МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ РАДІОЕЛЕКТРОНІКИ

КАФЕДРА СИСТЕМОТЕХНІКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ

до практичного заняття з дисципліни

**“ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ, ЙМОВІРНІСНІ ПРОЦЕСИ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА”**

за темою

«Основні поняття та визначення теорії ймовірностей»

для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності
122 «Комп’ютерні науки»

Харків 2023

Методичні вказівки до практичного заняття з дисципліни «Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика» за темою «Основні поняття та визначення теорії ймовірностей» для студентів денної та заочної форм навчання спеціальності 122 «Комп'ютерні науки» / Упоряд.: І.В. Гребеннік, Г.Є. Безугла, Т.Є.Романова, С.Б.Шеховцов.– Харків: ХНУРЕ, 2023 – 38с.

Упорядники: І.В. Гребеннік
Г.Є. Безугла
Т.Є.Романова
С.Б.Шеховцов

Зміст

“Теорія ймовірностей, ймовірнісні процеси і математична статистика”

Тема 1. Основні поняття та визначення теорії ймовірностей

Мета заняття: безпосереднє обчислення ймовірностей подій з використанням класичного та геометричного визначень ймовірності.

Література: [1–7].

Завдання практичного заняття.

1. Вивчити основні прийоми безпосереднього обчислення ймовірностей подій з використанням класичного та геометричного визначень ймовірності.
2. Розв'язати завдання практичного заняття.
3. Оформити звіт із практичного заняття (титульний лист, основні визначення, формули, теореми, розв'язання задач заданого варіанту).

1.1. Предмет теорії ймовірностей

У своїй практичній діяльності ми часто зустрічаємося з експериментами, дослідами, результат яких не визначений і залежить від випадку. Інакше кажучи, якщо таке явище спостерігати один раз, то не можна точно передбачити, як воно буде протікати. Але якщо це явище спостерігати багаторазово при незмінних умовах, то можна встановити певні закономірності, яким воно підпорядковується. Так, якщо підкинути монету один раз, то не можна передбачити заздалегідь, що випаде – герб або цифра. Якщо ж зробити серію з досить великої кількості підкидань монети, то можна встановити закономірність, що полягає в тім, що відношення числа гербів, що випали, до загального числа підкидань тим менше відрізняється від 0,5, чим більше число підкидань монети. Про результати подібних явищ кажуть, що вони мають статистичну стійкість.

Теорія ймовірностей – розділ математики, у якому вивчаються статистично стійкі випадкові події і явища незалежно від їхньої конкретної природи, а також виявляються закономірності при масовому їхньому повторенні.

1.2. Класифікація подій

До вихідних понять теорії ймовірностей належать поняття стохастичного експерименту, випадкової події, ймовірності випадкової події.

Стохастичними (випадковими) експериментами називаються експерименти, результат яких не можна передбачити наперед.

Припускається, що з розглядуваним експериментом можна пов’язати поняття всіх можливих його результатів.

Під ***подією*** в теорії ймовірностей розуміється будь-який результат, наслідок стохастичного експерименту або випробування.

У свою чергу під ***випробуванням*** розуміється виконання певного комплексу умов, при яких проводиться спостереження, і який може бути відтворений як завгодно багато разів.

Подіями можна вважати випадання герба, влучення в мішень, появу бракованого виробу і т.п. Випробуваннями в цих прикладах є, відповідно, кидок монети, постріл по мішені, проведення контролю якості продукції.

Події будемо позначати великими літерами латинського алфавіту: *A, B, C,...*

Подія E називається ***достовірною***, якщо вона обов'язково відбудеться при виконанні певних умов. Подія U називається ***неможливою***, якщо вона завідомо не може відбутися в умовах даного випробування.

Якщо в кошику є тільки білі кулі, то витяг білої кулі – достовірна подія, а витягання чорної кулі – неможлива подія.

Подія A називається ***випадковою***, якщо в результаті випробування вона може або відбутися, або не відбутися.

Поява певного числа очок, наприклад трьох, при підкиданні грального кубику – випадкова подія.

Дві події називаються ***несумісними***, якщо поява однієї з них виключає можливість настання іншої. У противному випадку події називаються ***сумісними***.

Влучення в мішень і промах при одному пострілі є несумісними подіями. Поява числа 2 і парне числа очок при однократному киданні грального кубику – сумісні події.

Несумісність більш ніж двох подій означає їх попарну несумісність.

Ті самі події можуть бути несумісними в одному випробуванні та сумісними в іншому.

Наприклад, поява герба та поява цифри при підкиданні однієї монети – події несумісні. Ті ж події – поява герба і цифри – є сумісними, якщо підкидаються дві монети.

Подія B називається ***сприятливою*** для події A, якщо з того, що відбулася подія B слідує, що відбулася подія A.

Поява числа 2 при киданні грального кубику є *сприятливою* подією появі парного числа очок.

Події *A, B, C,...* називаються ***єдино можливими***, якщо при випробуванні обов'язково відбудеться одна й тільки одна з них.

Якщо в кошику перебувають білі та чорні кулі, то при витяганні двох куль єдино можливими будуть події: *A* – обидві кулі білі, *B* – обидві кулі чорні, *C* – одна куля біла, інша чорна.

Якщо при випробуванні може відбутися кілька подій і немає підстав вважати появу однієї з них більш можливою, ніж появу інших, то події називаються ***рівноможливими*** .

Поява герба та цифри при киданні монети є рівноможливими подіями.

Множина подій даного випробування утворює ***повну групу подій***, якщо вони є несумісними і єдино можливими.

Нехай у кошику перебувають кулі трьох кольорів – білого, жовтого та синього. Навмання витягають одну кулю. Тоді події, що складаються в витязі білої, жовтої або синьої кулі, утворять повну групу подій.

Дві події, одна з яких обов'язково повинна відбутися в даному випробуванні, але поява однієї з них виключає появу іншої події, називаються ***протилежними***.

Наприклад, події "випав герб" і "випала цифра" – протилежні при кидку однієї монети.

Ясно, що протилежні події є несумісними і єдино можливими, тобто утворюють повну групу подій.

Події, протилежні подіям *A, B, C*,... будемо позначати через $\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}\ldots$

Неподільні, що виключають одна одну події даного випробування, називаються ***елементарними подіями***. Всі разом вони поєднуються в множину, яка називається ***простором елементарних подій***.

Домовимося позначати простір елементарних подій літерою Ω, а елементарну подію літерою ω і записувати $\omega \in \Omega$.

Приклад. Гральний кубик кидається один раз. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

Розв'язання. При одному киданні грального кубику елементарними подіями будуть випадання одного, двох, ... , шести очок.

Простором елементарних подій цього експерименту є множина:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$$

де $\omega_i = i, i = 1, 2, \ldots, 6$ означає випадання відповідного числа очок.

Приклад. Монету підкидають двічі. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

Розв'язання. Наслідками цього випробування можуть бути такі елементарні події:

- $\omega_1 = ГГ$ - двічі випаде герб;
- $\omega_2 = ГЦ$ – за першого кидання випаде герб, а за другого цифра;
- $\omega_3 = ЦГ$ – за першого кидання випаде цифра, а за другого герб;
- $\omega_4 = ЦЦ$ – двічі випаде цифра;

Простором елементарних подій цього експерименту є множина:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} \text{ або } \Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}.$$

Зауважимо, що в наведених прикладах простір елементарних подій Ω є скінченою множиною (елементи такої множини можна полічити).

Наведемо приклади, в яких простір елементарних подій Ω є нескінченою множиною.

Приклад. Монету кидають до першої появи герба. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

Розв'язання. Простором елементарних подій такого експерименту є множина:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n, \ldots, \omega_\infty\},$$

де $\omega_n = \underbrace{ЦЦ...Ц}_{n-1}\,Г$ означає, що герб випаде вперше при n-му киданні, а ω_∞ означає, що герб ніколи не випаде (у цьому разі експеримент продовжується нескінченно довго).

У даному приклади простір елементарних подій Ω є нескінченою, але зліченою множиною (усі елементи такої множини можна занумерувати).

Приклад. У квадрат на площині зі стороною $2a$ і з центром у початку координат, сторони якого паралельні до осей координат, навмання «кидають» точку. Описати простір елементарних подій даного експерименту.

Розв'язання. У цьому випадку можливими наслідками експериментує попадання в будь-яку точку заданого квадрата. Якщо вважати (x, y) координатами точки на площині, то простір елементарних подій

$$\Omega = \{(x, y): -a \le x \le a,\ -a \le y \le a\}$$

є нескінченою і незліченою множиною (елементи такої множини не можна ні полічити, ні занумерувати).

Кожну реальну випадкову подію A в математичній моделі ототожнюють з підмножиною Ω_A множини Ω, включаючи до Ω_A тільки ті елементарні події ω, за яких настає подія A. Елементарні події $\omega \in \Omega_A$ є сприятливими до події A.

Отже, надалі подія A – це підмножина Ω_A простору Ω, що складається з усіх елементарних подій $\omega \in \Omega_A$, які є сприятливими до події A.

Якщо результат експерименту описується точкою $\omega \in \Omega_A$, то в даному експерименті подія A відбулася. Якщо точка $\omega \notin \Omega_A$, то подія A в даному експерименті не відбулася.

Множина Ω також є подією, а саме достовірною подією, оскільки вона обов'язково настає під час будь-якого результату експерименту.

Як вказано вище, неможливою є подія, яка в процесі виконання даного експерименту не може відбутися. Очевидно, що неможливій події відповідає порожня множина елементарних подій. Тому неможливу подію позначають, як і порожню множину, через $\varnothing$.

Приклад. Гральний кубик кидається один раз. Визначити події: A– випаде число очок, кратне 2; B– випаде число очок, кратне 3; C– випаде число очок від 1 до 6; D– випаде число очок, кратне 8;

Розв'язання. Простором елементарних подій цього експерименту є множина $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$, де $\omega_i, i = 1, 2, \ldots, 6$ – випадання е верхній грані кубика i очок.

Події $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}, B = \{\omega_3, \omega_6\}$ – складені події, причому перша розкладається на три, друга – на дві елементарні події.

Подія $C = \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ – достовірна подія, оскільки яке-небудь число очок від 1 до 6 обов'язково випаде.

Подія $D = \{\varnothing\}$ – неможлива подія, бо жодне з чисел від 1 до 6 не ділиться на 8.

1.3. Класичне визначення ймовірності події

Для визначення числової характеристики міри можливості появи випадкової події в тім або іншому випробуванні, введемо поняття ймовірності події.

Нехай у результаті випробування може відбутися кінцеве число n елементарних подій, серед яких є m ($m \le n$) подій, сприятливих для події A.

Класичною ймовірністю події A називають відношення числа m сприятливих для цієї події елементарних подій випробування, до загального числа n всіх несумісних, єдино можливих і рівноможливих елементарних подій випробування.

Ймовірність події позначається символом $P(A)$ (від слова probabilities – ймовірність).

Таким чином, за визначенням

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{1.1}$$

де m – число елементарних подій, сприятливих для події A; n – число всіх єдино можливих, рівноможливих і несумісних елементарних подій випробування.

Приклад. При киданні грального кубику можливі шість елементарних подій – випадання 1, 2, 3, 4, 5, 6 очок. Яка ймовірність появи парного числа очок?

Розв'язання. Всі $n = 6$ результатів утворюють повну групу і рівноможливі, тобто є несумісними, єдино можливими та рівноможливими. Події A – появі парного числа очок сприяють 3 елементарні події – випадання 2, 4 і 6 очок. По формулі (1.1) маємо

$$P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Властивості ймовірності події:

1. Ймовірність будь-якої події не може бути від'ємною та більше одиниці. Дійсно, тому що $0 \le m \le n$, то $0 \le \frac{m}{n} \le 1$. Звідси $0 \le P(A) \le 1$.

2. Ймовірність достовірної події E дорівнює одиниці. Доказ очевидний, тому що достовірній події повинні сприяти всі n елементарних подій випробування, тобто m=n і $P(E) = n/n = 1$.

3. Ймовірність неможливої події U дорівнює нулю. Неможливій події не може сприяти жодна з елементарних подій випробування, тобто m=0. Звідси витікає, що $P(U) = 0/n = 0$.

4. Сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу, дорівнює одиниці, тому що поява хоча б однієї з них у результаті випробування є достовірною подією.

5. Сума ймовірностей протилежних подій дорівнює одиниці

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Дійсно, події A сприяють m з n елементарних подій випробування, а події $\overline{A}$

сприяють ($n - m$) елементарних подій.

Тоді

$$P(A) + P(\overline{A}) = \frac{m}{n} + \frac{n-m}{n} = \frac{n}{n} = 1.$$

Звідси ймовірність події *A* дорівнює

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}).$$

1.4. Статистичне визначення ймовірності подій

Наведене класичне визначення ймовірності події має низку істотних недоліків. Воно дає можливість розглядати лише події, які можна розбити на кінцеве число рівноможливих і несумісних подій. Однак, при розгляді практичних задач число елементарних результатів найчастіше необмежено та, крім того ймовірності появи елементарних подій, як правило, різні, тобто події не є рівноможливими. Із цієї причини використовується інше, *статистичне* визначення ймовірності.

Припустимо, що в n проведених випробуваннях подія A наступила m разів і не наступила ($n - m$) разів. Тоді число m називається *частотою* події *A*, а частка $\frac{m}{n}$ – *відносною частотою* події *A* у даній серії випробувань.

Таким чином, відносна частота *W* обчислюється по формулі

$$W(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.2)$$

Відомо, що відносна частота появ події *A* у результаті випробувань, які можуть повторюватися необмежене число раз, наближається до деякого постійного значення.

Під *статистичною ймовірністю* події *A* розуміється відносна частота появи події *A* в *n* зроблених дослідах, тобто величина

$$\tilde{P}(A) = W(A) = \frac{m}{n}.$$

Як наближене значення ймовірності події приймається його відносна частота в серії з досить великого числа випробувань:

$$P(A) \approx W(A).$$

При збільшенні числа випробувань відносна частота наближається до ймовірності події:

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} W(A).$$

Можна показати, що ймовірності, визначені статистично, мають такі ж властивості, як і ймовірності, отримані за допомогою класичного визначення.

Приклад. Монета підкинута п'ять разів. Герб випав два рази. Яка ймовірність і відносна частота випадання герба?

Розв'язання. Ймовірність випадання герба дорівнює $P(A)=\dfrac{1}{2}=0,5$ (із двох можливих результатів при підкиданні монети випаданню герба сприяє один), а відносна частота випадання герба в даному досліді дорівнює $W(A)=\dfrac{2}{5}=0,4$ (подія наступила двічі в п'яти випробуваннях).

Статистичне визначення ймовірності може бути застосовано не до будь-яких подій з невизначеним результатом, а тільки до тих з них, які мають певні властивості:

1. Розглянуті події повинні бути результатами тільки тих випробувань, які можуть бути відтворені необмежене число раз при тому самому комплексі умов.

2. Число випробувань, у результаті яких з'являється подія A, повинне бути досить велике, тому що тільки в цьому випадку можна вважати ймовірність події $P(A)$ приблизно дорівнює її відносній частоті.

3. Події повинні мати так звану *статистичну стійкість* або *стійкість відносних частот*. Це означає, що в різних серіях випробувань відносна частота події змінюється незначно (тим менше, чим більше число випробувань), коливаючись біля постійного числа – ймовірності події.

Факт наближення відносної частоти події до його ймовірності при збільшенні числа випробувань підтверджується численними експериментами, що проводилися різними дослідниками із часів виникнення теорії ймовірностей.

Так, наприклад,

- у дослідах Ж.Бюффона[1] (XVIII в.) відносна частота появи герба при 4040 підкиданнях монети виявилася рівною 0,5069;
- у дослідах К.Пірсона[2] (XIX в.) при 24000 підкиданнях герб з'явився 12012 раз з відносною частотою 0,5005, яка практично не відрізняється від ймовірності цієї події, рівної 0,5.

1.5. Геометричне визначення ймовірності

Для подолання недоліку класичного визначення ймовірності, який полягає в тому, що воно не застосовується до випробувань з нескінченним числом елементарних подій, вводять поняття *геометричної ймовірності* – ймовірності попадання точки в область (відрізок, плоску фігуру, просторову фігуру).

Нехай плоска фігура g становить частину плоскої фігури G. На фігуру G навмання кидається точка.

Всі точки області G «рівноправні» щодо потрапляння туди кинутої випадкової точки.

[1] Бюффон Жорж Луї Леклерк (Buffon Georges Louis Leclerc) (7.9.1707 – 16.4.1788) – французький натураліст, біолог, математик, геолог

[2] Пірсон Карл (Pearson Karl) (27.3.1857 – 27.4.1936) – англійський математик, біолог, філософ

Вважаючи, що ймовірність події A – потрапляння кинутої точки на фігуру g – пропорційна площі цієї фігури і не залежить ні від її розташування щодо G, ні від форми g, знайдемо

$$P(A)=\frac{S_g}{S_G}, \tag{1.3}$$

де S_g і S_G відповідно площі областей g та G (рис. 1.1)

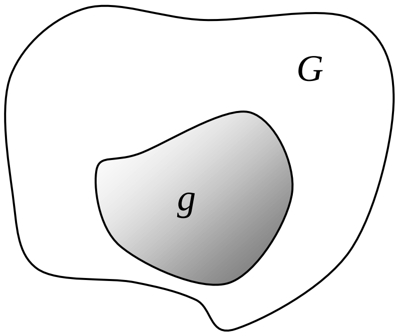

Рис. 1.1.

Фігуру g називають ***сприятливою*** події A.

Геометричною ймовірністю події A називається відношення міри області g, яка сприяє появі події A, до міри всій області G, тобто

$$P(A)=\frac{mes(g)}{mes(G)}.$$

де $mes(\cdot)$ – міра (довжина, площа, об'єм) області.

Приклад. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 9 см і 4 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

*Розв'язання***.** Площа кільця (фігура g) дорівнює $S_g=9^2\pi-4^2\pi=65\pi$. Площа великого кола (фігура G) дорівнює $S_G=9^2\pi=81\pi$. За формулою геометричної ймовірності знайдемо ймовірність події A:

$$P(A)=\frac{S_g}{S_G}=\frac{65\pi}{81\pi}=0,802.$$

1.6. Операції над подіями

Як відомо, для множин визначене відношення порядку і над ними можна здійснювати відповідні алгебраїчні операції.

Розглянемо такі операції, коли підмножини простору елементарних подій Ω інтерпретуються як події, спостережувані в даному експерименті.

Означення. Подія A називається окремим випадком події B (або B є наслідком A), якщо множина A є підмножиною множини B.

Позначаються ці відношення так само, як для множин: $A \subset B$ або $B \supset A$.

Відношення $A \subset B$ означає, що кожного разу, коли відбувається подія A, також відбувається і подія B. Наприклад, якщо подія A – під час кидання грального кубика випаде грань з числом очок 3, а подія B – під час кидання грального кубика випаде грань з непарним числом очок, то $A \subset B$ і подія B є наслідком події A.

Означення. Події A і B називаються рівносильними, якщо подія A є наслідком події B($A \subset B$), а подія B є наслідком події A ($B \subset A$).

Рівносильність подій A і B позначать як рівність $A = B$.

Означення. Сумою $A + B$ (об'єднанням $A \bigcup B$) подій A і B називається подія, що полягає в появі хоча б однієї з них.

Якщо події A і B – сумісні, то їх сума $A + B$ означає настання або події A або події B, або обох подій разом. Якщо події A і B несумісні, то їх сума полягає в появі тільки однієї з них.

Означення. Добутком AB (перетином $A \bigcap B$) подій A і B називається подія, яка полягає в спільній появі цих подій.

Якщо події A і B – сумісні, то їх добуток AB означає настання і події A, і події B.

Поняття суми і добутку подій та їх інтерпретація поширюються на випадок будь-якого скінченого, а також зліченого числа подій.

Зокрема, подія

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$$

відбувається тоді и тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$, а подія

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$$

відбувається тоді и тільки тоді, коли відбуваються всі події $A_i, i = 1, 2, \ldots, n$.

Означення. Різницею $A - B$ ($A \setminus B$) подій A і B називається подія, яка полягає в тому, що подія A відбулася, а подія B не відбулася.

Приклад. Переможець змагання нагороджується: призом (подія A), грошовою премією (подія B), медаллю (подія C). Що являють собою події: а) $A + B$; б) ABC; в) $AC - B$?

Розв'язання. а) Подія $A+B$ складається в нагородженні переможця або призом, або премією, або й тим, і іншим.

б) Подія ABC складається в нагородженні переможця одночасно і призом, і премією, і медаллю.

в) Подія $AC-B$ складається в нагородженні переможця одночасно і призом, і медаллю, але без видачі грошової премії.

Означення. Протилежною подією $\overline{A}$ до події A називається подія $\Omega \setminus A$, тобто подія, що складається з усіх елементарних подій, які не входять до події A.

Отже, протилежна подія $\overline{A}$ відбувається тоді, і лише тоді, коли не відбувається подія A.

Означення. Дві події A і B називаються несумісними, коли їх добуток є неможливою подією, тобто $A \bigcap B = \varnothing$.

Означення. Декілька подій $A_1, A_2, \ldots, A_n$ називаються попарно несумісними, якщо поява будь-якої з них виключає появу кожної з решти, тобто $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$.

Означення. Події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ утворюють повну групу подій, якщо в результаті випробування принаймні одна з них обов'язково відбудеться, тобто коли $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \Omega$.

Оскільки $A \bigcap \overline{A} = \varnothing$ та $A \bigcup \overline{A} = \Omega$, то подія A та протилежна до неї подія $\overline{A}$ завжди утворюють повну групу.

Наочно операції над подіями можна проілюструвати за допомогою діаграм Ейлера[3]-Венна[4] (рис.1.2), на яких простір елементарних подій Ω зображено у формі квадрату, подію A – точками круга, подію B – точками круга трикутника.

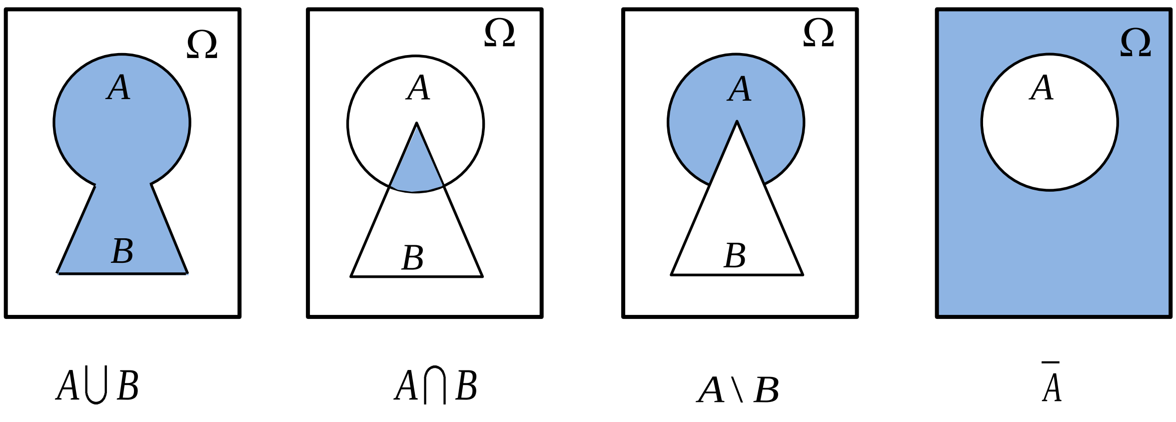

Рис.1.2. Діаграми Ейлера-Венна

Приклад. Задано множину чисел $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$, з якої навмання

[3] Леонард Ейлер (Leonhard Euler; 1707 -1783) – швейцарський математик, фізик, механік, який зробив фундаментальний внесок у розвиток цих наук

[4] Джон Венн (John Venn; 1834 - 1923) - англійський логік і філософ

вибирають одне число. Подія A – вибране число ділиться на 3, подія B – вибране число є парне.

Визначити простір елементарних подій і знайти $A\bigcup B$, $A\bigcap B$, $\overline{A}$, $\overline{B}$, $A\bigcup\overline{B}$, $\overline{A}\bigcap B$.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$.

Подія $A=\{3,6,9,12\}$, подія $B=\{2,4,6,8,10,12\}$.

За означеннями суми, добутку, різниці подій та протилежної події знайдемо:

$A\bigcup B=\{2,3,4,6,8,9,10,12\}$,

$A\bigcap B=\{6,12\}$,

$\overline{A}=\{1,2,4,5,7,8,10,11\}$,

$\overline{B}=\{1,3,5,7,9,11\}$,

$A\bigcup\overline{B}=\{1,3,5,6,7,9,11,12\}$,

$\overline{A}\bigcap B=\{2,4,8,10\}$.

Побудова логічно повноцінної теорії ймовірностей ґрунтується на аксіоматичному визначенні випадкової події та її ймовірності. У системі аксіом, запропонованій А.М. Колмогоровим[5], невизначуваними поняттями є елементарна подія і ймовірність.

Приведемо аксіоми, що визначають ймовірність:

Аксіома 1. Кожній події A поставлено у відповідність невід'ємне дійсне число $P(A)$. Це число називається ймовірністю події A.

Аксіома 2. Ймовірність достовірної події дорівнює одиниці:

$$P(\Omega)=1\ .$$

Аксіома 3 (аксіома адитивності). Ймовірність настання хоча б однієї із попарно несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

Якщо події $A_1, A_2, \ldots$ попарно несумісні, то ймовірність суми подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).$$

Якщо події A і B несумісні, то:

$$P(A\bigcup B)=P(A)+P(B).$$

Аксіому додавання ймовірностей інколи називають «теоремою додавання» (для дослідів, що зводяться до схеми випадків, її можна довести).

Виходячи з цих аксіом, властивості ймовірностей і залежності між ними виводять як теореми.

[5] Колмогоров Андрій Миколайович (1903 –1987) – видатний математик

1.7. Елементи комбінаторики

Для успішного розв'язання задач із використанням класичного визначення ймовірності необхідно використовувати основні правила та формули *комбінаторики* – розділу математики, що вивчає методи розв'язання комбінаторних задач – задач на підрахунок числа різних комбінацій.

Нехай A_i (i= 1,2,...,n) – елементи кінцевої множини. Сформулюємо два важливі правила, часто застосовувані при розв'язанні комбінаторних задач.

Правило суми. Якщо елемент A_1 може бути обраний n_1 способами, елемент A_2 – іншими n_2 способами, A_3 – відмінними від перших двох n_3 способами і т.д., A_k – n_k способами, відмінними від перших (k-1), то вибір одного з елементів: або A_1, або A_2, …, або A_k може бути здійснений $n_1+n_2+...+n_k$ способами.

Приклад. У ящику 300 деталей. Відомо, що 150 з них - 1-го сорту, 120 - 2-го, а інші - 3-го сорту. Скільки існує способів витягу з ящика однієї деталі 1-го або 2-го сорту?

Розв'язання. Деталь 1-го сорту може бути витягнута n_1=150 способами, 2-го сорту – n_2=120 способами. За правилом суми існує n_1+n_2=150+120=270 способів витягу однієї деталі 1-го або 2-го сорту.

Правило добутку. Якщо елемент A_1 може бути обраний n_1 способами, після кожного такого вибору елемент A_2 може бути обраний n_2 способами і т.д., після кожного (k-1) вибору елемент A_k може бути обраний n_k способами, то вибір всіх елементів A_1, A_2, ..., A_k у зазначеному порядку може бути здійснений $n_1 \cdot n_2 \cdot ... \cdot n_k$ способами.

Приклад. У групі 30 чоловік. Необхідно вибрати старосту, його заступника та секретаря. Скільки існує способів це зробити?

Розв'язання. Старостою може бути обраний кожний з 30 учнів, його заступником – кожен із тих, що залишилися – 29, а секретарем – кожен із тих, що залишилися – 28 учнів, тобто n_1=30, n_2=29, n_3=28. За правилом добутку загальне число способів вибору старости, його заступника та секретаря дорівнює $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$=30·29·28= 24360 способів.

Факторіал. Функція $f(n)$, для якої

$$f(0)=1, \quad f(n+1)=(n+1)f(n)$$

при всіх цілих невід'ємних n, називається *n-факторіалом* і позначається $n!$

Для будь-якого натурального n маємо $n!=1\cdot 2 \cdot ... \cdot (n-1)\cdot n$. По визначенню $0!=1$.

Приклад 1.5. Обчислимо:

$1!=1$; $2!=1\cdot 2=2$; $3!=1\cdot 2\cdot 3=2!\cdot 3=6$; $4!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=3!\cdot 4=24$;

$5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=4!\cdot 5=120$; $6!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=4!\cdot 5\cdot 6=720$.

Нехай дана множина D, що складається з n різних елементів. Із цієї множини можуть бути утворені підмножини з m елементів ($0 \le m \le n$). Наприклад, з 5 елементів a,b,c,d,e можуть бути відібрані комбінації по 2 елементи – ab, cd, ed, ba, ce і т.д., по 3 елементи – abc, cbd, cba, ead і т.д.

Перестановки. *Перестановками* з n елементів називаються всілякі комбінації, кожна з яких містить всі n елементів і відрізняються одна від одної лише порядком розташування елементів.

Число перестановок без повторень дорівнює

$$P_n = n!$$

Приклад. У змаганні беруть участь 4 чоловік. Якою кількістю способів можуть бути розподілені місця між ними?

Розв'язання. Способи розподілу місць розрізняються тільки порядком, тому що число, а виходить, і склад учасників при кожному способі незмінні. Отже, місця можуть бути розподілені $P_4 = 4! = 24$ способами.

Приклад. У кошику 5 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 5. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Розв'язання. Нехай подія –й вилучення пронумерованих куль у зростаючому порядку. Кожен варіант вилучення всіх 5 куль відрізняється лише порядком, тобто. є переставленням із 5 елементів. Тоді загальна кількість всіх варіантів вилучення пронумерованих куль дорівнює $n = P_5 = 5! = 120$. Число варіантів, що сприяють події A, дорівнює $m = 1$. Тоді за класичним визначенням ймовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_5} = \frac{1}{5!} = \frac{1}{120} = 0,0083.$$

Перестановки з повтореннями. Якщо в перестановках із загального числа n елементів є k різних елементів, при цьому 1-й елемент повторюється n_1 раз, 2-й елемент – n_2 раз, k-й елемент – n_k раз, причому $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$, то такі перестановки називають *перестановками з повтореннями* з n елементів. Число перестановок з повтореннями з n елементів дорівнює

$$P_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Приклад. Скільки існує семизначних чисел, що складаються із цифр 1, 5 і 9, у яких цифра 1 повторюється 3 рази, а цифри 5 і 9 – по 2 рази?

Розв'язання. Кожне семизначне число відрізняється від іншого порядком проходження цифр (причому $n_1 = 3$, $n_2 = 2$, $n_3 = 2$, а їхня сума дорівнює 7), тобто є перестановкою з повтореннями з 7 елементів. Їхнє число дорівнює

$$P_7(3, 2, 2) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 210.$$

Розміщення. Якщо комбінації з n елементів по m відрізняються або складом елементів, або порядком їхнього розташування (або й тим, і іншим), то такі комбінації називають *розміщеннями* з n елементів по m.

Число розміщень із n елементів по m дорівнює

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад. У турнірі беруть участь 8 команд. Скільки різних передбачень можна зробити щодо розподілу за результатами змагань трьох перших місць?

Розв'язання. Кожний варіант результатів представляє набір 3 команд із 8, що відрізняється від інших варіантів як складом команд, так і порядком їхнього розміщення в трійці призерів, тобто є розміщенням з 8 елементів по 3. Тоді число способів розподілу трьох перших місць дорівнює

$$A_8^3 = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

Приклад. У кошику 10 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 10. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Розв'язання. Нехай подія A– вилучення пронумерованих куль у зростаючому порядку. Кожен варіант вилучення з кошику 7 з 10 куль відрізняється як складом куль, так і порядком їх вилучення. Тобто є розміщенням з 10 елементів по 7 елементів.

Тоді загальна кількість всіх варіантів вилучення пронумерованих куль дорівнює

$$n = A_{10}^7 = \frac{10!}{3!} = 604800.$$

Число варіантів, що сприяють події A, дорівнює $m=1$. Тоді за класичним визначенням ймовірності:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_{10}^7} = \frac{1}{604800} = 0,00000165.$$

Розміщення з повтореннями. *Розміщення з повтореннями* з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно раз від 1 до m включно, або не містити його зовсім, тобто кожне розміщення з повтореннями з n елементів по m елементів може складатися не тільки з різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Число розміщень із повтореннями з n елементів по m елементів дорівнює:

$$\tilde{A}_n^m = n^m.$$

Приклад. У конкурсі по 5 номінаціям беруть участь 10 кінофільмів. Скільки існує варіантів розподілу призів, якщо по кожній номінації встановлені різні призи.

Розв'язання. Кожний з варіантів розподілу призів являє собою комбінацію 5 фільмів з 10, що відрізняється від інших комбінацій як складом фільмів, так і їхнім порядком по номінаціях, причому ті самі фільми можуть повторяться кілька разів, тобто представляє розміщення з повтореннями з 10 елементів по 5.

Число варіантів розподілу призів дорівнює

$$\tilde{A}_{10}^{5} = 10^{5} = 100000.$$

Сполучення (сполуки). Якщо комбінації з n елементів по m елементів відрізняються тільки складом елементів, то їх називають *сполученнями* з n елементів по m. Число сполучень із n елементів по m елементів дорівнює

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Оскільки за визначенням $0! = 1$, то

$$C_n^0 = \frac{n\,!}{0\,!\,(n-0)\,!} = \frac{n\,!}{1 \cdot n\,!} = 1.$$

1

Властивості сполучень:

1) $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2) $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Приклад. У шаховому турнірі беруть участь 16 чоловік. Скільки партій повинне бути зіграно в турнірі, якщо між будь-якими двома учасниками повинна бути зіграна одна партія?

Розв'язання. Кожна партія грається двома учасниками з 16 і відрізняється від інших тільки складом пар учасників, тобто являє собою сполучення з 16 елементів по 2. Кількість партій знаходимо по формулі:

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!14!} = \frac{16 \cdot 15}{1 \cdot 2} = 120.$$

Приклад. У кошику 10 куль однакового розміру, з них 6 білих і 4 зелених. Витягають дві кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі білі?

Розв'язання. Загальна кількість можливих елементарних подій випробування дорівнює числу способів, якими можна витягти дві кулі з десяти, тобто числу сполучень з 10 елементів по 2 елемента:

$$n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2! \cdot 8!} = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Визначимо кількість елементарних подій, що сприяють події $A-$ з двох вилучених куль обидві виявляться білими:

$$m = C_6^2 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$$

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа елементарних подій, що сприяють події A, до всіх елементарних подій:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^2}{C_{10}^2}=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}=0,33.$$

Сполучення з повтореннями. *Сполучення з повтореннями* з n елементів по m елементів може містити будь-який елемент скільки завгодно раз від 1 до m включно, або не містити його зовсім, тобто кожне сполучення з n елементів по m елементів може складатися не тільки з m різних елементів, але з m яких завгодно і як завгодно повторюваних елементів.

Слід зазначити, що якщо, наприклад, дві комбінації по m елементів відрізняються одна від одної тільки порядком розташування елементів, то вони не вважаються різними сполученнями.

Число сполучень із повтореннями з n елементів по m елементів дорівнює:

$$\tilde{C}_n^m=C_{n+m-1}^m=\frac{(n+m-1)!}{m!\cdot(n-1)!}.$$

Приклад. У кондитерському магазині продаються 4 сорти тістечок. Скільки існують способів купівлі наборів з 7 тістечок?

Розв'язання. У кожному купленому наборі тістечка можуть повторюватися, а порядок їх у наборі не важливий. Тому кількість способів купівлі визначається як число сполучень з повтореннями з 4 по 7:

$$\tilde{C}_4^7=C_{7+4-1}^7=C_{10}^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}=120.$$

Комбінаторна схема. Розглянемо приклад, модифікації якого зустрічаються у різних задачах теорії ймовірностей.

Приклад. З кошика, що містить m жовтих і n синіх куль, потрібно витягти куль, причому так, що серед них рівно p жовтих і q синіх. Порядок вилучення куль значення не має. Скільки є для цього способів?

Розв'язання. Так як порядок вилучення куль не важливий, то p жовтих куль з m можна витягти C_m^p способами. Аналогічно, q синіх куль із n можна витягти C_n^q способами. Оскільки кожен із C_m^p способів вилучення жовтих куль можна комбінувати з будь-якими із C_n^q способів вилучення синіх куль, то всього способів існує $C_m^p\cdot C_n^q$.

Приклад. У групі студентів навчаються 13 юнаків та 17 дівчин. Скільки існує способів вибору 7 студентів, серед яких буде 5 юнаків та 2 дівчин?

Розв'язання. Так як порядок вибору студентів не має значення, то 5 юнаків з 13 можна вибрати C_{13}^5 способами. Аналогічно, 2 дівчини з 17 можна обрати C_{17}^2

способами.

Тоді, загальна кількість способів вибору 7 студентів, серед яких буде 5 юнаків та 2 дівчини дорівнює

$$C_{13}^5 \cdot C_{17}^2 = \frac{13!}{5!\cdot 8!} \cdot \frac{17!}{2!\cdot 15!} = 175032.$$

Приклад. У кошику 10 куль однакового розміру, з них 6 білих і 4 зелених. З кошика навмання відібрано 7 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 зелених кулі.

Розв'язання. Загальна кількість можливих елементарних подій випробування дорівнює числу способів, якими можна відібрати 7 куль із 10, тобто числу сполучень з 10 елементів по 7 елементів:

$$n = C_{10}^7 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120.$$

Знайдемо число елементарних подій, що сприяють події A: серед відібраних 7 куль рівно 3 зелені кулі.

Три зелені кулі можна вибрати з чотирьох C_4^3 способами. При цьому решта чотири кулі мають бути білими, їх можна відібрати C_6^4 способами. Отже, кількість елементарних подій, що сприяють події A дорівнює:

$$m = C_4^3 \cdot C_6^4 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 60.$$

Шукана ймовірність дорівнює відношенню числа елементарних подій, що сприяють події A, до всіх елементарних подій:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_4^3 \cdot C_6^4}{C_{10}^7} = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}.$$

Питання для самоперевірки

1. Предмет теорії ймовірностей?
2. Що називається подією? Які події називаються достовірними, неможливими, випадковими. Наведіть приклади таких подій.
3. Які події називаються елементарними?
4. Дайте визначення несумісних подій. Які події називаються сумісними? Наведіть приклади.
5. Які події називаються сприятливими події ?
6. Які події називаються єдино можливими?
7. Які події називаються рівноможливими?
8. Які події називаються протилежними?
9. Яка множина подій утворює повну групу подій?
10. Сформулюйте класичне визначення ймовірності.
11. Яка ймовірність достовірного і неможливого подій?
12. Запишіть формулу, за якою обчислюється ймовірність.
13. Чи може ймовірність події бути більше одиниці? Чи може ймовірність події бути від'ємним числом?
14. Чому дорівнює сума ймовірностей подій, що утворюють повну групу?
15. Як визначити ймовірність протилежної події , якщо відома ймовірність події ?
16. Сформулюйте статистичне визначення ймовірності.
17. Що розуміють під статистичної стійкістю подій?
18. Чи наближається відносна частота події до її ймовірності при збільшенні числа випробувань?
19. Сформулюйте геометричне визначення ймовірності.
20. Сформулюйте комбінаторні правила суми та добутку.
21. Дайте визначення факторіала. Запишіть формулу для обчислення факторіала. Чому дорівнює факторіал 7? Чому дорівнює факторіал 0?
22. Дайте визначення перестановки. Запишіть формулу для обчислення числа перестановок з повтореннями та без повторень.
23. Дайте визначення розміщення. Запишіть формулу для обчислення числа розміщень із повтореннями та без повторень.
24. Дайте визначення сполучення. Запишіть формулу для обчислення числа сполучень із повтореннями та без повторень.

Література

1. Тевяшев А. Д. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч. посіб. / А. Д. Тевяшев, С. І. Козиренко, І. С. Агапова ; М-во освіти і науки України, Харків. нац. ун-т радіоелектроніки. – Харків : Світ Книг, 2017. – 248 с.
2. Тевяшев А.Д. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. – Харків: ХНУРЕ, 2002. – 572 с.
3. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатін О.К. Теорія ймовірностей та математична статистика. 5-те видання. – К.: Центр учбової літ., 2010. – 424 с.
4. Малярець Л. М. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. У 3-х ч. Ч. 3 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. Д. Широкорад. - Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. - 568 с.
5. Валєєв К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. - Київ : КНЕУ, 2005. - 340 с.
6. Бобик О. І., Берегова Г. І., Копитко Б І. Теорія ймовірностей та математична статистика. – Київ: Професіонал, 2007. – 560 с.
7. Зайцев Є. П. Теорія ймовірностей і математична статистика. Київ : Алерта, 2013. 440 с.

Варіанти індивідуальних розрахункових завдань

Варіант № 1

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 6. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 14 куль однакового розміру, з них 5 білих і 9 жовтих. Витягають 5 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 6 білих і 14 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 4 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 2

Задача 1. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,6. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 17 куль однакового розміру, з них 7 білих і 10 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 7 білих і 9 жовтих. З кошика навмання відібрано 11 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 3

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 4

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 5

Задача 1. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,7. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 9 білих і 6 жовтих. Витягають 5 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 7 білих і 13 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 6

Задача 1. У кошику 8 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,8. Навмання витягують 8 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 8.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 8 білих і 10 жовтих. Витягають 7 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 24 куль однакового розміру, з них 9 білих і 15 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 7

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 6. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 14 куль однакового розміру, з них 5 білих і 9 жовтих. Витягають 4 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 6 білих і 14 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 4 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 8

Задача 1. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,6. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 17 куль однакового розміру, з них 7 білих і 10 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 7 білих і 9 жовтих. З кошика навмання відібрано 11 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 9

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 10

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 11

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 12

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 13

Задача 1. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,7. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 9 білих і 6 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 7 білих і 13 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 14

Задача 1. У кошику 8 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,8. Навмання витягують 8 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 8.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 8 білих і 10 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 24 куль однакового розміру, з них 9 білих і 15 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 15

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 7 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 16

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 17

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 5 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 18

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 19

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 7 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 20

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 21

Задача 1. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,7. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 9 білих і 6 жовтих. Витягають 5 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 7 білих і 13 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 22

Задача 1. У кошику 8 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,8. Навмання витягують 8 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 8.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 8 білих і 10 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 24 куль однакового розміру, з них 9 білих і 15 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 23

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 6. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 14 куль однакового розміру, з них 5 білих і 9 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 6 білих і 14 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 4 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 24

Задача 1. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,6. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 17 куль однакового розміру, з них 7 білих і 10 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 7 білих і 9 жовтих. З кошика навмання відібрано 11 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 25

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 19 куль однакового розміру, з них 11 білих і 8 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 6 білих і 12 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 3 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 26

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 8 білих і 7 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 9 білих і 7 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 6 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 27

Задача 1. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,7. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 9 білих і 6 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 7 білих і 13 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 28

Задача 1. У кошику 8 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,8. Навмання витягують 8 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 8.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 8 білих і 10 жовтих. Витягають 7 куль. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 24 куль однакового розміру, з них 9 білих і 15 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 29

Задача 1. У кошику 4 кулі однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,4. Навмання витягують 4 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 4.

Задача 2. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 6. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 14 куль однакового розміру, з них 5 білих і 9 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі біли?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 6 білих і 14 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 4 білих кулі.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 5 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 30

Задача 1. У кошику 6 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,6. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 5 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 5.

Задача 3. У кошику 17 куль однакового розміру, з них 7 білих і 10 жовтих. Витягають 3 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 16 куль однакового розміру, з них 7 білих і 9 жовтих. З кошика навмання відібрано 11 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 31

Задача 1. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,7. Навмання витягують 7 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 7.

Задача 2. У кошику 9 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 9. Навмання витягують 6 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 6.

Задача 3. У кошику 15 куль однакового розміру, з них 9 білих і 6 жовтих. Витягають 2 кулі. Яка ймовірність того, що обидві кулі жовті?

Задача 4. У кошику 20 куль однакового розміру, з них 7 білих і 13 жовтих. З кошика навмання відібрано 12 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 11 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.

Варіант № 32

Задача 1. У кошику 8 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …,8. Навмання витягують 8 куль. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 8.

Задача 2. У кошику 7 куль однакового розміру з нанесеними номерами 1, 2, …, 7. Навмання витягують 3 кулі. Знайти ймовірність того, що номери витягнутих куль розташовані по зростанню від 1 до 3.

Задача 3. У кошику 18 куль однакового розміру, з них 8 білих і 10 жовтих. Витягають 4 кулі. Яка ймовірність того, що всі кулі жовті?

Задача 4. У кошику 24 куль однакового розміру, з них 9 білих і 15 жовтих. З кошика навмання відібрано 13 куль. Знайти ймовірність того, що серед відібраних куль рівно 5 білих куль.

Задача 5. На площині проведено два концентричних кола, радіуси яких дорівнюють 6 см і 8 см відповідно. Знайти ймовірність події A – точка, кинута навмання в більше коло (фігура G), потрапляє в кільце, утворене побудованими колами (фігура g). Передбачається, що ймовірність попадання точки в плоску фігуру пропорційна площі цієї фігури і не залежить від її розташування.