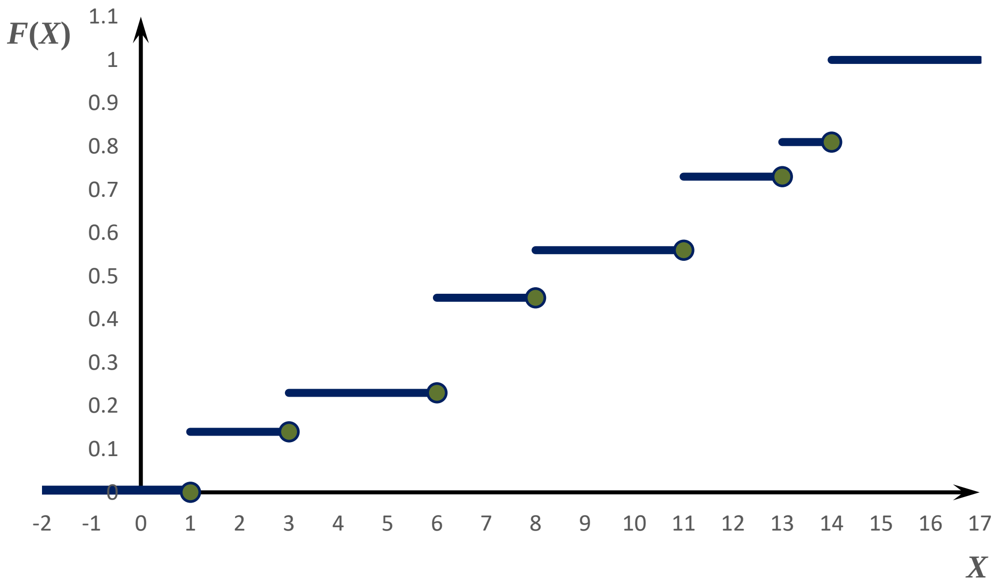

Рис 4.2. Функція розподілу $F(x)$

Властивості функції розподілу:

1. $0 \le F(x) \le 1$.

Ця властивість випливає з визначення функції розподілу як ймовірності події $X < x$.

2. Функція розподілу $F(x)$ – неспадна, неперервна зліва функція, визначена на всій числовій осі, тобто, якщо $x_2 > x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$.

Дійсно

$$F(x_2) = P(x < x_2) = P(x < x_1) + P(x_1 \le x < x_2) = F(x_1) + \underbrace{P(x_1 \le x < x_2)}_{\ge 0}. \quad (4.4)$$

Відкидаючи в (4.4) невід'ємний доданок $P(x_1 \le x < x_2)$ одержимо нерівність $F(x_2) \ge F(x_1)$.

3. З виразу (4.4) безпосередньо випливає:

$$P(x_1 \le x < x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad (4.5)$$

4. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

5. Якщо випадкова величина X приймає всі значення на відрізку $[x_1, x_2]$, то

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ F(X), & x_1 < x \le x_2 \\ 1, & x > x_2 \end{cases}.$$

Теорема. Ймовірність того, що неперервна випадкова величина X прийме окреме значення x, дорівнює нулю, тобто $P(X = x) = 0$.

Доведення. Дійсно, при $\Delta x \to 0$ можна записати наступний вираз

$$P(X = x) = \lim_{\Delta x \to 0} P(x \le X < x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} [F(x + \Delta x) - F(x)] = F(x) - F(x) = 0.$$

Таким чином, нульову ймовірність мають не тільки неможливі, але й можливі події. Цей висновок цілком погодиться зі статистичним визначенням ймовірності події, за яким відносна частота появи події при великій кількості випробувань не дорівнює, а тільки наближається до ймовірності.

Тому рівність нулю ймовірності події означає тільки, що при необмеженому повторенні випробувань ця подія з'являється як завгодно рідка й жодною мірою не означає, що дана подія неможлива.

Наслідок. Розглянута теорема дозволяє в практичних задачах використовувати наступну рівність:

$$P(x_1 \le X < x_2) = P(x_1 \le X \le x_2) = P(x_1 < X < x_2) = P(x_1 < X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1) \quad (4.6)$$

Наприклад доведемо рівність $P(x_1 \le X \le x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

Очевидно, що

$$P(x_1 \le X \le x_2) = \underbrace{P(X = x_1)}_{0} + \underbrace{P(x_1 < X \le x_2)}_{F(x_2)-F(x_1)} + \underbrace{P(X = x_2)}_{0} = F(x_2) - F(x_1).$$

Аналогічно доводяться інші рівності.

Варто зауважити, що якщо кожна випадкова величина однозначно визначає функцію розподілу, то ту саму функцію розподілу можуть мати різні випадкові величини.

Нарівні з функцією розподілу закон розподілу неперервної випадкової величини може бути заданий *функцією щільності ймовірності* (*щільність розподілу ймовірностей*, *диференціальна функція*).

Щільністю ймовірності $f(x)$ неперервної випадкової величини X називається перша похідна від інтегральної функції $F(x)$, тобто

$$f(x) = F'(x).$$

Для дискретної випадкової величини щільність ймовірності не визначена.

Крива, що зображує функцію щільності ймовірності $f(x)$, називається *кривою розподілу*.

Приклад. Дана функція розподілу неперервної випадкової величини X

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x, & 1 < x \le 2, \\ 1, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти щільність розподілу $f(x)$.

Розв'язання. Щільність розподілу дорівнює першій похідній від функції розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ x - \frac{1}{2}, & 1 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Розглянемо властивості щільності ймовірності.

1. $f(x) \ge 0$.

Це властивість безпосередньо випливає з визначення функції $f(x)$ як похідній від неспадної функції розподілу $F(x)$.

2. Функція розподілу неперервної випадкової величини X може бути виражена через інтеграл

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

де $f(x) \ge 0$ – функція щільності ймовірності, а інтеграл визначає площу фігури під графіком функції $f(x)$ при $x\in]-\infty ,x]$.

3. Площа фігури, обмеженої кривою розподілу та віссю абсцис, дорівнює одиниці, тобто

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

Ця властивість є наслідком властивості функції розподілу: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Тоді

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = F(\infty) - F(-\infty) = 1 - 0 = 1.$$

4. Якщо задані два значення x_1 і x_2 неперервної випадкової величини X ($x_1 < x_2$), то ймовірність того, що X приймає значення в інтервалі (x_1 ,x_2), дорівнює

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Дійсно, по формулі (4.6) і по формулі Ньютона-Лейбніца, маємо:

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx.$$

5. Якщо випадкова величина X приймає всі значення на відрізку [x_1,x_2], то

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le x_1 \\ f(x), & x_1 < x \le x_2 , \\ 0, & x > x_2 \end{cases}$$

причому

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = 1.$$

Приклад. Задана щільність розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \cos x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Розв'язання. Використаємо формулу

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Якщо $x \le 0$, то $f(x)=0$, отже, $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx.$

Якщо $0<x\le\pi/2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\cos x dx=\sin x.$

Якщо $x>\pi/2$, то $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos x dx+\int\limits_{\pi/2}^{x} 0dx=\sin x\Big|_{0}^{\pi/2}=1.$

Отже, шукана функція розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le\pi/2, \\ 1, & x>\pi/2. \end{cases}$$

4.2. Числові характеристики випадкової величини

Закон розподілу повністю характеризує випадкову величину. Але при розв'язанні ряду практичних задач немає необхідності розглядати всі можливі значення випадкової величини й відповідні їм Ймовірності, а зручніше користуватися деякими кількісними показниками, які обчислюються на основі закону розподілу й подають достатню інформацію про випадкову величину. Такі показники називаються *числовими характеристиками випадкової величини*. Основними з них є математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратическое відхилення, моменти різних порядків, мода й медіана.

4.2.1. Математичне сподівання

Математичне сподівання характеризує розташування значень випадкової величини на числовій осі, визначаючи собою деяку середню характеристику, навколо якої зосереджені всі можливі значення випадкової величини. Тому математичне сподівання іноді називають середнім значенням випадкової величини.

Математичне сподівання позначається через MX або $M(X)$.

Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюють по наступній формулі:

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i\,, \tag{4.7}$$

де x_i – значення дискретної випадкової величини, p_i – ймовірність того, що випадкова величина прийме значення x_i , n – кількість значень випадкової величини.

Якщо випадкова величина X приймає нескінченну зліченну множину значень, то

$$M(X)=\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i\,.$$

При цьому ряд $\sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$ повинен абсолютно сходитися.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини обчислюється по формулі

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx,$$

де $f(x)$ – функція щільності ймовірності випадкової величини , а інтеграл сходиться абсолютно.

Математичне сподівання неперервної випадкової величини X, можливі значення якої належать відрізку $[x_1, x_2]$, дорівнює

$$M(X) = \int_{x_1}^{x_2} xf(x)dx, \tag{4.8}$$

Математичне сподівання випадкової величини має наступні властивості, загальні як для дискретних, так і для неперервних випадкових величин.

1) $MC=C$, *якщо* C *– постійна, тобто математичне сподівання постійної величини дорівнює самій постійній.*

2) $M(CX)=C\cdot M(X)$, *тобто постійну можна виносити за знак математичного сподівання.*

3) $M(X \pm C) = M(X) \pm C$, *тобто якщо всі значення випадкової величини збільшити (зменшити) на постійну величину, то й математичне сподівання збільшиться (зменшиться) на цю ж величину.*

4) $M(X \pm Y) = M(X) \pm M(Y)$, *тобто математичне сподівання суми (різниці) випадкових величин дорівнює сумі (різниці) їхніх математичних сподівань.*

5) *Якщо випадкова величина* $X\geq 0$, *то й математичне сподівання* $M(X)\geq 0$.

6) *Якщо випадкові величини* X *і* Y *незалежні, то* $M(X \cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)$, *тобто математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їхніх математичних сподівань.*

7) $M[X - M(X)] = 0$, *тобто математичне сподівання відхилення випадкової величини від її математичного сподівання дорівнює нулю.*

4.2.2. Дисперсія

Дисперсія характеризує ступінь розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання та позначається через DX або $D(X)$.

Дисперсією випадкової величини X називається математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від її математичного сподівання:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Використовуючи властивості математичного сподівання можна показати, що дисперсія випадкової величини дорівнює різниці між математичним сподіванням квадрата випадкової величини та квадратом її математичного сподівання:

$$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2.$$

Дійсно

$$D(X)=M(X-M(X))^2=M(X^2-2X\cdot M(X)+(M(X))^2)=$$
$$=M(X^2)-M(2\cdot X\cdot \underbrace{M(X)}_{const})+M(\underbrace{M(X))^2}_{const})=$$
$$=M(X^2)-2M(X)M(X)+(M(X))^2=M(X^2)-(M(X))^2.$$

На практиці для обчислення дисперсії дискретної випадкової величини використовують таку формулу:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\cdot p_i-(M(X))^2. \qquad (4.9)$$

Формули для обчислення дисперсії неперервної випадкової величини мають вигляд:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^2 f(x)dx$$

або

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2.$$

Дисперсія неперервної випадкової величини *X*, можливі значення якої належать відрізку $[x_1, x_2]$, дорівнює

$$D(X)=\int_{x_1}^{x_2}x^2 f(x)dx-(M(X))^2. \qquad (4.10)$$

Дисперсія має наступні властивості:

1) *Дисперсія константи дорівнює нулю*: $DC=0$.
2) *Дисперсія завжди невід'ємна*: $D(X)\geq 0$.
3) *Постійну можна винести за знак дисперсії, піднісши попередньо її у квадрат*: $D(CX)=C^2\cdot D(X)$.
4) *Зміна випадкової величини на постійну не змінює її дисперсію*: $D(C+X)=D(X)$.
5) *Якщо випадкові величини X і Y незалежні, то* $D(X\pm Y)=D(X)+D(Y)$, тобто *дисперсія суми або різниці незалежних випадкових величин дорівнює сумі дисперсій цих випадкових величин*.

4.2.3. Середнє квадратичне відхилення

Недоліком дисперсії є те, що її розмірність дорівнює квадрату розмірності випадкової величини. Цього недоліку позбавлена характеристика розсіювання *середнє квадратичне відхилення*, яке дорівнює арифметичному квадратному кореню з дисперсії

$$\sigma(X) = +\sqrt{D(X)}. \qquad (4.11)$$

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	1	3	6	8	11	13	14
P	0,14	0,09	0,22	0,11	0,17	0,08	0,19

Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Розв'язання. Математичне сподівання заданої дискретної випадкової величини X дорівнює:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i p_i = 1 \cdot 0,14 + 3 \cdot 0,09 + 6 \cdot 0,22 + 8 \cdot 0,11 + 13 \cdot 0,08 + 14 \cdot 0,19 = 8,18.$$

Дисперсія дорівнює:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{7} x_i^2 \cdot p_i - (MX)^2 = 1^2 \cdot 0,14 + 3^2 \cdot 0,09 + 6^2 \cdot 0,22 + 8^2 \cdot 0,11 + 13^2 \cdot 0,08 + 14^2 \cdot 0,19 - (8,18)^2 =$$
$$= 20,33$$

Знайдемо середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{20,33} \approx 4,51.$$

Приклад. Випадкова величина X задана щільністю розподілу $f(x)=3x^2$ в інтервалі (0;1); поза цим інтервалом $f(x)=0$. Знайти математичне сподівання й дисперсію величини X.

Розв'язання. Підставивши $x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ f(x)=3x^2$ у формулу (4.8), одержимо

$$M(X) = \int_0^1 x \cdot 3x^2 dx = 3\int_0^1 x^3 dx = (3/4)x^4 \Big|_0^1 = 3/4.$$

Щоб знайти дисперсію, використовуємо формулу

$$D(X)=\int_{x_1}^{x_2} x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2.$$

Тоді

$$D(X)=\int_0^1 x^2\cdot 3x^2dx-\left[\frac{3}{4}\right]^2=3\int_0^1 x^4dx-\frac{9}{16}=\frac{3x^5}{5}\bigg|_0^1-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

Приклад. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ ax^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Знайти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (0,2, 0,7); 4) математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Розв'язання.

1. Оскільки всі значення випадкової величини *X* належать інтервалу $(0,1)$, то

$$P(0<X<1)=1.$$

З іншого боку, виконується рівність:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0).$$

Тоді значення параметра a можна знайти з умови:

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=1.$$

Звідси

$$P(0<X<1)=F(1)-F(0)=a\cdot 1^2-a\cdot 0^2=1 \;\Rightarrow\; a=1.$$

Таким чином, функція розподілу випадкової величини *X* має вигляд:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x\le 1,\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Побудуємо графік функція розподілу випадкової величини *X* (рис. 4.3):

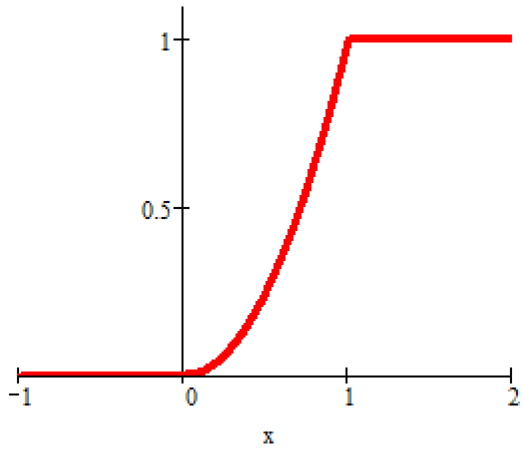

Рис 4.3. Функція розподілу

3. Щільність ймовірності дорівнює першій похідній від функції розподілу:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 2x, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Побудуємо графік щільності розподілу випадкової величини X (рис. 4.4):

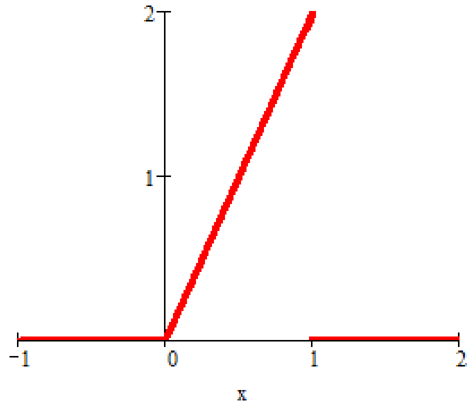

Рис 4.4. Щільність ймовірності

3. Знайдемо ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (0,2, 0,7):

1) за формулою $P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$:

$$P(0,2 < X < 0,7) = F(0,7) - F(0,2) = (0,7)^2 - (0,2)^2 = 0,45.$$

2) за формулою $P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx$:

$$P(0,2 < X < 0,7) = \int\limits_{0,2}^{0,7} 2xdx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_{0,2}^{0,7} = (0,7)^2 - (0,2)^2 = 0,49 - 0,04 = 0,45.$$

4. Обчислимо математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*:

$$M(X)=\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 x2xdx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_0^1 x^2 f(x)dx-[M(X)]^2=\int_0^1 x^2 2xdx-\left[\frac{2}{3}\right]^2=2\int_0^1 x^3dx-\frac{4}{9}=2\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-\frac{4}{9}=\frac{1}{18};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}\approx 0,236.$$

4.2.4. Моменти випадкової величини

Узагальненням основних числових характеристик випадкової величини є поняття моментів випадкової величини.

Початковим моментом порядку k називається величина

$$\nu_k=M(X^k)$$

Початковий момент дискретної випадкової величини:

$$\nu_k=\sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i;$$

початковий момент неперервної випадкової величини:

$$\nu_k=\int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx.$$

Центральним моментом порядку *k* називається величина

$$\mu_k=M(X-M(X))^k.$$

Центральний момент дискретної випадкової величини:

$$\mu_k=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^k p_i;$$

центральний момент неперервної випадкової величини:

$$\mu_k=\int_{-\infty}^{\infty}(x-M(X))^k f(x)dx.$$

Із цих визначень видно, що математичне сподівання є початковим моментом першого порядку, а дисперсія – центральним моментом другого порядку.

Приклад. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу. Знайти початкові й центральні моменти першого, другого, третього й четвертого порядків.

X	1	2	4
P	0,1	0,3	0,6

Розв'язання.

Знайдемо початкові моменти:

$\nu_1 = M(X) = 1\cdot 0,1 + 2\cdot 0,3 + 4\cdot 0,6 = 3,1,$

$\nu_2 = M(X^2) = 1^2\cdot 0,1 + 2^2\cdot 0,3 + 4^2\cdot 0,6 = 10,9,$

$\nu_3 = M(X^3) = 1^3\cdot 0,1 + 2^3\cdot 0,3 + 4^3\cdot 0,6 = 40,9,$

$\nu_4 = M(X^4) = 1^4\cdot 0,1 + 2^4\cdot 0,3 + 4^4\cdot 0,6 = 158,5.$

Центральні моменти доцільно обчислювати, використовуючи формули, що виражають центральні моменти через початкові:

$\mu_1 = 0$

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4$

Тоді центральні моменти дорівнюють:

$\mu_1 = 0;$

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = 10,9 - 3,1^2 = 1,29;$

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 40,9 - 3\cdot 3,1\cdot 10,9 + 2\cdot 3,1^3 = -0,888;$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4 = 158,5 - 4\cdot 40,9\cdot 3,1 + 6\cdot 10,9\cdot 3,1^2 - 3\cdot 3,1^4 = 2,78.$

4.2.5. Мода. Медіана

Модою (*Мо*) називається середнє значення випадкової величини, що зустрічається найчастіше, тобто має максимальну ймовірність (для дискретної випадкової величини) або максимум функції щільності ймовірності в даній точці (для неперервної випадковій величині).

Одна й та сама випадкова величина може мати одну або кілька мод. Однак можливо, що випадкова величина й не має моди (якщо всі значення мають однакову ймовірність).

Визначимо поняття *квантиля* неперервної випадкової величини.

Квантилем порядку p або p-*квантилем*, $0 < p < 1$, називається число x_p, що задовольняє умові $F(x_p) = P(X < x_p) = p$.

Квантиль порядку 0,5, тобто величина $x_{0,5}$ – називається *медіаною* (*Me*) неперервної випадкової величини.

Для медіани справедлива рівність

$$P(X < Me) = P(X > Me) = \frac{1}{2},$$

тобто рівноймовірно, що значення випадкової величини буде більше або менше медіани. Таким чином, медіана ділить область значень випадкової величини на дві рівні по ймовірності частини.

4.3. Закони розподілу випадкових величин

4.3.1. Біноміальний закон розподілу дискретної випадкової величини

Нехай випадкова величина X є число появ події A в n незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A у кожному випробуванні постійна й дорівнює p. Значеннями випадкової величини X є цілі числа 0, 1, 2,…,n... Це означає, що випадкова величина X – *дискретна*.

Ймовірність кожного значення випадкової величини X обчислюється по формулі Бернуллі:

$$P(X = k) = P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k},$$

де $q = 1 - p$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Закон розподілу даної випадкової величини X називається *біноміальним законом*, тому що ймовірності можливих її значень дорівнюють елементам розкладання бінома Ньютона $(q + p)^n$.

Біноміальний закон може бути заданий у вигляді ряду розподілу:

X	X=0	X=1	…	X=k	…	X=n–1	X=n
P	q^n	$n\,p^1q^{n-1}$		$C_n^k p^k q^{n-k}$		$n\,p^{n-1}q^1$	p^n

і у вигляді функції розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sum\limits_{k<x} C_n^k p^k q^{n-k}, & 0 < x \le n, \\ 1, & x > n. \end{cases}$$

Значення n і p є *параметрами* біноміального розподілу. Твердження, що випадкова величина X має біноміальний розподіл з параметрами n і p, можна більш коротко записати у вигляді $X \in B(n, p)$.

Числові характеристики біноміальної випадкової величини можна обчислити двома способами:

1) за визначенням за допомогою формул (4.7), (4.9), (4.11);

2) за спеціальними формулами: математичне сподівання $M(X) = np$, дисперсія $D(X) = npq$, середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{npq}$.

Прилад. Випадкова величина X – кількість появ події A в 7 незалежних випробувань. Ймовірність появи події A у кожному випробуванні постійна та дорівнює 0,67.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;

3) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X приймає такі можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6, x_8 = 7$. Знайдемо ймовірності можливих значень за формулою Бернуллі. Враховуючи, що за умовою, $n = 7$, $p = 0,67$, $q = 1 - p = 1 - 0,7 = 0,33$, одержимо:

$$P(X = 0) = P_7(0) = C_7^0 \cdot 0,67^0 \cdot 0,33^7 = 0,0004;$$
$$P(X = 1) = P_7(1) = C_7^1 \cdot 0,67^1 \cdot 0,33^6 = 0,0061;$$
$$P(X = 2) = P_7(2) = C_7^2 \cdot 0,67^2 \cdot 0,33^5 = 0,0369;$$
$$P(X = 3) = P_7(3) = C_7^3 \cdot 0,67^3 \cdot 0,33^4 = 0,1248;$$
$$P(X = 4) = P_7(4) = C_7^4 \cdot 0,67^4 \cdot 0,33^3 = 0,2535;$$
$$P(X = 5) = P_7(5) = C_7^5 \cdot 0,67^5 \cdot 0,33^2 = 0,3088;$$
$$P(X = 6) = P_7(6) = C_7^6 \cdot 0,67^6 \cdot 0,33^1 = 0,2090;$$
$$P(X = 7) = P_7(7) = C_7^7 \cdot 0,67^7 \cdot 0,33^0 = 0,0606.$$

Напишемо біноміальний закон розподілу випадкової величини X:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
P(X=k)	0,0004	0,0061	0,0369	0,1248	0,2535	0,3088	0,2090	0,0606

Побудуємо багатокутник розподілу випадкової величини X (рис. 4.5):

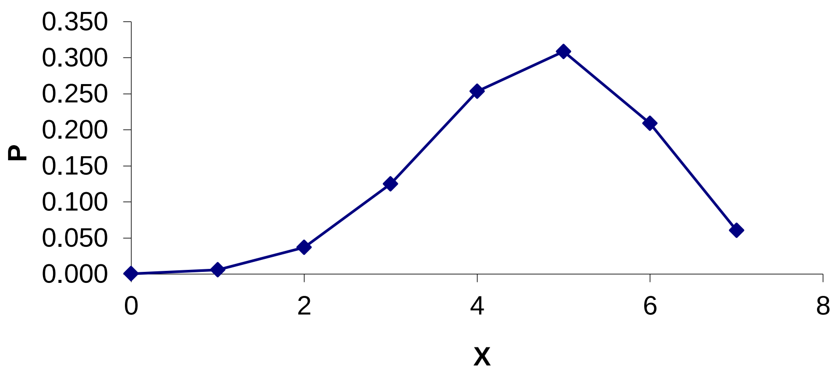

Рис 4.5.. Багатокутник розподілу біноміальної випадкової величини

Знайдемо числові характеристики біноміальної випадкової величини :

- математичне сподівання $M(X) = np = 7 \cdot 0,67 = 4,69$;
- дисперсія $D(X) = npq = 7 \cdot 0,67 \cdot 0,33 = 1,55$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{7 \cdot 0,67 \cdot 0,33} = 1,24$.

4.3.2. Геометричний закон розподілу дискретної випадкової величини

Нехай провадяться незалежні випробування, у кожному з яких ймовірність появи події *A* дорівнює *p* ($0<p<1$) і, отже, ймовірність його не появи $q = 1 - p$. Випробування закінчуються, як тільки з'явиться подія *A*. Таким чином, якщо подія *A* з'явилася в k-м випробуванні, то в попередніх $k-1$ випробуваннях вона не з'явилася.

Позначимо через *X* дискретну випадкову величину – число випробувань, які потрібно провести до першої появи події *A*. Очевидно, можливими значеннями *X* є натуральні числа: $x_1=1$, $x_2=2$,…

Нехай у перших $k-1$ випробуваннях подія *A* не наступила, а у k-му випробуванні з'явилася. Ймовірність цієї «складної події», по теоремі множення ймовірностей незалежних подій,

$$P(X = k) = pq^{k-1}. \qquad (4.12)$$

Закон розподілу цієї випадкової величини *X* називається *геометричним законом*.

Геометричний закон може бути заданий у вигляді ряду розподілу:

X	X=1	X=2	X=3	…	$X=k$	…
P	p	pq	pq^2	…	pq^{k-1}	…

Ймовірності ряду розподілу геометричного закону утворюють спадну геометричну прогресію з першим членом *p* і знаменником *q* ($0<q<1$). Дійсно, вважаючи k=1,2,… у формулі (4.12), одержимо

$$p,\ pq,\ pq^2, \ldots,\ pq^{k-1}, \ldots \qquad (4.13)$$

Сума ряду (4.13) дорівнює сумі спадної геометричної прогресії:

$$S = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Таким чином, умова $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ виконується.

Числові характеристики випадкової величини *X*, яка має геометричний розподіл з параметром *p*, обчислюються за формулами:

- математичне сподівання $M(X) = \dfrac{1}{p}$,
- дисперсія $D(X) = \dfrac{q}{p^2}$,

- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{\dfrac{q}{p^2}}$, де $q=1-p$.

Приклад. Проводиться серія випробувань до першої появи події *А*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *Х* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *А* у кожному випробуванні дорівнює 0,1. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. Випадкова величина *Х* – число проведених випробувань до появи події *А*, має геометричний розподіл з параметром $p=0,1$.

Обчислимо ймовірності значений випадкової величини *Х*:

$P(X=1)=p=0,1;$

$P(X=2)=pq=0,1\cdot 0,9=0,09;$

$P(X=3)=pq^2=0,1\cdot 0,9^2=0,081;$

……………………………………………….

$P(X=k)=pq^{k-1}=0,1\cdot 0,9^{k-1};$

……………………………………………….

Тоді ряд розподілу випадкової величини *Х* має вигляд

x_i	1	2	3	4	…	k	…
p_i	0,1	0,09	0,081	0,0729	…	$0,1\cdot 0,9^{k-1}$	…

Знайдемо числові характеристики випадкової величини:

- математичне сподівання $M(X)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{0,1}=10;$
- дисперсія $D(X)=\dfrac{q}{p^2}=\dfrac{0,9}{0,1^2}=90;$
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{90}=9,49$.

4.3.3. Гіпергеометричний закон розподілу дискретної випадкової величини

Перш ніж дати визначення гіпергеометричного розподілу, розглянемо задачу. Нехай у кошику з *N* куль є *M* білих (*M*<*N*). З кошика випадково відбирають *n* куль (кожна куля може бути витягнута з однаковою ймовірністю), причому відібрана куля перед відбором наступного не вертається в кошик (тому формула Бернуллі не може бути застосовна). Позначимо через *Х* випадкову величину – число білих куль серед *n* відібраних. Очевидно, можливі значення *Х* такі: 0,1,2,…,*min*(*M*,*n*)...

Знайдемо ймовірність того, що $X=m$, тобто що серед *n* відібраних куль рівно *m* білих. Використовуємо для цього класичне визначення ймовірності.

Загальне число можливих елементарних результатів випробування дорівнює числу способів, якими можна витягти *n* куль із *N* куль, тобто числу сполучень C_N^n.

Знайдемо число наслідків, сприятливих події $X = m$ (серед узятих n куль рівно m білих): m білих куль можна витягти з M білих куль C_M^m способами; при цьому інші $n - m$ куль повинні бути іншого кольору. Взяти $n - m$ куль іншого кольору з $N - M$ куль іншого кольору можна C_{N-M}^{n-m} способами. Отже, число сприятливих наслідків дорівнює $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$ (за правилом множення).

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа результатів, сприятливих для події $X = m$, до числа всіх елементарних результатів

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \tag{4.14}$$

Формула (4.14) визначає *гіпергеометричний* розподіл випадкової величини.

Величини N, M, n називаються параметрами гіпергеометричного розподілу випадкової величини.

Числові характеристики гіпергеометричної випадкової величини можна обчислити двома способами:

1) за визначенням за допомогою формул (4.7), (4.9), (4.11);
2) за спеціальними формулами: математичне сподівання гіпергеометричного розподілу с параметрами N, M, n, дорівнює $M(X) = n\dfrac{M}{N}$, *дисперсія* $D(X) = n\dfrac{M}{N-1}\left(1 - \dfrac{M}{N}\right)\left(1 - \dfrac{n}{N}\right)$, *середнє квадратичне відхилення* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Приклад. У кошику 17 куль однакового розміру, їх 8 білих куль. З кошика навмання відібрано 7 куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль;

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;

3) знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X приймає такі можливі значення: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3, x_5 = 4, x_6 = 5, x_7 = 6, x_8 = 7$. Знайдемо ймовірності можливих значень за формулою (4.14). Враховуючи, що за умовою, $N = 17$, $M = 8$, $N - M = 9$, $n = 7$, одержимо:

$$P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_9^7}{C_{17}^7} = 0{,}0019; \qquad P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_9^6}{C_{17}^7} = 0{,}0346;$$

$$P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_9^5}{C_{17}^7} = 0{,}1814; \qquad P(X = 3) = \frac{C_8^3 \cdot C_9^4}{C_{17}^7} = 0{,}3628;$$

$$P(X = 4) = \frac{C_8^4 \cdot C_9^3}{C_{17}^7} = 0{,}3023; \qquad P(X = 5) = \frac{C_8^5 \cdot C_9^2}{C_{17}^7} = 0{,}1037;$$

$$P(X=6)=\frac{C_8^6\cdot C_9^1}{C_{17}^7}=0{,}0130; \qquad P(X=7)=\frac{C_8^7\cdot C_9^0}{C_{17}^7}=0{,}0004.$$

Закон розподілу гіпергеометричної випадкової величини, побудований за формулою (4.14), має вигляд:

X	0	1	2	3	4	5	6	7
***P*(*X*=*k*)**	0,0019	0,0346	0,1814	0,3628	0,3023	0,1037	0,0130	0,0004

Побудуємо багатокутник розподілу випадкової величини *X* (рис. 4.6):

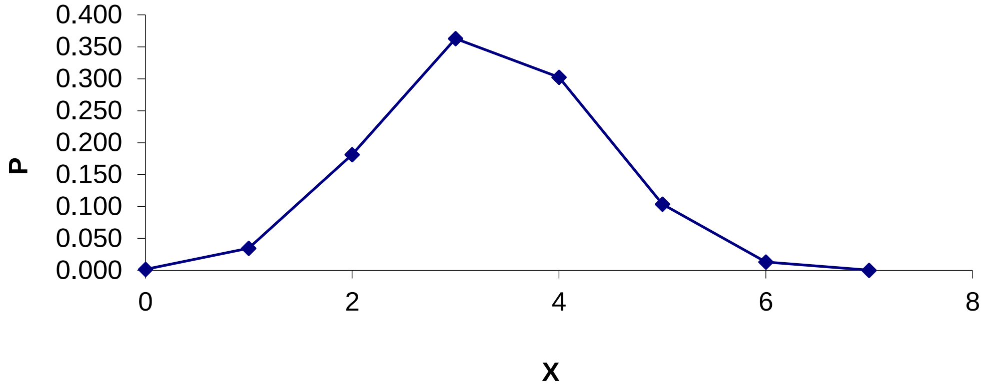

Рис 4.6. Багатокутник розподілу гіпергеометричної випадкової величини

Знайдемо числові характеристики випадкової величини:

- математичне сподівання $M(X)=n\frac{M}{N}=7\cdot\frac{8}{17}=3{,}2941$;
- дисперсія $D(X)=n\frac{M}{N-1}\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{n}{N}\right)=7\cdot\frac{8}{16}\cdot\left(1-\frac{8}{17}\right)\cdot\left(1-\frac{7}{17}\right)=1{,}09$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{1,09}=1,044$.

4.3.4. Рівномірний закон розподілу неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина *X* має *рівномірний розподіл* на інтервалі (*a*, *b*), якщо щільність ймовірності *f*(*x*) на цьому інтервалі постійна, а поза інтервалом дорівнює нулю, тобто

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ c, & a<x\le b,\\ 0, & x>b,\end{cases}$$

де *c*=*const*.

Визначимо константу *c*. Оскільки всі значення випадкової величини належать інтервалу (a, b) , то виконується рівність

$$\int_a^b f(x)dx = 1,$$

або

$$\int_a^b c dx = 1.$$

Звідси

$$c = \frac{1}{b-a}.$$

Отже, функцію щільності ймовірності рівномірного розподілу можна записати у вигляді

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & a < x \le b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

Графік функції щільності ймовірності $f(x)$ для рівномірного розподілу зображений на рис. 4.7.

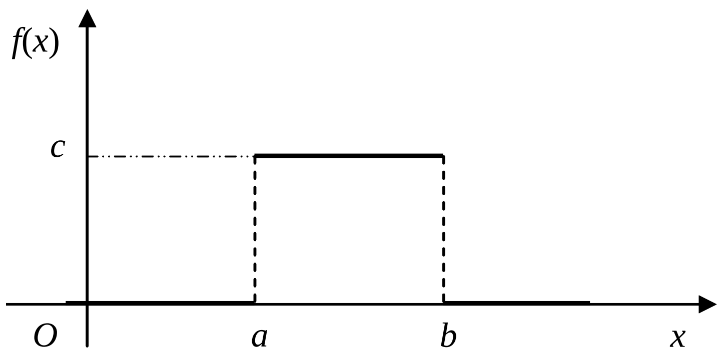

Рис 4.7. Щільність ймовірності рівномірного розподілу

Враховуючи властивість 2 щільності ймовірності, запишемо функцію розподілу рівномірної випадкової величини:

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \left. \frac{x}{b-a} \right|_a^x = \frac{x-a}{b-a}.$$

Тоді

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графік функції розподілу зображений на рис. 4.8.

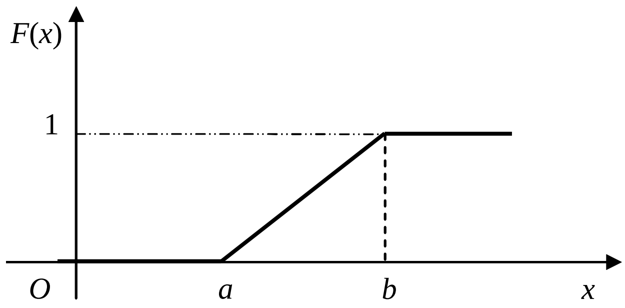

Рис 4.8. Функція розподілу рівномірного закону

Ймовірність того, що значення випадкової величина X, що має рівномірний розподіл, належать інтервалу $(x_1, x_2)\subset[a, b]$, визначається за однією з формул:

1) $P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1)=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$;

2) $P(x_1<X<x_2)=\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)dx=\int\limits_{x_1}^{x_2}\dfrac{dx}{b-a}=\dfrac{x_2-x_1}{b-a}$.

Визначимо основні числові характеристики випадкової величини X, що має рівномірний розподіл.

Математичне сподівання:

$$M(X)=\int\limits_a^b xf(x)dx=\int\limits_a^b\frac{x}{b-a}dx=\left.\frac{x^2}{2(b-a)}\right|_a^b=\frac{a+b}{2}.$$

Дисперсія:

$$D(X)=\int\limits_a^b x^2f(x)dx-M(X)^2=\int\limits_a^b\frac{x^2}{b-a}dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}.$$

Приклад. Записати щільність ймовірності, функцію розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (6; 9). Знайти: ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (7,2; 8,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання.

Щільність ймовірності випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ \frac{1}{3}, & 6<x\le 9,\\ 0, & x>9.\end{cases}$$

Функція розподілу випадкової величини *X*:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 6,\\ \frac{x-6}{3}, & 6<x\le 9,\\ 1, & x>9.\end{cases}$$

Ймовірність того, що випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (7,2; 8,4) дорівнює:

$$P(7,2<X<8,4)=F(8,4)-F(7,2)=\frac{8,4-7,2}{9-6}=0,4\,.$$

Знайдемо числові характеристики випадкової величини *X*:

- математичне сподівання $M(X)=\frac{a+b}{2}=\frac{6+9}{2}=7,5$
- дисперсія $D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}=\frac{\left(9-6\right)^2}{12}=\frac{9}{12}=0,75$;
- середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0,75}=0,87$.

4.3.5. Нормальний закон розподілу неперервної випадкової величини

Нормальний закон розподілу (розподіл Гауса) найчастіше зустрічається у практичних задачах у техніці, економіці, біології, психології, медицині тощо. Обґрунтування цього твердження дано А.М.Ляпуновим у центральній граничній теоремі теорії ймовірностей, наслідок якої формулюється в такий спосіб: *якщо випадкова величина X являє собою суму дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на всю суму дуже малий, то випадкова величина X має розподіл, близький до нормального*.

Неперервна випадкова величина з нормальним законом розподілу приймає будь-які значення в інтервалі $(-\infty, +\infty)$ та може бути задана *щільністю ймовірності*

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (4.15)$$

або *функцією розподілу* $F(x)$:

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \qquad (4.16)$$

де μ і σ – параметри нормального розподілу, Φ(•) –функція Лапласа.

Параметрами нормального розподілу є числові характеристики випадкової величини *X*, а саме, математичне сподівання $\mu=M(X)$, середнє квадратичне відхилення $\sigma=\sigma(X)$. Тоді дисперсія $D(X)=\sigma^2$.

Для нормального розподілу виконується рівність

$$M(X)=Me=Mo=\mu.$$

Твердження, про те, що випадкова величина *X* має нормальний розподіл з параметрами μ і σ коротко записується так: $X\in N(\mu,\sigma)$.

Графік щільності нормального розподілу (рис.4.9) називається *нормальною кривою* або *кривою Гауса*[1].

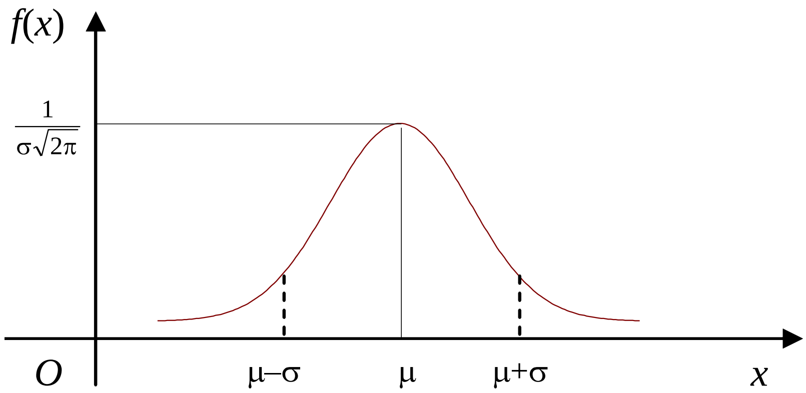

Рис 4.9. Щільність ймовірності нормального розподілу

Методами диференціального числення можна встановити, що:

1) нормальна крива симетрична відносно прямої $x=\mu$;

2) функція $f(x)$ досягає в точці $x=\mu$ максимуму, рівного $1/\sigma\sqrt{2\pi}$;

3) вісь *Ox* є горизонтальною асимптотою функції $f(x)$, тобто $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$;

4) графік функції $f(x)$ має дві точки перегину: $M_1(\mu-\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$ і

[1] Гаусс Карл Фридрих (Gauss Carl Friedrich) (30.4.1777 – 23.2.1855) – великий німецький математик, астроном

$M_2(\mu+\sigma;\ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}})$.

При зміні значення μ графік функції $f(x)$ зміщається уздовж осі x. При збільшенні значення σ графік стискується до осі Ox. При зменшенні значення σ нормальна крива розтягується уздовж осі Oy.

Особливе значення серед нормальних розподілів має *нормований* (*стандартний*) *нормальний розподіл* з параметрами μ=0 і σ=1. Від загального нормального розподілу $X \in N(\mu, \sigma)$ можна перейти до нормованого нормального розподілу, скориставшись заміною змінних

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma}.$$

Тоді випадкова величина $Z \in N(0,1)$. Диференціальна функція нормованого нормального розподілу тотожна функції Гауса:

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \equiv \varphi(z).$$

Інтегральна функція нормованого нормального розподілу виражається через функцію Лапласа:

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-z^2/2} dz = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2} dz + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{-z^2/2} dz =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}}{2} + \Phi(z) = \frac{1}{2} + \Phi(z).$$

Ймовірність того, що випадкова величина $X \in N(\mu, \sigma)$ приймає значення в інтервалі $(x_1,\ x_2)$ визначається, з урахуванням (4.16), по формулі

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = \Phi\left(\frac{x_2-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1-\mu}{\sigma}\right), \qquad (4.17)$$

де $\Phi(x)$ – функція Лапласа.

Правило трьох сигм. Розглянемо окремий випадок формули (4.17), коли межі інтервалу, у який попадають значення випадкової величини X, симетричні щодо математичного сподівання μ. Тоді

$$P(\mu-\delta < X < \mu+\delta) = \Phi\left(\frac{\mu+\delta-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\mu-\delta-\mu}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Оскільки подвійна нерівність $\mu-\delta < X < \mu+\delta$ рівносильна нерівності $|X-\mu| < \delta$, то ймовірність того, що випадкова величина $X \in N(\mu,\ \sigma)$ відхиляється від свого математичного сподівання μ по абсолютній величині менше ніж на $\sigma > 0$ визначається по формулі

$$P(|X-\mu|<\delta)=2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{4.18}$$

Виразивши відхилення випадкової величини X у частках середнього квадратичного відхилення, тобто поклавши $\delta = t\sigma$, рівність (4.18) можна записати у вигляді:

$$P(|X-\mu|<t\sigma)=\Phi\left(\frac{t\sigma}{\sigma}\right)=2\Phi(t).$$

Знайдемо наступні ймовірності:

1) $t=1$: $P(|X-\mu| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$;
2) $t=2$: $P(|X-\mu| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9545$;
3) $t=3$: $P(|X-\mu| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973$.

З останньої рівності витікає, що з ймовірністю, близькою до одиниці, значення випадкової величини X попадають в інтервал $\mu \pm 3\sigma$. Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення поза цим інтервалом дуже мала, а саме дорівнює 0,0027. Таку подію можна вважати практично неможливою. На наведеному міркуванні засноване правило *трьох сигм*: *якщо випадкова величина має нормальний розподіл, то практично вірогідно, що відхилення цієї величини від її математичного сподівання по абсолютній величині не перевершує потроєного середнього квадратичного відхилення*.

Це правило часто використовується на практиці: якщо розподіл випадкової величини X невідомий, але виконується правило трьох сигм, то можна припустити, що випадкова величина розподілена за нормальним законом.

Приклад. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = 20$ і $\sigma = 2$.

Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X.

Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (22,25);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше 3.

Розв'язання.

Функція щільності ймовірності випадкової величини X має вигляд

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\,e^{-\frac{(x-20)^2}{8}}.$$

Методами диференціального обчислення можна встановити, що:

1) нормальна крива симетрична відносно прямої $x = 20$;

2) функція $f(x)$ досягає в точці максимуму $x_{\max} = 20$ максимального значення, яке дорівнює $f_{\max} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} = 0{,}199$;

3) вісь Ox є горизонтальною асимптотою функції $f(x)$, оскільки

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-20)^2}{8}} = 0;$$

4) графік функції $f(x)$ (рис. 4.10) має дві точки перегину: $M_1(18;\ 0{,}121)$ та $M_2(22;\ 0{,}121)$.

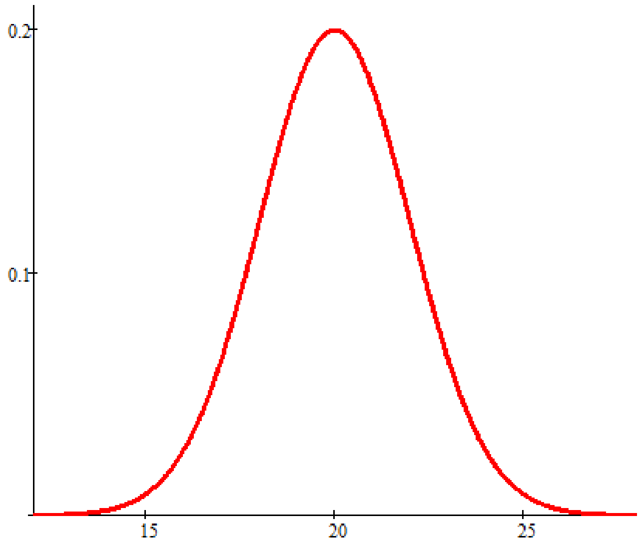

Рис 4.10. Щільність ймовірності випадкової величини $X \in N(20; 2)$

Функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-20)^2}{8}} dt = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-20}{2}\right).$$

Ймовірність того, що випадкова величина $X \in N(\mu, \sigma)$ набуває значення в інтервалі $(x_1,\ x_2)$ визначається, за формулою (4.17), підставивши в яку значення $x_1 = 22$, $x_2 = 25$, $\mu = 20$ і $\sigma = 2$, одержимо:

$$P(22 < X < 25) = \Phi\left(\frac{25-20}{2}\right) - \Phi\left(\frac{22-20}{2}\right) = \Phi\left(2,5\right) - \Phi(1) = 0,4938 - 0,3413 = 0,1525.$$

2) Знайдемо за формулою (4.18) ймовірність того, що абсолютна величина відхилення нормальної випадкової величини X буде меншою ніж 3:

$$P(|X-20|<3)=2\Phi\left(\frac{3}{2}\right)=2\Phi\left(1,5\right)=2\cdot 0,4332=0,8664.$$

4.3.6. Показовий закон розподілу неперервної випадкової величини

Неперервна випадкова величина X називається розподіленою по *показовому закону*, якщо вона може приймати тільки невід'ємні значення, а щільність ймовірності визначається в такий спосіб:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0,\end{cases}$$

де λ – параметр розподілу, $\lambda>0$.

Знайдемо інтегральну функцію показового розподілу

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{0} 0dx+\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\int\limits_{0}^{x} e^{-\lambda x}dx=-e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}=1-e^{-\lambda x}.$$

Отже,

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

Графік щільності ймовірності функції розподілу показового закону при $\lambda=1$ зображений на рис. 4.11.

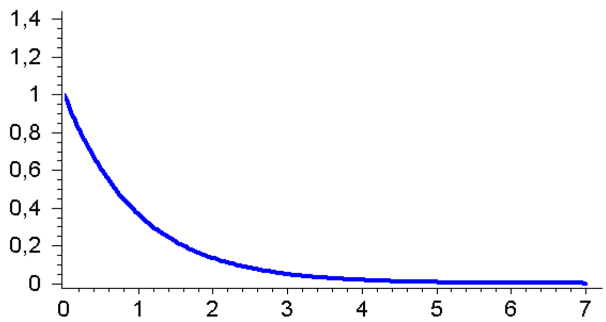

Рис 4.11. Щільність ймовірності показового закону

Ймовірність того, що випадкова величина X приймає значення з інтервалу (x_1, x_2), дорівнює

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) = 1 - e^{-\lambda x_2} - 1 + e^{-\lambda x_1} = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}. \qquad (4.20)$$

Числові характеристики випадкової величини, розподіленої за показовим законом:

1) математичне сподівання

$$M(X) = \int_0^{\infty} xf(x)dx = \lambda \int_0^{\infty} xe^{-\lambda x}dx = \frac{1}{\lambda};$$

2) дисперсія

$$D(X) = \int_0^{\infty} x^2 f(x)dx - [M(X)]^2 = \lambda \int_0^{\infty} x^2 e^{-\lambda x}dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2};$$

3) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda}.$$

Приклад. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданим щільністю ймовірності $f(x)=4e^{-4x}$ при $x \geq 0$; при $x<0$ $f(x)=0$. Знайти ймовірність того, що в результаті випробування X попадає в інтервал (0,15;0,25).

Розв'язання. Використовуємо формулу

$$P(x_1 < X < x_2) = e^{-\lambda x_1} - e^{-\lambda x_2}.$$

З огляду на те, що за умовою x_1=0,15, x_2=0,25, λ=4, отримаємо:

$$P(0,15 < X < 0,25) = e^{-4 \cdot 0,15} - e^{-4 \cdot 0,25} = e^{-0.6} - e^{-1} = 0,549 - 0,368 = 0,181.$$

Числові характеристики випадкової величини:

1) математичне сподівання

$$M(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0,25;$$

2) дисперсія

$$D(X) = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{4^2} = 0,0625;$$

3) середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

Контрольні питання

1. Визначення випадкової величини.
2. Приклади дискретних та неперервних випадкових величин.
3. Закон розподілу дискретної випадкової величини.
4. Багатокутник розподілу дискретної випадкової величини.
5. Функція розподілу випадкової величини та її властивості.
6. Щільність ймовірності випадкової величини та її властивості.
7. Математичне сподівання випадкової величини
8. Властивості математичного сподівання.
9. Дисперсія випадкової величини.
10. Властивості дисперсії.
11. Середнє квадратичне відхилення випадкової величини.
12. Біноміальний закон розподілу випадкової величини.
13. Геометричний закон розподілу випадкової величини.
14. Гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини.
15. Функція розподілу, щільність ймовірності, числові характеристики рівномірного закону розподілу випадкової величини.
16. Функція розподілу, щільність ймовірності, числові характеристики нормального закону розподілу випадкової величини.
17. Правило трьох сигм.
18. Функція розподілу, щільність ймовірності, числові характеристики показового закону розподілу випадкової величини.

Література

1. Тевяшев А. Д. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. / А. Д. Тевяшев, С. І. Козиренко, І. С. Агапова ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : Світ Книг, 2017. – 248 с.
2. Тевяшев А.Д. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 572 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те виглядання. – К.: Центр учбової літ., 2010. – 424 с.
4. Малярець Л. М. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. У 3-х ч. Ч. 3 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. Д. Широкорад. - Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. - 568 с.
5. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. - Київ : КНЕУ, 2005. - 340 с.
6. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б І. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Професіонал, 2007. – 560 с.
7. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ : Алерта, 2013. 440 с.

Варіанти індивідуальних розрахункових завдань

Варіант № 1

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**9**	**11**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,24**	**0,12**	**0,10**	**0,19**	**0,06**	**0,10**

1. Побудувати багатокутник розподілу.

2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.

3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^3+ax, & 0<x\le 1,\\ 1 & x>1.\end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,22**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;

3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,31. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;

3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (3; 17). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (5,5; 12,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{24}$ і $\sigma=\mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:

1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **18**);

2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (1.17; 2.95).

Варіант № 2

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**13**	**19**	**21**	**26**
P	**0,15**	**0,17**	**0,13**	**0,12**	**0,06**	**0,13**	**0,24**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(1.5,\ 2\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,39**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,34. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **9** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (11; 18). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (15,7; 17,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{21}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **19**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 3

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**12**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,21**	**0,24**	**0,14**	**0,07**	**0,11**	**0,04**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^2 - 1}{a}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0 < x \le 2, \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,17. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **22** кулі однакового розміру, з них **13** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (13; 19). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (15,7; 18,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{30}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**23**, **35**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x) = 6e^{-6x}$ при $x \ge 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 4

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**9**	**11**	**17**	**20**	**24**
P	**0,27**	**0,17**	**0,10**	**0,08**	**0,26**	**0,07**	**0,05**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3+ax, & 0<x\le 1, \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi, \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,23**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,27. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (5; 17). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (8,9; 13,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{20}$ і $\sigma = \mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**19**, **26**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=7e^{-7x}$ при $x \ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 5

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**8**	**11**	**17**	**21**	**26**
P	**0,09**	**0,21**	**0,28**	**0,06**	**0,12**	**0,11**	**0,13**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу *F*(*x*).
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності *f*(*x*); 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \sin x, & 0<x\le \pi/2,\\ 0, & x>\pi/2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу *F*(*x*).

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,36**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *А*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,14. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (8; 17). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (9,1; 14,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **23** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{25}$ і $\sigma = \mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:

1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **16**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,14; 0,63).

Варіант № 6

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**8**	**12**	**15**	**23**	**24**
P	**0,05**	**0,09**	**0,27**	**0,15**	**0,23**	**0,14**	**0,07**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,77**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,21. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (11; 17). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (13,3; 14,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{25}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**22**, **32**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.11; 0.95).

Варіант № 7

Задача 1. Дискретна випадкова величина Х задана законом розподілу:

X	**2**	**6**	**10**	**12**	**17**	**23**	**25**
P	**0,16**	**0,13**	**0,07**	**0,22**	**0,09**	**0,14**	**0,19**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^3 + ax, & 0 < x \le 1, \\ 1 & x > 1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le \pi/6, \\ 3\sin 3x, & \pi/6 < x \le \pi/3, \\ 0, & x > \pi/3. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,29**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,4. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **20** куль однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (11; 21). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (15,3; 19,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{19}$ і $\sigma = \mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**17**, **30**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x) = 5e^{-5x}$ при $x \ge 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 8

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**8**	**14**	**18**	**20**	**27**
P	**0,05**	**0,18**	**0,05**	**0,11**	**0,08**	**0,20**	**0,33**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,58. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куль однакового розміру, з них **14** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (11; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (19,5; 22,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{15}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**16**, **27**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=6e^{-6x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 9

Задача 1. Дискретна випадкова величина Х задана законом розподілу:

X	**1**	**6**	**10**	**13**	**16**	**21**	**26**
P	**0,19**	**0,23**	**0,22**	**0,09**	**0,05**	**0,06**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \pi/2, \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,3**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,35. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (7; 14). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (9,7; 12,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{34}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**24**, **31**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=7e^{-7x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 10

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**3**	**5**	**8**	**11**	**16**	**20**	**24**
P	**0,09**	**0,21**	**0,08**	**0,14**	**0,25**	**0,07**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^3+ax, & 0<x\le 1, \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x-\frac{1}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,27**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,37. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куля однакового розміру, з них **12** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (7; 21). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (8,9; 17,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{20}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**21**, **33**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,14; 0,63).

Варіант № 11

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**9**	**11**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,24**	**0,12**	**0,10**	**0,19**	**0,06**	**0,10**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,22**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,63. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (7; 27). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (11,2; 17,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{24}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **18**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x \ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (1.17; 2.95).

Варіант № 12

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**13**	**19**	**21**	**26**
P	**0,15**	**0,17**	**0,13**	**0,12**	**0,06**	**0,13**	**0,24**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,39**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,83. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **9** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (7; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (15,1; 22,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{21}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **19**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 13

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**12**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,21**	**0,24**	**0,14**	**0,07**	**0,11**	**0,04**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^3+ax, & 0<x\le 1, \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \pi/2, \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,8. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **22** кулі однакового розміру, з них **13** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (9; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (13,4; 19,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{30}$ і $\sigma=\mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**23**, **35**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=6e^{-6x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 14

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**9**	**11**	**17**	**20**	**24**
P	**0,27**	**0,17**	**0,10**	**0,08**	**0,26**	**0,07**	**0,05**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,23**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,13. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (9; 27). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (14,7; 17,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{20}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**19**, **26**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=7e^{-7x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 15

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**8**	**11**	**17**	**21**	**26**
P	**0,09**	**0,21**	**0,28**	**0,06**	**0,12**	**0,11**	**0,13**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi/6,\\ 3\sin 3x, & \pi/6<x\le \pi/3,\\ 0, & x>\pi/3. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,36**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;

3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,17. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **23** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль

2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;

3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (9; 21). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (15,6; 22,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{25}$ і $\sigma = \mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **16**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,14; 0,63).

Варіант № 16

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**8**	**12**	**15**	**23**	**24**
P	**0,05**	**0,09**	**0,27**	**0,15**	**0,23**	**0,14**	**0,07**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^3+ax, & 0<x\le 1, \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi, \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,77**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,11. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (9; 14). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (10,8; 12,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{25}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**22**, **32**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (1.17; 2.95).

Варіант № 17

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**6**	**10**	**12**	**17**	**23**	**25**
P	**0,16**	**0,13**	**0,07**	**0,22**	**0,09**	**0,14**	**0,19**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,29**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,28. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **20** куль однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (2; 11). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (5,1; 9,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{19}$ і $\sigma = \mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**17**, **30**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 18

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**8**	**14**	**18**	**20**	**27**
P	**0,05**	**0,18**	**0,05**	**0,11**	**0,08**	**0,20**	**0,33**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,24. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куль однакового розміру, з них **14** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (2; 7). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (3,7; 6,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{15}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**16**, **27**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=6e^{-6x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 19

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**6**	**10**	**13**	**16**	**21**	**26**
P	**0,19**	**0,23**	**0,22**	**0,09**	**0,05**	**0,06**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^3+ax, & 0<x\le 1,\\ 1 & x>1.\end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,3**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,18. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (2; 9). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (5,8; 7,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{34}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**24**, **31**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=7e^{-7x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 20

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**3**	**5**	**8**	**11**	**16**	**20**	**24**
P	**0,09**	**0,21**	**0,08**	**0,14**	**0,25**	**0,07**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi, \\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,27**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,45. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куля однакового розміру, з них **12** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (2; 11). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (5,2; 9,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{20}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**21**, **33**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,14; 0,63).

Варіант № 21

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**9**	**11**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,24**	**0,12**	**0,10**	**0,19**	**0,06**	**0,10**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,22**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,56. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (2; 14). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (3,3; 12,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{24}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **18**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x \ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (1.17; 2.95).

Варіант № 22

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**13**	**19**	**21**	**26**
P	**0,15**	**0,17**	**0,13**	**0,12**	**0,06**	**0,13**	**0,24**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^3+ax, & 0<x\le 1,\\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x-\frac{1}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,39**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,16. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **9** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (5; 14). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (6,5; 11,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{21}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **19**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 23

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**9**	**12**	**18**	**23**	**25**
P	**0,19**	**0,21**	**0,24**	**0,14**	**0,07**	**0,11**	**0,04**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le \pi/6, \\ 3\sin 3x, & \pi/6<x\le \pi/3, \\ 0, & x>\pi/3. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,2. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **22** кулі однакового розміру, з них **13** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (5; 17). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (5,6; 12,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{30}$ і $\sigma=\mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**23**, **35**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=6e^{-6x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 24

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**9**	**11**	**17**	**20**	**24**
P	**0,27**	**0,17**	**0,10**	**0,08**	**0,26**	**0,07**	**0,05**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,23**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,68. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **21** куля однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (5; 21). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (7,6; 18,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{20}$ і $\sigma = \mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**19**, **26**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=7e^{-7x}$ при $x \ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 25

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**7**	**8**	**11**	**17**	**21**	**26**
P	**0,09**	**0,21**	**0,28**	**0,06**	**0,12**	**0,11**	**0,13**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x^3+ax, & 0<x\le 1, \\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ \sin x, & 0<x\le \pi/2, \\ 0, & x>\pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,36**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,77. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **23** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (5; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (10,8; 16,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{25}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**11**, **16**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **4**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,14; 0,63).

Варіант № 26

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**5**	**8**	**12**	**15**	**23**	**24**
P	**0,05**	**0,09**	**0,27**	**0,15**	**0,23**	**0,14**	**0,07**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,77**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,87. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **10** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (7; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (11,1; 22,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{25}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**22**, **32**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=3e^{-3x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (1.17; 2.95).

Варіант № 27

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**6**	**10**	**12**	**17**	**23**	**25**
P	**0,16**	**0,13**	**0,07**	**0,22**	**0,09**	**0,14**	**0,19**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1,\\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3,\\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \dfrac{x}{2}, & 0<x\le 2,\\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,29**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,69. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **20** куль однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (14; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (17,2; 22,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{19}$ і $\sigma = \mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**17**, **30**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=5e^{-5x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0,2; 0,5).

Варіант № 28

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**2**	**5**	**8**	**14**	**18**	**20**	**27**
P	**0,05**	**0,18**	**0,05**	**0,11**	**0,08**	**0,20**	**0,33**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини X.

Задача 2. Неперервна випадкова величина X задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ x^3+ax, & 0<x\le 1,\\ 1 & x>1. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{\sin x}{2}, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина X – число появ події A в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події A в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,71**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини X;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події A. Побудувати закон розподілу випадкової величини X – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події A в кожному випробуванні дорівнює 0,74. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куль однакового розміру, з них **14** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини X – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини X;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини X.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини X, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (21; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (25,1; 27,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина X розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{15}$ і $\sigma=\mathbf{5}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини X. Записати функцію розподілу випадкової величини X. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина X набуде значення, що належить інтервалу (**16**, **27**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини X менше **2**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина X розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=6e^{-6x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини X належать інтервалу (0.37; 1.63).

Варіант № 29

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**1**	**6**	**10**	**13**	**16**	**21**	**26**
P	**0,19**	**0,23**	**0,22**	**0,09**	**0,05**	**0,06**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 1, \\ \dfrac{x-1}{a}, & 1 < x \le 3, \\ 1, & x > 3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $(1.5,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ \sin x, & 0 < x \le \pi/2, \\ 0, & x > \pi/2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,3**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,62. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **24** кулі однакового розміру, з них **11** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (17; 28). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (18,3; 23,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu = \mathbf{34}$ і $\sigma = \mathbf{6}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**24**, **31**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **3**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x) = 7e^{-7x}$ при $x \ge 0$; $f(x) = 0$ при $x < 0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,17; 0,63).

Варіант № 30

Задача 1. Дискретна випадкова величина X задана законом розподілу:

X	**3**	**5**	**8**	**11**	**16**	**20**	**24**
P	**0,09**	**0,21**	**0,08**	**0,14**	**0,25**	**0,07**	**0,16**

1. Побудувати багатокутник розподілу.
2. Знайти функцію розподілу $F(x)$.
3. Знайти математичне сподівання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретної випадкової величини *X*.

Задача 2. Неперервна випадкова величина *X* задана функцією розподілу

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ \dfrac{x^2-1}{a}, & 1<x\le 3, \\ 1, & x>3. \end{cases}$$

Найти: 1) значення параметра a; 2) щільність ймовірності $f(x)$; 3) ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу $(1,\ 2)$; 4) математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 3. Задана щільність ймовірності неперервної випадкової величини *X*:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0, \\ x-\dfrac{1}{2}, & 0<x\le 2, \\ 0, & x>2. \end{cases}$$

Знайти функцію розподілу $F(x)$.

Задача 4. Випадкова величина *X* – число появ події *A* в **7** незалежних випробуваннях. Ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні постійна та дорівнює **0,27**.

1) побудувати біноміальний закон розподілу випадкової величини *X*;
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 5. Проводиться серія випробувань до першої появи події *A*. Побудувати закон розподілу випадкової величини *X* – числа проведених випробувань, якщо відомо, що ймовірність появи події *A* в кожному випробуванні дорівнює 0,19. Знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 6. В кошику **25** куля однакового розміру, з них **12** білих куль. З кошика навмання відібрано **7** куль.

1) побудувати гіпергеометричний закон розподілу випадкової величини *X* – числа білих куль серед відібраних куль
2) побудувати багатокутник розподілу випадкової величини *X*;
3) найти математичне сподівання, дисперсію і середнє квадратичне відхилення випадкової величини *X*.

Задача 7. Записати та побудувати графіки щільності ймовірності, функції розподілу випадкової величини *X*, розподіленої за рівномірним законом в інтервалі (17; 21). Знайти ймовірність того, що в результаті випробування випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (18,3; 20,4); математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Задача 8. Випадкова величина *X* розподілена по нормальному закону з параметрами $\mu=\mathbf{20}$ і $\sigma=\mathbf{7}$. Дослідити методами диференціального числення та побудувати графік функції щільності ймовірності випадкової величини *X*. Записати функцію розподілу випадкової величини *X*. Знайти ймовірність того, що:
1) випадкова величина *X* набуде значення, що належить інтервалу (**21**, **33**);
2) абсолютна величина відхилення випадкової величини *X* менше **5**.

Задача 9. Неперервна випадкова величина *X* розподілена за показовим законом, заданому щільністю ймовірності $f(x)=8e^{-8x}$ при $x\ge 0$; $f(x)=0$ при $x<0$. Записати функцію розподілу, числові характеристики випадкової величини. Знайти ймовірність того, що значення випадкової величини *X* належать інтервалу (0,14; 0,63).