ამოხსნა

შევასრულოთ გამოკლება მრიცხველსა და მნიშვნელში. შერეული რიცხვი გადავაქციოთ ათწილადად:

$$1\frac{1}{5} = 1,2$$

.

მრიცხველი:

$$1,2 - 0,3 = 0,9$$

.

მნიშვნელი:

$$\frac{3}{5} = 0,6$$

.

$$3 - 0,6 = 2,4$$

.

ახლა გავყოთ მრიცხველი მნიშვნელზე:

$$0,\frac{9}{2},4 = \frac{9}{24}$$

.

შევკვეცოთ წილადი 3-ზე:

$$\frac{9}{24} = \frac{3}{8}$$

.

გამოვიყენე: ათწილადებისა და წილადების არითმეტიკული მოქმედებები

პასუხი: ა) $\frac{3}{8}$ ✅

ამოხსნა

პირობის თანახმად, ნატურალური რიცხვი k-ს 8-ზე გაყოფისას ნაშთი არის 7. ეს შეგვიძლია ჩავწეროთ შემდეგნაირად:

$$k = 8m + 7$$

, სადაც m მთელი არაუარყოფითი რიცხვია.

ჩვენ გვაინტერესებს k^2-ის 8-ზე გაყოფისას მიღებული ნაშთი. ავიყვანოთ k კვადრატში:

$$k^2 = (8m + 7)^2 = 64m^2 + 112m + 49$$

.

გამოვყოთ 8-ის ჯერადი ნაწილი:

$$64m^2 + 112m + 49 = 8(8m^2 + 14m) + 48 + 1 = 8(8m^2 + 14m + 6) + 1$$

.

როგორც ვხედავთ, გამოსახულება იშლება 8-ის ჯერად რიცხვად და დამატებულ 1-ად. შესაბამისად, 8-ზე გაყოფისას ნაშთი არის 1. (უფრო მარტივად, ნაშთების თვისების მიხედვით: $k^2 \bmod 8 \equiv 7^2 \bmod 8 \equiv 49 \bmod 8 \equiv 1$).

გამოვიყენე: ნაშთიანი გაყოფის თვისებები (მოდულური არითმეტიკა)

პასუხი: ა) 1 ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, მობილური ტელეფონის საწყისი ფასი იყო x ლარი. ფასის 20%-ით შემცირება ნიშნავს, რომ ახალი ფასი შეადგენს საწყისი ფასის $100\% - 20\% = 80\%$-ს. გადავიყვანოთ პროცენტი წილადში: $80\% = 0,8$.

პირობის თანახმად, ახალი ფასია 700 ₾:

$$0,8x = 700$$

.

ამოვხსნათ განტოლება x-ის მიმართ:

$$x = \frac{700}{0},8 = \frac{7000}{8} = 875$$

₾.

გამოვიყენე: პროცენტის გამოთვლის წესი

პასუხი: გ) 875 ₾ ✅

ამოხსნა

რადგან $MN \parallel AC$ და BC წარმოადგენს მკვეთს, კუთხეები $\angle MNC$ და $\angle C$ შიგა ცალმხრივი კუთხეებია და მათი ჯამი $180°$-ია.

$$\angle C = 180° - \angle MNC = 180° - 122° = 58°.$$

სამკუთხედ ABC-ში შიგა კუთხეების ჯამი $180°$-ია. ვიპოვოთ $\angle BAC$:

$$\angle BAC = 180° - (\angle ABC + \angle C) = 180° - (67° + 58°) = 180° - 125° = 55°.$$

გამოვიყენე: პარალელური წრფეების თვისებები, სამკუთხედის შიგა კუთხეების ჯამი

პასუხი: გ) $55°$ ✅

ამოხსნა

წრეწირზე მდებარე ოთხივე წვეროს მქონე ოთხკუთხედი წარმოადგენს წრეწირში ჩახაზულ ოთხკუთხედს. წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის მოპირდაპირე კუთხეების ჯამი $180°$-ის ტოლია.

მოცემულია ორი შიდა კუთხე: $70°$ და $100°$. რადგან მათი ჯამი $70° + 100° = 170° \neq 180°$, ისინი არ არიან მოპირდაპირე კუთხეები. ეს ნიშნავს, რომ ისინი წარმოადგენენ ორ მეზობელ კუთხეს.

თითოეული მათგანის მოპირდაპირე კუთხე იქნება:

$$180° - 70° = 110°$$

$$180° - 100° = 80°$$

.

შესაბამისად, დანარჩენი ორი კუთხეა $110°$ და $80°$.

გამოვიყენე: წრეწირში ჩახაზული ოთხკუთხედის თვისება

პასუხი: დ) $110°$ და $80°$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია რიცხვი $2^{\frac{4}{3}}$, რომელიც უნდა შევაფასოთ ($\sqrt[3]{16} = 2^{\frac{4}{3}}$). ჩავწეროთ რიცხვი ფესვის სახით:

$$2^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$$

.

შევაფასოთ მოცემული შუალედები, ავიყვანოთ მათი საზღვრები კუბში და შევადაროთ 16-ს: ა) $\left[\frac{7}{2}; \frac{19}{5}\right] = [3,5; 3,8]$. $3,5^3 = 42,875 > 16$. არ ეკუთვნის. ბ) $\left[\frac{19}{5}; 4\right] = [3,8; 4]$. $3,8^3 > 16$. არ ეკუთვნის. გ) $\left[\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right] = [2,5; 2,6]$. შევამოწმოთ საზღვრები: $2,5^3 = 15,625$ და $2,6^3 = 17,576$. ვინაიდან $15,625 < 16 < 17,576$, გვაქვს:

$$2,5 < \sqrt[3]{16} < 2,6$$

. რიცხვი ნამდვილად მოთავსებულია ამ შუალედში.

გამოვიყენე: წილადური ხარისხი და ფესვის თვისებები, ირაციონალური რიცხვის შეფასება

პასუხი: გ) $\left[\frac{5}{2}; \frac{13}{5}\right]$ ✅

ამოხსნა

გავშალოთ მარცხენა მხარე კუბების სხვაობის ფორმულით: $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$. ჩვენს შემთხვევაში $x = 2p$ და $y = 3q$:

$$(2p-3q)^3 = (2p)^3 - 3(2p)^2(3q) + 3(2p)(3q)^2 - (3q)^3.$$

$$= 8p^3 - 3(4p^2)(3q) + 3(2p)(9q^2) - 27q^3.$$

$$= 8p^3 - 36p^2q + 54pq^2 - 27q^3.$$

შევადაროთ ეს მოცემულ მარჯვენა მხარეს: $8p^3 - 36p^2q - apq^2 - 27q^3$. შესაბამისი წევრების გატოლებით ვიღებთ:

$$54pq^2 = -apq^2 \Rightarrow -a = 54 \Rightarrow a = -54.$$

გამოვიყენე: შემოკლებული გამრავლების ფორმულები (ორი რიცხვის სხვაობის კუბი)

პასუხი: ა) -54 ✅

ამოხსნა

ვეძებთ $3a - b^2$ გამოსახულების უმცირეს მნიშვნელობას.

მოცემულია: $-2 \leq a \leq 5$. $3a$-ს მინიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$3 \cdot (-2) = -6$$

.

მოცემულია: $-4 \leq b \leq 2$. b^2-ის მაქსიმალური მნიშვნელობა მიიღწევა იმ საზღვარზე, რომლის მოდულიც უდიდესია ($|-4| > |2|$):

$$\left(b^2\right)_{\max} = (-4)^2 = 16$$

.

მაშინ გამოსახულების უმცირესი მნიშვნელობაა:

$$\left(3a - b^2\right)_{\min} = -6 - 16 = -22$$

.

გამოვიყენე: ფუნქციის (გამოსახულების) ექსტრემუმების შეფასება შუალედზე

პასუხი: ბ) -22 ✅

ამოხსნა

წრფივი ფუნქციის $y = kx + b$ გრაფიკის თვისებებიდან გამომდინარე:

- k არის დახრილობის კოეფიციენტი. ზრდადი წრფისთვის $k > 0$, კლებადი წრფისთვის $k < 0$.
- b არის y-ღერძთან გადაკვეთის წერტილის ორდინატა.

AB წრფე ზრდადია, ამიტომ $k_1 > 0$. CB წრფე კლებადია, ამიტომ $k_2 < 0$.

ვინაიდან k_1 დადებითია და k_2 უარყოფითი, მათი ნამრავლი აუცილებლად უარყოფითი იქნება:

$$k_1 \cdot k_2 < 0$$

.

გამოვიყენე: წრფივი ფუნქციის გრაფიკის თვისებები

პასუხი: დ) $k_1 k_2 < 0$ ✅

ამოხსნა

კვადრატულ განტოლებას $2x^2 - 6x + 10 - a = 0$ არ აქვს ნამდვილი ამონახსნი მაშინ და მხოლოდ მაშინ, როდესაც მისი დისკრიმინანტი მკაცრად უარყოფითია ($D < 0$).

გამოვთვალოთ $\frac{D}{4}$ ($k = -3$):

$$\frac{D}{4} = k^2 - ac = (-3)^2 - 2(10 - a) = 9 - 20 + 2a = 2a - 11$$

.

შევადგინოთ უტოლობა:

$$2a - 11 < 0$$

$$2a < 11 \to a < \frac{11}{2}$$

.

ეს ნიშნავს, რომ a ეკუთვნის შუალედს $\left(-\infty; \frac{11}{2}\right)$.

გამოვიყენე: კვადრატული განტოლების ფესვების არსებობის პირობა

პასუხი: ა) $\left(-\infty; \dfrac{11}{2}\right)$ ✅

ამოხსნა

წესიერი ხუთკუთხედის თითოეული შიგა კუთხის სიდიდეა: $\frac{180^\circ \cdot (5-2)}{5} = \frac{540^\circ}{5} = 108^\circ$. ერთი წვეროდან გამომავალი ორი დიაგონალი ამ კუთხეს ყოფს სამ ნაწილად. ორივე განაპირა სამკუთხედი ტოლფერდაა (მათი ფერდები ხუთკუთხედის გვერდებია), ამიტომ მათი ფუძესთან მდებარე კუთხეებია: $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

შუა კუთხე, რომელიც დიაგონალებს შორისაა მოქცეული, იქნება მთლიან კუთხეს გამოკლებული განაპირა კუთხეები:

$$108^\circ - 36^\circ - 36^\circ = 36^\circ.$$

გამოვიყენე: წესიერი მრავალკუთხედის კუთხეების თვისებები

პასუხი: ბ) 36° ✅

ამოხსნა

ჯერ გამოვთვალოთ მოსწავლეთა პროცენტული წილი ისტორიის წრეში:

$$100\% - (25\% + 20\% + 40\%) = 100\% - 85\% = 15\%.$$

წრიულ დიაგრამაზე სრული წრე (100%) შეესაბამება $360°$-ს. გამოვთვალოთ 1%-ის შესაბამისი გრადუსული ზომა:

$$360\frac{°}{100}\% = 3,6°/\%.$$

მათემატიკის წრეს შეესაბამება: $25\% \cdot 3,6° = 90°$. ისტორიის წრეს შეესაბამება: $15\% \cdot 3,6° = 54°$.

ჩვენ გვაინტერესებს მათემატიკის კუთხე რამდენით აღემატება ისტორიისას:

$$90° - 54° = 36°.$$

გამოვიყენე: წრიული დიაგრამის თვისებები, პროცენტების განაწილება

პასუხი: ბ) $36°$-ით ✅

ამოხსნა

ფიგურა მიღებულია მართკუთხა პარალელეპიპედიდან მართი სამკუთხა პრიზმის ჩამოჭრით. საწყისი პარალელეპიპედის წინა წახნაგი იყო 10×6 მართკუთხედი. ამოჭრეს ზედა მარჯვენა კუთხე — მართკუთხა სამკუთხედი, რომლის კათეტებია 7 სმ და 4 სმ.

წინა წახნაგის ფართობი:

$$S = 10 \cdot 6 - \frac{7 \cdot 4}{2} = 60 - 14 = 46$$

სმ².

პრიზმის სიმაღლე (სიღრმე) არის 13 სმ.

მოცულობა:

$$V = S \cdot h = 46 \cdot 13 = 598$$

სმ³.

გამოვიყენე: პრიზმის მოცულობის ფორმულა, ფიგურის ფართობის გამოთვლა ამოჭრით

პასუხი: გ) 598 სმ³ ✅

ამოხსნა

საკოორდინატო სიბრტყეზე წერტილის $90°$-ით საათის ისრის საწინააღმდეგო მიმართულებით მობრუნებისას კოორდინატები (x, y) გადადის $(-y, x)$-ში.

მოცემულია წერტილი $(-1; 4)$. გამოვიყენოთ წესი:

$$(-1, 4) \to (-4, -1).$$

ჩვენ გვეკითხებიან მიღებული წერტილის ორდინატას (y-კოორდინატას), რომელიც არის -1.

გამოვიყენე: წერტილის მობრუნება კოორდინატთა სათავის მიმართ

პასუხი: ბ) -1 ✅

ამოხსნა

კლასში გიორგისა და თამარის გარდა 18 მოსწავლეა. აღვნიშნოთ: A — გიორგის მეგობრების სიმრავლე (გიორგისა და თამარის გარდა), $|A| = 12$. B — თამარის მეგობრების სიმრავლე (გიორგისა და თამარის გარდა), $|B| = 14$. სულ მოსწავლეები (მათ გარდა) არის 18.

ვიპოვოთ საერთო მეგობრების რაოდენობა:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

რადგან $|A \cup B| \leq 18$, მინიმალური საერთო მეგობრების რაოდენობა მიიღწევა, როცა $|A \cup B| = 18$:

$$18 = 12 + 14 - |A \cap B| \Rightarrow |A \cap B| = 8.$$

საერთო მეგობრებში ზუსტად 3 გოგონაა, ამიტომ ბიჭების მინიმალური რაოდენობა საერთო მეგობრებში არის $8 - 3 = 5$. დანარჩენი ყველა მოსწავლე შეიძლება გოგო იყოს, ამიტომ კლასში ბიჭების უმცირესი რაოდენობა არის 5.

გამოვიყენე: სიმრავლეთა გაერთიანების ფორმულა (ჩართვა-გამორიცხვის პრინციპი)

პასუხი: ა) 5 ✅

ამოხსნა

დადებითი რიცხვები x, y, z, t ქმნიან არითმეტიკულ პროგრესიას სხვაობით $d \neq 0$. გამოვსახოთ ისინი პირველი წევრისა და სხვაობის საშუალებით: $x = a$, $y = a + d$, $z = a + 2d$, $t = a + 3d$.

გამოვთვალოთ მოცემული წილადის მრიცხველი და მნიშვნელი კვადრატების სხვაობის ფორმულით: მრიცხველი: $t^2 - x^2 = (t - x)(t + x) = (a + 3d - a)(a + 3d + a) = 3d(2a + 3d)$. მნიშვნელი: $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = (a + 2d - (a + d))(a + 2d + a + d) = d(2a + 3d)$.

ჩავსვათ წილადში:

$$\frac{3d(2a + 3d)}{d(2a + 3d)}.$$

რადგან $d \neq 0$ და რიცხვები დადებითია ($2a + 3d \neq 0$), შეგვიძლია შევკვეცოთ: შედეგი არის 3.

გამოვიყენე: არითმეტიკული პროგრესიის თვისებები, კვადრატების სხვაობის ფორმულა

პასუხი: ბ) 3 ✅

ამოხსნა

ორი ნატურალური რიცხვის ნამრავლია 700. დავშალოთ 700 მარტივ მამრავლებად: $700 = 2^2 \cdot 5^2 \cdot 7$. ჩვენ უნდა შევამოწმოთ რომელი მტკიცებულებაა აუცილებლად ჭეშმარიტი. განვიხილოთ გამონათქვამი "ამ რიცხვების ჯამი არ იყოფა 7-ზე". დავუშვათ საწინააღმდეგო: ვთქვათ, რიცხვების ჯამი ($x + y$) იყოფა 7-ზე. რადგან მათი ნამრავლი $xy = 700$ იყოფა 7-ზე, ეს ნიშნავს რომ ერთ-ერთი რიცხვი (მაგალითად x) მაინც შეიცავს 7-ს მარავლად. თუ x იყოფა 7-ზე და მათი ჯამი $x + y$ იყოფა 7-ზე, მაშინ აუცილებლად y-იც უნდა იყოფოდეს 7-ზე. თუ ორივე რიცხვი იყოფა 7-ზე, მაშინ მათი ნამრავლი უნდა იყოფოდეს $7 \cdot 7 = 49$-ზე. თუმცა, 700 არ იყოფა 49-ზე. მივიღეთ წინააღმდეგობა. შესაბამისად, $x + y$ არასოდეს იყოფა 7-ზე.

გამოვიყენე: გაყოფადობის ნიშნები, საწინააღმდეგოს დაშვების მეთოდი

პასუხი: ა) ამ რიცხვების ჯამი არ იყოფა 7-ზე ✅

ამოხსნა

მონაკვეთი AB დაყოფილია სამ წერტილად: A, C, B. შეფარდებაა $AC : CB = 2 : 3$. აღვნიშნოთ $AC = 2x$ და $CB = 3x$. მთლიანი სიგრძეა $AB = 5x$. CB მონაკვეთის შუაწერტილი ყოფს მას ორ ტოლ ნაწილად, თითოეულის სიგრძეა $\frac{3x}{2} = 1,5x$. მანძილი CB-ს შუაწერტილსა და C წერტილს შორის არის სწორედ $1,5x$.

ალბათობა იმისა, რომ შემთხვევით შერჩეული წერტილი მოხვდება ამ შუალედში, ტოლია ამ შუალედის სიგრძის შეფარდებისა მთლიანი AB მონაკვეთის სიგრძესთან:

$$P = \frac{1,5x}{5x} = \frac{1,5}{5} = \frac{3}{10}.$$

გამოვიყენე: გეომეტრიული ალბათობა

პასუხი: გ) $\frac{3}{10}$ ✅

ამოხსნა

განტოლებაა: $x^2 + px - 27 = 0$. ვიეტის თეორემით: $x_1 \cdot x_2 = -27$. პირობის თანახმად $x_1 = x_2^2$, ამიტომ:

$$x_2^3 = -27 \to x_2 = -3$$

. აქედან $x_1 = 9$.

ფესვთა ჯამი:

$$x_1 + x_2 = -p \to 9 - 3 = -p \to 6 = -p \to p = -6$$

.

გამოვიყენე: ვიეტის თეორემა

პასუხი: ბ) -6 ✅

ამოხსნა

სამკუთხედ ABC-ში ცნობილია ორი კუთხე $\angle A = 75°$, $\angle B = 45°$ და გვერდი $AB = 3$. ჯერ ვიპოვოთ მესამე კუთხე $\angle C$:

$$\angle C = 180° - (75° + 45°) = 180° - 120° = 60°.$$

გამოვიყენოთ სინუსების თეორემა AC გვერდის საპოვნელად:

$$\frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}.$$

$$\frac{AC}{\sin 45°} = \frac{3}{\sin 60°}.$$

$$AC = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

გავათავისუფლოთ მნიშვნელი ირაციონალობისგან ($\sqrt{3}$-ზე გამრავლებით):

$$AC = \frac{3\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6} \text{ სმ}.$$

გამოვიყენე: სამკუთხედის კუთხეების ჯამი, სინუსების თეორემა

პასუხი: დ) $\sqrt{6}$ სმ ✅

ამოხსნა

$\vec{a} = (-2; 3)$, $\vec{b} = (3; 4)$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = -2(3) + 3(4) = -6 + 12 = 6$$

.

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$$

.

$$|\vec{b}| = \sqrt{9 + 16} = 5$$

.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|\ |\vec{b}|} = \frac{6}{5\sqrt{13}}$$

.

გამოვიყენე: ვექტორების სკალარული ნამრავლი

პასუხი: დ) $\frac{6}{5\sqrt{13}}$ ✅

ამოხსნა

კამათლის სამჯერ გაგორებისას ჯამი 7:

- 1, 1, 5 → 3 ვარიანტი
- 1, 2, 4 → 6 ვარიანტი
- 1, 3, 3 → 3 ვარიანტი
- 2, 2, 3 → 3 ვარიანტი

სულ $3 + 6 + 3 + 3 = 15$ ხელსაყრელი ვარიანტი. სრული ვარიანტები: $6^3 = 216$.

$$P = \frac{15}{216} = \frac{5}{72}$$

.

გამოვიყენე: ალბათობის კლასიკური განმარტება

პასუხი: გ) $\frac{5}{72}$ ✅

ამოხსნა

ფუნქციის $f(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x\sqrt{8-x}}$ განსაზღვრის არე მოითხოვს შემდეგი პირობების შესრულებას: 1) მრიცხველის ფესვქვეშა გამოსახულება არაუარყოფითია: $x + 2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$. 2) მნიშვნელის ფესვქვეშა გამოსახულება დადებითია: $8 - x > 0 \Rightarrow x < 8$. 3) მნიშვნელი ნულს არ უდრის: $x \neq 0$.

გავაერთიანოთ პირობები:

$$x \in [-2; 0) \cup (0; 8).$$

დავითვალოთ ამ შუალედში მოთავსებული მთელი რიცხვები: უარყოფითები: $-2, -1$ (2 ცალი). დადებითები: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ (7 ცალი). სულ $2 + 7 = 9$ მთელი რიცხვი.

გამოვიყენე: ფუნქციის განსაზღვრის არე

პასუხი: გ) 9 ✅

ამოხსნა

$y = x^3$. $A(2; a) \to a = 2^3 = 8$, ამიტომ $A(2; 8)$. $B(b; -1) \to -1 = b^3 \to b = -1$, ამიტომ $B(-1; -1)$.

$$d = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-8)^2} = \sqrt{9+81} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$$

.

გამოვიყენე: მანძილი ორ წერტილს შორის

პასუხი: ა) $3\sqrt{10}$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია $\tan^2 \alpha = 4$. უნდა ვიპოვოთ $\sin^2 \alpha$. გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული იგივეობა:

$$\sin^2 \alpha = \tan^2 \frac{\alpha}{1 + \tan^2 \alpha}.$$

ჩავსვათ $\tan^2 \alpha = 4$:

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{1+4} = \frac{4}{5}.$$

გამოვიყენე: ტრიგონომეტრიული იგივეობები

პასუხი: გ) $\frac{4}{5}$ ✅

ამოხსნა

წესიერი ოთხკუთხა პირამიდის გვერდითი წახნაგები ტოლგვერდა სამკუთხედებია. ფუძის გვერდი და გვერდითი წიბო ტოლია a. გვერდითი წიბოს გეგმილი ფუძეზე (კვადრატის დიაგონალის ნახევარი):

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

.

კუთხის კოსინუსი გვერდით წიბოსა და ფუძეს შორის:

$$\cos\alpha = \frac{R}{\text{წიბო}} = \frac{a\frac{\sqrt{2}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

.

გამოვიყენე: წესიერი პირამიდის თვისებები

პასუხი: დ) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ✅

ამოხსნა

ჰომოთეტიის ცენტრია $C(-1;3)$, კოეფიციენტი $k=-1$. წერტილი $A(-3;-4)$ გადადის $A'(x';y')$ წერტილში. გამოვიყენოთ ჰომოთეტიის ფორმულა: $(CA') = k \cdot (CA)$. ანუ: $(x'-x_c) = k(x_a - x_c)$ და $(y'-y_c) = k(y_a - y_c)$.

$$x' - (-1) = -1(-3-(-1)) \Rightarrow x'+1 = -1(-2) \Rightarrow x'+1 = 2 \Rightarrow x' = 1.$$

$$y' - 3 = -1(-4-3) \Rightarrow y'-3 = -1(-7) \Rightarrow y'-3 = 7 \Rightarrow y' = 10.$$

ახალი წერტილია $(1;10)$.

გამოვიყენე: ჰომოთეტიის თვისებები კოორდინატებში

პასუხი: გ) $(1;10)$ ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, პირველი ხელოსნის შრომის ნაყოფიერება არის p_1, ხოლო მეორესი — p_2.

$$2p_1 = 3p_2 \to p_1 = 1,5p_2$$

.

ერთად 18 დღეში:

$$p_1 + p_2 = \frac{1}{18}$$

.

ჩავსვათ:

$$1,5p_2 + p_2 = \frac{1}{18}$$

$$2,5p_2 = \frac{1}{18}$$

$$p_2 = \frac{1}{45}$$

.

$$p_1 = 1,5 \cdot \frac{1}{45} = \frac{1}{30}$$

.

პირველი ხელოსანი მთელ სამუშაოს შეასრულებს 30 დღეში.

გამოვიყენე: ერთობლივი მუშაობის პრინციპები, წრფივ განტოლებათა სისტემა

პასუხი: გ) 30 ✅

ამოხსნა

მოცემულია $\log_3 7 = a$. უნდა ვიპოვოთ $\log_{21} 9$. ლოგარითმის სხვა ფუძეზე გადასვლის ფორმულით მოცემული გამოსახულება გადავიყვანოთ 3-ის ფუძეზე:

$$\log_{21} 9 = \frac{\log_3 9}{\log_3 21}.$$

მრიცხველი ტოლია 2-ის, რადგან $\log_3 9 = \log_3(3^2) = 2$. მნიშვნელი დავშალოთ ლოგარითმის თვისებების გამოყენებით (ნამრავლის ლოგარითმი ტოლია ლოგარითმების ჯამის):

$$\log_3 21 = \log_3(3 \cdot 7) = \log_3 3 + \log_3 7 = 1 + \log_3 7.$$

ჩავსვათ მოცემული მნიშვნელობა $\log_3 7 = a$:

$$\log_3 21 = 1 + a.$$

საბოლოოდ, წილადი მიიღებს სახეს:

$$\frac{2}{1+a}.$$

გამოვიყენე: ლოგარითმის ფუძის შეცვლის ფორმულა, ნამრავლის ლოგარითმის თვისება

პასუხი: ა) $\frac{2}{1+a}$ ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, პირველი მართკუთხა ნაკვეთის გვერდებია $3x$ და $4x$. მისი ფართობია:

$$S_1 = 3x \cdot 4x = 12x^2.$$

პერიმეტრი კი იქნება:

$$P_1 = 2(3x + 4x) = 2 \cdot 7x = 14x.$$

მეორე მართკუთხა ნაკვეთის გვერდებია $4y$ და $5y$. მისი ფართობია:

$$S_2 = 4y \cdot 5y = 20y^2.$$

პერიმეტრი იქნება:

$$P_2 = 2(4y + 5y) = 2 \cdot 9y = 18y.$$

პირობის თანახმად, ფართობები ტოლია ($S_1 = S_2$):

$$12x^2 = 20y^2.$$

გავყოთ 4-ზე:

$$3x^2 = 5y^2.$$

აქედან გამოვსახოთ x და y-ის შეფარდება:

$$\frac{x^2}{y^2} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \sqrt{\frac{5}{3}}.$$

უნდა ვიპოვოთ პერიმეტრების შეფარდება $\frac{P_1}{P_2}$:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{14x}{18y} = \frac{7}{9} \cdot \frac{x}{y}.$$

ჩავსვათ $\frac{x}{y}$-ის ნაპოვნი მნიშვნელობა:

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{7}{9} \cdot \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{7\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}.$$

გამოვიყენე: მართკუთხედის ფართობისა და პერიმეტრის ფორმულები, პროპორცია

პასუხი: გ) $\frac{7\sqrt{5}}{9\sqrt{3}}$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია: $\log_2 b + \log_3 b = 1$.

$\log_3 b = \frac{\log_2 b}{\log_2 3}$. ჩავსვათ:

$$\log_2 b\left(1 + \frac{1}{\log_2 3}\right) = 1.$$

$$1 + \frac{1}{\log_2 3} = \frac{\log_2 3 + \log_2 2}{\log_2 3} = \frac{\log_2 6}{\log_2 3}.$$

$$\log_2 b \cdot \frac{\log_2 6}{\log_2 3} = 1 \Rightarrow \log_2 b = \frac{\log_2 3}{\log_2 6} = \log_6 3.$$

გამოვიყენე: ლოგარითმის თვისებები (ფუძის შეცვლა)

პასუხი: ბ) $\log_6 3$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია გეომეტრიული პროგრესიის პირველი 5 წევრის ჯამი და მომდევნო 5 წევრის ჯამი:

$$S_{1-5} = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 = 1.$$

$$S_{6-10} = b_6 + b_7 + b_8 + b_9 + b_{10} = 32.$$

გეომეტრიულ პროგრესიაში ყოველი მომდევნო წევრი მიიღება წინა წევრის მნიშვნელზე (q) გამრავლებით. ამიტომ, მეექვსე წევრიდან დაწყებული თითოეული წევრი შეგვიძლია გამოვსახოთ პირველი ხუთეულის წევრებით:

$$b_6 = b_1 \cdot q^5, \quad b_7 = b_2 \cdot q^5, \quad \ldots, \quad b_{10} = b_5 \cdot q^5.$$

ჩავსვათ ეს მეორე განტოლებაში და გავიტანოთ q^5 ფრჩხილებს გარეთ:

$$q^5(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = 32.$$

ფრჩხილებში მოთავსებული ჯამი წარმოადგენს პირველი განტოლების მარცხენა მხარეს, რომელიც უდრის 1-ს:

$$q^5 \cdot 1 = 32.$$

ვიპოვოთ q:

$$q = \sqrt[5]{32} = 2.$$

გამოვიყენე: გეომეტრიული პროგრესიის თვისებები

პასუხი: ბ) 2 ✅

ამოხსნა

ორობით სისტემაში ჩაწერილი რიცხვები უნდა გადავიყვანოთ ათობით სისტემაში.

$a = 111000_2$. გადავიყვანოთ:

$$a = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5$$

$$a = 0 + 0 + 0 + 8 + 16 + 32 = 56.$$

$b = 11111_2$. გადავიყვანოთ:

$$b = 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^4$$

$$b = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31.$$

ახლა ვიპოვოთ ამ რიცხვების ჯამი ათობით სისტემაში:

$$a + b = 56 + 31 = 87.$$

87 იკითხება როგორც “ოთხმოცდაშვიდი”.

გამოვიყენე: რიცხვთა პოზიციური სისტემები (ორობითიდან ათობითში გადაყვანა)

პასუხი: ა) ოთხმოცდაშვიდი ✅

ამოხსნა

ვთქვათ, პრიზმის ფუძე წარმოადგენს n-კუთხედს. ამ შემთხვევაში:

- წახნაგების რაოდენობაა $F = n + 2$ (გვერდითი წახნაგები + 2 ფუძე).
- წიბოების რაოდენობაა $E = 3n$ (n ფუძეში, n მეორე ფუძეში, n გვერდითი).
- წვეროების რაოდენობაა $V = 2n$ (n ერთ ფუძეზე, n მეორეზე).

პირობის თანახმად, წიბოების რაოდენობა 12-ით მეტია წახნაგების რაოდენობაზე:

$$E = F + 12.$$

ჩავსვათ n-ის მიხედვით გამოსახულებები:

$$3n = (n + 2) + 12$$

$$3n = n + 14$$

$$2n = 14.$$

ჩვენ გვეკითხებიან პრიზმის წვეროების საერთო რაოდენობას, რაც ზუსტად $V = 2n$-ია. ე.ი. წვეროების რაოდენობაა 14. (თვითონ ფუძე 7-კუთხედია).

გამოვიყენე: პრიზმის ელემენტების (წვეროები, წიბოები, წახნაგები) თვისებები

პასუხი: გ) 14 ✅

ამოხსნა

სულ 23 რიცხვი: $a_1, a_2, ..., a_{23}$.

პირველი 12-ის ჯამი: $12 \cdot 19 = 228$. უკანასკნელი 12-ის ჯამი (a_{12} to a_{23}): $12 \cdot 27 = 324$.

სრული ჯამი ($a_{12} = 92$ ორჯერ ითვლება):

$$S = 228 + 324 - 92 = 460$$

.

$$m = \frac{460}{23} = 20$$

.

გამოვიყენე: საშუალო არითმეტიკულის თვისებები

პასუხი: ბ) 20 ✅

ამოხსნა

მართკუთხა $\triangle ABC$-ში ($\angle C = 90°$), $BC = a$, $AC = b$, $AB = \sqrt{a^2 + b^2}$. O არის AC-ს შუაწერტილი, $AO = \frac{b}{2}$. $OK \perp AB$ ($\angle K = 90°$).

$\triangle AOK \sim \triangle ACB$ (საერთო კუთხე $\angle A$ და ორივე მართკუთხა):

$$\frac{OK}{AO} = \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{OK}{\frac{b}{2}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$OK = \frac{b}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$$

.

გამოვიყენე: მართკუთხა სამკუთხედების მსგავსება, პითაგორას თეორემა

პასუხი: ა) $\frac{ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}}$ ✅

ამოხსნა

კონუსის შლილის ცენტრალური კუთხე $270^\circ = 3\frac{\pi}{2}$. შლილის რკალის სიგრძე = ფუძის წრეწირის სიგრძე:

$$2\pi R = L \cdot 3\frac{\pi}{2} \Rightarrow R = \frac{3L}{4}.$$

კუთხე მსახველსა და ფუძეს შორის:

$$\cos\varphi = \frac{R}{L} = \frac{3L/4}{L} = \frac{3}{4}.$$

გამოვიყენე: კონუსის შლილის თვისებები, ტრიგონომეტრია

პასუხი: დ) $\frac{3}{4}$ ✅