ამოხსნა

შევასრულოთ გამოკლება მრიცხველსა და მნიშვნელში. შერეული რიცხვი გადავაქციოთ ათწილადად:

$$1\frac{1}{5} = 1,2$$

.

მრიცხველი:

$$1,2 - 0,3 = 0,9$$

.

მნიშვნელი:

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

.

$$3 - 0,6 = 2,4$$

.

ახლა გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე:

$$0,\frac{9}{2},4 = \frac{9}{24}$$

.

შევკვეცოთ წილადი 3-ზე:

$$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

.

გამოვიყენე: ათწილადებისა და წილადების არითმეტიკული მოქმედებები

პასუხი: ა) $\frac{3}{8}$ ✅

ამოხსნა

პირობის თანახმად, ნატურალური რიცხვი k-ს 8-ზე გაყოფისას ნაშთი არის 7. ეს შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$k = 8m + 7$$

, სადაც m მთელი არაუარყოფითი რიცხვია.

ჩვენ გვაინტერესებს k^2-ის 8-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი. ავიყვანოთ k კვადრატში:

$$k^2 = (8m + 7)^2 = 64m^2 + 112m + 49$$

.

გამოვყოთ 8-ის ჯერადი ნაწილი:

$$64m^2 + 112m + 49 = 8(8m^2 + 14m) + 48 + 1 = 8(8m^2 + 14m + 6) + 1$$

.

როგორც ვხედავთ, გამოსახულება იშლება 8-ის ჯერად რიცხვად და დამატებულ 1-ად. შესაბამისად, 8-ზე გაყოფისას ნაშთი არის 1. (უფრო მარტივად, ნაშთების თვისების მიხედვით: $k^2 \bmod 8 \equiv 7^2 \bmod 8 \equiv 49 \bmod 8 \equiv 1$).

გამოვიყენე: ნაშთიანი გაყოფის თვისებები (მოდულური არითმეტიკა)

პასუხი: ა) 1 ✅

ამოხსნა

თავდაპირველი ფასი აღვნიშნოთ x-ით, რაც შეესაბამება 100%-ს. ფასმა მოიმატა 15%-ით, შესაბამისად ახალი ფასი გახდა $100\% + 15\% = 115\%$.

პროცენტი გადავიყვანოთ წილადში:

$$115\% = \frac{115}{100} = 1,15.$$

ახალი ფასია $1,15x$. ეს ნიშნავს, რომ ფასი გაიზარდა 1,15-ჯერ.

გამოვიყენე: პროცენტული ცვლილების გამოთვლა

პასუხი: ა) 1,15-ჯერ ✅

ამოხსნა

ΔABC-ში ვიცით ორი კუთხე: $\angle ABC = 45^\circ$ და $\angle BAC = 60^\circ$. სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი 180°-ია, ამიტომ ვიპოვოთ მესამე კუთხე:

$$\angle C = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ.$$

რადგან $MN \parallel AC$, ხოლო BC წარმოადგენს მკვეთს, $\angle MNC$ და $\angle C$ შიგა ცალმხრივი კუთხეებია. პარალელური წრფეების თვისების თანახმად, შიგა ცალმხრივი კუთხეების ჯამი 180°-ის ტოლია:

$$\angle MNC + \angle C = 180^\circ.$$

$$\angle MNC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ.$$

გამოვიყენე: სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი, პარალელური წრფეების თვისებები (შიგა ცალმხრივი კუთხეები)

პასუხი: ა) 105° ✅

ამოხსნა

წრეწირი ეხება ტოლფერდა ტრაპეციის ოთხივე გვერდს. ოთხკუთხედში წრეწირის ჩახაზვის აუცილებელი და საკმარისი პირობაა, რომ მოპირდაპირე გვერდების ჯამი ტოლი იყოს. ამიტომ, ტრაპეციის ფუძეების ჯამი ($a + b$) უდრის ფერდების ჯამს ($c + c = 2c$).

პირობის თანახმად, ფერდი $c = 7$ სმ. მაშინ, ფუძეების ჯამი:

$$a + b = 2 \cdot 7 = 14$$

სმ.

ტრაპეციის პერიმეტრი ოთხივე გვერდის ჯამია:

$$P = a + b + c + c = 14 + 14 = 28$$

სმ.

გამოვიყენე: ოთხკუთხედში ჩახაზული წრეწირის თვისება

პასუხი: გ) 28 სმ ✅

ამოხსნა

უნდა გავარკვიოთ, რომელ შუალედს ეკუთვნის რიცხვი $2^{\frac{3}{2}}$. გადავწეროთ წილადური ხარისხი ფესვის სახით:

$$2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}.$$

შევაფასოთ $\sqrt{8}$-ის მნიშვნელობა: ვინაიდან $2^2 = 4$ და $3^2 = 9$, გვაქვს $\sqrt{4} < \sqrt{8} < \sqrt{9}$, ანუ $2 < \sqrt{8} < 3$. ის უფრო ახლოსაა 3-თან.

შევაფასოთ მოცემული შუალედების საზღვრები: ა) $\left[2; \frac{7}{3}\right] = [2; 2,33]$. $2,33^2 \approx 5,43$. რადგან $5,43 < 8$, $\sqrt{8}$ მეტია $\frac{7}{3}$-ზე. არ ეკუთვნის.

ბ) $\left[\frac{7}{3}; \frac{5}{2}\right] = [2,33; 2,5]$. $2,5^2 = 6,25$. რადგან $6,25 < 8$, $\sqrt{8}$ მეტია $\frac{5}{2}$-ზე. არ ეკუთვნის.

გ) $\left[\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] = [2,5; 2,6]$. $2,6^2 = 6,76$. რადგან $6,76 < 8$, $\sqrt{8}$ მეტია $\frac{13}{5}$-ზე. არ ეკუთვნის.

დ) $\left[\frac{13}{5}; 3\right] = [2,6; 3]$. შევამოწმოთ $2,8^2 = 7,84 < 8$ და $2,9^2 = 8,41 > 8$. შესაბამისად, $\sqrt{8} \approx 2,82$. ეს მნიშვნელობა ნამდვილად ეკუთვნის $[2,6; 3]$ შუალედს.

გამოვიყენე: ხარისხის და ფესვის თვისებები, ირაციონალური რიცხვის შეფასება

პასუხი: დ) $\left[\frac{13}{5}; 3\right]$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია პირობა: $a^2 - ab + b^2 = 5$. გავშალოთ კუბების ჯამი ფორმულით:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

.

ჩავსვათ მოცემული პირობა ($a^2 - ab + b^2 = 5$):

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot 5 = 5a + 5b$$

.

მივიღეთ ტოლობა $a^3 + b^3 = 5a + 5b$, რომელიც ყოველთვის ჭეშმარიტია მოცემული პირობისას.

გამოვიყენე: შემოკლებული გამრავლების ფორმულები (კუბების ჯამი)

პასუხი: ბ) $a^3 + b^3 = 5a + 5b$ ✅

ამოხსნა

ვეძებთ $3a - b^2$ გამოსახულების უმცირეს მნიშვნელობას.

მოცემულია: $-2 \leq a \leq 5$. $3a$-ს მინიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$3 \cdot (-2) = -6$$

.

მოცემულია: $-4 \leq b \leq 2$. b^2-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა იმ საზღვარზე, რომლის მოდულიც უდიდესია ($|-4| > |2|$):

$$\left(b^2\right)_{\max} = (-4)^2 = 16$$

.

მაშინ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობაა:

$$\left(3a - b^2\right)_{\min} = -6 - 16 = -22$$

.

გამოვიყენე: ფუნქციის (გამოსახულების) ექსტრემუმების შეფასება შუალედზე

პასუხი: ბ) -22 ✅

ამოხსნა

განტოლება $f(x) = 0$ გეომეტრიულად ნიშნავს იმ წერტილების პოვნას, სადაც ფუნქციის გრაფიკი კვეთს x-ღერძს. დავაკვირდეთ მოცემულ გრაფიკს: 1) გრაფიკი კვეთს x-ღერძს -4-სა და -3-ს შორის. 2) კვეთს x-ღერძს -2-სა და -1-ს შორის. 3) კვეთს x-ღერძს კოორდინატთა სათავეში $(0, 0)$. 4) კვეთს x-ღერძს 1-სა და 2-ს შორის.

სულ გრაფიკი x-ღერძს კვეთს 4 წერტილში, შესაბამისად განტოლებას აქვს 4 ამონახსნი.

გამოვიყენე: ფუნქციის გრაფიკის თვისებები (ფუნქციის ნულები)

პასუხი: დ) 4 ✅

ამოხსნა

მოცემულია კვადრატული განტოლება: $x^2 - 3x + a = 0$. იმისათვის, რომ კვადრატულ განტოლებას ჰქონდეს ერთადერთი ამონახსნი, მისი დისკრიმინანტი ნულის ტოლი უნდა იყოს ($D = 0$).

გამოვთვალოთ დისკრიმინანტი:

$$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot a = 9 - 4a.$$

გავუტოლოთ ნულს და ამოვხსნათ:

$$9 - 4a = 0 \Rightarrow 4a = 9 \Rightarrow a = \frac{9}{4}.$$

გამოვიყენე: კვადრატული განტოლების დისკრიმინანტი

პასუხი: დ) $\frac{9}{4}$ ✅

ამოხსნა

წესიერი ხუთკუთხედის თითოეული შიგა კუთხის სიდიდეა: $\frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. ერთი წვეროდან გამომავალი ორი დიაგონალი ამ კუთხეს ყოფს სამ ნაწილად. ორივე განაპირა სამკუთხედი ტოლფერდაა (მათი ფერდები ხუთკუთხედის გვერდებია), ამიტომ მათი ფუძესთან მდებარე კუთხეებია: $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

შუა კუთხე, რომელიც დიაგონალებს შორისაა მოქცეული, იქნება მთლიან კუთხეს გამოკლებული განაპირა კუთხეები:

$$108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.$$

გამოვიყენე: წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების თვისებები

პასუხი: ბ) 36° ✅

ამოხსნა

ვთქვათ კლასში არის B ბიჭი და G გოგონა. სულ მოსწავლეა $N = B + G$. პირობის თანახმად $G - B = 4$.

წრიულ დიაგრამაზე სექტორის კუთხე პროპორციულია რაოდენობის. გოგონების და ბიჭების კუთხეებს შორის სხვაობა $48°$-ია:

$$360° \cdot \frac{G}{N} - 360° \cdot \frac{B}{N} = 48°.$$

$$\frac{360°}{N} \cdot (G - B) = 48°.$$

ჩავსვათ $G - B = 4$:

$$\frac{360 \cdot 4}{N} = 48 \Rightarrow \frac{1440}{N} = 48 \Rightarrow N = \frac{1440}{48} = 30.$$

სულ კლასში 30 მოსწავლეა.

გამოვიყენე: წრიული დიაგრამის თვისებები, პროპორცია

პასუხი: დ) 30 ✅

ამოხსნა

მართკუთხა პარალელეპიპედის განზომილებებია $a = 4$, $b = 6$, $c = 3$. მისი სრული ზედაპირის ფართობი გამოითვლება ფორმულით:

$$S = 2(ab + ac + bc).$$

ჩავსვათ მნიშვნელობები:

$$S = 2(4 \cdot 6 + 4 \cdot 3 + 6 \cdot 3)$$

$$S = 2(24 + 12 + 18)$$

$$S = 2(54) = 108$$

მ².

გამოვიყენე: მართკუთხა პარალელეპიპედის სრული ზედაპირის ფართობის ფორმულა

პასუხი: დ) 108 მ² ✅

ამოხსნა

პარალელური გადატანისას წერტილის საწყის კოორდინატებს ემატება ვექტორის კოორდინატები:

$$M(x, y) + (m)(a, b) = P(x + a, y + b).$$

ჩავსვათ მოცემული წერტილები:

$$2 + a = -1 \Rightarrow a = -3$$

$$-3 + b = 4 \Rightarrow b = 7.$$

უნდა ვიპოვოთ მათი ჯამი:

$$a + b = -3 + 7 = 4.$$

გამოვიყენე: პარალელური გადატანა კოორდინატებში

პასუხი: ბ) 4 ✅

ამოხსნა

სულ ჯგუფშია $2 + 6 = 8$ ადამიანი. მათგან 3 წევრიანი დელეგაციის არჩევის სრული ვარიანტების რაოდენობაა:

$$C_8^3 = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{6} = 56.$$

გამოვთვალოთ ისეთი ვარიანტების რაოდენობა, სადაც არცერთი ქალი არ არის (ანუ მხოლოდ კაცები არიან არჩეულნი):

$$C_6^3 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{6} = 20.$$

იმ ვარიანტების რაოდენობა, სადაც მინიმუმ 1 ქალი მაინცაა, არის სრულ რაოდენობას გამოკლებული ქალების გარეშე ვარიანტების რაოდენობა:

$$56 - 20 = 36.$$

გამოვიყენე: კომბინატორიკა (ჯუფთება), საწინააღმდეგო ხდომილობის პრინციპი

პასუხი: დ) 36 ✅

ამოხსნა

ვინაიდან x, y, z, t დადებითი რიცხვები არითმეტიკულ პროგრესიას ქმნიან, შეგვიძლია გამოვსახოთ ისინი პროგრესიის სხვაობის ($d \neq 0$) საშუალებით. ვთქვათ $y = a$. მაშინ:

$$x = a - d$$

$$z = a + d$$

$$t = a + 2d.$$

ჩავსვათ გამოსახულებაში: $\frac{x^2 - z^2}{y^2 - xy}$. მრიცხველი გავშალოთ კვადრატების სხვაობით:

$$x^2 - z^2 = (x - z)(x + z) = (a - d - (a + d))(a - d + a + d) = (-2d)(2a) = -4ad.$$

მნიშვნელი გავშალოთ მამრავლებად:

$$y^2 - xy = y(y - x) = a(a - (a - d)) = ad.$$

შევიტანოთ წილადში:

$$\frac{-4ad}{ad}.$$

რადგან რიცხვები დადებითია ($a \neq 0$) და $d \neq 0$, შეგვიძლია შევკვეცოთ: შედეგი არის -4.

გამოვიყენე: არითმეტიკული პროგრესიის თვისებები, შემოკლებული გამრავლების ფორმულები

პასუხი: ა) -4 ✅

ამოხსნა

პირობის თანახმად $m \equiv 5 (\bmod n)$, $n > 5$ და $n < 10$. შესაძლო n-ებია: 6, 7, 8, 9.

$m^2 - n^2 \equiv m^2 \equiv 5^2 \equiv 25 (\bmod n)$.

შევამოწმოთ:

- $n = 6$: $25 \bmod 6 = 1$
- $n = 7$: $25 \bmod 7 = 4$
- $n = 8$: $25 \bmod 8 = 1$
- $n = 9$: $25 \bmod 9 = 7$

შესაძლო ნაშთებია 1, 4, 7. ვარიანტებიდან 2 ამ სიაში არ შედის.

გამოვიყენე: მოდულური არითმეტიკა

პასუხი: ბ) 2 ✅

ამოხსნა

ტოლგვერდა სამკუთხედში შემთხვევით შერჩეული წერტილი B წვეროსთან უფრო ახლოს იყოს, ვიდრე O ცენტრთან.

ასეთი წერტილები შეადგენენ მცირე ტოლგვერდა სამკუთხედს, რომლის გვერდი დიდი სამკუთხედის გვერდის $\frac{1}{3}$-ია. ფართობების შეფარდება: $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

გამოვიყენე: გეომეტრიული ალბათობა, მსგავსი ფიგურების ფართობების შეფარდება

პასუხი: ა) $\dfrac{1}{9}$ ✅

ამოხსნა

განტოლებაა: $x^2 + px - 27 = 0$. ვიეტის თეორემით: $x_1 \cdot x_2 = -27$. პირობის თანახმად $x_1 = x_2^2$, ამიტომ:

$$x_2^3 = -27 \to x_2 = -3$$

. აქედან $x_1 = 9$.

ფესვთა ჯამი:

$$x_1 + x_2 = -p \to 9 - 3 = -p \to 6 = -p \to p = -6$$

.

გამოვიყენე: ვიეტის თეორემა

პასუხი: ბ) -6 ✅

ამოხსნა

სამკუთხედის ორი გვერდია $a = 2$, $b = 5$ და მათ შორის მდებარე კუთხეა $\gamma = 45°$. მესამე გვერდის (c) საპოვნელად გამოვიყენოთ კოსინუსების თეორემა:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

ჩავსვათ მოცემული მნიშვნელობები:

$$c^2 = 2^2 + 5^2 - 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot \cos 45°$$

$$c^2 = 4 + 25 - 20 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$c^2 = 29 - 10\sqrt{2}.$$

ამოვიღოთ ფესვი: $c = \sqrt{29 - 10\sqrt{2}}$ სმ.

გამოვიყენე: კოსინუსების თეორემა

პასუხი: ბ) $\sqrt{29 - 10\sqrt{2}}$ სმ ✅

ამოხსნა

$\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (3; 4)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2(3) + 3(4) = -6 + 12 = 6$$

.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

.

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{6}{5\sqrt{13}}$$

.

გამოვიყენე: ვექტორების სკალარული ნამრავლი

პასუხი: დ) $\frac{6}{5\sqrt{13}}$ ✅

ამოხსნა

სრული ვარიანტების რაოდენობაა $4^3 = 64$.

განვიხილოთ ზუსტად 2 ტურისტის ერთ ვაგონში მოხვედრის გზები: 1) ავირჩიოთ 2 ტურისტი 3-დან: $\binom{3}{2} = 3$ ვარიანტი. 2) ავირჩიოთ ვაგონი ამ 2 ტურისტისთვის: 4 ვარიანტი. 3) ავირჩიოთ ვაგონი მესამე ტურისტისთვის (სხვა ვაგონში): 3 ვარიანტი.

ხელსაყრელი ვარიანტების რაოდენობაა:

$$3 \cdot 4 \cdot 3 = 36.$$

ალბათობა იქნება:

$$P = \frac{36}{64} = \frac{9}{16}.$$

გამოვიყენე: კომბინატორიკა, ალბათობის კლასიკური განმარტება

პასუხი: ბ) $\frac{9}{16}$ ✅

ამოხსნა

ფუნქცია $f(x)$ განსაზღვრის არე მოითხოვს: 1) $x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3$. 2) $x-\sqrt{11}\neq 0 \Rightarrow x\neq \sqrt{11}$. 3) $9-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 9$.

გავაერთიანოთ: $x\in[3;9]$, გამოვაკლოთ $x=\sqrt{11}$. რადგან $3<\sqrt{11}<4$, წერტილი $\sqrt{11}$ ეკუთვნის $[3;9]$-ს. შუალედი გაიყოფა:

$$\left[3;\sqrt{11}\right)\cup\left(\sqrt{11};9\right].$$

გამოვიყენე: ფუნქციის განსაზღვრის არე

პასუხი: ა) $\left[3;\sqrt{11}\right)\cup\left(\sqrt{11};9\right]$ ✅

ამოხსნა

ნახაზზე ნაჩვენებია დაშტრიხული არე, რომელიც მდებარეობს პირველ და მეორე მეოთხედებში (ანუ $y \geq 0$) და წრფის ზემოთ. წრფე გადის წერტილებზე $(5;0)$ და $(0;4)$. შევადგინოთ წრფის განტოლება სეგმენტებში:

$$\frac{x}{5} + \frac{y}{4} = 1.$$

გავამრავლოთ 20-ზე:

$$4x + 5y = 20.$$

რადგან დაშტრიხული რეგიონი მოიცავს ამ წრფის ზედა ნახევარსიბრტყეს, უტოლობა იქნება $4x + 5y \geq 20$. საბოლოო სისტემაა:

$$\begin{cases} 4x + 5y \geq 20 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

გამოვიყენე: წრფის განტოლება, წრფივი უტოლობები ორი ცვლადით

პასუხი: ა) ✅

ამოხსნა

$\sin\alpha = -0,3$ და $\alpha \in (3\frac{\pi}{2}; 2\pi)$. ამ შუალედში კუთხე გამოისახება როგორც $2\pi + \arcsin(-0,3)$.

გამოვიყენე: შებრუნებული ტრიგონომეტრიული ფუნქციები

პასუხი: დ) $2\pi + \arcsin(-0,3)$ ✅

ამოხსნა

ბირთვის კვეთისას მიღებული წრის ფართობია $S = \pi r^2 = 24\pi$, საიდანაც კვეთის რადიუსის კვადრატია $r^2 = 24$. ბირთვის (სფეროს) რადიუსია $R = 5$ სმ. ცენტრიდან მკვეთ სიბრტყემდე მანძილი (d) შეგვიძლია ვიპოვოთ პითაგორას თეორემით:

$$R^2 = d^2 + r^2$$

$$5^2 = d^2 + 24$$

$$25 = d^2 + 24 \Rightarrow d^2 = 1 \Rightarrow d = 1 \text{ სმ.}$$

გამოვიყენე: სფეროს კვეთის თვისებები, პითაგორას თეორემა

პასუხი: დ) 1 სმ ✅

ამოხსნა

წრფე $y = -\frac{x}{\sqrt{3}}$ ქმნის $-30°$-იან კუთხეს. $15°$-ით საათის ისრის მიმართულებით მობრუნებისას:

$$-30° - 15° = -45°$$

.

ახალი კოეფიციენტი $k = \tan(-45°) = -1$. განტოლება: $y = -x$.

გამოვიყენე: წრფის მობრუნება

პასუხი: ბ) $f(x) = -x$ ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, პირველი ხელოსნის შრომის ნაყოფიერება არის p_1, ხოლო მეორესი — p_2.

$$2p_1 = 3p_2 \to p_1 = 1,5p_2$$

.

ერთად 18 დღეში:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{18}$$

.

ჩავსვათ:

$$1,5p_2 + p_2 = \frac{1}{18}$$

$$2,5p_2 = \frac{1}{18}$$

$$p_2 = \frac{1}{45}$$

.

$$p_1 = 1,5 \cdot \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$$

.

პირველი ხელოსანი მთელ სამუშაოს შეასრულებს 30 დღეში.

გამოვიყენე: ერთობლივი მუშაობის პრინციპები, წრფივ განტოლებათა სისტემა

პასუხი: გ) 30 ✅

ამოხსნა

$$\log_8 27 + \log_2 5$$

.

$$\log_8 27 = \log_{2^3} 3^3 = \frac{3}{3}\log_2 3 = \log_2 3$$

.

$$\log_2 3 + \log_2 5 = \log_2(3 \cdot 5) = \log_2 15$$

.

შევაფასოთ: $2^3 = 8$ და $2^4 = 16$.

$$8 < 15 < 16 \to 3 < \log_2 15 < 4$$

.

გამოვიყენე: ლოგარითმის თვისებები, ლოგარითმული ფუნქციის მონოტონურობა

პასუხი: ბ) $(3; 4)$ ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, $AB = CD = a$ და $AD = BC = b$.

$A\frac{P}{P}B = \frac{1}{2}$, ამიტომ $AP = \frac{a}{3}$ და $PB = 2\frac{a}{3}$. $C\frac{Q}{Q}D = \frac{1}{3}$, ამიტომ $CQ = \frac{a}{4}$ და $QD = 3\frac{a}{4}$.

$PBCQ$ არის მართკუთხა ტრაპეცია ($\angle B = \angle C = 90°$), ფუძეები $PB = 2\frac{a}{3}$ და $CQ = \frac{a}{4}$, სიმაღლე $BC = b$:

$$S_{PBCQ} = \frac{PB + CQ}{2} \cdot BC = \frac{\left(2\frac{a}{3} + \frac{a}{4}\right)}{2} \cdot b = \frac{\frac{8a+3a}{12}}{2} \cdot b = \frac{11\frac{a}{12}}{2} \cdot b = \frac{11ab}{24}.$$

$$\frac{S_{PBCQ}}{S_{ABCD}} = \frac{11ab/24}{ab} = \frac{11}{24}.$$

გამოვიყენე: მართკუთხედისა და ტრაპეციის ფართობების ფორმულები

პასუხი: ბ) $\frac{11}{24}$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია განტოლება:

$$|\log_5 x| = 2.$$

მოდულის განმარტებიდან გამომდინარე: 1) $\log_5 x = 2 \Rightarrow x = 5^2 = 25$. 2) $\log_5 x = -2 \Rightarrow x = 5^{-2} = \frac{1}{25} = 0,04$.

ორივე ფესვი დადებითია, ამიტომ ისინი აკმაყოფილებენ ლოგარითმის განსაზღვრის არეს. ფესვების ჯამი:

$$25 + 0,04 = 25,04.$$

გამოვიყენე: მოდულიანი განტოლების ამოხსნა, ლოგარითმის თვისებები

პასუხი: ა) $25,04$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია: $b_1 = 16$, $q = \frac{1}{2}$, $S_n = 31\frac{3}{4} = \frac{127}{4}$.

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$$

$$\frac{127}{4} = \frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{\frac{1}{2}} = 32\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$$

$$\frac{127}{128} = 1-\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{128} = \left(\frac{1}{2}\right)^7$$

$$n = 7.$$

გამოვიყენე: გეომეტრიული პროგრესიის ჯამის ფორმულა

პასუხი: ბ) 7 ✅

ამოხსნა

სიმეტრიის ღერძი $x = \frac{\pi}{2}$ ნიშნავს: $f(\frac{\pi}{2} - x) = f(\frac{\pi}{2} + x)$.

შევამოწმოთ ა) $y = -\sin x$:

$$f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$f\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\cos x$$

ტოლია ✓.

ბ) $y = \cos x$: $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ და $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$. არ ტოლია.

გ) $y = \tan x$: $\tan(\frac{\pi}{2} - x) = \cot x$ და $\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$. არ ტოლია.

დ) $y = -\cos x$: $-\cos(\frac{\pi}{2} - x) = -\sin x$ და $-\cos(\frac{\pi}{2} + x) = \sin x$. არ ტოლია.

გამოვიყენე: სიმეტრიის ღერძის განმარტება, ტრიგონომეტრიული დაყვანის ფორმულები

პასუხი: ა) $y = -\sin x$ ✅

ამოხსნა

n-კუთხა პრიზმისთვის:

- წვეროები: $2n$
- წიბოები: $3n$
- წახნაგები: $n + 2$

$$2n + 3n + (n + 2) = 68$$

$$6n + 2 = 68$$

$$6n = 66 \to n = 11$$

.

წახნაგების რაოდენობა: $F = 11 + 2 = 13$.

გამოვიყენე: პრიზმის ელემენტების თვისებები

პასუხი: გ) 13 ✅

ამოხსნა

25 რიცხვის ჯამი: $S = 25 \cdot 26 = 650$. პირველი 13-ის ჯამი: $S_1 = 13 \cdot 24 = 312$. ბოლო 13-ის ჯამი: $S_2 = 13 \cdot 42 = 546$.

მე-13 რიცხვი (x_{13}) ორივე ჯამშია შეტანილი:

$$S_1 + S_2 = S + x_{13}$$

$$312 + 546 = 650 + x_{13}$$

$$x_{13} = 858 - 650 = 208.$$

გამოვიყენე: საშუალო არითმეტიკულის თვისებები

პასუხი: ა) 208 ✅

ამოხსნა

მართკუთხა $\triangle ABC$-ში ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $AC = b$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. O არის AC-ს შუაწერტილი, $AO = \frac{b}{2}$. $OK \perp AB$ ($\angle K = 90°$).

$\triangle AOK \sim \triangle ACB$ (საერთო კუთხე $\angle A$ და ორივე მართკუთხა):

$$\frac{OK}{AO} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{OK}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$OK = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

.

გამოვიყენე: მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება, პითაგორას თეორემა

პასუხი: ა) $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$ ✅

ამოხსნა

პირამიდის ფუძეა ტოლგვერდა სამკუთხედი ABC გვერდით $a = 6$. H არის AC გვერდის შუაწერტილი. BH არის ტოლგვერდა სამკუთხედის მედიანა, შესაბამისად ის არის სიმაღლეც. გამოვთვალოთ მისი სიგრძე:

$$BH = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3} \text{ სმ.}$$

პირობის თანახმად SH არის პირამიდის სიმაღლე, შესაბამისად $SH \perp (ABC)$ და $SH \perp BH$. მივიღეთ მართკუთხა სამკუთხედი ΔSHB, სადაც $\angle SHB = 90°$. ვიცით ჰიპოტენუზა $BS = 9$ და კათეტი $BH = 3\sqrt{3}$.

გამოვიყენოთ პითაგორას თეორემა პირამიდის სიმაღლის (SH) საპოვნელად:

$$SH^2 + BH^2 = BS^2$$

$$SH^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9^2$$

$$SH^2 + 27 = 81$$

$$SH^2 = 54.$$

$$SH = \sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = 3\sqrt{6} \text{ სმ.}$$

გამოვიყენე: ტოლგვერდა სამკუთხედის სიმაღლის ფორმულა, პითაგორას თეორემა

პასუხი: ა) $3\sqrt{6}$ სმ ✅