Univerza v Ljubljani
Fakulteta za matematiko in fiziko

Kratka predstavitev problema projekta pri predmetu Finančni praktikum

Problem potujočega trgovca s premikajočimi se mesti vzdolž ene črte

Tinkara Čadež in Nika Furlan

Ljubljana, december 2021

1 Opis problema

V projektni nalogi bova preučili in s pomočjo dinamičnega programiranja rešili klasičen algoritmični problem iz področja operacijskih raziskav in optimizacijskih metod - razširjen problem potujočega trgovca (TSP - Target Salesman Problem). Razširjen zato, ker mesta ne bodo statična, temveč se bodo premikala, pojavila pa se bodo lahko ob različnih časih (MTSP - Moving Target Salesman Problem). Mesta so postavljena na eni črti in se premikajo z enako hitrostjo. Cilj trgovca je, da v čimkrajšem času obišče vsako mesto.

Podano imamo torej:

- **množico mest** v dvorazsežnem Evklidskem prostoru ($\mathbb{R}^2$), kjer se vsako izmed njih premika s fiksno hitrostjo in začne na različnih začetnih lokacijah oziroma pozicijah in
- **potujočega trgovca**, ki svojo pot začne v nekem izhodišču in ima maksimalno hitrost, ki je višja od hitrosti vsakega mesta.

V projektni nalogi se bova osredotočili na poseben primer problema, kjer so vsa mesta omejena na gibanje vzdolž ene črte (SL-MT-TSP - Single Line Moving Target Salesman Problem).

2 Modeliranje

Predspotavimo, da se ob času 0 mesta začnejo premikati bodisi desno, bodisi levo. Naj bo:

- **začetna pozicija** mesta njegova *pozicija ob času 0*,
- **smer premikanja** mesta označimo z $d_i \in \{-1, 1\}$,
- **čas sprostitve mesta** označimo z $r_i \in \mathbb{R}^+$ in predstavlja čas, po katerem je mesto lahko obiskano,
  - r_{max} je torej čas zadnje sprostitve mesta,
  - pravimo, da je mesto *aktivno*, če še ni bilo obiskano (vključujoč mesta, ki še niso bila sproščena),
- **pozicija sprostitve mesta** označimo s $p_i \in \mathbb{R}$ in nam prikazuje pozicijo mesta ob času sprostitve r_i,
- **hitrosti mest** so konstantne in enake intenzitete $v \in [0, 1)$,
- **hitrost trgovca** označimo z $v_A \in [-1, 1]$

3 Dinamično programiranje

V projektni nalogi bova sestavili dinamični program (DP), s pomočjo katerega bova določili optimalno gibanje trgovca.
Pot oziroma trajektorijo trgovca lahko gledamo kot na niz zaporednih segmentov (odsekov), kjer se vsak segment poti razlikuje po tem, koliko časa se je trgovec

gibal v isti smeri (ali pa se mogoče sploh ni gibal).

V nadaljevanju definirajmo dve osnovni razvrstitvi mest, pri čemer se vsaka razvrstitev uporabi v obe smeri (naraščajoča in padajoča razvrstitev), kar nam v bistvu da 4 razvrstitve:

1. **Razvrstitev začetnih pozicij** (IPO - Initial Position Ordering): razvrstitev mest po naraščajočem vrstnem redu glede na njihovo začetno pozicijo,
2. **Razvrstitev začetnih pozicij** ($\overline{IPO}$ - Initial Position Ordering): razvrstitev mest po padajočem vrstnem redu glede na njihovo začetno pozicijo,
3. **Razvrstitev trajektorij** (TO - Trajectory Ordering): razvrstitev mest po naraščajočem vrstnem redu glede na njihovo pozicijo po času obdobju stabilizacije,
4. **Razvrstitev trajektorij** ($\overline{TO}$ - Trajectory Ordering): razvrstitev mest po naraščajočem vrstnem redu glede na njihovo pozicijo po času obdobju stabilizacije,

Naj bo množica $C = \{C_1, C_2, C_3, C_4\}$ množica kazalnikov, ki prikazujejo 4 prva aktivna mesta v zgoraj naštetih razvrstitvah.
V nadaljevanju definirajmo:

- $G(t, j, i)$, ki označuje prvi čas, ko je mesto i obiskano, pri pogoju, da je bilo v času t zadnje obiskano mesto, mesto z indeksom j. $G(t, j, i)$ predstavlja maksimum med dvema vrednostima in sicer med vsoto najkrajšega potrebnega časa za obisk mesta i in trenutnim časom ter časom sprostitve mesta i,
- $F(C, i)$ naj predstavlja minimalni čas za dosego stanja (C, i)
- $C'(C, i) = \{C'_1(C, i), C'_2(C, i), C'_3(C, i), C'_4(C, i)\}$, kjer je $C_l(C, i) = \min\{C_l, \sigma_l(i)\}$, $l = 1, \ldots, 4$,
- $\Pi'_l(C, i)$ - funkcijo, ki vrne osvojeno mesto, tik preden doseže stanje (C, i), pri čemer naj bo iz seznama l.

Iščemo najkrajši možen čas za osvojitev vsakega izmed mest, označen z $F*$

$$F* = \min_{i=1,\ldots,n} F(\{n+1, n+1, n+1, n+1\}, i) \tag{1}$$

,

kjer $F(C, i)$ dobimo kot:

$$F(C, i) = \min_{l=1,\ldots,4} \{G(F(C'(C, i), \Pi'_l(C, i)), \Pi'_l(C, i), I)\}. \tag{2}$$