ამოხსნა

ჯერ შევასრულოთ მოქმედება ფრჩხილებში. 1 წარმოვადგინოთ წილადის სახით როგორც $\frac{5}{5}$:

$$1 - \frac{1}{5} = \frac{5}{5} - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

.

შემდეგ მიღებული შედეგი გავამრავლოთ $\frac{5}{8}$-ზე:

$$\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{8} = \frac{20}{40}$$

.

შევკვეცოთ წილადი 20-ზე:

$$\frac{20}{40} = \frac{1}{2} = 0,5$$

.

პასუხი: ა) $0,5$ ✅

ამოხსნა

რადგან a უარყოფითია და b დადებითი, სხვაობა $a-b$ იქნება უარყოფითი რიცხვი (უარყოფითს გამოკლებული დადებითი).

უარყოფითი რიცხვის მოდული მისი მოპირდაპირე რიცხვია:

$$|a-b| = -(a-b) = -a+b = b-a$$

პასუხი: გ) $b-a$

ამოხსნა

აღვნიშნოთ საწყისი თანხა x-ით. 12%-იანი ზრდის შემდეგ თანხა გახდება საწყისი თანხის 112%, ანუ $1,12x$.

$$x \cdot 1,12 = 4200$$

$$x = \frac{4200}{1,12} = 3750$$

.

პასუხი: გ) 3750 ლარი

ამოხსნა

მართკუთხა სამკუთხედის კუთხეებია $90°$, $50°$ და $180° - (90° + 50°) = 40°$.

მართი კუთხის წვეროდან გავლებული ბისექტრისა $90°$-იან კუთხეს ყოფს შუაზე: $45°$ და $45°$.

განვიხილოთ სამკუთხედი, რომელსაც ქმნის ეს ბისექტრისა, $50°$-იანი კუთხის მქონე წვერო და ჰიპოტენუზის შესაბამისი ნაწილი.

ამ ახალი სამკუთხედის ორი კუთხეა $45°$ და $50°$.

მესამე კუთხე (ბისექტრისასა და ჰიპოტენუზას შორის) იქნება:

$$\alpha = 180° - (45° + 50°) = 180° - 95° = 85°$$

ეს არის მახვილი კუთხე.

პასუხი: ა) $85°$

ამოხსნა

პარალელოგრამის ერთ გვერდთან მდებარე კუთხეების ჯამი 180°-ია. რადგან მოცემული ორი კუთხის ჯამი (200°) მეტია 180°-ზე, ეს კუთხეები მოპირდაპირე ბლაგვი კუთხეებია.

$$2\alpha = 200^\circ \Rightarrow \alpha = 100^\circ$$

მახვილი კუთხე იქნება:

$$180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

პასუხი: დ) 80°

ამოხსნა

გამოვიყენოთ კუბების ჯამის ფორმულა:

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

ჩავსვათ:

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{a^2 - ab + b^2} = a + b$$

პასუხი: ა) $a + b$

ამოხსნა

ხაზოვანი მასშტაბია $k = 20\ 000$.

ფართობის მასშტაბი იქნება:

$$k^2 = (20\ 000)^2 = 400\ 000\ 000$$

რეალური ფართობი:

$$S = 1.6 \cdot 400\ 000\ 000 = 640\ 000\ 000\text{სმ}^2$$

გადავიყვანოთ კვადრატულ მეტრებში ($1\text{მ}^2 = 10\ 000\text{სმ}^2$):

$$S = 640\ 000\ 000 : 10\ 000 = 64\ 000\text{მ}^2$$

პასუხი: დ) $64\ 000$ მ^2

ამოხსნა

ნახაზის მიხედვით: $m < n < 0 < p$. გავაანალიზოთ ვარიანტები:

ა) $p - n < p \Rightarrow -n < 0 \Rightarrow n > 0$ (მცდარია, $n < 0$).

ბ) $m \cdot n < 0$. ორივე უარყოფითია, ნამრავლი დადებითი უნდა იყოს (მცდარია).

გ) $\frac{1}{m} < \frac{1}{n}$. რადგან $m < n < 0$ (მაგ. $-5 < -2$), მაშინ $-\frac{1}{5} > -\frac{1}{2}$, ანუ $\frac{1}{m} > \frac{1}{n}$ (მცდარია).

დ) $(n - m) \cdot p > 0$. რადგან $n > m$, სხვაობა $n - m > 0$. ასევე $p > 0$. დადებითი რიცხვების ნამრავლი დადებითია (ჭეშმარიტია).

პასუხი: დ) $(n - m) \cdot p > 0$

ამოხსნა

წრიულ დიაგრამაზე სრული წრეწირის გრადუსული ზომა არის $360°$, რაც შეესაბამება 27 თამაშს. გამოვთვალოთ 1 თამაშის შესაბამისი გრადუსული ზომა:

$$\frac{360°}{27} = \frac{40°}{3}$$

.

მოგებების რაოდენობაა 15, წაგებების 12. მათ შორის სხვაობაა:

$$15 - 12 = 3$$

თამაში.

შესაბამისი კუთხეების სხვაობა იქნება 3 თამაშის შესაბამისი გრადუსული ზომა:

$$3 \cdot \frac{40°}{3} = 40°$$

.

პასუხი: ბ) $40°$-ით ✅

ამოხსნა

$$ax + 4 = 5 - 3x - 3$$

$$ax + 4 = 2 - 3x$$

$$ax + 3x = 2 - 4$$

$$x(a + 3) = -2$$

განტოლებას არ ექნება ამონახსნი, თუ x-ის კოეფიციენტი 0-ია (და მარჯვენა მხარე $\neq 0$).

$$a + 3 = 0 \Longrightarrow a = -3$$

პასუხი: ა) -3

ამოხსნა

დავალაგოთ ზრდადობით:

$$-2; -2; 3; 11; 11; 35$$

მონაცემთა რაოდენობა ლუწია (6). მედიანა არის შუა ორი წევრის (3 და 11) საშუალო:

$$\text{მედიანა} = \frac{3+11}{2} = \frac{14}{2} = 7$$

პასუხი: გ) 7

ამოხსნა

დავიყვანოთ მე-6 ხარისხის ფესვზე:

$$\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$$

$$\sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$$

$$\sqrt[6]{6} = \sqrt[6]{6}$$

შედარება: $6 < 8 < 9$

რიგი:

$$\sqrt[6]{6}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$$

პასუხი: ბ) $\sqrt[6]{6}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}$

ამოხსნა

n-კუთხა პრიზმას აქვს $3n$ წიბო:

- n წიბო ზედა ფუძეზე
- n წიბო ქვედა ფუძეზე
- n გვერდითი წიბო

$$3n = 36 \Longrightarrow n = 12$$

პასუხი: ბ) 12

ამოხსნა

სულ 8 მოსწავლეა. პირველი ჯგუფისთვის (3 მოსწავლე) არჩევის ვარიანტებია: $C_8^3 = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$. დარჩა 5 მოსწავლე. მეორე ჯგუფისთვის (3 მოსწავლე) არჩევის ვარიანტებია: $C_5^3 = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10$. დარჩა 2 მოსწავლე. მესამე ჯგუფისთვის (2 მოსწავლე) არჩევის ვარიანტებია: $C_2^2 = 1$.

სრული რაოდენობა გადამრავლდება (რადგან ჯგუფები ნომრიანია/განსხვავებულია): $56 \cdot 10 \cdot 1 = 560$.

პასუხი: ბ) 560

ამოხსნა

არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულაა: $a_n = a_1 + (n-1)d$. მოცემული პროგრესია ზრდადია, რადგან სხვაობა $d = 3 > 0$. ამიტომ ამ 10 წევრს შორის უდიდესია მე-10 წევრი (a_{10}), ხოლო უმცირესია პირველი წევრი (a_1). ვიპოვოთ მათი სხვაობა თავდაპირველ პროგრესიაში: $a_{10} - a_1 = (a_1 + 9d) - a_1 = 9d = 9 \cdot 3 = 27$. თუ პროგრესიის ყველა წევრს გავამრავლებთ 5-ზე, მივიღებთ ახალ მიმდევრობას. ახალ მიმდევრობაში უდიდესი წევრი იქნება $5a_{10}$, ხოლო უმცირესი $5a_1$. მათი სხვაობა იქნება: $5a_{10} - 5a_1 = 5(a_{10} - a_1) = 5 \cdot 27 = 135$.

გამოვიყენე: არითმეტიკული პროგრესიის ზოგადი წევრის ფორმულა

პასუხი: ა) 135

ამოხსნა

ვიცით, რომ $AC = 5$ სმ და $AD = 7$ სმ. CD-ს სიგრძე:

$$CD = AD - AC = 7 - 5 = 2 \text{ სმ}$$

რახან ალბათობა ვიცით (0,1), CD-ს სიგრძე შევაფარდოთ AB-ს სიგრძესთან:

$$\frac{2}{AB} = 0,1 \Rightarrow AB = \frac{2}{0},1 = 20 \text{ სმ}$$

პასუხი: დ) 20 სმ

ამოხსნა

მოცემულია განტოლება: $3(9^{2x+1}) = 3^{2-x}$

დავიყვანოთ ორივე მხარე 3-ის ფუძეზე. ვიცით, რომ $9 = 3^2$:

$$3^1 \cdot (3^2)^{2x+1} = 3^{2-x}$$

ხარისხის ხარისხში აყვანისას მაჩვენებლები მრავლდება:

$$3^1 \cdot 3^{4x+2} = 3^{2-x}$$

ერთნაირფუძიანი ხარისხების გამრავლებისას მაჩვენებლები იკრიბება:

$$3^{4x+3} = 3^{2-x}$$

რადგან ფუძეები ტოლია, ვაუტოლებთ ხარისხის მაჩვენებლებს:

$$4x + 3 = 2 - x$$

$$5x = -1 \Longrightarrow x = -\frac{1}{5}$$

პასუხი: ა) $\left\{-\frac{1}{5}\right\}$

ამოხსნა

მართკუთხა სამკუთხედში $\angle C = 90^\circ$ და $\angle A = 30^\circ$. შესაბამისად, მეორე მახვილი კუთხე $\angle B = 60^\circ$. BC არის შემოხაზული წრეწირის დიაამეტრი. წრეწირი ჰიპოტენუზას კვეთს D წერტილში. დიამეტრზე დაყრდნობილი ჩახაზული კუთხე მართია. ამიტომ $\angle CDB = 90^\circ$, ანუ CD წარმოადგენს მართი კუთხიდან ჰიპოტენუზაზე დაშვებულ სიმაღლეს.

ვიცით, რომ $\angle B = 60^\circ$. მართკუთხა სამკუთხედ CDB-ში:

$$BD = BC \cdot \cos 60^\circ = BC \cdot \frac{1}{2}$$

.

მთლიან ABC სამკუთხედში, 30-გრადუსიანი კუთხის მოპირდაპირე კათეტი ჰიპოტენუზის ნახევარია, ამიტომ $AB = 2BC$. გამოვთვალოთ AD:

$$AD = AB - BD = 2BC - \frac{1}{2}BC = \frac{3}{2}BC$$

.

საძიებელი შეფარდებაა:

$$\frac{AD}{BD} = \frac{\frac{3}{2}BC}{\frac{1}{2}BC} = 3$$

.

გამოვიყენე: ჩახაზული კუთხე, მართკუთხა სამკუთხედის მეტრიკული თანაფარდობები

პასუხი: დ) 3 ✅

ამოხსნა

რადგან ვექტორები ურთიერთპარალელურია, ისინი კოლინეარულია, ანუ $\vec{b} = k\vec{a}$ გარკვეული k ნამდვილი რიცხვისთვის.

შესაბამისად, $\vec{b}$-ს კოორდინატებია $(-k; 3k)$.

მოცემულია სკალარული ნამრავლი: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 24$

სკალარული ნამრავლის კოორდინატული ფორმულით:

$$(-1)(-k) + (3)(3k) = 24$$

$$k + 9k = 24 \Longrightarrow 10k = 24 \Longrightarrow k = 2.4$$

კოეფიციენტი k გვიჩვენებს, თუ რამდენჯერ მეტია $\vec{b}$ ვექტორის სიგრძე $\vec{a}$ ვექტორის სიგრძეზე. რადგან k დადებითია, ვექტორები თანამიმართულია და $|\vec{b}| = |\vec{a}| = k = 2.4$.

პასუხი: ბ) 2.4-ჯერ

ამოხსნა

$A_1B_1C_1D_1$ კვადრატია. $C_1D_1 \perp A_1D_1$.

ასევე C_1D_1 მართობია მთელი AA_1D_1D წახნაგის (რადგან კუბია).

M წერტილი მდებარეობს AA_1-ზე, რომელიც AA_1D_1D სიბრტყეშია. მაშასადამე, D_1M მონაკვეთიც ამ სიბრტყეშია.

რადგან C_1D_1 მართობია სიბრტყის, ის მართობია სიბრტყეში მდებარე ნებისმიერი წრფის, მათ შორის D_1M-ის.

კუთხე არის $90°$.

პასუხი: ა) $90°$

ამოხსნა

წრფივ განტოლებას $ax + b = 0$ გადავწეროთ როგორც $ax = -b$. ამ განტოლებას არ აქვს ამონახსნი ერთადერთ შემთხვევაში: როდესაც x-ის კოეფიციენტი ნულის ტოლია ($a = 0$), ხოლო მარჯვენა მხარე ნულისგან განსხვავებულია ($-b \neq 0$, ანუ $b \neq 0$). ამ შემთხვევაში ვიღებთ $0 = -b$ (სადაც $b \neq 0$), რაც მცდარი ტოლობაა და შესაბამისად, ამონახსნი არ იარსებებს.

პასუხი: გ) $a = 0, b \neq 0$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია $\tan\alpha = \frac{1}{5}$ და $90^\circ < \alpha < 270^\circ$.

რადგან ტანგენსი დადებითია, α აუცილებლად მესამე მეოთხედში მდებარეობს ($180^\circ < \alpha < 270^\circ$). მესამე მეოთხედში კოსინუსი უარყოფითია.

გამოვიყენოთ ტრიგონომეტრიული იგივეობა:

$$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

ჩავსვათ ტანგენსის მნიშვნელობა:

$$1 + \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \frac{1}{25} = \frac{26}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

აქედან გამომდინარეობს:

$$\cos^2\alpha = \frac{25}{26}$$

რადგან კოსინუსი უარყოფითია, ფესვის ამოღებისას ვიღებთ მინუს ნიშნიან მნიშვნელობას:

$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{25}{26}} = -\frac{5}{\sqrt{26}}$$

პასუხი: ა) $-\frac{5}{\sqrt{26}}$

ამოხსნა

ჰომოთეტია ცენტრით კოორდინატთა სათავეში წერტილს $(x; y)$ გადაიყვანს წერტილში $(kx; ky)$, სადაც k ჰომოთეტიის კოეფიციენტია. მოცემულია, რომ $A(1; -4)$ გადადის $B(3; -12)$-ში. ვიპოვოთ k:

$$1 \cdot k = 3 \Rightarrow k = 3$$

. (შეიძლება მეორე კოორდინატითაც შემოწმება: $-4 \cdot 3 = -12$).

AB მონაკვეთის შუაწერტილის (აღვნიშნოთ M) კოორდინატებია:

$$x_M = \frac{1+3}{2} = 2$$

$$y_M = \frac{-4-12}{2} = -8$$

. მივიღეთ $M(2; -8)$.

ეს ჰომოთეტია ($k = 3$) M წერტილს გადაიყვანს წერტილში:

$$M'(2 \cdot 3; -8 \cdot 3) = M'(6; -24)$$

.

გამოვიყენე: ჰომოთეტია, მონაკვეთის შუაწერტილის კოორდინატები

პასუხი: ბ) $(6; -24)$ ✅

ამოხსნა

მოცემულია ფუნქცია $f(x) = 2^{x-x^2}$

ხარისხის მაჩვენებელში მოცემულია კვადრატული ფუნქცია $-x^2 + x$. კვადრატული ფუნქციის მინიმუმის/მაქსიმუმის საპოვნელად გამოვიყენოთ წვეროს აბსცისის ფორმულა:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2(-1)} = \frac{1}{2}$$

ეს წერტილი ეკუთვნის $[0; 2]$ შუალედს.

ხარისხის მაქსიმალური მნიშვნელობა იქნება:

$$-\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

ფუნქციის უდიდესი მნიშვნელობა იქნება:

$$2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$$

პასუხი: დ) $\sqrt[4]{2}$

ამოხსნა

სამკუთხედი AOB ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle ABO = \alpha$. სამკუთხედი COB ტოლფერდაა, ამიტომ $\angle CBO = \beta$. მთლიანი კუთხე $\angle ABC = \alpha + \beta$.

გამოვიყენოთ სინუსების თეორემის ზოგადი ფორმულა: $\frac{a}{\sin} A = 2R$. ჩვენს შემთხვევაში გვერდი არის AC, ხოლო მისი მოპირდაპირე კუთხეა $\angle B = \alpha + \beta$.

$$AC = 2R\sin(\angle ABC) = 2R\sin(\alpha + \beta)$$

პასუხი: დ) $2R\sin(\alpha + \beta)$